O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo’lyozma huquqida

UDK: 511.331

ABDURAIMOV YO’LCHI NORBO’TA O’G’LI

RIMANNING DZETA FUNKSIYASI VA DIRIXLE L-FUNKSIYASINING NOLLARI MAVJUD BO‘LMAGAN SOHA HAQIDA

70540101- Matematika (yo’nalishlar bo’yicha) mutaxassisligi bo’yicha Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar: f.-m.f.d. prof. I.Allakov

Termiz- 2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2021-yil ________________________ sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti “ Algebra va geometriya” kafedrasida bajarilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilan Termiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Barkamol avlod ko‘chasi 43-uy.)

Ilmiy rahbar:	___________	f.-m.f.d. prof. I.Allakov
Kafedra mudiri:	___________	dots. S. Choriyeva
Magistratura bo‘limi boshlig‘i:	___________	PhD. A.B. Narbayev

Magistrlik dissertatsiyasining qisqacha annotatsiyalari

(o‘zbek va ingliz tillarida) numunasi

70540101 – Matematika (yo’nalishlar bo’yicha) mutaxassisligi magistranti Abduraimov Yo’lchi Norbo'ta o’g’lining

“Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixle L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida ” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTASIYASI

Tayanch so‘zlar: Rimaning dzeta funksiyasi, Dirixle L-funksiyasi, Dirixle xarakteri, kompleks o’zgaruvchili funksiya, Eylerning gamma funksiyasi,kritik yo’lak,funksional tenglama.

Tadqiqot obektlari: Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo’lmagan soha.

Ishning maqsadi: Rimanning dzeta funksiyasi va Direxlening L-funksiyasi nollari mavjud bo’lmagan sohani topish va oraliqlarni aniqlash shu oraliqlarda funksiyalarni tekshirish.

Tadqiqot metodlari: Dissertatsiya ishida ilmiy tahlil va sintez, taqqoslash, induksiya va deduksiya, tizimli tahlil, grafik ifodalash, analitik taxlil, pedagogik kuzatish, pedagogik tajriba, pedagogik loyihalash, sistemalashtirish hamda matematik-statistik metodlardan foydalanildi.

Olingan natijalar va ularning yangiligi: Rimanning dzeta funksiyasi va Direxlening L-funksiyasi nollari mavjud bo’lmagan soha topildi va oraliqlari aniqlandi shu oraliqlarda funksiyalar tekshirildi va natijalar olindi.Topilgan oraliqda Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixlening L-funksiyasi nollari topildi va funksiyalarga qo’yib tekshirildi.

Ishning amaliy ahamiyati: Olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo’lib, undan sonlar nazariyasining additiv masalalari fanlarini o’rganish davomida bitiruvchi kurs talabalari va magistrantlar uchun maxsus kurslar o’qitishda hamda ushbu sohada ilmiy tadqiqot jarayonida foydalanish mumkin

Qo‘llanilish sohasi: Magistrlik dissertatsiyasida olingan natijalardan Oliy ta'lim muassasalari talaba va magistrlariga maxsus kurslar o‘qishda foydalanish mumki

ANNOTATION

” About the field where there are not zeros of Dzeta function of Riman and Dirixle L-function’’ master’s dissertation on the topic

Key words: Dzeta function of Riman, Dirixle L-function, Dirixle character, complex variable function, Euler's gamma function, critical lane, functional equation.

Research objects: About the field where there are not zeros of Dzeta function of Riman and Dirixle L-function.

The purpose of the work: Find the field where there are not zeros of Dzeta function of Riman and Dirixle L-function and defining intervals and checking functions on these intervals

Research methods: scientific analysis and synthesis, comparison, induction and deduction, systematic analysis, graphic representation, analytical analysis, pedagogical experience, pedagogical planning, systematization and mathematical-statistical method are used.

Derived source and source innovation: Found the field where there are not zeros of Dzeta function of Riman and Dirixle L-function and intervals were determined and functions were checked in these intervals and results obtained. In the interval found zeros of Dzeta function of Riman and Dirixle L-function and checked by putting it into functions.

Practical importance of work: The obtained results are of theoretical importance and can be used in the teaching of special courses for graduate students and undergraduates during the study of the sciences of additive problems of number theory, as well as in the process of scientific research in this field.

Field of application: The results obtained in the dissertation can be used in special courses for master students at the Universities.

MUNDARIJA

KIRISH

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. O’zbekiston Resublikasi mustaqillika erishgandan so’ng ko’pgina sohalar bilan bir qatorda ta’lim sohasida ham katta o’zgarishlar yuz berdi. Bunda asosan rivojlangan davlatlarning ta’lim tizimlari namuna sifatida olinib, bizning xalqimiz imkoniyatlari va yutuqlariga mos holda yangi ta’lim tizimi ishlab chiqildi. Hozirgi kunda ilm – fanga prezidentimiz tomonidan alohida e’tibor berilmoqda [1-4]. Jamiyat ijtimoiy sohasining eng muhim tarkibiy qismlaridan biri ta’lim tarbiya sohasi bo‘lib, uning rivoji siyosiy –huquqiy,iqtisodiy va ma’naviy sohalarga bevosita ta’sir etadi hamda ijtimoiy sohalar me’yoriy mohiyatini, kamolot darajasini belgilab beradi.

Ta’lim va fan sohasini rivojlantirish davlat siyosati ma’no mazmunidan va uning dolzarbligidan kelib chiqib,uni quyidagicha izohlash mumkin:

Birinchidan, yangi ta’lim tizimi, barkamol avlod kadrlarini tayyorlashdagi o‘zgarishlar va yangicha yondashuvlar zamonaviy kasb sohalarining paydo bo‘lgani hamda uning mamlakatimiz sharoiti bilan bog‘liqligidir;

Ikkinchidan,ta’lim tushunchasi ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyot natijasida muayyan davrdan boshlab,inson faoliyatining alohida mustaqil sohasiga aylanib, jamiyatning ijtimoiy sohasini keying bosqichga uzatadi;

Uchinchidan, ta’lim inson shaxsining intelektual-ma’naviy qirralarini shakllantirish, uning jamiyat ishlab chiqarishi va ijtimoiy, siyosiy, madaniy,ma’rifiy hayotida faol va muvaffaqiyatli ishtirokini ta’minlashga qaratilgan harakterlar yig‘indisi bo‘lib, ma’rifiy hamda bilim berishni anglatadi;

To‘rtinchidan, fan jamiyatning ijtimoiy institutlaridan biri bo‘lib, tabiat va jamiyat hayotini aks ettiruvchi ijtimoiy ong shakli. U katta ilmiy salohiyatini, ijodiy kuch-quvvatini birlashtirib, ma’naviy barkamol insonni tarbiyalashga,mamlakatda qudratli ilmiy salohiyatni yaratishga xizmat qiladi.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi mavzusi ana shu talab va vazifalardan kelib chiqib tanlandi. Georg Fridrix Berngard Riman (1826 – 1866) nemis matematigi o‘zining 1860 – yilda yozgan mashhur memuarida tub sonlar taqsimotini chuqur o‘rganish uchun $\zeta(s)$ funksiyani kompleks o‘zgaruvchi $s = \sigma + it$ ning funksiyasi sifatida o‘rganish zarur ekanligini uqtirib o‘tgan edi. Ma’lumki [9-10], Rimanning $\zeta(s)$ $-$dzeta funksiyasi $Res = \sigma > 1$ bo‘lganda

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Uning haqiqiy o‘qdagi $s = -2, -4, -6, ...$ nollariga trivial nollari deyiladi. Qolgan barcha nollari esa trivial bo‘lmagan nollari deb yuritiladi.

Agar $\sigma > 1$ bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $\sigma < 0$ bo‘lsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial bo‘lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya’ni $0 \leq \sigma \leq 1$ ga kritik yo‘lak (polosa) deb ataladi. Bulardan tashqari Riman $\zeta(s)$ to’g’risida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi degan gipotezasi hozirgacha to‘la isbotlangan emas.

Keyinchalik Lejan Dirixle arifmetik progressiyada tub sonlar taqsimoti masalasini o‘rganish uchun Dirixle funksiyasi deb ataluvchi, $Res > 1$ bo‘lganda

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaning chuqurroq o‘rganish kerakligini ta’kidlaydi. Berilgan butun sonlar ketma-ketligidan $kn + l,\ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ arifmetik progressiyaga tegishli qismiy ketma-ketlikni ajratish imkonini beruvchi multiplikativ funksiyaning mavjud ekanligi bu yerda ham tub sonlarning natural sonlar qatorida taqsimlanishini o‘rganishda foydalanilgan usullardan foydalanish imkonini beradi. Bunday xossaga ega bo‘lgan funksiya L.Dirixle tomonidan kiritilgan va xarakterlar deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasidir. Bundan keyin biz xarakterlar deganda Dirixle xarakterlarini tushunamiz. $|\chi(n)| \leq 1$ bo‘lgani uchun $L(s, \chi)$ ning ta’rifidan uning $Res > 1$ yarim tekislikda analitik ekanligi kelib chiqadi Bu yerda ham $L(s, \chi)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollarining $0 < \sigma < 1$ yo‘lakda yotishi isbotlangan va bu funksiyaning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi, degan gipotezasi mavjud. Bu gipoteza umumlashgan Riman gipotezasi deyiladi.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ va $L(s,\chi)$ funksiyalarning nollari to‘g‘risida turli olimlar tomonidan ko‘plab natijalar olingan [11] va bu natijalar yuqorida keltirilgan ikki gipotezaning ham o‘rinli ekanligiga ishora qilsada bu gipotezalar o‘z isbotini topgan emas.

Endilikda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta_1 = \frac{1}{2} + i14{,}134725$ ekanligi va kompyuter yordamida ordinatasi $0 < t < 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan.

Qaralayotgan funksiyaning nollari haqidadagi ma’lumotlar sonlar nazariyasining turli additiv masalalarini yechishda keng qo‘llanilmoqda. Bunday masalalar sirasiga Varing, Eyler – Goldbax, Xardi – Litlvud, Xua – Lo–Ken problemasi va boshqalarni kiritishimiz mumkin. Bu problemalar ham hozirgacha to‘la hal etilgan emas. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar algebra va sonlar nazariyasida dolzarb hisoblanadi.

Tadqiqotning ob’yekti va predmeti. Ushbu tadqiqot ishining ob’yekti, algebraik metodlar, Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasi va sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalari, ularni yechish metodlari, olingan baholar tahlili hisoblanadi. Tadqiqotning predmeti bo’lib, sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarini , Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasi orqali tadbiqi,olingan baholar va bunda olingan natijalar tahlili.

Ishning maqsadi va vazifalari. Magistrlik dissertatsiyasining asosiy maqsadi $\zeta(s)$ va $L(s,\chi)$ funksiyalarining nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun mavjud baholarni aniqlashtirishdan iboratdir.

Bu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalarni amalga oshirish kerak:

- $\zeta(s)$va $L(s,\chi)$ funksiyalarining nollarining kompleks tekislikda joylashuvi haqidagi ma’lumotlarni o‘rganish;
- Sonlar nazariyasining additiv masalalarini va ularning $\zeta(s)$va $L(s,\chi)$ funksiyalarining nollari bilan bog‘liqligining mohiyatini tushunib olib;
- Effektiv baholardagi o‘zgarmaslarning boshqa parametrlar bilan bog‘liklik ifodasini keltirib chiqarish;

- Sonli baholar olish.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o'zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ bo'lganda

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyada tub sonlar soninnig cheksiz ko'p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko'plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi [5],[35],[32].

Ushbu ishda Dirixle $L-$funksiyasi $L(s,\chi)$ning no'llari haqidagi keyingi ma'lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14{,}135$ bo'lganda $\sigma > 1 - \frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning no'llari yo'q ekanligi ko'rsatilgan.

Olihgan natija [29] dagi shu boradagi natijaning son qiymati jihatdan yaxshilanganidir.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Tadqiqot ishida quyidagi asosiy masalalar qaraldi:

- Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasining asosiy xossalarini chuqur o'rganish
- Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasi kompleks nollari mavjud bo'lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho
- Dirixlening L-funksiyasi haqiqiy nollarining chegarasi
- Sonlar nazariyasining bir qancha yechimini topgan va hali to'la yechimini topmagan masalalarini o'rganish oldindan olingan natija va baholarni o'rganib tahlil qilish.

Tadqiqotning ishlab chiqilgan ilmiy takliflari va amaliy tavsiyalari natijasida sonlar nazariyasining ko'plab additiv masalalarini Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasi orqali yechish mumkin bo'ladi.

Tadqiqot mavzusi bo’yicha adabiyotlar sharxi. Magistlik tadqiqot ishini oʻrganish davomida quyidagi adabiyotlardan foydalanildi. Allakov I. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta’lim» 2012, 200b. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел.-М.:Наука,1975.–182 с. Девенпорт Г. Мультипликативная теории чисел.-М: “Наука” 1971г. Чудаков Н.Г. Введение в теорию функций Дирихле.-М: Гостехиздат.1947г. Pintz J., Elementary methods in the of L-functions v. The theorems of Landau and Page, Acta Arith., 32 (2), 1977, 163-171. Allakov I.,Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. TerDu. “Algebra va analizning dolzarb masalalari” xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. Termiz-2023.11-12-betlar. Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. BuxDu. “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muamollari” xalqaro ilmiy-amaliy anjumani. Buxoro-2022. 83-84 betlar.

Tadqiqotda qoʻllanilgan metodikaning tavsifi. Dissertatsiya ishida ilmiy abstraksiya, tahlil va sintez, monografik kuzatish, taqqoslash, induksiya va deduksiya, statik guruhlash, tizimli tahlil, usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotda olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati: Dissertatsiya ishi ilmiy – nazariy xarakterda bo‘lib, matematikaning turli additiv masalalarini yechishda, xususan, qo‘shiluvchilar soni chegaralangan bo‘lgandagi Varing muammosini, Goldbax muammosini, Xarde – Litlvud muammosini, Xua – Lo – Ken muammosini hamda ularning umumlashmalarini yechishda foydalanish mumkin.

Magistrlik dissertatsiya tuzilmasining tavsifi: Dissertatsiya ishi kirish qismi, uchta bob, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Kirish qismida mavzuning o‘rganilganlik darajasi va dolzarbligi, ishning maqsadi va vazifalari, ishning sinovdan o‘tishi, masala tarixi, adabiyotlar tahlili qisqacha berilgan, dissertatsiya ishida qilingan ishlar to‘g‘risida qisqacha ma’lumotlar berib o‘tilgan va asosiy olingan natijalar bayoni keltirilgan.

Birinchi bob Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening *L*– funksiyasining asosiy xossalari deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Rimanning dzeta funksiyasining asosiy xossalari, Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari, Dirixlening L-funksiyasining asosiy xossalari isboti batafsil keltirilgan. Bu mavzular yordamchi xarakterga ega, undagi ta’rif va teoremalardan keying bobda foydalaniladi.

Ikkinchi bob Rimanning dzeta funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Rimanning dzeta funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar va ularni isbotlash usuli natijaning talqini berilgan, Zigel teoremasi va uning isboti keltirilgan, Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho olingan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi Dirixlening *L* - funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida haqida deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Dirixle L-funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar, L-funksiyaning haqiqiy nollarining chegarasi uchun yangi sonli baho isbotlangan, Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasida qatnashuvchi o‘zgarmasning son qiymati aniqlashtirilgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 83 betdan iborat.

I-BOB. RIMANNING DZETA FUNKSIYASI VA DIRIXLENING L –FUNKSIYASI HAQIDAGI UMUMIY MA'LUMOTLAR

1.1-§. Rimanning dzeta funksiyasining asosiy xossalari.

1.1.1. Rimanning dzeta funksiyasining ta'rifi va asosiy xossalari. Riman (Georg Fridrix Berngard Riman (1826-1866)-nemis matematigi) o'zining 1860 yilda yozgan mashhur memuarida (bu memuar Rimanning sonlar nazariyasi sohasidagi yagona ishi hisoblanadi) tub sonlar taqsimotini chuqur o'rganish uchun $\zeta(\mathrm{s})$ funksiyani kompleks o'zgaruvchi $\mathrm{s}=\sigma+\mathrm{it}$ ning funksiyasi sifatida o'rganish zarur ekanligini uqtirib o'tgan edi. Ma'lumki [9-10], Rimanning $\zeta(\mathrm{s})$-dzeta funksiyasi $\mathrm{Res}=\sigma>1$ bo'lganda

$$\zeta(\mathrm{s})=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}} \qquad (1.1.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Uning haqiqiy o'qdagi $s=-2,-4,-6,\ldots$ nollariga trivial nollari deyiladi. Qolgan barcha nollari esa trivial bo'lmagan nollari deb yuritiladi.

Rimanning isbotlagan ikki asosiy natijasi quyidagidan iborat:

a) $\zeta(s)$ funksiyani butun kompleks tekislikga analitik davom ettirish mumkin;

b) $\zeta(s)$ ushbu funksional tenglama

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)\right)\zeta(1-s)$$

ni qanoatlantiradi. Bu yerda $\Gamma(s)$ Eylerning gamma funksiyasi bo'lib $Res>0$, bo'lganda

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-u}\,u^{s-1}du$$

Tenglik bilan aniqlanadi.

Bu funksional tenglama $\zeta(s)$ ning $\sigma>1$ dagi xossalaridan $\sigma<0$ dagi xossalarini keltirib chiqarish imkoniyatini beradi.

Bu ta'rifdan $\zeta(s)$ning $Res=\sigma>1$ yarim tekislikda analitik ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham (1.1.1) dan

$$|\zeta(\mathrm{s})|=\left|\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}}\right|\leq\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\sigma}} \qquad (1.1.2)$$

ekanligi kelib chiqadi. (1.1.2) ning o‘ng tomonidagi qator $\sigma > 1$ da yaqinlashuvchi, shuning uchun ham (1.1.1)-qator $Res = \sigma > 1$da absolyut yaqinlashuvchi, $\operatorname{Re} s = \sigma > 1 + \varepsilon$ da esa tekis yaqinlashuvchi va shuning uchun ham $\zeta(s)$ tekis yaqinlashuvchi qatorning yig‘indisi sifatida analitik funksiyani ifodalaydi. Bizning keyingi tekshirishlarimizda quyidagi lemma kerak bo‘ladi.

1.1.1-lemma. (Eyler ayniyati). $Res > 1$ bo‘lganda ushbu

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

ayniyat o‘rinli.

Isboti. Natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratishning yagonaligi va $Res > 1$ da qator

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

ning absolyut yaqinlashuvchiligidan $X \geq 2 -$ butun soni uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \leq X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{X} \frac{1}{n^s} + R(s, X), \quad (1.1.3)$$

bu yerda

$$|R(s,X)| \leq \sum_{n>X} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n>X} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_X^\infty \frac{d\xi}{\xi^\sigma} = \frac{1}{1-\sigma} \xi^{-\sigma+1}\Big|_X^\infty = -\frac{X^{-\sigma+1}}{1-\sigma} = \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma - 1}.$$

(1.1.3) da $X \to \infty$ da limitga o‘tsak

$$\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \lim_{X \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{X} \frac{1}{n^s} + R(s, X)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

Bu lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $Res > 1$ bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ bo‘ladi.

Haqiqatan ham, agar $Res = \sigma > 1$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \left|\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right| \le \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \le 1 + \int_1^\infty \xi^{-\sigma}\, d\xi =$$

$$= 1 + \frac{\xi^{-\sigma+1}}{1-\sigma}\bigg|_1^\infty = 1 + \frac{1}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

Bundan

$$|\zeta(s)| > \frac{\sigma - 1}{\sigma}$$

va $\sigma > 1$ da $|\zeta(s)| > 0$ kelib chiqadi.

Endi $\zeta(s)$funksiyani $Res > 0$ yarim tekislikka davom ettiramiz. Buning uchun bizga quyidagi Eyler-Makloren formulasi kerak bo‘ladi:

“agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmadagi uzluksiz, differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, ushbu tenglik o‘rinli

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + q(b)f(b) - q(a)f(a) - \int_a^b q(x)f'(x)dx, \qquad (1.1.4)$$

bunda $q(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\{x\} -$ esa x ning kasr qismini bildiradi.

1.1.2-lemma. Agar $Res > 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy N natural soni uchun

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} + s\int_N^\infty \frac{q(u)}{u^{s+1}} du$$

formula o‘rinli. Bunda $q(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$.

Isboti. $M > N$ natural sonini olib (1.1.4)-formulani qo‘llaymiz. U holda $q\left(N + \frac{1}{2}\right) = 0,\ q\left(M + \frac{1}{2}\right) = 0$ ekanliklarini e’tiborga olib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{N+\frac{1}{2}<x\le M+\frac{1}{2}} \frac{1}{n^s} = \int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{du}{u^s} + s\int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} \frac{q(u)}{u^{s+1}} du = \frac{1}{1-s}\left(M + \frac{1}{2}\right)^{1-s} -$$

$$\frac{1}{1-s}\left(N+\frac{1}{2}\right)^{1-s}-s\int_{N}^{N+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du+s\int_{N}^{N+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du+s\int_{N+\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du=$$

$$\frac{1}{1-s}\left(M+\frac{1}{2}\right)^{1-s}-\frac{1}{1-s}\left(N+\frac{1}{2}\right)^{1-s}-s\int_{N}^{N+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du+s\int_{N}^{M+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du=$$

$$\frac{1}{1-s}\left(M+\frac{1}{2}\right)^{1-s}+\frac{1}{s-1}N^{1-s}-\frac{1}{2}N^{-s}+s\int_{N}^{M+\frac{1}{2}}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du.$$

Bundan $Res>1$ va $M\to\infty$ da quyidagi kelib chiqadi:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{N^{-s}}{2}+s\int_{N}^{\infty}\frac{q(u)}{u^{s+1}}du.$$

Endi bizga analitik funksiya tushunchasi va analitik davom ettirish prinsipi kerak bo’ladi. Bular bizga analitik funksiyalar nazariyasi fanidan ma’lum bo’lsada qulaylik uchun keltirib o’tamiz, $f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+c_3(z-a)^3+\ldots$ darajali qator yig‘indisi ko‘rinishida yozilishi mumkin bo‘lgan funksiyaga analitik funksiya deyiladi. Bundan Analitik funksiyaning istalgan tartibdagi hosilasi ham mavjudligi kelib chiqadi.

Bu oxirgi integral $Res>0$ yarim tekislikdagi analitik funksiyani aniqlaydi. Analitik davom ettirish prinsipiga ko‘ra bu yerdan lemmaning tasdig‘i kelib chiqadi.

Natija. $\zeta(s)$funksiya $Res>0$ yarim tekislikdagi $s=1$ nuqtadan boshqa nuqtalarda analitik funksiya bo‘lib $s=1$ da bu funksiya chegirmasi 1 ga teng bo‘lgan oddiy qutbga ega.

1.1.2. Dzeta funksiyaning funksional tenglamasi. $\zeta(s)$funksiyaning funksional tenglamasini keltirib chiqarishda ushbu lemmadan foydalanamiz.

1.1.3-lemma. Agar $x>0,\ \alpha-$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib

$$\theta(x,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi x(n+\alpha)^2}$$

bo‘lsa, u holda

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \alpha\right) = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}$$

bo‘ladi.

Isboti. Umumiylikka qarshilikga kelmagan holda$0 \leq \alpha < 1$ deb hisoblashimiz mumkin. $N > 10,\ M = N^5$deb olib quyidagi integralni qaraymiz:

$$I(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u} e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} du\,.$$

Avvalo, quyidagi tengliklarni e’tiborga olib $I(n)$ning shakli o‘zgartiramiz.

$$\sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi i k u} = e^{2\pi i M u} + e^{2\pi i (M-1)u} + \dots + e^{2\pi i u} + 1 + e^{-2\pi i u} + \dots +$$

$$+ e^{-2\pi i u} + \dots + e^{-2\pi i M u} = \frac{e^{2\pi i (M+1)u} - e^{2\pi i M u}}{e^{2\pi i u} - 1} = \frac{e^{\pi i (2M+1)u} - e^{-\pi i (2M+1)u}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}} =$$

$$\frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}$$

va

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u} du = \sum_{k=-M}^{M} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i k u}\, du = 1 \qquad (1.1.5)$$

Bu yerda biz $k \neq 0$ bo‘lganda

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i k u}\, du = \left.\frac{e^{-2\pi i k u}}{-2\pi k}\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{-2\pi k}\left(e^{-\pi i u} - e^{\pi i k}\right) = \frac{\sin\pi k}{\pi k} = 0$$

ekanligidan, $k = 0$ da esa qaralayotgan integralning qiymati 1 ga teng ekanligidan, ya’ni

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i k u}\, du = \begin{cases} 0, \text{agar } k \neq 0\ bo‘lsa; \\ 1, \text{agar } k = 0\ bo‘lsa \end{cases}$$

dan foydalandik. (1.1.5) dan foydalanib $I(n)$integralni quyidagicha yoza olamiz:

$$I(n)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{sin\pi(2M+1)u}{sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha)^2}+e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2}-e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)du=$$

$$e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{sin\pi(2M+1)u}{sin\pi u}du$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{sin\pi(2M+1)u}{sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2}-e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)du$$

$$=e^{-\pi x(n+\alpha)^2}+R(n), \tag{1.1.6}$$

Bunda

$$R(n)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{sin\pi(2M+1)u}{sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2}-e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)du.$$

Endi $R(n)$ ni, $-N\le n\le N$ bo‘lganda, baholaymiz. Buning uchun

$$\Phi(u)=\frac{sin\pi(2M+1)u}{sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2}-e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)$$

deb belgilab olib, uni quyidagicha uchta integralga ajratamiz:

$$R(n)=I_1+I_2+I_3,$$

bu yerda

$$I_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{N^3}}\Phi(u)du,\quad I_2=\int_{-\frac{1}{N^3}}^{\frac{1}{N^3}}\Phi(u)du,\quad I_3=\int_{\frac{1}{N^3}}^{\frac{1}{2}}\Phi(u)du,$$

Avvalo, I_2 ni baholaymiz. Buning uchun $|u|\le\frac{1}{N^3}$ bo‘lganda $|\Phi(u)|$ni baholaymiz. Chekli ayirmalar formulasidan foydalansak

$$|\Phi(u)|\le s_1\frac{N|u|}{sin\pi u}\le s_2N,\qquad \text{ya'ni}\qquad \Phi(u)=O(N)$$

hosil bo‘ladi. Shuning uchun ham

$$|I_2| \leq s_2 \int_{-\frac{1}{N^3}}^{\frac{1}{N^3}} N du \leq s_2 N \cdot \frac{2}{N^3} = s_2 \cdot \frac{2}{N^2}$$

yoki

$$I_2 = O\left(\frac{2}{N^2}\right).$$

I_1va I_3 integrallar bir xilda baholanadi. Shuning uchun ham I_3ni qarash bilan chegaralanamiz. Uni bo‘laklab integrallab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$I_3 = \frac{-sos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)sin\pi u} \left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)\Big|_{\frac{1}{N^3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \int_{\frac{1}{N^3}}^{\frac{1}{2}} \frac{cos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)} Y(U) du,$$

bu yerda

$$Y(U) = \frac{d}{du}\left(\frac{e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}}{sin\pi u}\right)$$

$Y(U)$ ni qo‘polroq qilib $N^{-1} \leq u \leq 0{,}5$ bo‘lganda quyidagicha baholaymiz:

$$Y(U) = O\left(\frac{1}{u^2}\right) + O\left(\frac{N}{u}\right).$$

Shuning uchun ham $M = N^5$ bo‘lgani uchun

$$I_3 = O\left(\frac{N^3}{M}\right) + O\left(\frac{NlnN}{M}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$R(n) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Endi (6) ning ikkala tomonini n bo‘yicha $-N \leq n \leq N$ bo‘lganda yig‘sak

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + \left(\frac{1}{N}\right) =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi iku} \cdot e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2}\, du$$

$$= \sum_{k=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ik(u+n)} \cdot e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} du =$$

$$\sum_{k=-M}^{M} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-2\pi iku-\pi x(\alpha+u)^2}\, du = \sum_{k=-M}^{M} J(k)$$

hosil bo‘ladi. $J(k)$ ni qaraymiz.

$$J\,(k) = \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2} du = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k\alpha}\, J(k,x) + O\left(e^{-\pi xN}\right),$$

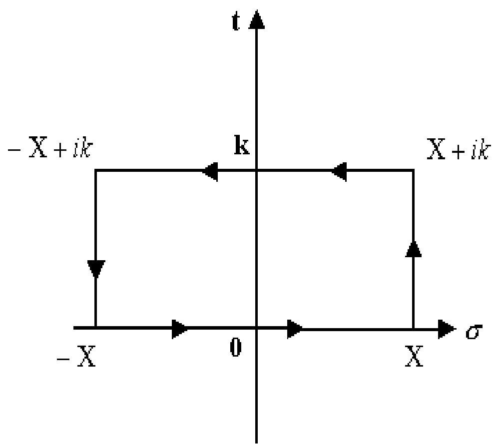
bunda

$$J(k,x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iku-\pi xu^2}\, du.$$

$J\left(k, \dfrac{1}{x}\right)$ ni hisoblaymiz.

$$J\left(k, \frac{1}{x}\right) = x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikux-\pi xu^2}\, du = x e^{-\pi xk^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u+ik)^2}\, du.$$

Faraz etaylik $X > 1$ bo‘lib Γ esa uchlari $-X, +X, -X + ik,\ X + ik$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning konturi bo‘lsin [6].



U holda

$$0=\int_{\Gamma} e^{-\pi x u^2}\,du=\int_{-X}^{X} e^{-\pi x u^2}\,du-$$

$$-\int_{-X}^{X} e^{-\pi x (u+ki)^2}\,du+\int_0^k e^{-\pi x (X+iu)^2}\,du-\int_0^k e^{-\pi x (-X+iu)^2}\,du. \qquad (1.1.7)$$

Bu yerdagi oxirgi 2 ta integral ham absolyut qiymati jihatidan

$$\int_0^k e^{-\pi x \mathrm{X}^2}\cdot e^{\pi x u^2}\,du \le k\, e^{\pi x k^2}\cdot e^{-\pi x \mathrm{X}^2}$$

dan katta emas. Shuning uchun ham (1.1.7) da $\mathrm{X}\to\infty$ da limitga o‘tib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x (u+ki)^2}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x u^2}\,du=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-\vartheta}\cdot \vartheta^{-1/2}\,d\vartheta=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

bu yerda $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ekanligidan foydalandik. Shunday qilib

$$J\left(k,\frac{1}{x}\right)=e^{-\pi x k^2}\sqrt{x} \qquad \text{va}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{\frac{-\pi (n+\alpha)^2}{x}}+O\left(\frac{1}{N}\right)=\sum_{k=-M}^{M} J(k)=$$

$$=\sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi i k\alpha}\cdot J\left(k,\frac{1}{x}\right)+O\left(e^{\frac{-\pi N}{x}}\right)=$$

$$\sqrt{x}\sum_{k=-M}^{M} e^{-\pi x k^2+2\pi i k\alpha}+O\left(e^{\frac{-\pi N}{x}}\right).$$

Bu tenglikda $N\to\infty$ da limitga o‘tib lemmadagi tenglikni hosil qilamiz.

1-natija. Agar $\operatorname{Re} s>0,\ \ \alpha-$haqiqiy son bo‘lib

$$\theta\,(s,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s (n+\alpha)^2}$$

bo‘lsa, u holda

$$\theta\left(\frac{1}{s}, \alpha\right) = \sqrt{s} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s - 2\pi i n \alpha}$$

bo‘ladi.

2-natija. Agar $x > 0$ bo‘lsa, u holda

$$\theta\left(\frac{1}{x}, 0\right) = \sqrt{x}\ \ \theta(x, 0)$$

bo‘ladi.

Endi biz $\zeta(s)$ ning funksional tenglamasini isbotlashimiz mumkin.

1.1.1-teorema. (Dzeta funksiyaning funksional tenglamasi). Quyidagi tenglik o‘rinli

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\ \zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\ \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)\ .$$

Isboti. $\Gamma\,(s)$ ning integral ko‘rinishidagi ifodasiga ko‘ra, $Res > 0$, bo‘lganda

$$\Gamma\,(s) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{s-1} du$$

bo‘ladi. Bundan ixtiyoriy n natural soni uchun

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{\frac{s}{2}-1} du = \left| \begin{matrix} u = \pi\, n^2 x \\ du = \pi\, n^2 dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} n^s\, e^{-\pi\, n^2 x} \pi^{\frac{s}{2}}\, x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

ya’ni

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi\, n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Demak,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\, n^2 x}\right) dx\,. \qquad (1.1.8)$$

Bu yerda yig‘ish va integrallash tartibini o‘zgartirish mumkin, chunki $x \geq 1$ da

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} = \mathrm{O}\left(e^{-\pi n^2 x}\right).$$

va $0 < x < 1$ bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Endi agar

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

deb belgilab olsak, 1.1.3-lemmaning 2-natijasiga ko‘ra

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{1/2} + x^{1/2}\,\omega(x)$$

bo‘ladi. Shuning uchun ham (1.1.8) o‘ng tomonidagi integralni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\,dx =$$

$$= \int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-1}\,\omega\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\right)dx =$$

$$\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\,dx\,. \tag{1.1.9}$$

$x \to \infty$ da $\omega(x) = 0\left(e^{-\pi x}\right)$ bo‘lgani uchun (1.1.9) dan (1.1.8) uning o‘ng tomonining $s \neq 0, 1$ bo‘lganda analitik funksiyani ifodalashi kelib chiqadi. Shuningdek u s ni $1-s$ bilan almashtirsak o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\,\zeta(1-s)\,.$$

Natija. Ushbu

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\,s\,(s-1)\,\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

funksiya butun funksiya bo‘lib

$$\xi(s)=\xi(1-s)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

1.2-§. Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari.

1.2.1. Tub son darajasi moduli bo‘yicha Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari. Berilgan butun sonlar ketma-ketligidan $kn+l,\ n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ arifmetik progressiyaga tegishli qismiy ketma-ketlikni ajratish imkonini beruvchi multiplikativ funksiyaning mavjud ekanligi bu yerda ham tub sonlarning natural sonlar qatorida taqsimlanishini o‘rganishda foydalanilgan usullardan foydalanish imkonini beradi. Bunday xossaga ega bo‘lgan funksiya Dirixle tomonidan kiritilgan va xarakterlar deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasidir.Bundan keyin biz xarakterlar deganda Dirixle xarakterlarini tushunamiz.

Biz avvalo, $k=p^{\alpha}$ moduli bo‘yicha xarakterlarni kiritib, ularning sodda xossalarini o‘rganamiz. Keyin esa aniqlangan xarakterlardan foydalanib ixtiyoriy k moduli bo‘yicha xarakterlarni kiritamiz.

Faraz etaylik, $p>2$ –tub son, $k=p^{\alpha},\ \alpha\geq 1$ – butun son bo‘lsin. Bizga ma’lumki, bunday k moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar mavjud. g ularning eng kichigi bo‘lsin. $\mathrm{ind}n$ bilan $(n,k)=1$ shartni qanoatlantiruvchi n sonining k moduli bo‘yicha g asosga ko‘ra indeksini belgilaymiz, ya’ni $\gamma=\gamma(n)=\mathrm{ind}n$ soni $g^{\gamma}\equiv n\ (\mathrm{mod}k)$ taqqoslamadan aniqlanadi.

1.2.1-ta’rif. $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son, $\alpha\geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha xarakter deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat

$$\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k;m)=\begin{cases}0, & \text{agar } (n,k)>1 \text{ bo‘lsa;}\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{\varphi(k)}}, & \text{agar } (n,k)=1 \text{ bo‘lsa}\end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi. Bunda m –butun son, $\varphi(k)-$ Eyler funksiyasi.

Ta’rifga ko‘ra $\chi(n)=\chi(n;k;m)$ xarakter m parametrga bog‘liq, m bo‘yicha davriy bo‘lib davri $\varphi(k)$ ga teng, ya’ni umuman aytganda k moduli bo‘yicha $\varphi(k)$

ta xarakter mavjud bo‘lib ularni $m = 0,1,2,\dots,\varphi(k)-1$ deb olib hosil qilish mumkin.

Endi, faraz etaylik $k = 2^\alpha$, $\alpha \geq 3$ – butun son bo‘lsin. Bu holda ma’lumki, har qanday toq n soni uchun k moduli bo‘yicha $\gamma_0 = \gamma_0(n)$, $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ indekslar sistemasi mavjud, ya’ni $n \equiv (-1)^{\gamma_0} \cdot 5^{\gamma_1} (modk)$ taqqoslamani qanoatlantiruvchi γ_0, γ_1 sonlari mavjud va ular mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ sonlariga karrali bo‘lgan sonlargacha aniqlik bilan aniqlanadi [7].

1.2.2-ta’rif. $k = 2^\alpha$ ($\alpha \geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha xarakter deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat quyidagi tengliklarning biri bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi:

$$\chi(n) = \chi(n;2) = \chi(n;2;0;0) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n,2) > 1 \text{ bo‘lsa;} \\ 1, & \text{agar } (n,2) = 1 \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

$$\chi(n) = \chi(n;4) = \chi(n;4;m_0;0) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n,4) > 1 \text{bo‘lsa;} \\ (-1)^{m_0\gamma_0}, & \text{agar } (n,4) = 1 \text{ bo‘lsa} \end{cases},$$

bunda $n \equiv (-1)^{\gamma_0} (\text{mod} 4)$, m_0– butun son;

$$\chi(n) = \chi(n;2^\alpha) = \chi(n;2^\alpha;m_0;m_1)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{agar } (n,2^\alpha) > 1 \text{ bo‘lsa;} \\ (-1)^{m_0\gamma_0} e^{2\pi i \frac{m_1\gamma_1}{2^{\alpha-2}}}, & \text{agar } (n,2^\alpha) = 1, \quad \alpha \geq 3 - \text{bo‘lsa;} \end{cases}$$

Bu yerda m_0, m_1 lar butun sonlar.

1.2.2-ta’rifdan $\chi(n;2^\alpha;m_0;m_1)$ funksiya m_0, m_1 parametrlarga bog‘liq va m_0, m_1 lar bo‘yicha davriy bo‘lib davri mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ ga teng, ya’ni umuman aytganda $k = 2^\alpha$ moduli bo‘yicha $\varphi(k) = \varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$ ta xarakter mavjud va bu xarakterlarni m_0 ni 0,1 ga m_1 ni esa $0,1,2,\dots,2^{\alpha-1}-1$ larga teng deb olib hosil qilish mumkin.

Berilgan sonning indeksi yoki indekslar sistemasi davriy bo‘lib davri funksiyaning moduliga teng, additiv, ya’ni ko‘paytmaning indeksi ko‘paytuvchilar indekslari yig‘indisiga teng bo‘lganligi uchun $\chi(n)$ xarakterlarning quyidagi xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi:

1°. k moduli bo‘yicha $\chi(n)$ xarakter davriy bo‘lib, davri k ga teng, ya’ni $\chi(n) = \chi(n+k)$.

2°. $\chi(n)$ multiplikativ funksiya, ya’ni $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$.

Shuningdek, tushunarliki $\chi(1) = 1$ ([7]).

1.2.1-lemma. $k = p^\alpha$ ($p > 2$ – tub son, $\alpha \geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha $\varphi(k)$ ta har xil xarakter mavjud.

Isboti. Ta’riflarga ko‘ra $k = p^\alpha$ ($p > 2$ – tub son, $\alpha \geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha $\varphi(k)$ ta xarakter mavjud. Lemmani isbotlash uchun aniqlangan $\varphi(k)$ xarakterlar orasida aynan tenglari yo‘q ekanligini ko‘rsatish yetarli. Avvalo ixtiyoriy a butun son uchun

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax}{m}} = \begin{cases} 0, \text{ agar } & a \not\equiv 0 (mod\, m) \text{ bo‘lsa;} \\ 1, \text{agar } & a \equiv 0 (mod\, m) \text{bo‘lsa,} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatan щam, agar $a \not\equiv 0 (mod\, m)$ bo‘lsa, u holda (2.1) ning chap tomonidan

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax}{m}} = \frac{1}{m}\left(1 + e^{2\pi i\frac{a}{m}} + e^{2\pi i\frac{2a}{m}} + \cdots + e^{2\pi i\frac{(m-1)a}{m}}\right) = \frac{1}{m}\cdot\frac{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot m} - 1}{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot} - 1} =$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{0}{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot} - 1} = 0.$$

Agarda $a \equiv 0 (mod\, m)$ bo‘lsa, u holda $a = mt$ va

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax}{m}} = \frac{1}{m}\cdot\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi itx} = \frac{1}{m}\cdot\sum_{x=0}^{m-1} 1 = \frac{1}{m}\cdot m = 1.$$

Agar *n* soni *k* moduli bo‘yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini qabul qilib o‘zgarsa, u holda $\gamma(n)$ yoki $\gamma_0(n)$, $\gamma_1(n)$ lar $\varphi(k)$ moduli yoki 2 vaa $2^{\alpha-2}$ modullari bo‘yicha ($k = 2, k = 4$ hollar trivial) chegirmalarning to‘la sistemasini qabul qiladi. Endi, agar $\chi(n; k, m_1)$ va $\chi(n; k, m_2)$ lar $k = p^\alpha$ ($p > 2$) moduli bo‘yicha har xil xarakterlar bo‘lsalar, ya’ni $m_1 \not\equiv m_2 \big(mod\, \varphi(k)\big)$ bo‘lsa, u holda ularning aynan teng ekanligidan (1.2.1) ga asosan

$$\varphi(k) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^{k} \frac{\chi(n;k,m_1)}{\chi(n;k,m_2)} = \sum_{x=0}^{\varphi(k)-1} e^{2\pi i\frac{(m_1-m_2)x}{\varphi(k)}} = 0$$

ni hosil qilamiz. $k = p^{\alpha} > 2$ bo‘lgani uchun $\varphi(k) > 0$,ya’ni oxirgi tenglik bajarilishi mumkin emas. Bu qarama-qarshilik $\varphi(k)$ ta xarakterlar orasida o‘zaro aynan tenglari yo‘q ekanligini ko‘rsatadi. $k = 2^{\alpha}$ bo‘lgan hol ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

1.2.3-ta’rif. n ning $(n,k) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\chi(n) = 1$, n ning $(n,k) > 1$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa $\chi(n) = 0$ bo‘lgan xarakterga k moduli bo‘yicha bosh xarakter deyiladi va $\chi_0(n)$ ko‘rinishida belgilanadi.

Yuqoridagi 1.2.1-1.2.3 ta’riflardan $k = 2$ da $\chi_0(n) = \chi(n)$; $k = 4$ bo‘lsa $\chi_0(n) = \chi(n;4{,}0)$; $k = 2^{\alpha}, \alpha \geq 3$ da $\chi_0(n) = \chi(n;k,0,0)$ va $k = p^{\alpha}$, $p > 2$ moduli bo‘yicha $\chi_0(n) = \chi(n;k,0)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi Dirixle xarakterlarining asosiy xossalaridan biri ortogonallik xossasini keltiramiz.

1.2.2-lemma. Ushbu

$$\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \sum_{\chi(mod k)} \chi(n) = \begin{cases} 0, \text{ agar } & n \not\equiv 1(mod\ k)\text{bo‘lsa;} \\ 1, \text{agar } & n \equiv 1(mod\ k)\text{bo‘lsa,} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\varphi(k)} \cdot \sum_{n=1}^{k} \chi(n) = \begin{cases} 0, \text{ agar } \chi(n) = \chi_0(n) \text{ bo‘lsa;} \\ 1, \text{agar } \chi(n) \neq \chi_0(n) \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

tengliklar o‘rinli. Bu yerda yig‘indi k moduli bo‘yicha barcha $\varphi(k)$ ta xarakterlar bo‘yicha olinadi.

Bu lemmaning isboti (1.2.1)- tenglik va 1.2.1-1.2.3 ta’riflardan kelib chiqadi [10]

1.2.2. Primitiv xarakterlar va ularning xossalari. Umuman olganda $\chi(n)$xarakterning eng kichik davri uning modulidan kichik bo‘lishi mumkin. Ko‘pchilik tekshirishlarda primitiv (boshlang‘ich) xarakterlar deb ataluvchi eng kichik davri uning moduliga teng xarakterlar muhim ahamiyatga ega. Endi ana shunday xarakterlarni qaraymiz.

1.2.4-ta'rif. Agar $(m,k)=1$ bo'lsa, u holda $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son) moduli bo'yicha bosh xarakterga bo'lmagan $\chi(n)=\chi(n;k,m)$ xarakterga primitiv xarakter deyiladi;

agarda $m_0=1, (m_1,2)=1$ bo'lsa, $k=2^{\alpha}$, ($\alpha\geq 3$ – butun son) moduli bo'yicha bosh xarakterdan farqli $\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k;m_0;m_1)$ xarakterga primitiv xarakter deyiladi;

4 moduli bo'yicha bosh xarakterdan farqli xarakterga primitiv xarakter deyiladi.

Qolgan barcha xarakterlarga k moduli bo'yicha hosilaviy xarakterlar deyiladi.

1.2.4-ta'rifdan $k=p^{\alpha}$ moduli bo'yicha har bir hosilaviy xarakterga unga aynan teng bo'lgan $k_1=p^{\beta}$ $(\beta<\alpha)$ moduli bo'yicha primitiv xarakter mos kelishi kelib chiqadi. Primitiv xarakterlar uchun ularning qiymatlari va Gauss yig'indisi

$$S=S(k,a,\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{2\pi i\frac{an}{m}}$$

ning qiymati orasidagi bog'lanishni ifodalovchi quyidagi formula o'rinli.

1.2.3-lemma. Agar $\chi(n)$ k moduli bo'yicha primitiv xarakter bo'lsa, u holda

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\ , \qquad (1.2.2)$$

bu yerda $\bar{\chi}$ bilan χ ga qo'shma xarakter belgilangan va

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}}\ , \qquad |\tau(\chi)|=\sqrt{k}\ . \qquad (1.2.3)$$

Isboti. $k=4$ bo'lganda (1.2.2) va (1.2.3) tengliklarni bevosita tekshirib ko'rish mumkin. $k\neq 4$ va $(n,k)=1$ bo'lsin. U holda m ni $mn\equiv 1(mod\ k)$ taqqoslamadan aniqlab quyidagiga ega bo'lamiz ([8]):

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)\chi(n)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(am)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\ .$$

Bu yerda biz $\bar{\chi}(n)$ ning multiplikativ ekanligidan, $\bar{\chi}(n)$ va $e^{2\pi i\frac{n}{k}}$ larningdavriyligi hamda agar a soni k moduli bo'yicha chegirmalarning to'la sistemasini qabul qilsa, u holda an ham shu sistemani qabul qilishidan foydalandik.

Endi $(n,k) > 1$ holni qarash qoldi. Bu holda (1.2.2) ning chap tomoni nolga teng. Agar $k = p > 2$ bo‘lsa, u holda $(n,k) = p$ va (1.2.2) ning o‘ng tomoni $\chi(n) \neq \chi_0(n)$ va

$$\sum_{n=1}^{k} \chi(n) = 0$$

bo‘lgani uchun nolga teng.Endi faraz etaylik $k = p^{\alpha},\ \alpha > 1,\ n = rp$ bo‘lsin. U holda

$$\sum_{a=1}^{p^{\alpha}} \bar{\chi}(a) e^{2\pi i \frac{arp}{p^{\alpha}}} = \sum_{v=1}^{p^{\alpha-1}} \sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}\,(up^{\alpha-1} + v) e^{2\pi i \frac{vr}{p^{\alpha-1}}}.$$

Bu yerdagi ichki yig‘indida

$$\sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}\,(up^{\alpha-1} + v) = 0$$

ekanligini ko‘rsatamiz. $(v,p) = 1$ va $\bar{\chi}$ davriy, multiplikativ bo‘lgani uchun

$$\sum_{u=0}^{p-1} \bar{\chi}\,(up^{\alpha-1} + 1) = 0$$

tenglikni ko‘rsatish yetarli. $p > 2$ bo‘lsin. U holda $g + pt$ soni p^{α} moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildiz bo‘ladi. Bu yerda g sonii p moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildiz, t esa

$$(g + pt\,)^{p-1} = 1 + pb, \qquad (b,p) = 1$$

shartni qanoatlantiradi. Agar γ soni $up^{\alpha-1} + 1$ sonining p^{α} moduli bo‘yicha indeksi bo‘lsa, u holda γ=$(p-1)\gamma_1$;

$$(g + pt\,)^{\gamma} = (1 + pb)^{\gamma_1} \equiv up^{\alpha-1} + 1 (mod p^{\alpha}).$$

Bu yerdan $\gamma_1 = ub_1 p^{\alpha-2},\ \ bb_1 \equiv 1 (mod p)$ kelib chiqadi.

Shunday qilib,

$$\bar{\chi}(up^{\alpha-1} + 1) = e^{-2\pi i \frac{m\, ind(up^{\alpha-1}+1)}{\varphi(p^{\alpha})}} = e^{-2\pi i \frac{mub_1}{p}},$$

bu yerda (mb_1, p)=1;

$$\sum_{u=0}^{p-1} e^{-2\pi i\frac{mub_1}{p}} = 0.$$

Endi faraz etaylik $p = 2,\ k = 2^{\alpha},\ \alpha \geq 3$ bo‘lsin. U holda $u2^{\alpha-1} + 1$ sonining indekslar sistemasi 0, $2^{\alpha-3}$ga teng, shuning uchun ham $(m_0 = 1,\ \ (m_1, 2) = 1)$

$$\sum_{u=0}^{1} \bar{\chi}\,(u2^{\alpha-1} + 1) = 1 + (-1)^0\, e^{-2\pi i\frac{m_1 2^{\alpha-3}}{2^{\alpha-1}}} = 0$$

bo‘ladi. Shunday qilib (1.2.2)-tenglik ixtiyoriy n uchun isbotlandi.

(1.2.1) va (1.2.2) lardan

$$\sum_{n=1}^{k} |\tau(\bar{\chi})|^2 |\chi(n)|^2 = \varphi(k)|\tau(\bar{\chi})|^2 = \sum_{n=1}^{k} \left| \sum_{a=1}^{k} \bar{\chi}(a) e^{2\pi i\frac{an}{k}} \right|^2 =$$

$$\sum_{a,b=1}^{k} \bar{\chi}(a)\, \chi(b) \sum_{n=1}^{k} e^{2\pi i\frac{(a-b)n}{k}} = k\varphi(k)$$

kelib chiqadi. Bundan esa (1.2.3) ga ega bo‘lamiz. Lemma to‘la isbot bo‘ldi.

1.2.3 . Ixtiyoriy modul bo‘yicha Dirixle xarakterlari. Faraz etaylik $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ berilgan k sonining kanonik yoyilmasi bo‘lsin.

1.2.5-ta’rif. k moduli bo‘yicha xarakter deb

$$\chi(n) = \chi(n; k) = \prod_{t=1}^{r} \chi\left(n; p_t^{\alpha_t}\right) \qquad (1.2.4)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi.

1.2.6-ta’rif. Agar (1.2.4) da barcha $t = 1,2,3, \ldots, r$ lar uchun

$$\chi\left(n; p_t^{\alpha_t}\right) = \chi_0\left(n; p_t^{\alpha_t}\right)$$

bo‘lsa, $\chi(n)$ ga k moduli bo‘yicha bosh xarakter deyiladi.

1.2.7-ta’rif. Agar (1.2.4) da barcha $t = 1,2,3, \ldots, r$ lar uchun $\chi\left(n; p_t^{\alpha_t}\right)$ lar primitiv bo‘lsa, u holda (1.2.4)-tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n; k)$ xarakterga primitiv xarakter aks holda hosilaviy xarakter deyiladi.

1.2.7-ta'rifdan k moduli bo'yicha har bir xarakterga n ning $(n,k)=1$ qiymatlarida unga aynan teng bo'lgan $\chi_1(n)(modk_1)$ primitiv xarakter mos keladi. Bunda k_1 soni k ning bo'luvchisi. Bunday holda $\chi(n)$xarakterni $\chi_1(n)$ primitiv xarakter bilan indutsirlangan xarakter deb yuritiladi. $\chi_1(n)$ ni esa $\chi(n)$ ga mos keluvchi primitiv xarakter deyiladi.

1.2.1 va 1.2.2-punktlarda $k=p^\alpha$ moduli bo'yicha xarakterlar uchun isbotlangan tasdiqlar moduli ixtiyoriy k natural son bo'lgan xarakterlar uchun ham o'rinli bo'lishi yuqorida keltirilgan ta'riflardan bevosita kelib chiqadi. Endi $\chi(modk)$ xarakterning asosiy xossalarini bayon qilishga o'tamiz.

1^0. $\chi(\text{modk})$ xarakter davriy funksiya bo'lib davri k ga teng va aynan nolga teng emas, ya'ni n ning $(n,k)>1$ qiymatlarida $\chi(n)=0$, n ning $(n,k)=1$ qiymatlarida esa $\chi(n)\neq 0$ bo'ladi.

2^0. Ixtiyoriy m va n natural sonlari uchun $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ bajariladi, ya'ni xarakter to'la multiplikativ funksiyadir.

3^0. k moduli bo'yicha $\varphi(k)$ ta har xil xarakterlar mavjud.

4^0. Quyidagi tenglikla o'rinli:

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{\chi(modk)}\chi(n)=\begin{cases}0, \text{ agar } & n\not\equiv 1(mod\ k)\text{bo'lsa;}\\ 1, \text{agar } & n\equiv 1(mod\ k)\text{bo'lsa,}\end{cases}$$

Bu yerda yig'indi k moduli bo'yicha barcha $\varphi(k)$ ta xarakterlar bo'yicha olinadi;

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\begin{cases}0, \text{ agar } \chi(n)=\ \chi_0(n) & \text{bo'lsa;}\\ 1, \text{agar } \ \chi(n)\neq\chi_0(n) & \text{bo'lsa.}\end{cases}$$

Bu xossaga xarakterlarning ortogonallik xossasi deyiladi.

5^0. $\chi(modk)$ primitiv xarakter bo'lsa, u holda xarakter

$$\tau(\bar{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\bar{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\ , \tag{1.2.5}$$

bu yerda

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}}\ ,\qquad |\tau(\bar{\chi})|=\sqrt{k}.$$

Bu xossalar 1.2.5-1.2.7 ta’riflardan foydalanib 1.2.1 va 1.2.2-punktlarda isbotlangan xossalarga o‘xshash isbotlanadi. Shuning uchun ham biz 5^0-xossani isbotlash bilan chegaralanamiz. $k = k_1 \cdot k_2$, $(k_1, k_2) = 1$ bo‘lsin.

U holda

$$\chi(m; k) = \chi(m; k_1)\chi(m; k_2)$$

deb yoza olamiz. Ma’lumki, agar m_1 soni k_1 moduli bo‘yicha, m_2 soni k_2 moduli bo‘yicha chegirmalarning to‘la sistemasini qabul qilsa, m_1k_2+m_2k_1 soni k_1k_2 moduli bo‘yicha chegirmalarning to‘la sitsemasini qabul qiladi. Shuning uchun ham

$$S = S(n,k) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) e^{2\pi i \frac{mn}{m}} =$$

$$\sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_1k_2 + m_2k_1;\ k_1)\bar{\chi}(m_1k_2 + m_2k_1;\ k_2) e^{2\pi i \frac{(m_1k_2+m_2k_1)n}{k_1k_2}} =$$

$$\sum_{m_1=1}^{k_1} \bar{\chi}(m_1k_2;\ k_1) e^{2\pi i \frac{m_1 n}{k_1}} \sum_{m_2=1}^{k_2} \bar{\chi}(m_2k_1;\ k_2) e^{2\pi i \frac{m_2 n}{k_2}} =$$

$$= \bar{\chi}(k_2;\ k_1)\bar{\chi}(k_1;\ k_2) S(n,k_1)\, S(n,k_2)\,.$$

Bundan tashqari $\tau(\chi) = S(1,k)$. Bulardan va 1.2.3-lemmadan (1.2.5) –tenglik kelib chiqadi.

k moduli bo‘yicha $\chi(n)$ xarakterni 1^0 va 2^0 –xossalar yordamida aniqlash ham mumkin [11].

1.2.4-lemma. Agar *Y(n)* argumentli butun sonlar *n* dan iborat davriy funksiya bo‘lib davri k teng, aynan nolga teng bo‘lmagan, multiplikativ, ya’ni $Y(mn) = Y(m)Y(n)$ bo‘lsa va *n* ning $(n,k) > 1$ qiymatlarida $Y(n) = 0$ bajarilsa, u holda biror *m* uchun *Y(n)*= $\chi(n; k, m)$ bo‘ladi.

Isboti. Faraz etaylik $(a, k) = 1$ bo‘lsin, u holda

$$T = \sum_{n=1}^{k} Y(n)\bar{\chi}(n) = \sum_{n=1}^{k} Y(an)\bar{\chi}(an) = Y(a)\bar{\chi}(a)T.$$

Shuning uchun ham biror χ uchun yoki *Y(a)*= $\chi(a)$ yoki barcha χ lar uchun $T = 0$. Lekin bu oxirgi holda ixtiyoriy $b, (b,k) = 1$ uchun

$$0 = \sum_{\chi(modk)} \chi(b) \sum_{n=1}^{k} Y(n)\bar{\chi}(n) = \sum_{n=1}^{k} Y(n) \sum_{\chi(modk)} \chi(b)\,\bar{\chi}(n) = Y(b)\varphi(k)$$

bajarilishi kerak. Bu esa shartga ziddir. Shuning bilan lemma isbot bo‘ldi.

Natija. k_1 va k_2 modullari bo‘yicha ikkita xarakterning ko‘paytmasi $k_1 k_2$ modul bo‘yicha xarakterbo‘ladi.

Xarakterlar kompleks qiymatli funksiyalardir. Xarakterlar orasida bosh xarakterdan farqli faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi xarakterlar muhim ahamiyatga ega. Bunday xarakterlarga haqiqiy xarakterlar deyiladi.

Misol uchun agar $r > 2$ tub son bo‘lsa,

$$\chi(n) = \chi\left(n; p, \frac{p-1}{2}\right) = \begin{cases} 0\,, & agar\ (n,p) > 1\ bo‘lsa; \\ (-1)^{\,indn}, & agar\ (n,p) = 1\ \ bo‘lsa \end{cases}$$

xarakter p moduli bo‘yicha haqiqiy xarakter bo‘ladi . Bu xarakterga Lejandr simvoli ham deyiladi va $\left(\frac{n}{p}\right)$ bilan belgilanadi. Hech bo‘lmasa birorta kompleks qiymat qabul qiladigan $\chi(n)$ xarakterga kompleks xarakter deyiladi. $\chi(n)$ xarakterga qo‘shma kompleks qiymat qabul qiluvchi xarakterga

$\chi(n)$ ning qo‘shmasi deyiladi va $\bar{\chi}(n)$bilan belgilanadi.

k modul bo‘yicha ixtiyoriy xarakter uchun

$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n)$$

tenglik o‘rinli. $\chi^r(n) = \chi_0(n)$ tenglikni qanoatlantiruvchi eng kichik *r* natural soniga $\chi(n)$ xarakterning darajasi deyiladi.

Shunday qilib bosh xarakter birinchi darajali, haqiqiy xarakterning darajasi ikki, kompleks xarakterlar esa uchunchi va undan yuqori darajaga ega. Xarakterlar multiplikativ funksiya bo‘lgani uchun

$\chi^2(-1) = \chi(-1)\chi(-1) = \chi\big((-1)\cdot(-1)\big) = \chi(1) = 1$, ya’ni $\chi(-1) = \pm 1$.

$\chi(-1) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi xarakterlarga juft, $\chi(-1) = -1$

shartni qanoatlantiruvchi xarakterlarga esa toq xarakterlar deyiladi.

1.3-§. Dirixle L-funksiyasining asosiy xossalari.

Arifmetik progressiyadagi tub sonlar taqsimotini tekshirishda natural sonlar qatorida tub sonlar taqsimotini o‘rganishda Riman tomonidan $\zeta(s)$ funksiya

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \qquad \sigma > 1$$

si kiritilganiga o‘xshash kompleks o‘zgaruvchili L-funksiya Dirixle tomonidan kiritilgan.

Faraz etaylik k natural son, χ esa k moduli bo’yicha biror xarakter bo‘lsin.

1.3.1.-ta’rif. Ushbu

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad Res > 1$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga Dirixle L- funksiyasi deyiladi.

$|\chi(n)| \leq 1$ bo‘lgani uchun $L(s, \chi)$ ning ta’rifidan uning $Res > 1$ yarim tekislikda analitik ekanligi kelib chiqadi.

Endi $L(s, \chi)$ ni $Res > 1$ da ko‘paytma shaklida ifodalaymiz.

1.3.1-lemma. $Res > 1$ bo‘lganda

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \qquad (1.3.1)$$

tenglik o‘rinli

Isboti. X >1 bo‘lganda

$$\Phi(s; \mathrm{X}) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

funksiyani qaraymiz. $Res > 1$ bo‘lgani uchun

$$\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots$$

va demak, $\chi(n)$ ning multiplikativligidan foydalansak

$$\Phi(s;, \mathrm{X}) = \prod_p \left\{1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right\} = \sum_{n \leq X} \frac{\chi(n)}{n^s} + R(s, X) \qquad (1.3.2)$$

deb yoza olamiz. Bu yerda $\sigma > 1$ va

$$|R(s,X)| \leq \sum_{n>X} \frac{1}{n^{\sigma}} < \int_{X}^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma}} = \frac{1}{\sigma-1} X^{1-\sigma}.$$

(1.3.2) da $X \to \infty$ da limitga o‘tib (3.1) tenglikni hosil qilamiz.

(1.3.1) dan

$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right| = \left|\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma}} = 1 + \frac{1}{\sigma-1}$$

yoki

$$|L(s,\chi)| > \frac{\sigma-1}{\sigma},$$

ya’ni $Res = \sigma > 1$ bo‘lsa, $L(s,\chi) \neq 0$ bo‘ladi.

Agarda $\chi(\mathrm{mod}k)$ bosh xarakter bo‘lsa, u holda $L(s,\chi)$ funksiya $\zeta\ (s)$ funksiyadan sodda ko‘paytuvchi bilan farq qiladi. Bu yerda quyidagi lemma o‘rinli:

1.3.2-lemma. Agar $\chi(n) = \chi_0(n)(\mathrm{mod}k)$ bo‘lsa, u holda

$$L(s,\chi_0) = \zeta\ (s) \prod_{p \backslash k}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)$$

bo‘ladi.

Isboti. (1.3.1) tenglikdan

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{s}}\right)^{-1} = \prod_{p \backslash k}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right) \cdot \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1} =$$

$$= \zeta\ (s) \prod_{p \backslash k}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right).$$

Bu yerda Eyler ayniyatiga ko‘ra

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1} = \zeta\ (s)$$

ekanligdan foydalandik.

Isbotlangan lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. $L(s,\chi_0)$ funksiya *s* kompleks tekislikdagi *s=1* nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda analitik, *s=1* nuqta qutb nuqtasi bo‘lib undagi qoldiq (chegirma)

$$\prod_{p\backslash k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

ga teng.

Agar $\chi(\mathrm{mod}k)$ hosilaviy xarakter, $\chi_1(\mathrm{mod}k_1)$ esa unga mos primitiv xarakter $(k_1\backslash k)$ bo‘lsa, u holda $L(s,\chi)$ funksiya $L(s,\chi_1)$ funksiyadan sodda ko‘paytuvchi bilan farq qiladi.

1.3.3-lemma. Agar $\chi_1(\mathrm{mod}k_1)-$ primitiv xarakter, $\chi(\mathrm{mod}k)$ u bilan indutsirlangan xarakter va $k\neq k_1$ bo‘lsa, u holda $Res>1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p\backslash k\\ p\nmid k_1}}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lemmaning isboti (1.3.1) tenglik va $\chi_1(\mathrm{mod}k_1)$ va $\chi(\mathrm{mod}k)$ xarakterlarning xossalaridan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $p\nmid k_1$ bo‘lganda $L(s,\chi_1)$ning (1.3.1) ko‘rinishidagi ko‘paytuvchilarga yoyilmasidagi ko‘paytuvchilar $L(s,\chi)$ ning yoyilmasigi mos ko‘paytuvchilar bilan bir xil bo‘ladi. Agarda $p\nmid k_1, p\backslash k$ bo‘lsa, $\chi_1(p)\neq 0,$ $\chi(p)=0$ bo‘ladi, ya’ni

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\backslash k\\ p\nmid k_1}}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

Bundan isbotlanish talab etilgan tenglik kelib chiqadi. $L(s,\chi)$ ni xarakterlar yig‘indisidan foydalanib $Res>0$ yarim tekislikka osonlik bilan davom ettirish mumkin.

1.3.4-lemma. Agar $\chi(n)\neq\chi_0(n)$ bo‘lsa , u holda $Res>0$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=s\int_1^{\infty}S(x)x^{-s-1}\,dx \qquad (1.3.3)$$

tenglik o‘rinli. Bu yerda

$$S(x)=\sum_{n\leq x}\chi(n).$$

Isboti. $N \geq 1$, $Res > 1$ bo‘lsin. Abel almashtirishi (1.4-лемма[5]) dan foydalanamiz.Unga ko‘ra “agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, differensiallanuvchi, $c_n -$ ixtiyoriy kompleks sonlar va

$$C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n$$

bo‘lsa u holda

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)dx + C(b)f(b)$$

tenglik o‘rinli” . Bundan foydalanib

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + s\int_1^N c(x)x^{-s-1}dx + \frac{c(N)}{N^s},$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $c(x) = S(x) - 1$.

Bu tenglikning ikkala tomonida $N \to \infty$ da limitga o‘tib, $Res > 1$ bo‘lganda (1.3.3) ni hosil qilamiz. Lekinda $|S(x)| \leq \varphi(k)$, shuning uchun ham(1.3.3) dagi integral $Res > 0$ bo‘lganda yaqinlashuvchi va shu sohada analitik funksiyani aniqlaydi. Shuni isbotlash kerak edi.

Natija. Agar $Res \geq \frac{1}{2}$, $\chi(n) \neq \chi_0(n)$ bo‘lsa, $|L(s,\chi)| \leq 2|s|\,\varphi(k)$ bo‘ladi.

Endi quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

1.3.5-lemma. Agar $Res > 1$ bo‘lsa,

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

tenglik o‘rinli.

Isboti. Agar $Res > 1$ bo‘lsa (1.3.1) ga asosan

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Buning ikkala tomonini logarifmlab keyin differensiallasak quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$lnL(s,\chi) = ln\prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= -\sum_p ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right) =$$

$$= \sum_p \left(\frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{2p^{2s}} + \cdots\right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}},$$

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} lnp^m = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

Endi $L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamani qaraymiz. Uni biz χ primitiv xarakter bo‘lgan hol uchun isbotlaymiz. Shuning bilan 1.3.3- lemmaga asosan χ ixtiyoriy xarakter bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiya s kompleks tekislikning barcha joyiga davom ettirilgan bo‘ladi.$L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamaning ko‘rinishi $\chi(n)$ xarakterning juft yoki toq ekanligiga, ya’ni $\chi(-1) = +1$, $\chi(-1) = -1$ bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. Avvalo quyidagi yordamchi tasdiqni isbotlaymiz. $\chi(modk)$ primitiv xarakter bo‘lsin. Juft χ xarakter uchun $\theta(x,\chi)$ funksiyani [7].

$$\theta(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}, \quad x > 0,$$

tenglik bilan, toq χ xarakter uchun esa $\theta_1(x,\chi)$ funksiyani

$$\theta_1(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}, \quad x > 0$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

1.3.6-lemma. Yuqoridagicha aniqlangan $\theta(x,\chi)$ va $\theta_1(x,\chi)$funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\tau(\bar{\chi})\theta(x,\chi) = \sqrt{\frac{k}{x}} \cdot \theta\left(\frac{1}{x},\bar{\chi}\right), \tag{1.3.4}$$

$$\tau(\bar{\chi})\theta_1(x,\chi) = i\sqrt{\frac{k}{x^3}} \cdot \theta_1\left(\frac{1}{x},\bar{\chi}\right), \tag{1.3.5}$$

Bu yerda $\bar{\chi}$ bilan χ ga qo‘shma xarakter belgilangan va

$$\tau(\chi) = \sum_{n=1}^{k} \chi(n) e^{\frac{2\pi i n}{k}}$$

- Gauss yig‘indisi.

Isboti. [9] da isbotlangan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(n+\alpha)^2\pi}{x}} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n\alpha} \qquad (1.3.6)$$

tenglikdan foydalanamiz. Bunda $x > 0$ va α-haqiqiy son.

Bundan va Gauss yig‘indisining aniqlanishiga ko‘ra

$$\tau(\bar{\chi})\theta(x,\chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k\pi\left(n+\frac{m}{k}\right)^2}{x}}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} = \sqrt{\frac{k}{x}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(m)\, e^{-\frac{\pi m^2}{kx}} = \sqrt{\frac{k}{x}}\ \theta\left(\frac{1}{x}, \bar{\chi}\right).$$

Shunday qilib (1.3.4) tenglik isbotlandi.

(1.3.5) tenglikni isbotlash uchun (1.3.6)- tenglikning ikkala tomonini hadlab differensiallaymiz va x nii $\frac{k}{x}$, α ni $\frac{m}{k}$ bilan almashtiramiz. ((1.3.6)- tenglikning ikkala tomonini hadlab differensiallash mumkin, chunki differensiallagandan keyin hosil bo‘lgan qatorlar tekis yaqinlashuvchi), u holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} = i \sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (kn+m) e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}}.$$

Bu yerdan

$$\tau(\bar{\chi})\theta_1(x,\chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi x}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}} =$$

$$= i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(kn+m)e^{-\frac{\pi(kn+m)^2}{kx}} = i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\overline{\chi}(n)\,e^{-\frac{\pi n^2}{kx}}$$

$$= i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\,\theta_1\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right).$$

Shunday qilib (1.3.5)- tenglik va demak, lemma to‘liq isbot bo‘ldi.Endi $L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamani ifodalovchi quyidagi teoremani isbotlaymiz.agar

1.3.1-teorema.

$$\delta=\begin{cases}0, agar\ \chi(-1)=1\ bo'lsa;\\ 1,\ agar\ \chi(-1)=-1\ bo'lsa;\end{cases}\quad \text{va}\quad \xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+\delta)/2}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi)$$

Bo’lsa u holda

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\,\xi(s,\chi)\,. \qquad (1.3.7)$$

Isboti. $\chi(-1)=+1$ deb faraz qilamiz. $\Gamma(s)$ ning integral ko‘rinishidagi ifodasiga asosan

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt. \qquad (1.3.8)$$

Bundan $Res>0$ bo‘lganda ixtiyoriy natural son n uchun

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}du=n^s\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}\pi^{\frac{s}{2}}\,x^{\frac{s}{2}-1}dx,$$

ya’ni

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,k^{\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,n^{-s}=\int_0^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $\chi(n)$ ga ko‘paytirib $Res>1$ bo‘lganda n bo‘yicha yig‘sak

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,k^{\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi)\ =\int_0^{\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}\right)dx$$

tenglik hosil bo‘ladi. $\chi(n)$– juft xarakter bo‘lgani uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, e^{-\frac{n^2\pi x}{k}} = \frac{1}{2}\theta(x,\chi).$$

Bundan foydalanib yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, k^{\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx.$$

O‘ng tomondagi integralni

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx = \frac{1}{2}\int_0^{1} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx$$

ko‘rinishida yozib olib, o‘ng tomondagi birinchi integralda *x* ni $\frac{1}{x}$

bilan almashtiramiz. U holda

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, k^{\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\theta\left(\frac{1}{x},\chi\right)dx$$

hosil bo‘ladi. Buning o‘ng tomonida (1.2.4) dan foydalansak

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\, k^{\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx + \frac{\sqrt{k}}{2\tau(\bar{\chi})}\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta(x,\bar{\chi})dx \quad (1.3.9)$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomoni *s* ixtiyoriy bo‘lganda analitik funksiyani ifodalaydi va shuning uchun ham $L(s,\chi)$ funksiyaning *s* kompleks tekislikning barcha joyiga analitik davomini beradi. $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \neq 0$ bo‘lgani uchun $L(s,\chi)$ barcha joyda regulyar funksiyadir. $\chi(-1) = +1$ bo‘lgani uchun *s* ni *1-s* ga va χ ni $\bar{\chi}$ ga almashtirsak (1.3.9) ning o‘ng tomoni $\frac{\sqrt{k}}{\tau(\bar{\chi})}$ ga ko‘paytiriladi. $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = k$ ekanligini e’tiborga olsak, bu yerdan *δ=0* bo‘lganda teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi.

$\chi(-1) = -1$ deb faraz qilamiz. Bu holda (1.3.8) dan

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi x}{k}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini $\chi(n)$ ga ko‘paytirib $Re s > 1$ bo‘lganda *n* bo‘yicha yig‘sak va (1.3.5) dan foydalansak

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\chi) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty n\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi x}{k}}\right)x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int_0^\infty \theta_1(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta_1(x,\chi)dx + \frac{i\sqrt{k}}{2\tau(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}}\theta_1(x,\overline{\chi})dx$$

ga ega bo‘lamiz. Bu oxirgi tenglik $L(s,\chi)$ funksiyaning butun s tekislikka analitik davomidir. $L(s,\chi)$ barcha joyda regulyar funksiyani ifodalaydi. $\chi(-1) = -1$ bo‘lgani uchun s ni *1-s* ga va χ ni $\overline{\chi}$ ga almashtirsak bu tenglikning o‘ng tomoni $i\sqrt{k}\tau(\chi)$ ga ko‘paytiriladi. Bunda $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} = -k$ ekanligini e’tiborga olsak, bu yerdan δ*=1* bo‘lganda teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi. Shunday qilib teorema to‘la isbot bo‘ldi.

Natija.$\xi(s,\chi)$ – butun funksiya; agar $\chi(-1) = +1$ bo‘lsa, u holda $Res \le 0$ bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari faqat $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ ning qutblaridan, ya’ni $s = 0,-2,-4,\ldots$ nuqtalardan iborat bo‘ladi; agarda $\chi(-1) = -1$ bo’lsa, u holda $Res \le 0$ bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari faqatgina $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ ning qutblaridan, ya’ni $s = 1,-3,-5,\ldots$ nuqtalardan iborat bo‘ladi.

I-bob uchun xulosa

1-bobda Rimanning $\zeta(s)$ funksiyasi, Dirixlening xarakteristik funksiyasi va Dirixlening L-funksiyasining asosiy xossalari va teoremalar atroflicha o‘rganilgan. Jumladan ular uchun funksional tenglamalar isbotlangan.

Rimanning isbotlagan ikki asosiy natijasi quyidagidan iborat:

a) $\zeta(s)$ funksiyani butun kompleks tekislikga analitik davom ettirish mumkin;

b) $\zeta(s)$ ushbu funksional tenglama

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)\right)\zeta(1-s)$$

ni qanoatlantiradi. Bu yerda $\Gamma(s)$ Eylerning gamma funksiyasi bo’lib $Res > 0$, bo‘lganda

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{s-1} du$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu funksional tenglama $\zeta(s)$ ning $\sigma > 1$ dagi xossalaridan $\sigma < 0$ dagi xossalarini keltirib chiqarish imkoniyatini beradi.

Ushbu

$$L = L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad Res > 1$$

tenglik bilan aniqlanuvchi Dirixle L- funksiyasi $|\chi(n)| \leq 1$ bo‘lgani uchun $L(s,\chi)$ ning ta’rifidan uning $Res > 1$ yarim tekislikda analitik ekanligi kelib chiqadi.

II-BOB. RIMANNING DZETA FUNKSIYASINING NOLLARI MAVJUD BO‘LMAGAN SOHA HAQIDA

2.1-§. Rimanning dzeta funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi.

2.1.1. Rimanning dzeta funksiyasining nollarining kompleks tekislikda joylashuvi haqida. Agar $\sigma > 1$ bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $\sigma < 0$ bo‘lsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial bo‘lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya’ni $0 \leq \sigma \leq 1$ ga kritik yo‘lak (polosa) deb ataladi. Bulardan tashqari Riman $\zeta(s)$ to‘g‘risida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi, $-$ degan gipotezasi hozirgacha to‘la isbotlangan emas. Bu gipotezaga hozirda Riman gipotezasi deb yuritiladi [9-13].

1914 yilda G. Xardi $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda $\zeta(s)$ ning cheksiz ko‘p nollarining yotishini isbotladi. 1942 yilda A. Selberg esa bu nollarning $\zeta(s)$ ning barcha nollari orasida musbat zichlikka ega ekanligini isbotladi.

Valle-Pussen va Adamarlar 1898 yilda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda $s = 1$ da $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbotladilar. Aniqroq qilib aytganda Valle-Pussen, agar

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{lnt}, \quad t \geq 2 \tag{2.1.1}$$

bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko‘rsatgan. Bu yerda c_1 $-$qandaydir musbat o‘zgarmas son.

1948 yilda A. Selberg va P. Erdyoshlar bu natijaning elementar isbotini berdilar. Shundan keyin N. Chudakov [9] agar

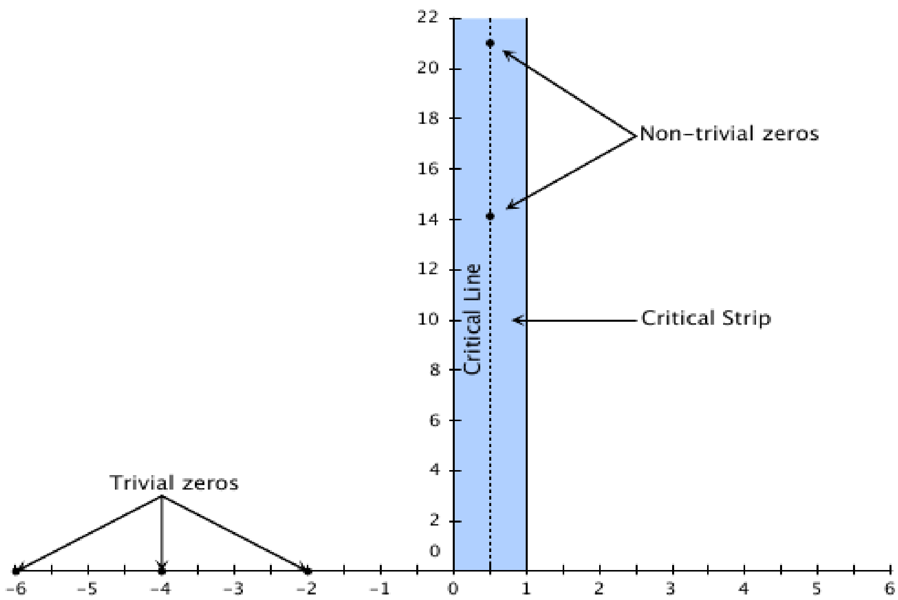
$$\sigma > 1 - \frac{c_2}{\left(ln^{\frac{3}{4}}t\right)(lnlnt)^{\frac{3}{4}}}$$

bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbot qildi. 1958 yilda I. M. Vinogradov va N. M. Korobovlar agar

$$\sigma > 1 - \frac{C(\alpha)}{(lnt)^{\alpha}}, \quad \alpha > \frac{2}{3}$$

bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko‘rsatishdi.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta_1 = \frac{1}{2} + i14{,}134725$ ekanligi isbotlangan [11]. $\zeta(s)$ ning nollari haqiqiy o‘qga nisbatan simmetrik joylashgani uchun $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{2} - i14{,}134725$ ham $\zeta(s)$ ning noli bo‘ladi. Demak, $0 \leq \sigma \leq 1,\ -14{,}134725 < t < 14{,}134725$ to‘g‘ri to‘rtburchakning ichida $\zeta(s)$ ning nollari yo‘q deya olamiz. Shuningdek, $\zeta(s)$ ning ikkinchi va uchinchi trivial bo‘lmagan nollari $\beta_2 = \frac{1}{2} + i21{,}022$; $\bar{\beta}_2 = \frac{1}{2} - i22{,}022$; $\beta_3 = \frac{1}{2} + i25{,}011$, $\bar{\beta}_3 = \frac{1}{2} - i25{,}011$ ekanligi ma’lum [7] (1-shaklga qarang).



1-shakl

Kompyuter yordamida ordinatasi $0 < t < 33 \cdot 10^{9}$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Hozirgi kungacha $\zeta(s)$ nollari ko’plam olimlar izlanish olib borgan va bormoqda. Biz quyida $\zeta(s)$ nollari qaysi olimlar tomonidan, nollari soni kashf etilgani haqidagi ma’lumotlar jadvalini keltiramiz [11].

Yillar	Nollari soni	Kim tomonidan topilgani
1859 (taxmin qilgan.)	1	B. Riemann
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchinson
1935	1041	E. C. Titchmarsh
1953	1104	A. M. Turing
1956	15000	D. H. Lehmer
1956	25000	D. H. Lehmer
1958	35337	N. A. Meller
1966	250000	R. S. Lehman
1968	3500000	J. B. Rosser va boshqalar
1977	40000000	R. P. Brent
1979	81000001	R. P. Brent
1982	200000001	R. P. Brent va boshqalar
1983	300000001	J. van de Lune, H. J. J. te Riele
1986	1500000001	J. van de Lune va boshqalar
2001	10000000000	J. van de Lune
2004	900000000000	S. Wedeniwski
2004	10000000000000	X. Gourdon

Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar aktual hisoblanadi.

I. Allakovning [32] da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\leq c_3 lnT,\ \ T\geq T_0\geq 3$$

bahodagi c_3 ning qiymati aniqlashtirilib sonli baho olinganini ta’kidlab o‘tamiz. Aniqroq qilib aytganda c_3 ning T_0orqali ifodaga keltirib chiqarilib $T_0=3$ da hisoblangan va $c_3=5{,}4695$ natija olingan, ya’ni quyidagi teorema isbotlagan.

2.1.1-Teorema. Agar $q_n=\beta_n+i\gamma_n, n=1{,}2{,}3,\ldots$ lar $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\leq c_3 lnT,\ \ T\geq T_0\geq 3$$

munosabat o‘rinli. Bu yerda

$$c_3=\frac{4}{(T_0^2+1)lnT_0}+\frac{1{,}5834+ln2\pi}{lnT_0}+1+\frac{\gamma}{lnT_0}+\frac{3}{2T_0lnT_0}+\frac{1}{12T_0^2lnT_0}$$
$$\leq 5{,}4695$$

va $\gamma=0{,}5772\ldots-$ Eyler doimiysi.

Agarda biz bu bahoda $T_0=14$ (bunday deb olish mumkin ekanligi yuqorida isbotlandi) deb olsak $c_3\leq 2{,}28$ bahoga ega bo‘lamiz.

Bunday baholar (2.1.1) ko‘rinishdagi baholarda qatnashuvchi c_1 doimiylarning son qiymatlarini aniqlashda muhim hisoblanadi. Isbotlangan tasdiqdan ushbu natijalar kelib chiqadi.

1-natija. $\zeta(s)$ning $T\leq |Im\, q_n|\leq T+1$ shartni qanoatlantiruvchi nollari soni $2{,}28lnT$ dan ko‘p emas.

2-natija. Agar $T\geq T_0\geq 3$ bo‘lsa,

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{(T-\gamma_n)^2}\leq c_4 lnT,$$

$$c_4=5\left(\frac{1}{(T_0^2+1)lnT_0}+\frac{0{,}22305+ln2\pi}{lnT_0}+1+\frac{3}{2T_0lnT_0}+\frac{1}{12T_0^2lnT_0}\right)\leq 7{,}61.$$

Olingan sonli natijalar [15] dagi natijalarning yaxshilangani hisoblanadi. Ushbu ishda dzeta funksiyaning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [35] da foydalanilgan usul yordamida (2.1.1) da ishtirok etuvchi C_1 son qiymatini aniqlashtirib $c_1 = 0,0109$ deb olish mumkin ekanligi ko'rsatilgan.

2.2-§. Zigel teoremasi.

Zigel tomonidan isbotlangan quyidagi teorema yuqoridagi (2.3.3) va (2.3.4) baholarga nisbatan $L(s,\chi)$ funksiyaning haqiqiy nollarining aniqroq chegarasini beradi.

2.2.1-teorema. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $s(\varepsilon) > 0$ soni mavjudki, agar $\chi(modk)$ −haqiqiy xarakter va β esa $L(s,\chi)$ funksiyaning haqiqiy noli bo‘lsa, u holda

$$\beta \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}$$

bajariladi.

Bu teoremani isbotlash uchun avvalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.

2.2.1-lemma. Agar χ_1 va χ_2 lar mos ravishda k_1 va k_2 modullari bo‘yicha har xil haqiqiy primitiv xarakterlar bo‘lib,

$$F(s) = \zeta(s)\, L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)$$

bo‘lsa, u holda $\frac{9}{10} < \sigma < 1$ bo‘lganda

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma} \cdot (k_1 k_2)^{8(1-\sigma)}$$

baho o‘rinli. Bunda $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Isboti. Avvalo $\chi_1\chi_2$ −bosh xarakterdan farqli bo‘lgan k_1k_2 moduli bo‘yicha xarakter bo‘ladi. Shuning uchun ham $F(s)$ − funksiya s kompleks tekislikdagi $s = 1$nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda regulyar funksiya bo‘ladi. $s = 1$ nuqtada esa uning qutb nuqtasi bo‘lib, u nuqtadagi chegirmasi $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$ ga teng. $Res > 1$ bo‘lganda $F(s)$ − funksiyani Dirixle qatoriga yoyamiz, u holda

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

hosil bo‘ladi. $Res > 1$ bo‘lganda

$$F(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_1(p)\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

va $\chi_1(p)=0,\ \pm1,\ \chi_2(p)=0,\ \pm1$ bo‘lgani uchun $b_1=1$ hamda $n>1$ bo‘lganda $b_n\geq 0$ bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham, agar $\chi_1(p)=-1$, $\chi_2(p)=+1$ bo‘lsa, u holda

$$\prod\nolimits_1=\prod\nolimits_p'\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod\nolimits_p'\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}$$
$$=\left(\prod\nolimits_p'\left(1+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots\right)\right)^2;$$

agarda $\chi_1(p)=0,\ \chi_2(p)=+1$ bo‘lsa, u holda

$$\prod\nolimits_2=\prod\nolimits_p''\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod\nolimits_p''\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}=$$
$$=\left(\prod\nolimits_p''\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\right)^2;$$

agarda $\chi_1(p)=0,\ \chi_2(p)=-1$ bo‘lsa, u holda

$$\prod\nolimits_3=\prod\nolimits_p'''\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod\nolimits_p'''\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}=$$
$$=\prod\nolimits_p'''\left(1+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots\right);$$

agarda $\chi_1(p)=0,\ \chi_2(p)=0$ bo‘lsa, u holda

$$\prod_4 = \prod_p'''' \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p'''' \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)$$

hosil bo‘ladi. Qolgan barcha hollar shu qarab chiqilgan hollarga o‘xshash bo‘ladi. Barcha $\prod_i$ larni ko‘paytirib $F(s)$ uchun Dirixle qatoriga ega bo‘lamiz bu qator uchun $b_1 = 1$ hamda $n > 1$ bo‘lganda $b_n \geq 0$ bo‘lishini ko‘rinib turibti. Shunday qilib,

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} ln^m n$$

bo‘lgani uchun $|s - 2| < 1$ bo‘lganda

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2 - s)^m, \ \ a_0 \geq 1, \qquad a_m \geq 0$$

deb yoza olamiz. Ushbu

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s - 1}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $g(s)$ funksiya s kompleks tekislikdagi barcha nuqtalarda regulyar funksiya bo‘ladi. Shuning uchun ham

$$|s - 2| \leq \frac{3}{2} \tag{2.2.1}$$

doirada

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda)\,(2 - s)^m \tag{2.2.2}$$

deb yozish mumkin. $g(s)$ ni (3.1) doirada baholaymiz. Bu doiraning chegarasi $|s - 2| = \frac{3}{2}$ da [9]ning VIII-bobidagi 9-lemmadan $\zeta(s) = O(1)$, $\frac{1}{s-1} = O(1)$; $|L(s, \chi_1)| < ck_1$, $|L(s, \chi_2)| < ck_2$, $|L(s, \chi_1\chi_2)| < ck_1k_2$larning bajarilishi kelib chiqadi. Shuning uchun ham $|s - 2| = \frac{3}{2}$ da

$$|g(s)| < c_1(k_1k_2)^2$$

baho o‘rinli bo‘ladi. Maksimum prinsipiga asosan oxirgi baho (2.2.1)- doiraning ichida ham o‘rinli bo‘ladi. (2.2.2) dagi $a_m - \lambda$ larni darajali qatorning koeffitsientlari haqidagi Koshi teormasidan foydalanib baholab

$$|a_m-\lambda|<c_2(k_1k_2)^2\left(\frac{2}{3}\right)^m, \quad m=0,1,2,\dots$$

ni hosil qilamiz. Bularga asosan $M>1$ va $\frac{9}{10}<\sigma<1$ bo‘lganda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\sum_{m=M}^{\infty}|a_m-\lambda|\ (2-\sigma)^m\le\sum_{m=M}^{\infty}c_2(k_1k_2)^2\left(\frac{2}{3}(2-\sigma)\right)^m<c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M;$$

$$F(\sigma)-\frac{\lambda}{\sigma-1}\ge 1-\lambda\sum_{m=0}^{M-1}(2-\sigma)^m-c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M.$$

Endi $M>1$ butun sonini quyidagi munosabatdan aniqlaymiz:

$$c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M<\frac{1}{2}\le c_3(k_1k_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^{M-1}.$$

U holda

$$F(\sigma)\ge\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{1-\sigma}(2-\sigma)^M$$

baho hosil bo‘ladi. $M<8\ ln(k_1k_2)+c_4$ bo‘lgani uchun

$$(2-\sigma)^M=e^{Mln(1+1-\sigma)}<e^{M(1-\sigma)}<c_5(k_1k_2)^{8(1-\sigma)}.$$

Shunday qilib lemma isbot bo‘ldi.

Teoremaning isboti. Avvalo shunday $k_0=k_0(\varepsilon)$ ning mavjud ekanligini ko‘rsatamizki, $k>k_0$ va $\sigma>1-\frac{1}{k^{\varepsilon}}$ bo‘lganda

$$L(\sigma,\chi)\ne 0 \qquad (2.2.3)$$

bajariladi. Bunda χ bilan k moduli bo‘yicha haqiqiy primitiv xarakter belgilangan. Bu yerdan teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi.

Faraz etaylik $1-\frac{\varepsilon}{10}\le\sigma<1$ kesmada $L(s,\chi)$ning noli mavjud bo‘lgan k mavjud bo‘lmasin. (2.1.3) o‘rinli bo‘lgan $k^{\varepsilon}\ge\frac{10}{\varepsilon}$ shartni qanoatlantiruvchi k ning eng kichik qiymatini $k_1=k_1(\varepsilon)$ bilan belgilaymiz. U holda $k>k_1(\varepsilon)$ uchun (2.2.3) bajariladi. Endi faraz etaylik shunday k_1 mavjud bo‘lib unga mos $L(s,\chi_1)-$ funksiya $\left[1-\frac{\varepsilon}{10},1\right)$ kesmada $s=\sigma_1$ nolga ega bo‘lsin. Bunda χ_1 bilan k_1 moduli bo‘yicha haqiqiy primitiv xarakter belgilangan. Hozircha k_2, $k_2>k_1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural son va χ_2 esa k_2 moduli bo‘yicha haqiqiy primitiv xarakter bo‘lsin. U holda $k_2 > k_1$ bo‘lgani uchun $\chi_1 \neq \chi_2$ bo‘ladi.

$L(\sigma_1, \chi_1) = 0$ bo‘lgani uchun 2.2.1-lemmaga asosan

$$0 = F(\sigma_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma_1} \cdot (k_1 k_2)^{8(1-\sigma_1)}, 1 - \frac{\varepsilon}{10} \leq \sigma_1 < 1,$$

bajariladi. Bu yerda

$F(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) L(s, \chi_1\chi_2), \quad \lambda = L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1\chi_2).$

Shunday qilib,

$$L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1\chi_2) > c_1(1-\sigma_1)(k_1 k_2)^{-0,8\varepsilon}.$$

Bu yerdagi $L(1, \chi_1)\, va\, L(1, \chi_1\chi_2)$ larni baholash uchun 2.2.4-lemmaning natijasidan foydalanamiz. Unga ko‘ra agar $Res \geq \frac{1}{2}$, $\chi(n) \neq \chi_0(n)$ bo‘lsa, $|L(s, \chi)| \leq 2|s|\, \varphi(k)$ bo‘ladi. Bundan foydalanib yuqoridagi tengsizlikni quyidagicha yozish mumkin:

$$L(1, \chi_2) > \frac{c_2(1-\sigma_1)}{(k_1 k_2)^{0,8\varepsilon} (lnk_1 k_2)^2}.$$

Endi $k_2 = k_2(\varepsilon, k_1, \sigma_1)$ ni

$$\frac{c_2(1-\sigma_1)}{k_1{}^{0,8\varepsilon} (lnk_1 k_2)^2} > \frac{1}{k_2{}^{0,1\varepsilon}}$$

bajariladigan darajada katta qilib tanlab olamiz. U holda barcha $k > k_2$ lar uchun

$$L(1, \chi) > k^{-0,9\varepsilon}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunda χ bilan k moduli bo‘yicha haqiqiy primitiv xarakter belgilangan. Bu yerda o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llaymiz. Unga asosan $\sigma \leq \sigma_2 \leq 1$ bajarilganda $L(1, \chi) = L(\sigma, \chi) + (1-\sigma) L'(\sigma_2, \chi)$ bajariladi. Bundan $L(\sigma, \chi) = L(1, \chi) - (1-\sigma) L'(\sigma_2, \chi)$

$L'(\sigma_2, \chi)$ ni baholash uchun

$$|L'(\sigma_2, \chi)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) lnn}{n^{\sigma_2}} \right| = \sum_{n \leq k} \frac{lnn}{n^{\sigma_2}} + \int_k^{\infty} \left| \sum_{k < n \leq x} \chi(n) \right| \left(\frac{1}{x^{1+\sigma_2}} + \frac{lnx}{x^{1+\sigma_2}} \right) dx$$
$$\leq c_1 ln^2 k$$

dan foydalanamiz. U holda $1 - \frac{1}{k^{\varepsilon}} \leq \sigma < 1$ va $k > k_3(\varepsilon)$ bo‘lganda

$$L(\sigma,\chi) = L(1,\chi) - (1-\sigma)L'^{(\sigma_2,\chi)} \geq k^{-0,9\varepsilon} - (1-\sigma)c_3 ln^2 k > 0$$

bo‘ladi. Endi, agar $k > max(k_1, k_3)$ deb olsak (2.3.3) isbotlangan bo‘ladi. Shunday qilib teorema isbot bo‘ldi.

Izoh. Isbotlangan teoremadagi o‘zgarmas $s(\varepsilon)$ effektiv emas, ya’ni berilgan $\varepsilon > 0$ uchun $c = c(\varepsilon)$ning qiymatini hisoblab bo‘lmaydi. Shuning uchun ham bu teoremadan foydalanilgan barcha natijalardagi o‘zgarmaslar ham effektiv emas bo‘ladi.

2.3-§. Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho.

Bu yerda avvalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.

2.3.1-lemma. Agar $1 < \sigma < 1{,}03$ bo‘lsa,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma-1} - \gamma_0 + 0{,}1856352(\sigma-1) < \frac{1}{\sigma-1}$$

bajariladi. Bunda $\gamma_0 = 0{,}57721566 \ldots -$ Eyler doimiysi.

Isboti. Rimanning dzeta funksiyasining $\sigma > 1$ bo‘lgandagi yoyilmasi [18]

$$\zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (\sigma-1)^n$$

dan

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_n (\sigma-1)^n \qquad (2.3.1)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bunda $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0$ va $n \geq 1$ bo‘lganda

$$\bar{\gamma}_n = (n+1)\gamma_n - (\gamma_{n-1}\bar{\gamma}_0 + \gamma_{n-2}\bar{\gamma}_1 + \cdots + \gamma_0\bar{\gamma}_{n-1}) \qquad (2.3.2)$$

γ_n koeffitsentlar uchun M.I.Isroilov tomonidan isbotlangan quyidagi formulalardan foydalanamiz [28].

$$\gamma_0 = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - lnN - \frac{1}{2N} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{B_{2r}}{2rN^{2r}} + \frac{\theta B_{2k}}{2kN^{2r}}, \qquad (2.3.3)$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{ln^n m}{m} - \frac{ln^{n+1}N}{n+1} - \frac{ln^n N}{2N} + \sum_{r=1}^{k_0-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}f_n^{(2r-1)}(N)\right.$$

$$\left. - \frac{\theta B_{2k_0}}{(2k_0)!}f_n^{(2k_0-1)}(N)\right), \qquad (n \geq 1), \qquad (2.3.4)$$

Bunda $0 < \theta < 1$; $B_j -$ j-Bernulli soni; $k \geq 1 -$ butun son;

$$f_n^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{ln^n x}{x}\right), (\nu = 0,1,2,\dots);$$

k_0 soni $N-1 \leq x \leq N$ bo‘lganda $f_n^{(2k_0)}(x)$ va $f_n^{(2k_0+2)}(x)$ lar bir xil ishorali qilib tanlanadi.

(2.3.4)- formulani qo‘llab (2.1.1) va (2.1.2) lardan lemmadagi tasdiqga ega bo‘lamiz.

Natija. $x \geq 1$ bo‘lsa,

$$\sum_{n \leq x}\frac{1}{n} < lnx + \gamma_0 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} \qquad (2.3.5)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isboti. (2.1.3) da $k = 1$ deb olish kerak.

Endi biz Sh.Valle-Pussenning ([15]) quyidagi teoremasini isbotlashimiz mumkin.

2.3.1-teorema. Shunday o‘zgarmas s > 0 soni mavjudki $s -$ kompleks tekislikning

$$Res = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(|t|+2)}$$

sohasida dzeta funksiya nollarga ega emas.

Isboti. Ma’lumki, $\zeta(s)$ funksiya $s = 1$ nuqtada qutbga ega. Shuning uchun ham biror ν_0 musbat soni uchun $|s-1| \leq \nu_0$ sohada bu funksiya nollarga ega emas. Faraz etaylik $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ qaralayotgan $\zeta(s)$ funksiyaning $|\gamma_n| > \nu_0$ shartni qanoatlantiruvchi noli bo‘lsin. U holda $\sigma > 1$ bo‘lganda

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}e^{-it\ln n};$$

bundan

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\ln n).$$

Ixtiyoriy $\varphi -$ haqiqiy soni uchun $3+4\cos\varphi+\cos2\varphi=2(1+\cos\varphi)^2\geq 0$ tengsizlik o‘rinli. Bundan

$$3\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right\}+4\left\{-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right\}+\left\{-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right\}\geq 0 \qquad (2.3.6)$$

ni hosil qilamiz. Endi (2.3.6) dagi har bir qo‘shiluvchini yuqoridan baholaymiz. 2.3.1-lemmadan $1<\sigma<2$ bo‘lganda

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)<\frac{1}{\sigma-1}$$

ning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. 2.3.1-teoremadan

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<c_1\ln\left(|t|+2\right)-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) \qquad (2.3.7)$$

bunda $|t|+2\geq T_0\geq 3$ va

$$c_1=\frac{1}{\left(T_0^2+1\right)\ln T_0}+\frac{-1+\ln 2\pi}{\ln T_0}+1+\frac{\gamma}{\ln T_0}+\frac{3}{2T_0\ln T_0}+\frac{1}{12\,T_0^2\ln T_0}.$$

Agar bu yerda $\rho_n=\beta_n+i\gamma_n$ va $0\leq\beta_n\leq 1$ bo‘lgani uchun

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{s-\rho_n}=\mathrm{Re}\frac{1}{(\sigma-\beta_n)+i(t-\gamma_n)}=\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}>0 \qquad (2.3.8)$$

va

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\rho_n}=\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\geq 0$$

ekanliklarini e’tiborga olsak

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)<c_1\ln\left(|t|+2\right)-\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}.$$

Shuningdek (2.3.7) dan

$$-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it,\chi^2)<c_2(t_0)\ln(2|t|+2),$$

Bunda

$$c_2(t_0)=c_1(2t_0)\left(1+\frac{ln2}{ln(t_0+3)}\right)$$

hosil qilingan baholarni (3.2.6) ga qo‘yib

$$\frac{3}{\sigma-1}+4\left\{c_1\ln\left(|t|+2\right)-\frac{\sigma-\beta_n}{\left(\sigma-\beta_n\right)^2+\left(t-\gamma_n\right)^2}\right\}+c_2(t_0)\ln(2|t|+2)\geq 0$$

Bundan

$$\frac{3}{\sigma-1}+4\left\{-\frac{\sigma-\beta_n}{\left(\sigma-\beta_n\right)^2+\left(t-\gamma_n\right)^2}\right\}+c_3(t_0)\ln(|t|+2)\geq 0,$$

$c_3(t_0)=4c_1(t_0)+c_2(t_0)$ va $t=\gamma_n, (\rho_n=\beta_n+i\gamma_n)$,

$$t_0=0,\qquad \sigma=1+\frac{1}{2c_3\ln(|\gamma_n|+2)}$$

deb olsak

$$\frac{4}{\sigma-\beta_n}<\frac{3}{\sigma-1}+c_3\ln(|t|+2)$$

ni bundan esa isbotlanishi talab etilgan

$$\beta_n\leq 1-\frac{1}{14c_3\ln(|\gamma_n|+2)}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Shunday qilib $c=\frac{1}{14c_3}$

Natija . 2.3.1-teoremada $c=0{,}0121$ deb olish mumkin.

Isboti. Agar biz $\zeta(s)$ ning birinchi nolining ordinatasi $\gamma_n=14{,}134725$ ga teng ekanligini inobatga olsak $T_0=14{,}1$ deb olish mumkin. Uholda $c=\frac{1}{14c_3}$ va

$$c_3=4c_1+c_2=4\left\{\frac{1}{\left(T_0^2+1\right)\ln T_0}+\frac{-1+\ln 2\pi}{\ln T_0}+1+\frac{\gamma}{\ln T_0}+\frac{3}{2T_0\ln T_0}+\frac{1}{12\,T_0^2\ln T_0}\right\}$$

$$+c_1\left(2T_0\right)\left(1+\frac{\ln 2}{\ln\left(T_0+3\right)}\right)$$

dan $c=0{,}0121$ deb olish mumkin ekanligi kelib chiqadi.

Endi biz 2.3.1-teoremaning natijasini aniqlashtiruvchi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2.3.2-teorema. Shunday o‘zgarmas s > 0 soni mavjudki $s -$ kompleks tekislikning

$$Res = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln^{\frac{2}{3}}(|t| + 10)\, lnln(|t| + 10)}$$

cohasida $\zeta(s) \neq 0$.

Bu teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi lemma kerak bo‘ladi.

2.3.2-lemma. $F(s) -$ funksiya $|s - s_0| \leq r$ doirada analitik bo‘lib $F(s_0) \neq 0$ va va bu doirada $\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right| \leq M$ bajarilsin.

Agar $|s - s_0| \leq \frac{r}{2},\ Re(s - s_0) \geq 0$ sohada $F(s) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$a)\ Re\frac{F'(s)}{F(s_0)} \geq -\frac{4}{r} lnM;$$

$$b)\ Re\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \geq -\frac{4}{r} lnM + Re\frac{1}{s_0 - \rho},$$

bunda ρ bilan $F(s) -$ funksiyaning $|s - s_0| \leq \frac{r}{2},\ Re(s - s_0) < 0$ sohadagi ixtiyoriy noli belgilangan.

2.3.2-teoremaning isboti. $t \geq t_0 > 0$ bo‘lib t dzeta funksiyaning noli $\rho = \sigma + it$ ning ordinatasi bo‘lsin.

$$\sigma = 1 - \frac{d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t + 2)\, lnln(2t + 2)}, \qquad d \leq 1$$

deb olamiz. $d \geq s_1 > 0$ ekanligini ko‘rsatish yetarli. Biz t_0 ni

$$1/(lnln(2t + 2)) < \frac{a_1}{10}$$

shart bajariladigan qilib tanlaymiz. Bunda $a_1 > 0$ bo‘lib [ ] ning VI-bobidagi 3-teoremada aniqlangan ($0 < a_1 = \gamma_1$). u holda

$$\frac{d}{lnln(2t + 2)} < \frac{a_1}{10}$$

bajariladi.

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t + 2)\, lnln(2t + 2)} + it = \sigma_0 + it$$

nuqtani qaraymiz (1-shaklga qarang). s_0 nuqtani $r,\ r = \frac{\gamma_1}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)} -$ radiusli doira bilan aylantirib olamiz.

U holda

$$\frac{\gamma_1}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)} > \frac{5d}{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\, lnln(2t+2)}$$

bo‘lgani uchun ρ nuqta markazi s_0 nuqtada radiusi $\frac{r}{2}$ ga teng bo‘lgan doiraning ichida yotadi. 2.3.2- lemmada $F(s) = \zeta(s)$ deb olib $|s - s_0| \le r$ doirada

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|$$

ni baholaymiz. [9] ningVI-bobi 3-paragrafida keltirilgan 3- teoremadan

foydalanamiz. Unga asosan $|s - s_0| \le r$ doirada $\zeta(s) = O(ln^{\frac{2}{3}}t)$ bajariladi. Bundan tashqari

$$\frac{1}{|\zeta(s_0)|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \le 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = \frac{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\, lnln(2t+2)}{4d} + 1.$$

Shuning uchun ham

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \le M = c_2 \frac{ln^2 t}{d}.$$

$|s - s_1| \le r,\ s_1 = \sigma_0 + i2t$ doirada ham xuddi shunday baho o‘rinli. $|s - s_0| \le \frac{r}{2}$, $Re(s - s_0) \ge 0$ va $|s - s_1| \le \frac{r}{2},\ Re(s - s_1) \ge 0$ sohalarda $\zeta(s) \ne 0$ bo‘lgani uchun 3.2.2-lemmani qo‘llab quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$Re\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} \ge -\frac{4}{r} lnM + Re\frac{1}{s_0 - \rho} = -\frac{4}{a_1}\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\, lnM +$$

$$\frac{\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\, lnln(2t+2)}{5d},$$

$$Re\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} \ge -\frac{4}{r} lnM = -\frac{4}{a_1}\ln^{\frac{2}{3}}(2t+2)\, lnM.$$

Bundan tashqari $\sigma_0 > 1$ bo‘lganda

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0 - 1} + c_3$$

$$3\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)\right\} + 4\left\{-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + it)\right\} + \left\{-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0 + 2it)\right\} \ge 0$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizlikga yuqorida hosil qilingan baholarni qo‘ysak

$$-\frac{lnln(2t+2)}{20d}-\frac{20}{a_1}lnd+\frac{40}{a_1}lnln(2t+2)+c_4 \geq 0$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{lnln(2t+2)}{20}+\frac{20d}{a_1}lnd\right)+\left(\frac{40}{a_1}lnln(2t+2)+c_4\right)\geq 0$$

kelib chiqadi. $d\rightarrow 0$ da $dlnd\rightarrow 0$ va $\frac{1}{d}\rightarrow\infty$. Shuning uchun ham oxirgi tengsizlikdan $d\geq c_1>0$ ekanligi kelib chiqadi.

II-bob uchun xulosa

Ma'lumki, $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ bo'lganda Riman (Georg Fridrix Berngard Riman (1826-1866)-nemis matematigi)ning dzeta funksiyasi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s = \sigma + it$ tenglik yordamida aniqlanadi. Bu funksiya $\mathrm{Re}\, s > 1$ yarim tekislikda analitik, shuning uchun ham $\zeta(s)$ tekis yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi sifatida analitik funksiyani ifodalaydi. Uning haqiqiy o'qdagi $s = -2, -4, -6\ldots$ nollariga trivial nollari deyiladi. Qolgan barcha nollari esa trivial bo'lmagan nollari deb yuritiladi.

Agar $\sigma > 1$ bo'lsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $\sigma < 0$ bo'lsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial bo'lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya'ni $0 \le \sigma \le 1$ ga kritik yo'lak deb ataladi. Bulardan tashqari Riman $\zeta(s)$ to'g'risida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo'lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik to'g'ri chiziqda yotadi – degan gipotezasi hozirgacha to'la isbotlangan emas. 1914 yilda G. Xardi $\sigma = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziqda $\zeta(s)$ ning cheksiz ko'p nollarining yotishini isbotladi. 1942 yilda A. Selberg esa bu nollarning $\zeta(s)$ ning barcha nollari orasida musbat zichlikka ega ekanligini isbotladi [24]. Valle-Pussen va Adamarlar 1898 yilda bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda $s = 1$ da $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbotladilar. Aniqroq qilib aytganda Valle-Pussen agar

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\ln t}, \quad t \ge 2 \tag{2.1.1}$$

bo'lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko'rsatishgan. Bu yerda c_1 –qandaydir musbat doimiy son.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta = \frac{1}{2} + i\; 14,134725$ ekanligi isbotlangan. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0 < t \le 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = 1/2$ to'g'ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar aktual hisoblanadi.

Ushbu ishda dzeta funksiyaning nollari haqidagi keyingi ma'lumotlar va [35] da foydalanilgan usul yordamida (2.1.1) da ishtirok etuvchi c_1 son qiymatini aniqlashtirib $c_1 = 0,0109$ deb olish mumkin ekanligi ko'rsatilgan.

III-BOB. DIRIXLENING L-FUNKSIYASINING NOLLARI MAVJUD BO‘LMAGAN SOHA HAQIDA.

3.1-§. Dirixlening L-funksiyasining nollari joylashgan sohaning chegarasi.

3.1.1. Dirixlening L-funksiyasining nollarining kompleks tekislikda joylashuvi haqida. Yuqorida 1.3-paragrafda isbotlangan teoremaning natijasidan ko‘rinadiki, $\chi(modk)$ primitiv xarakter bo‘lsa, $L(s,\chi)$ funksiya $Res < 0$ yarim tekislikda faqat haqiqiy nollarga ega, bu nollar $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ va $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ larning qutblaridan iboratdir. $L(s,\chi)$ ning bu nollariga uning trivial nollari deyiladi. Shuningdek $s=0$ nuqtadagi noli ham trivial nollarga kiradi. Bu trivial nollardan tashqari $L(s,\chi)$ funksiya kritik yo‘lak $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$ da cheksiz ko‘p trivial bo‘lmagan nollarga ham ega.

Agar $\chi(\mathrm{mod}k)$ primitiv xarakter va

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{agar } \chi(-1) = +1 \text{ bo‘lsa;} \\ 1, & \text{agar } \chi(-1) = -1 \text{bo‘lsa ;} \end{cases}$$

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi)$$

bo‘lsa (1.1.3-§ ga qarang), ushbu teorema o‘rinli.

3.1.1-teorema. Agar χ –primitiv xarakter bo‘lsa, $\xi(s,\chi)$ funksiya birinchi tartibli butun funksiya bo‘lib, $0 \le \operatorname{Re} \rho_n \le 1$, $\rho_n \ne 0$shartni qanoatlantiruvchi cheksiz ko‘p nollarga ega hamda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1}$$

qator uzoqlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$$

qator esa ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun yaqinlashuvchidir. $\xi(s,\chi)$ funksiyaning nollari $L(s,\chi)$ funksiyaning trivial bo‘lmagan nollaridir.

Bu teoremani isbotlashda biz quyidagi analitik funksiyalar nazariyasiga doir lemmadan, ya’ni chekli tartibli butun funksiyani cheksiz ko‘paytma ko‘rinishda ifodalashga doir ushbu tasdiqdan foydalanamiz.

3.1.1-lemma. Agar $G(s)$ chekli α tartibli butun funksiya va $G(0)\neq 0$ bo‘lsin, s_n esa $G(s)$ ning barcha nollari ketma-ketligi bo‘lib

$$0<|s_1|\leq|s_2|\leq\cdots\leq|s_n|\leq\cdots$$

shartni qanoatlantirsa, u holda s_n ketma-ketlik chekli yaqinlashish ko‘rsatkichi $\beta\leq\alpha$ ga ega bo‘ladi va

$$G(s)=e^{g(s)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)e^{\frac{s}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p},$$

bu yerda $p\geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{p+1}}<\infty$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son, $g(s)$ esa $g-$darajali $(g\leq\alpha)$ ko‘rhad, $\alpha=\max(g,\beta)$.

Agarda bundan tashqari ixtiyoriy $c>0$ uchun shunday bir $|s|=r_n$, $n=1,2,\ldots,$ $(r_n\to+\infty)$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib

$$\max|G(s)|>e^{cr_n^{\alpha}}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\alpha=\beta$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s_n|^{\beta}}$$

qator uzoqlashadi.

Bu lemmaning isboti [13] da keltirilgan.

Isboti. $\operatorname{Re}s\geq\frac{1}{2}$ bo‘lganda 1.3.4-lemmaning natijasiga ko‘ra

$$|L(s,\chi)|\leq 2|s|\varphi(k)<2|s|k\quad,$$

bunda $\xi(s,\chi)$ funksiyaning aniqlanishiga ko‘ra

$$|\xi(s,\chi)| \le 2k^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}}|s| \left|\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)\right| << k^{\frac{\delta}{2}+\frac{3}{2}} e^{c|s||\ln|s||}$$

Bu yerda

$$\Gamma(s) \ll e^{c|s||\ln|s||}$$

ekanligidan foydalandik.

$\xi(s,\chi)$ ning bu oxirgi bahosi (1.3.7)-funksional tenglama va

$$\left|\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\right| = 1$$

ga asosan $\mathrm{Re}\, s < \frac{1}{2}$ bo‘lganda ham o‘rinli. Bundan tashqari $\xi(0,\chi) \ne 0.$ $s \to \infty$ da $\ln\Gamma(s) \sim s\ln s$ bo‘lganligi sababli yuqoridagi 2.1-lemmadan teoremaning birinchi tasdig‘i kelib chiqadi. $\mathrm{Re}\, s > 1$ da $L(s,\chi) \ne 0$ bo‘lgani uchun (1.3.7) dan $\mathrm{Re}\, s < 0$ da $\xi(s,\chi) \ne 0$ ekanligi,ya’ni $\xi(s,\chi)$ funksiyaning nollari $L(s,\chi)$ funksiyaning $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$ yo‘lakdagi nollari bo‘ladi. Teorema to‘la isbot bo‘ldi.

Natija. Ushbu formula o‘rinli

$$\xi(s,\chi) = e^{\mathrm{A}+\mathrm{B}s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{\frac{s}{\rho_n}}, \tag{3.1.1}$$

bu yerda $A = A(\chi),$ $B = B(\chi) -$ o’zgarmas sonlar.

(1.3.7) funksional tenglamadan $L(s,\chi)$ funksiyaning trivial bo‘lmagan nollari $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bundan keyin biz nollar $\rho_n, n = 1,2,\ldots$ ni ularning mavhum qismlari absolyut qiymatlarining o‘sib borishi tartibida nomerlangan deb qaraymiz.

Endi $B = B(\chi)$ ning $L(s,\chi)$ ning trivial bo‘lmagan nollari orasidagi bog‘lanishni keltirib chiqaramiz. Buning uchun avvalo (2.1) ning ikkala tomonini logarifmlab, keyin differensiallaymiz, u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\ln \xi(s,\chi) = (A + Bs) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) + \frac{s}{\rho_n}$$

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = B(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{\rho_n}}{1 - \frac{s}{\rho_n}} + \frac{1}{\rho_n} = B(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Bundan va (1.3.7) dan

$$\frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = B(\chi) = \frac{-\xi'(1,\overline{\chi})}{\xi(1,\overline{\chi})} = -\sum_{n=1}\left(\frac{1}{1-\overline{\rho}_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) - \mathrm{B}(\overline{\chi})$$

ni hosil qilamiz. Bunda $L(\rho_n,\chi) = L(1-\rho_n,\overline{\chi}) = L(\overline{\rho}_n,\overline{\chi}) = L(1-\overline{\rho}_n,\chi) = 0,$ shuning uchun ham ρ_n va $1-\overline{\rho}_n$ lar $L(s,\chi)$ ning nollari va

$$\operatorname{Re} B(\chi) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\overline{\rho}_n}\right) = 0. \qquad (3.1.2)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Ma’lumki, Riman ζ(s) funksiyaning nollari to‘g‘risidagi quyidagi gipotezani ilgari surgan edi. ζ(s) funksiyaning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotadi. Bu tasdiqqa Riman gipotezasi deyiladi. Keyinchalik bu tasdiq $L(s,\chi)$ ning nollari uchun umumlashtirilib ”$L(s,\chi)$funksiyaning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotadi” – degan tasdiq vujudga keldi va uni Rimanning $L(s,\chi)$ nollari haqidagi umumlashgan gipotezasi deb atala boshlandi.

Hozirgacha bu ikkala tasdiq ham to‘la isbotlanmagan. Lekin olingan keyingi natijalarning barchasi Rimanning gipotezalari deb ataluvchi tasdiqlarning to‘g‘riligini isbotlashga asos bo‘ladi.

Umuman $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari to‘g‘risida quyidagi tasdiq Peydj tomonidan isbotlangan: agar $\chi(\mathrm{mod}\, q)$ bo‘lib $q \le T$ bo‘lsa, u holda barcha $L(s,\chi)$ funksiyalar

$$\sigma > 1 - \frac{C_1}{\ln T}, \quad |t| \le T \tag{3.1.3}$$

sohada kompleks nolga ega emas. (3.1.3) sohada $L(s,\chi)$ ning faqat $\chi(\bmod r)$ primitiv xarakter uchun bitta haqiqiy nolga ega bo‘lishi mumkin, u nol $1-\beta$ quyidagi tengsizlik

$$\frac{\tilde{N}_1}{\ln T} < 1-\beta < \frac{C_2}{r^{\frac{1}{2}} \ln^2 r}. \tag{3.1.4}$$

ni qanoatlantiradi.

3.2-§. Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho.

3.2.1.Dirixle L - funksiyasining kompleks nollari to‘g‘risida.

Faraz etaylik, $n-$ natural son, $s=\sigma+it-$ komrleks son, $\chi - q$ moduli bo‘yicha Dirixle xarakteri bo‘lsin. Ma’lumki, Dirixle $L-$ funksiyasi $L(s,\chi)$, $Res > 1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

tenglik bilan aniqlanadi [10]. Bu funksiyaning barcha kompleks nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda yotadi degan gipoteza mavjud bo‘lib u hozircha to‘liq isbotlanmagan. Lekin sonlar nazariyasining hozirgacha hal etilmagan ko‘pchilik masalalari shu gipoteza bilan bog‘liq.

Avvalo, $L(s,\chi)$ funksiyaning barcha kompleks nollarining $0<\sigma<1$ yo‘lakda joylashgani va ular $\sigma = \frac{1}{2}$ ga va haqiqiy o‘qqa nisbatan simmetrik joylashgani isbotlangan. Keyinchalik bu aniqlashtirilib

$$\sigma > 1 - \frac{c}{logq(|t|+3)}, \qquad q \ge 3, \qquad t - \text{ixtiyoriy haqiqiy son} \tag{3.2.1}$$

sohada Dirixle $L-$funksiyasining nollari mavjud emas ekanligi isbotlandi [10]. Shuning uchun Dirixle $L-$ funksiyasining kompleks nollari to‘g‘risida izlanishlar muhim hisoblanadi.

Ushbu paragraf $\chi(\mathrm{mod}q)$ kompleks xarakter bo‘lganda (3.2.1) dagi s o‘zgarmasning qiymatini aniqlashga bag‘ishlangan bo‘lib, unda avvalo s ning boshqa parametrlar bilan bog‘liq formulasi topilgan va undan foydalanib s ning qiymati hisoblangan. Xususan quyidagi teorema isbotlangan:

3.2.1-teorema. Agar $\chi(\mathrm{mod}q)$ kompleks xarakter bo‘lsa, u holda unga mos Dirixle $L-$ funksiyasi $L(s,\chi)$ ning

$$\sigma \geq 1-\frac{0{,}0119126}{lnq(|t|+3)}, \quad q\geq 3, \qquad t-\text{ixtiyoriy}$$

sohada nollari mavjud emas.

Bu teorema dastavval Peydj va Knapovskiylarga tegishli bo‘lib, undagi o‘zgarmaslarning son qiymatlari I.Allakov [20,21] tomonidan aniqlashtirilgan.

Faraz etaylik P yetarlicha katta natural son va $q\leq P$ bo‘lsin.

3.2.1-teoremaning isboti. Faraz etaylik $t\geq 0$ bo‘lsin. $L(s,\chi)$ ning $t<0$ dagi nollari $L(s,\bar{\chi})$ ning $t>0$ dagi nollari bilan qo‘shma kompleks bo‘lgani uchun ham bu farazimiz umumiylikni chegaralamaydi. φ haqiqiy son bo‘lganda

$$3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2\geq 0 \tag{3.2.2}$$

tengsizlikni qaraymiz. $Res=\sigma>1$ va $\chi(n)=exp(-i\omega(n))$ deb olib (2.2) da

$$-Re\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos\big(tlnn-\omega(n)\big)$$

tenglikdan foydalansak

$$3\left\{-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)\right\}+4\left\{-Re\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)\right\}+\left\{-Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right\}\geq 0 \tag{3.2.3}$$

ga ega bo‘lamiz. Avvalo $\chi(modq)$ kompleks primitiv xarakter bo‘lsin. (3.2.3) dagi har bir qo‘shiluvchini yuqoridan baholaymiz. $1<\sigma<1{,}03$ bo‘lsa, 1-lemmaga natija

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\chi_0(n)n^{-\sigma}\leq\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)<\frac{1}{\sigma-1}.$$

(3.2.3) dagi qolgan ikkita hadni baholash uchun [10] ning 133-betida keltirilgan formula

$$-Re\frac{L'}{L}(s,\chi)=\frac{1}{2}ln\frac{q}{\pi}-ReB(\chi)-Re\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-\frac{\gamma_0}{2}-$$

$$-Re\frac{1}{s+a}-Re\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+a+2n}-\frac{1}{2n}\right) \qquad (3.2.4)$$

dan foydalanamiz. (3.2.4) ning o‘ng tomonidagi oxirgi yig‘indi uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+a+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|<\frac{1}{2}\sum_{n\le t+3}\frac{1}{n}+\frac{|s+1|}{4}\sum_{n>t+3}\frac{1}{n^2}.$$

Bu yerda (2.3.5)-bahodan foydalansak

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+a+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|<c_1(t_0)\ln(t+3)$$

ni hosil qilamiz. Bunda $t\ge t_0\ (\ge 0)$ va

$$c_1(t_0)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\gamma_0+\frac{1}{2(t_0+3)}+\frac{1}{12(t_0+3)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4{,}1209}{(t_0+3)^2}}\right)\frac{1}{\ln(t_0+3)}\right\}. \qquad (3.2.5)$$

Shunday qilib

$$ReB(\chi)+Re\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}=0$$

ekanligini e’tiborga olib (3.2.4) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$-Re\frac{L'}{L}(s,\chi)=\frac{1}{2}lnq+c_1(t_0)\ln(t+3)-Re\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}$$

$$<c_1(t_0)l-Re\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}, \qquad \big(l=lnq(t+3)\big). \qquad (3.2.6)$$

Bu baho $\sigma>1$ bo‘lganda ixtiyoriy haqiqiy yoki kompleks primitiv xarakter uchun o‘rinli bo‘ladi. Endi

$$Re\frac{1}{s-\rho}=\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2}\ge 0$$

bo‘lgani uchun (3.2.6) ning o‘ng tomonidagi qatorning hammasini to‘laligicha yoki uning qismini tashlab yuborish mumkin.

Qaralayotgan holda χ^2 xarakter primitiv bo‘lmasligi mumkin. Agarda χ^2 xarakter bilan indutsirlangan primitiv xarakterni χ_1 deb olsak, u holda $\chi_1 \neq \chi_0$ va

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi^2) - \frac{L'}{L}(s,\chi_1)\right| \leq \sum_{p\backslash q} \frac{lnp}{p^{\sigma}-1} \leq lnq.$$

Shuning uchun ham (2.6) ga ko‘ra

$$-Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2) < \frac{3}{2}lnq + c_1(2t_0)\ln(2t+3) < c_2(t_0)l,$$

Bunda

$$c_2(t_0) = \max\left\{c_1(2t_0)\left(1+\frac{ln2}{ln(t_0+3)}\right); \frac{3}{2}\right\}.$$

Hosil qilingan baholarni (2.3) ga qo‘yib va $t=\gamma$, $(\rho=\beta+i\gamma)$, $t_0=0$,

$$\sigma = 1+\delta_1 l^{-1},\ \ \delta_1 = \frac{-3+2\sqrt{3}}{c_3(t_0)},\quad c_3(t_0) = 4c_1(t_0)+c_2(t_0)$$

deb olib $\chi_1(modq)$ primitiv xarakter uchun lemmadagi tasdiqni hosil qilamiz.

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{p\backslash q, p\nmid q_1}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$

tenglikka asosan $L(s,\chi)$ funksiyaning $L(s,\chi_1)$ ning nollaridan farqli nollari $1-\chi_1(p)p^{-s}$ ko‘paytuvchining chekli sondagi nollaridan iborat bo‘lib $\sigma=0$ to‘g‘ri chiziqda yotadi. Shuning uchun ham bu yerda χ ning primitivligini talab qilmasak ham lemma o‘rinli bo‘lib qoladi.

3.2.2. *L*-funksiyaning nollarining chegarasi. Endi biz $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Bu teorema dastavval Peydj va Knapovskiy [16] larga tegishli bo‘lib, undagi o‘zgarmaslarning son qiymatlari I.Allakov [21,22] tomonidan aniqlashtirilgan. P yetarlicha katta natural son va $q \leq P$ bo‘lsin.

3.2.2-teorema. Agar $\chi(modq)-$ Dirixle xarakteri va $L(s,\chi)$ unga mos Dirixle $L-$ funksiyasi bo‘lsa, u holda:

a) Dirixle $L(s,\chi)$lari (Bunda $s=\sigma+it$)

$$1-\frac{0{,}0019128}{lnP}\le\sigma\le 1,\qquad |t|\le P^{\frac{19}{4}} \tag{3.2.7}$$

sohada faqat bitta $\tilde{\chi}(mod\tilde{q}),(\tilde{q}\le P)$ haqiqiy primitiv xarakter uchun yagona haqiqiy nol $\tilde{\delta}=1-\tilde{\beta}$ ga ega bo‘lishi mumkin;

b) agar $L(s,\chi)$ ana shunday (maxsus) haqiqiy nolga ega bo‘lsa, (3.2.7) sohani

$$\sigma>1-\frac{1}{81lnP}\ln\left(\frac{1}{200\tilde{\delta}lnP}\right),\quad |t|\le P^{\varepsilon},\qquad \tilde{\delta}lnP\le\frac{1}{200e} \tag{3.2.8}$$

bilan almashtirish mumkin;

c) bu yerdagi maxsus nol $\tilde{\beta}$ quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi

$$\frac{0{,}4941}{\tilde{q}^{\frac{1}{2}}\,ln^2\tilde{q}}<1-\tilde{\beta}<\frac{0{,}3}{ln\tilde{q}}\,. \tag{3.2.9}$$

Bu teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi lemmalar kerak bo‘ladi.

3.2.1-lemma. Agar $\chi(modq)$, $(q\ge 3)$ haqiqiy bosh bo‘lmagan xarakter bo‘lsa, uholda unga mos Dirixle $L-$ funksiyasi $L(s,\chi)$ ning

$$\sigma\ge 1-\frac{0{,}0109986}{lnq(|t|+3)},\quad q\ge 3,\qquad t-\text{ixtiyoriy}$$

sohada ko‘pi bilan birta oddiy haqiqiy nolga ega bo‘lishi mumkin.

Isboti. $\chi-$ haqiqiy primitiv xarakter bo‘lsin. U holda $\chi^2=\chi_0$ va

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi^2)-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right|\le lnq.$$

(3.2.4)- tengsizlik va

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right|<\frac{1}{2}\sum_{n\le t+3}\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{\sigma^2+t^2}}{4}\sum_{n>t+3}\frac{1}{n^2}$$

ga natija

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=-\frac{1}{s-1}+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-Re\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)+B_0$$

([23] dagi 3-bob 3-teorema) dan

$$-Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s)<Re\frac{1}{s-1}+c_1(t_0)\,ln(t+3) \tag{3.2.10}$$

kelib chiqadi. Bu yerda $B_0 -$ musbat o‘zgarmas son, $c_1(t_0)$ esa (3.2.5) tenglik bilan aniqlanadi. Shunday qilib (3.2.6) ga natija

$$-Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2) < Re\frac{1}{\sigma-1+2it}+c_4(t_0)l,$$

$$c_4(t_0)=\max\left\{c_1(2t_0)\left(1+\frac{ln2}{ln(t+3)}\right);1\right\}.$$

Endi $-Re\frac{L'}{L}(\sigma+3it,\chi^3)$ ni qaraymiz. $\chi -$ haqiqiy primitiv xarakter bo‘lgani uchun ham $(\chi^2=\chi_0)$, $\chi^3\neq\chi_0$. Lekinda χ^3ning primitiv bo‘lishi shart emas. Shuning uchun ham 3.2.1- teoremadagi singari mulohaza yuritibquyidagiga ega bo‘lamiz:

$$-Re\frac{L'}{L}(\sigma+3it,\chi^3) < c_5(t_0)\,lnq(t+3).$$

Bunda

$$c_5(t_0)=\max\left\{c_1(3t_0)\left(1+\frac{ln3}{ln(t_0+3)}\right);\frac{3}{2}\right\}.$$

Hosil bo‘lgan baholarni

$$5\left\{-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_0)\right\}+8\left\{-Re\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)\right\}+4\left\{-Re\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right\}$$
$$+\left\{-Re\frac{L'}{L}(\sigma+3it,\chi^3)\right\}\geq 0 \qquad (3.2.11)$$

tengsizlikka qo‘yamiz va $t=\gamma$, $(\rho=\beta+i\gamma)$, $t_0=0$, $\sigma=1+\delta_2 l^{-1}$, $\gamma\geq\ \delta_2 l^{-1}$,

$$\delta_2=\left(-29+\sqrt{1160}\right)(5c_6(t_0))^{-1},\quad c_6(t_0)=8c_1(t_0)+4c_4(t_0)+c_{11}(t_0)$$

deb olib

$$\beta<1-0{,}0109986\left(lnq(|t|+3)\right)^{-1} \qquad (3.2.12)$$

ni hosil qilamiz. Agar $\gamma\geq\ \delta_2(lnq)^{-1}$bo‘lsa, $\gamma\geq\ \delta_2 l^{-1}$ bo‘ladi, shuning uchun ham $\chi -$ haqiqiy lekin bosh bo‘lmagan xarakter bo‘lgani holdagi $L(s,\chi)$ funksiyaning $\gamma<\ \delta_2(lnq)^{-1}$ shartni qanoatlantiruvchi nollarini qarash yetarli.

(3.2.6) dan foydalanib $\sigma>1$ bo‘lganda

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi)<c_7(t_0,q_0)\,lnq-\sum_{\rho}\frac{1}{\sigma-\rho}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu yerda

$$c_7(t_0, q_0) = c_1(t_0)\left\{1 + \frac{\ln(2 + \delta_2 (lnq_0)^{-1})}{lnq_0}\right\}, \quad q \geq q_0 \geq 3.$$

Oxirgi tengsizlikning o‘ng tomonidagi yig‘indi haqiqiy bo‘ladi, chunki unga kiruvchi nollar qo‘shma kompleks. Agar $\beta \pm i\gamma$, $(\gamma \neq 0)$ ifoda $L(s,\chi)$ ning noli bo‘lsa, u holda

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) < c_7(t_0, q_0)\, lnq - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} \tag{3.2.13}$$

ga ega bo‘lamiz. 1.1-lemmaga natija

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)n^{-\sigma} \geq -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) > -\frac{1}{\sigma-1}.$$

Endi $\sigma = 1 + 2\delta_2(lnq)^{-1}$ deb olamiz U holda $|\gamma| < \delta_2(lnq)^{-1} = \frac{1}{2}(\sigma-1) < \frac{1}{2}(\sigma-\beta)$ bo‘ladi. Shunday qilib (3.2.13) dan

$$-\frac{1}{\sigma-1} < c_7(t_0, q_0)\, lnq - \frac{8}{5(\sigma-\beta)}$$

kelib chiqadi. Bu yerdan $t_0, = 0,\quad q_0 = 3$ deb olib

$$\beta < 1 - 0{,}0357306(lnq)^{-1} \tag{3.2.14}$$

ga ega bo‘lamiz.

Yuqoridagi singari mulohaza yuritib (3.2.14) tengsizlik ikkita qo‘shma kompleks nollar o‘rniga ikkita haqiqiy nol bo‘lsa ham o‘z kuchini saqlab qoladi. Faqat bunda $(lnq)^{-1}$ ning oldidagi sonli ko‘paytuvchi o‘zgaradi, ya’ni bu holda (3.2.14)ning o‘rniga

$$\beta < 1 - 0{,}0738124(lnq)^{-1} \tag{3.2.15}$$

ga ega bo‘lamiz. Bunda β – ikki karrali nol. (3.2.12), (3.2.14) va (3.2.15) lardan 3.2.1-lemma kelib chiqadi.

Isbotning nihoyasida (3.2.11) tengsizlikning $5 + 8cos\varphi + 4cos2\varphi + cos3\varphi \geq 0$ tengsizlikdan kelib chiqishini ta’kidlab o‘tamiz.

3.2.2-lemma. Agar χ_0^* 1moduli bo‘yicha bosh xarakter bo‘lsa, u holda $L(s,\chi_0^*) = \zeta(s)$ funksiya

$$\sigma \geq 1 - \frac{0{,}1036708}{lnq\left|\frac{t}{17}\right|}, \qquad |t| \geq 21$$

sohada nolga ega emas.

Bu lemma J.B.Rosser, L.Schoenfeld [23] tomonidan isbotlangan.

3.2.2-teoremaning isboti. Teoremadagi a) tasdiq teorema shartiga ko'ra $q \leq P, |t| \leq P^{\frac{19}{4}}$ ekanligini etiborga olsak va $P > e^{50}$ deb faraz qilsak 3.2.1-3.2.2-lemmalar va 3.2.1- teoremadan kelib chiqadi.

Teoremadagi b) tasdiq Chen Jing-run [20] ning 3-teoremasidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham Chen Jing-run [20] ning 3-teoremasiga ko'ra $|t| \leq q^{\varepsilon}$ bo'lsa, $\tilde{\delta} > (200e^{81\lambda}lnq)^{-1}$ bajariladi. Bunda $\lambda = \delta lnq,\ \delta \neq \tilde{\delta},\ \delta = 1 - \beta$ va β bu $\rho = \beta + i\gamma$ nolning haqiqiy qismi. Bu tengsizlik

$$\beta < 1 - \frac{1}{81lnq}\ln\left(\frac{1}{200\tilde{\delta}lnq}\right)$$

ga teng kuchli. Bundan esa $q \leq P$ ekanligini e'tiborga olsak (3.2.8)-tengsizlik kelib chiqadi.

(3.2.9)-tengsizlikning o'ng tomoni J.Pintz [21] natijasidan kelib chiqadi. Unga ko'ra agar $\chi(\mathrm{mod}q) -$ bosh xarakterdan farqli haqiqiy xarakter bo'lsa, u holda $L(\sigma, \chi) -$ funksiya $q \geq q_0(\varepsilon)$ bo'lganda $[1 - (2 - 3\varepsilon)(lnq)^{-1}; 1]$ intervalda yagona oddiy haqiqiy nolga ega bo'lishi mumkin. Bu yerda $q_0(\varepsilon)$ $-$qiymati effektiv hisoblanadigan $\varepsilon > 0$ ga bog'liq b o'lgan o'zgarmas son bo'lib [17] dagi (3.2.12) munosabatga asosan $(2 - 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1} < (\ln(2\sqrt{q}lnq))^{-1}lnq$ tengsizlikdan aniqlanishi kerak. Biz $\varepsilon = \frac{17}{30}$ deb olamiz. U holda oxirgi tengsizlik barcha $q \geq 3$ lar uchun o'rinli bo'ladi va yuqorida keltirilgan J.Pintz natijasidan (3.2.9)-tengsizlikning o'ng tomoniga ega bo'lamiz.

Endi (3.2.9)-tengsizlikning chap tomonini isbotlaymiz. Faraz etaylik $\tilde{\beta} - L(\sigma, \tilde{\chi})$-funksiyaning maxsus haqiqiy noli va $\tilde{\chi}(\mathrm{mod}q)$ esa unga mos maxsus haqiqiy xarakter bo'lsin. O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra $L(1, \tilde{\chi}) = L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) + (1 - \tilde{\beta})L'(\sigma_1, \tilde{\chi}),$ Bunda $\tilde{\beta} \leq \sigma_1 \leq 1$. Bu yerdan

$$1 - \tilde{\beta} = L(1, \tilde{\chi})|L'(\sigma_1, \tilde{\chi})|^{-1}. \qquad (3.2.16)$$

(3.2.16) ning o‘ng tomonini qaraymiz. Avvalo $1 - c_8(lnq)^{-1} \leq \sigma_1 \leq 1$ bo‘lganda $|L'(\sigma_1, \tilde{\chi})|$ ni baholaymiz. Bunda (3.2.9) ning o‘ng tomoniga natija $c_8 = 0{,}3$.

$L(\sigma, \tilde{\chi})$-funksiyaning ta’rifidan

$$|L'(\sigma_1, \tilde{\chi})| \leq \left|\sum_{n\leq q} \tilde{\chi}(n) n^{-\sigma_1} lnn\right| + \left|\sum_{n>q} \tilde{\chi}(n) n^{-\sigma_1} lnn\right|. \qquad (3.2.17)$$

(3.2.4) dan

$$\sum_{n\leq q} \frac{lnn}{n} \leq \left|-\gamma_1 + \frac{1}{2} ln^2 q + \frac{1}{2q} lnq\right| + \frac{1}{12q^2} |1 - lnq|$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda γ_1 bilan $\zeta(s)$ ning uning qutbi atrofida Loran qatoriga yoyilmasidagi $s - 1$ ning oldidagi koeffitsient belgilangan. (2.3.4)- formuladan foydalanib hisoblash ko‘rsatadiki $\gamma_1 = 0{,}07281$ va demak biz oxirgi tengsizlikning o‘ng tomonida $-\gamma_1$ni tushurib qoldirishimiz mumkin. Endi $n^{-\sigma_1} \leq n^{-1} e^{c_8}$ bo‘lgani uchun ham

$$\left|\sum_{n\leq q} \tilde{\chi}(n) n^{-\sigma_1} lnn\right| < e^{c_8} \left(\frac{1}{2} ln^2 q + \frac{1}{2q} lnq + \frac{1}{12q^2} |1 - lnq|\right).$$

(3.2.17) ning o‘ng tomonidagi yig‘indiga bo‘laklab yig‘ish usuli va Vinogradov-Poue tengsizligini qo‘llasak

$$\left|\sum_{n>q} \tilde{\chi}(n) n^{-\sigma_1} lnn\right| \leq q^{-\sigma_1}(lnq) \underbrace{\max}_{N} \left|\sum_{n=q+1}^{N} \tilde{\chi}(n)\right| \leq e^{c_8} \frac{ln^2 q}{q^{\frac{1}{2}}}$$

hosil bo‘ladi. Shunday qilib (3.2.17) dan

$$|L'(\sigma_1, \tilde{\chi})| \leq e^{c_8} \left(\frac{1}{2} ln^2 q + \frac{ln^2 q}{q^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q} lnq + \frac{1}{12q^2} |1 - lnq|\right) \qquad (3.2.18)$$

ga ega bo‘lamiz. Endi $L(1, \tilde{\chi})$ ni quyidan baholaymiz. $q = |d|$ deb olib quyidagi ikkita holni qaraymiz.

a). $d < 0$ bo‘lsin. U holda [26] ning 6-§ dagi (15)- formulaga ko‘ra

$$L(1,\tilde{\chi}) = 2\pi \frac{h(d)}{\omega |d|^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.2.19}$$

Bunda $h(d)$ bilan diskriminanti d ga teng bo‘lgan kvadratik formalarning sinflar soni belgilangan, ω shu formaning avtomorfizmlari soni. Bu yerda $h(d) \geq 1$ va

$$\omega = \begin{cases} 2, \text{ agar } d<-4 \text{ bo‘lsa;} \\ 4, \text{ agar } d=-4 \text{ bo‘lsa;} \\ 6, \text{ agar } d=-3 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

ekanligini e’tiborga olib (3.2.19) dan

$$L(1,\tilde{\chi}) \geq c_9(d)|d|^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.2.20}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bunda

$$c_9(d) = \begin{cases} \pi, \text{ agar } d<-4 \text{ bo‘lsa;} \\ \frac{\pi}{2}, \text{ agar } d=-4 \text{ bo‘lsa;} \\ \frac{\pi}{3}, \text{ agar } d=-3 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

(3.2.19) va (3.2.20) larga asosan (3.2.16) dan

$$1 - \tilde{\beta} \geq c_{10} q^{-\frac{1}{2}} (lnq)^{-2}, \qquad q \geq q_0, \tag{3.2.21}$$

bu yerda $c_{10} = c_9 \cdot c_{11}^{-1}$ va

$$c_{11} = e^{c_8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{q_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q_0 lnq_0} + \frac{|1 - lnq_0|}{12 q_0^2 ln^2 q_0} \right). \tag{3.2.22}$$

b). Endi faraz qilaylik $d > 0$ bo‘lsin. Bu holda [26] ning 6-§ dagi (16)-formulaga ko‘ra

$$L(1,\tilde{\chi}) = h(d) d^{-\frac{1}{2}} ln\varepsilon, \tag{3.2.23}$$

Bunda $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(t_0 + \sqrt{d} u_0\right) > 1$, $t_0 > 0$, $u_0 > 0$ (bu yerda u_0 bilan $t^2 - du^2 = 4$ tenglamaning eng kichik yechimi belgilangan). $h(d) \geq 1$ va $ln\varepsilon > \frac{1}{2} lnd$ bo‘lgani uchun (3.2.23) va (3.2.16) dan

$$1-\tilde{\beta} \geq \left(2c_{11}q^{\frac{1}{2}}lnq\right)^{-1}$$

ga ega bo‘lamiz.

Biz $q \geq 3$ deb hisoblashimiz mumkin. Shuning uchun ham agar $\frac{1}{2}lnq \geq \frac{\pi}{3}$, ya’ni $q > 8$ bo‘lsa, u holda doimo (3.2.21) o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib $q \geq q_0 > 8$ va $c_8 = 0{,}3$ bo‘lganda (2.22) dan $c_{10} = 0{,}5399$ ekanligini topamiz. $3 \leq d \leq 8$ bo‘lganda $t^2 - du^2 = 4$ Pell tenglamasini $3 \leq d \leq 8$ va $d \equiv 0(mod4)$ yoki $d \equiv 1(mod4)$ shartlarda yechib uning eng kichik musbat yechimini topamiz. Bu tenglamaning ko‘rsatilgan shartlardagi barcha yechimlari [26], IV-bobi 48-§ da keltirilgan. Bundan foydalanib $ln\varepsilon \geq ln\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) > 0{,}9624$ ekanligini topamiz. Shunday qilib qaralayotgan holda $c_{10} = 0{,}4961$ deb olishimiz mumkin. $0{,}5399 > 0{,}4961$ bo‘lgani uchun barcha $q \geq q_0 = 3$ lar uchun $c_{10} = 0{,}4961$ deb olamiz. Shuni ham ta’kidlash kerakki, agar $q > e^{\pi}$ yoki $q > e^{2\pi}$ bo‘lsa, mos ravishda $c_{10} = 0{,}9535$ yoki $c_{10} = 2{,}104$ deb olish mumkin. Ushbu paragrafning oxirida shuni ham ta’kidlab o‘tamizki, 3.2.2-teoremani isbotlashda biz R.J.Miech [23]ning natijasidan bevosita foydalana olmaymiz, chunki u ishdagi natijalar $q$ning yetarlicha katta qiymatlari uchun isbotlangan. 3.2.2-teoremaning c) qismida $\tilde{\beta}$ −haqiqiy nolning quyidan bahosi sifatida (3.2.14)- bahoni olish mumkin edi, lekin $L(s,\chi)$ ning faqat haqiqiy nollari qaralgan J.Pintz [21] ishidan $\varepsilon = \frac{17}{30}$ da unga qaragangan yaxshiroq natija kelib chiqadi.

Ushbu ishda biz Dirixle L −funksiyasi $L(s,\chi)$ning no‘llari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14{,}135$ bo’lganda $\sigma > 1 - \frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning no‘llari yo‘q ekanligi ko’rsatilgan. Olihgan natija [29]dagi shu boradagi natijaning son qiymati jihatdan yaxshilanganidir.

3.3 §. *L*-funksiyaning haqiqiy nollarining chegarasi.

Dirixle L- funksiyasi bilan bog‘liq ko‘pchilik masalalarni yechishda uning nollari yo‘q bo‘lgan sohaning chegarasini bilish muhim ahamiyatga ega. Ma’lumki $L(\sigma,\chi)$ (bunda $\chi(\text{mod}q)$ – haqiqiy primitiv xarakter) funksiya

$$1-\frac{c_1}{\ln q} \leq \sigma \leq 1 \tag{3.3.1}$$

intervalda ko‘pi bilan faqat bitta haqiqiy nol β ga ega bo‘lishi mumkin va bu nol mavjud bo‘lsa, u yagona hamda

$$\beta \le 1 - \frac{c_2}{q^{1/2}\ln^2 q} \qquad (3.3.2)$$

shartni qanoatlantiradi. Bunda s_1 va s_2 lar musbat o‘zgarmas sonlar. $s_1$ning son qiymati ko‘pchilik matematiklar tomonidan, xususan Mich R.J. [23] $C_1 = 0{,}28$ deb olish mumkinligini, Pintz J. [21] esa bu bahoni $q \ge q(\varepsilon)$da$C_1 = 2 + 0(1)$ deb olish mumkinligini isbotladi.

Shuningdek, $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari haqidagi bu muammo arifmetik progressiyadagi tub sonlar taqsimoti uchun chiqarilgan asimptotik formulaning qoldiq hadini baholashda ham juda muhim ahamiyatga egadir. Shuning uchun ham bu paragrafning qolgan qismini $\tilde{n}_2$ ning qiymatini aniqlashga bag‘ishlaymiz va quyidagi teoremani isbotlaymiz.

3.3.1-teorema. Agar d ushbu $ax^2 + bxy + cy^2$ kvadratik formaning diskriminanti bo‘lib $q = |d|$ bo‘lsa, u holda

$$1 - \beta > \begin{cases} C_3(q^{\frac{1}{2}} ln^2 q)^{-1}, & \text{agarda } d < 0 \text{ bo‘lsa;} \\ C_4(q^{\frac{1}{2}} lnq)^{-1}, & \text{agarda } d > 0 \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

bunda

$$C_3 = \begin{cases} 0{,}5398\,, \text{agar } q = 3 \text{ bo‘lsa;} \\ 0{,}9534\,, \text{ agar } q = 4 \text{ bo‘lsa;} \\ 2{,}103\,, \text{ agar } q \ge 5 \text{ bo‘lsa;} \end{cases} \text{ va } \quad C_4 = \begin{cases} 0{,}2566\,, \text{ agar } q = 3 \text{ bo‘lsa;} \\ 0{,}3035\,, \text{ agar } q = 4 \text{ bo‘lsa;} \\ 0{,}3347\,, \text{ agar } q \ge 5 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

Ko‘pchilik hollarda (3.3.2) ko‘rinishdagi bahodan foydalanish qulay. Shuning uchun ham ikkala $d < 0$ va $d > 0$ hollarni birlashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz.

Natija. (3.3.2) bahoda qatnashuvchi C_2 o‘zgarmas sonning qiymati sifatida quyidagilarni olish mumkin:

$$C_2 = \begin{cases} 0{,}4771\,, \text{ agar } 3 \le q \le 8 \text{ bo‘lsa;} \\ 0{,}53984\,, \text{ agar } 9 \le q \le 23 \text{ bo‘lsa;} \\ 0{,}9534\,, \text{ agar } 24 \le q \le 535 \text{ bo‘lsa;} \\ 2{,}103\,, \text{ agar } q \ge 536 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

Teoremaning isboti. β bilan $L(s,\chi)$ funksiyaning maxsus nolini belgilaylik. $\chi(\text{modq})$ unga mos maxsus xarakter bo‘lsin. U holda o‘rta qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra

$$L(1,\chi) = L(\beta,\chi) + (1-\beta)\, L'(\sigma_1,\chi)$$

deb yoza olamiz. Bunda $\beta \le \sigma_1 \le 1$. Bu yerdan $L(\beta,\chi) = 0$ bo‘lgani uchun

$$1-\beta=\frac{L(1,\chi)}{L'(\sigma_1,\chi)} \tag{3.3.3}$$

ga ega bo‘lamiz. (3.3.3) ning o‘ng tomonini qaraymiz. Avvalo $\beta\le\sigma_1\le 1$ bo‘lganda $L'(\sigma_1,\chi)$ ni baholaymiz. (3.3.1) ga natija

$$\beta\ge 1-C_1(lnq)^{-1}.$$

C_1 ning son qiymatini Pintz J. [21] va Allakov I. [26] ishidan aniqlash mumkin. [21] dagi (3.3.12) munosabatda $\varepsilon=\frac{17}{30}$ deb olsak barcha $q\ge 3$ lar uchun $C_1=0.3$ ekanligini hosil qilamiz. Shuning uchun ham $1-0{,}3(lnq)^{-1}\le\sigma_1\le 1$ deb olish mumkin.

$L(s,\chi)$ funksiyaning ta’rifidan

$$|L'(\sigma_1,\chi)|\le\left|\sum_{n\le q}\frac{\chi(n)lnn}{n^{\sigma_1}}\right|+\left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\chi(n)lnn}{n^{\sigma_1}}\right|. \tag{3.3.4}$$

[21] dagi 4-teoremaga ko‘ra

$$\sum_{n\le q}\frac{lnn}{n}\le|\gamma_1|+\frac{ln^2q}{2}+\frac{lnq}{2q}+\frac{|1-lnq|}{12q^2},$$

bu yerda γ_1 Rimanning dzeta funksiyasini uning qutbi atrofida Loran qatoriga yoyilmasidagi $(s-1)$ ning oldidagi koeffitsient. Shuning uchun ham $|\gamma_1|\le\frac{1}{4}$ va $n^{\sigma_1}\le n^{-1}e^{0.3}$ ekanligini e’tiborga olib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left|\sum_{n\le q}\frac{\chi(n)lnn}{n^{\sigma_1}}\right|<e^{0.3}\left(\frac{ln^2q}{2}+\frac{1}{4}+\frac{lnq}{2q}+\frac{|1-lnq|}{12q^2}\right)$$

va

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\chi(n)lnn}{n^{\sigma_1}}\right|\le\frac{lnq}{q^{\sigma_1}}\max_N\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right|\le e^{0.3}\frac{ln^2q}{q^{\frac{1}{2}}}.$$

Bu yerda biz qismlarga ajratib yig‘ishdan va Vinogradov-Poye tengsizligidan foydalandik. Bulardan va (3.3.4) dan

$$|L'(\sigma_1,\chi)|\le e^{0.3}\left(\frac{ln^2q}{2}+\frac{1}{4}+\frac{ln^2q}{q^{\frac{1}{2}}}+\frac{lnq}{2q}+\frac{|1-lnq|}{12q^2}\right) \tag{3.3.5}$$

ni hosil qilamiz.

Endi $L(1,\chi)$ni baholaymiz.

A). Faraz qilaylik $d < 0$ bo‘lsin. U holda [13] ning 6-§ dagi (15) –formulaga asosan

$$h(d) = \frac{\omega|d|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} L(1,\chi) \qquad (3.3.6)$$

o‘rinli. Bu yerda $h(d)$ va ω lar mos ravishda diskriminanti d ga teng bo‘lgan kvadratik formalar sinflari soni va diskriminanti d ga teng bo‘lgan kvadratik formalar avtomorfizmlari soni. $h(d) \geq 1$ va

$$\omega = \begin{cases} 2, \text{agar } d < -4 \text{ bo'lsa;} \\ 4, \text{agar } d = -4 \text{ bo'lsa;} \\ 6, \text{agar } d = -3 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo‘lgani uchun (3.3.6) dan

$$L(1,\chi) \geq c_5\, |d|^{-\frac{1}{2}}, \qquad (3.3.7)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$c_5 = \begin{cases} \pi, \text{agar } d < -4 \text{ bo‘lsa;} \\ \frac{\pi}{2}, \text{agar } d = -4 \text{ bo‘lsa;} \\ \frac{\pi}{3}, \text{agar } d = -3 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

(3.3.5) va (3.3.7) larni inobatga olib (3.3.3) dan

$$1 - \beta \geq C_3 (q^{\frac{1}{2}} ln^2 q)^{-1} \qquad (3.3.8)$$

kelib chiqadi. Bunda $C_3 = C_5\, C_6^{-1}$ va

$$C_6 = e^{0.3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4ln^2 q_0} + \frac{1}{q_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q_0 ln q_0} + \frac{|1 - ln q_0|}{12 q_0^2 ln^2 q_0}\right), \quad (q \geq q_0). \qquad (3.3.9)$$

Bu yerdan ketma-ket $q \geq q_0 = 3,4,5$ deb olsak teoremaning birinchi qismi kelib chiqadi.

B). Endi $d > 0$ bo‘lsin. U holda [10] ning 6-§ dagi (16) –formulaga natija

$$h(d) = \frac{|d|^{\frac{1}{2}}}{ln\varepsilon} L(1,\chi)$$

o‘rinli. $h(d) \geq 1$ bo‘lgani uchun bundan

$$L(1,\chi) \geq (ln\varepsilon)|d|^{-\frac{1}{2}} \qquad (3.3.10)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(t_0 + \sqrt{d}u_0\right) > 1,\ t_0 > 0,\ u_0 > 0;\ \ u_0$ bu $t^2 - du^2 = 4$ tenglamaning eng kichik yechimi.

$t_0 \geq \sqrt{4+d}$ bo‘lgani uchun $ln\varepsilon > \frac{1}{2} lnd$. Shuning uchun ham (3.3.10) dan

$$L(1,\chi) \geq \frac{1}{2}|d|^{-\frac{1}{2}} lnd \ . \qquad (3.3.11)$$

Shunday qilib (3.3.3), (3.3.5) va (3.3.11) lardan

$$1-\beta \geq C_4(q^{\frac{1}{2}}lnq)^{-1},$$

kelib chiqadi. Bunda$C_4 = \frac{1}{2C_6}$. Bu yerdan $q \geq q_0 = 3{,}4{,}5$ deb olsak teoremaning ikkinchi qismi kelib chiqadi. Shuning bilan teorema to‘la isbot bo‘ldi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki,$q_0 > 5$ bo‘lsa, (3.3.9) dan foydalanib C_3 va C_4 larning son qiymatlarini biroz yaxshilash mumkin.

Endi natijani isbotlaymiz. (3.3.5) va (3.3.10) larga natija (3.3.3) dan

$$1-\beta \geq \frac{1}{C_6}(ln\varepsilon)(q^{\frac{1}{2}}ln^2q)^{-1} \qquad (3.3.12)$$

kelib chiqadi. Shuning uchun ham (3.3.8) va (3.3.12) dan , agar $ln\varepsilon \geq C_5$ bo‘lsa doimo (3.3.8) bajariladi. Agar q>8 bo‘lsa, $ln\varepsilon > lnq$ bo‘lganda $ln\varepsilon > \frac{\pi}{3}$ bo‘ladi; agar q>23 bo‘lsa, $ln\varepsilon > lnq$ bo‘lganda $ln\varepsilon > \frac{\pi}{2}$ bo‘ladi; agar q>535 bo‘lsa, $ln\varepsilon > lnq$ bo‘lganda $ln\varepsilon > \pi$ bo‘ladi.

Endi natijani to‘la isbotlash uchun $3 \leq q \leq 8$ bo‘lgan holni qarash qoldi. Bu holda $t^2 - du^2 = 4$ tenglamani $3 \leq q \leq 8,\ q = |d|, d \equiv 0(mod4)$ yoki $d \equiv 1(mod4)$ shartlarda yechib eng kichik musbat yechimlarini aniqlaymiz [10]. U holda $ln\varepsilon \geq ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0{,}4961$ bajariladi va $0{,}4771 > \frac{\pi}{3}$ ekanligini e’tiborga olsak natijaning qaralayotgan hol uchun isboti kelib chiqadi. Natija to‘la isbotlandi.

III-bob uchun xulosalar

Agar $\sigma > 1$ bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $\sigma < 0$ bo‘lsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial bo‘lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya’ni $0 \le \sigma \le 1$ ga kritik yo‘lak (polosa) deb ataladi. Bulardan tashqari Riman $\zeta(s)$ to‘g‘risida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi - degan gipotezasi hozirgacha to‘la isbotlangan emas.

1914 yilda G. Xardi $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda $\zeta(s)$ ning cheksiz ko‘p nollarining yotishini isbotladi. 1942 yilda A. Selberg esa bu nollarning $\zeta(s)$ ning barcha nollari orasida musbat zichlikka ega ekanligini isbotladi.

Valle-Pussen va Adamarlar 1898 yilda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda $s = 1$ da $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbotladilar. Aniqroq qilib aytganda Valle-Pussen agar

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\ln t}, \quad t \ge 2$$

bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko‘rsatishgan. Bu yerda $C_1 -$qandaydir musbat doimiy son.

1948 yilda A. Selberg va P. Erdyoshlar bu natijaning elementar isbotini berdilar. Shundan keyin N. Chudakov agar

$$\sigma > 1 - \frac{C_2}{\left(\ln^{3/4} t\right)(\ln\ln t)^{3/4}}$$

bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbot qildi. 1958 yilda I. M. Vinogradov va N. M. Korobovlar agar

$$\sigma > 1 - \frac{C\,(\alpha)}{(\ln t)^{\alpha}}, \quad \alpha > \frac{2}{3}$$

bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko‘rsatishdi.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali no‘li $\beta = \frac{1}{2} + i\ 14,134725$ ekanligi isbotlangan. $\zeta(s)$ ning no‘llari haqiqiy o’qga nisbatan simmetrik joylashgani $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{2} - i14{,}134725$ ham $\zeta(s)$ ning noli bo’ladi. Demak, $0 \le \sigma \le 1$,

$-14{,}134725 < t < 14{,}134725$ to'g'ri to'rtburchakning ikkinchi va uchinchi trivial bo'lmagan no'llari $\beta_2 = \frac{1}{2} + i21{,}022;\ \bar{\beta}_2 = \frac{1}{2} - i21{,}022; \beta_3 = \frac{1}{2} + i25{,}011$, $\bar{\beta}_3 = \frac{1}{2} - i25{,}011$ ekanligi ma'lum. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0 < t \le 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha no'llari $\sigma = 1/2$ to'g'ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Biz quyida $\zeta(s)$ no'llari qaysi olimlar tomonidan kashf etilganligi xaqidagi ma'lumotlar jadvalini keltiramiz.

Yillar	Nollari soni	Kim tomonidan topilgani
1859 (Taxmin qilingan)	1	B. Rimann
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchincoн
1935	1041	E. C. Titchmarsh
1953	1104	A. M. Turing
1956	15000	D. H. Lehmer
1956	25000	D. H. Lehmer
1958	35337	N. A. Meller
1966	250000	R. S. Lehman
1968	3500000	J. B. Rosser ва бошқалар
1977	40000000	R. P. Brent
1979	81000001	R. P. Brent
1982	200000001	R. P. Brent ва бошқалар
1983	300000001	J. вan de Lune, H. J. J. te Riele
1986	1500000001	J. вan de Lune ва бошқалар
2001	10000000000	J. вan de Lune
2004	900000000000	S. Wedeniwski
2004	10000000000000	X. Gourdon

Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar dolzarb hisoblanadi.

Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o'zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ bo'lganda

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyadatub sonlar soninnig cheksiz ko'p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko'plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi [5],[35],[32].

Ushbu ishda Dirixle $L-$funksiyasi $L(s,\chi)$ning no'llari haqidagi keyingi ma'lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14{,}135$ bo'lganda $\sigma > 1 - \frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning no'llari yo'q ekanligi ko'rsatilgan. Olihgan natija [29] dagi shu boradagi natijaning son qiymati jihatdan yaxshilanganidir.

Xulosalar

1. $\zeta(s)$ funksiyasi sonlarning analitik nazariyasida eng muhim ahamiyatga ega bo‘lgan funksiyalardan biri ekan.

2. $\zeta(s)$ ning trivial bo‘lmagan nollari $0 < \operatorname{Re} s < 1$ yo‘lakda joylashgan.

3. $\zeta(s)$ cheksiz ko‘p trivial bo‘lmagan nollarga ega. Bu nollarning barchasi $\operatorname{Re} s = \sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda yotadi degan Riman gipotezasi mavjud. Bu gipoteza hozircha isbotlanmagan. Lekin $\zeta(s)$ ning aniqlangan barcha nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda yotar ekan.

4. Bu funksiyaning nollari borasidagi har bir yangi natija tub sonlar taqsimotining asimptotik qonunidagi qoldiq had bahosida va sonlar nazariyasining additiv masalalarida yangi natijalarga olib kelar ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1.O'zbekiston Respublikasining 2021-2023-yillarga mo'ljallangan Investitsiya dasturini amalga oshirish chora-tadbirlari to'g'risida 28.12.2020// www.lex.uz

2.O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi (O'zbekiston Respublikasining Prezidentining 08.02.2021 O'RQ – 671 – son qarori bilan o'zgartirish va qo'shimchalar kiritilgan yangi tahriri)// www.lex.uz

3.Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'limni yanada rivojlantirish to'grisidagi farmoni 2017-yil 20-apreldagi ПҚ–2909-сон //www.lex.uz

4.O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi (O'zbekiston Respublikasining Prezidentining 08.02.2021 O'RQ – 671 – son qarori bilan o'zgartirish va qo'shimchalar kiritilgan yangi tahriri)// www.lex.uz

5.Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел.-М.:Наука,1975.–182 с.

6.Воронин С.М. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана.-М.Физматлит.1994.-376с

7.Чандрасекхаран К.Арифметические функции.Перевод на русский язык.Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1975г.

8.Девенпорт Г. Мультипликативная теории чисел.-М: "Наука" 1971г.

9.Чудаков Н.Г. Введение в теорию функций Дирихле.-М: Гостехиздат.1947г

10.Прахар К. Распределение простых чисел.-М:"Мир"1967г

11.Davenport Harold. Multiplicative Number Theory. New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997,178p.

12.Ryan Dingman.The Riemann Hypothesis.2010.March 12, p1-12.

13.Borwein, P., Choi, S., Rooney, B., and Weirathmueller, A. (2008).The Riemann Hypothesis. Canadian Mathematical Society.

14.Andrew Granville. Refinements of Goldbach's conjecture,and the generalized Riemann hypothesis. //FunctionesetApproximatioXXXVII (2007), 7–21.

15.Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p. Русча нашри: Метод Харди-Литтлвуда. –М.: Мир, 1985.–184 с.

16.Knapowski S. On Linnik's theorem concerning exceptional L- zeros. // Publ. Math. Debrecen 1962, № 9, p.168-178.

17.Привалов И.И.Введение в теорию функций комплексного переменного. – М. "Высшая школа", 1999,-432с.

18.Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета функция Римана.-М.: Физматлит. 1994. - 268с

19.Rosser J.B., Schoenfeld L. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. - 1962. -№6. - p.64-94.

20.Chen Jing ren and Pan Chendong. The exceptional set of Goldbach-number (I) // Sci. Sinica. – 1980. - № 4(23). – P. 416- 430.

21.Pintz J., Elementary methods in the of L-functions v. The theorems of Landau and Page, Acta Arith., 32 (2), 1977, 163-171.

22.Dickson L. E. modern Elementary Theory of Numbers Chicago, Ielinois,

U. S. A. 1960. 308p.

23.Miech R. J., A number-theoretic constant, Acta Arith, 15 (1968), 119-137.

24.Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach̓ s problem   // Acta arithm. – 1975.- V.27. –P.353-370.

25.Vaughan R.C. On Goldbach̓ s problem   // Acta arithm. - 1972. -№1(22). - P.21-48.

26.Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". – Казань, 2000. - № 8(459). –С.3-15.

27.Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p. Русча нашри:Метод Харди-Литтлвуда. –М.: Мир, 1985.–184 с.

28.Исраилов М.И. О коэффициентах разложения Лорана дзета-функции Римана. Докл. АНРУз. 12 , 1979, с.9-10.

29.Аллаков И. Искючительное множество суммы двух простых чисел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ленинград. ЛГУ, 1983. 148с.

30.Аллаков И. Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1981. -№ 11. -С.3-5.

31.Аллаков И. А. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 30.10.81. № 5166-81.

32. Allakov I. Otsenka trigonometricheskix summ i ix prilojeniya k resheniyu nekotorix additivnix zadach teorii chisel. Termez. “Surxan nashr” 2021. 160s.

33.Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. BuxDu. “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muamollari” xalqaro ilmiy-amaliy anjumani. Buxoro-2022. 83-84 betlar.

34. Allakov I.,Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. TerDu. “Algebra va analizning dolzarb masalalari” xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. Termiz-2023.11-12-betlar.

35.Allakov I. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta’lim» 2012, 200b.

Termiz davlat universiteti magistratura bo‘limi Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi bitiruvchisi Abduraimov Yo‘lchi Norbo‘ta o‘g‘lining “Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixle L-funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida” mavzusida 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olish uchun yozgan dissertatsiyasiga ilmiy rahbarning

XULOSASI

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida. Rimanning $\zeta(s)$ $-$dzeta funksiyasining haqiqiy o‘qdagi $s = -2, -4, -6, \dots$ nollariga trivial nollari deyiladi. Qolgan barcha nollari esa trivial bo‘lmagan nollari deb yuritiladi.
Agar $Res > 1$ bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $Res < 0$ bo‘lsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial bo‘lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya’ni $0 \leq Res \leq 1$ ga kritik yo‘lak deb ataladi. Riman ilgari surgan $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari $Res = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi degan gipoteza hozirgacha to‘la isbotlangan emas.

Keyinchalik Lejan Dirixle arifmetik progressiyada tub sonlar taqsimoti masalasini o‘rganish uchun Dirixle funksiyasi deb ataluvchi $L(s, \chi)$ funksiyani kiritadi. Berilgan butun sonlar ketma-ketligidan $kn + l,\ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ arifmetik progressiyaga tegishli qismiy ketma-ketlikni ajratish imkonini beruvchi multiplikativ funksiyaning mavjud ekanligi bu yerda ham tub sonlarning natural sonlar qatorida taqsimlanishini o‘rganishda foydalanilgan usullardan foydalanish imkonini beradi. Bu yerda ham $L(s, \chi)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollarining $0 < Res < 1$yo‘lakda yotishi isbotlangan va bu funksiyaning barcha trivial bo‘lmagan nollari $Res = \frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi, degan gipotezasi mavjud. Bu gipotezani hozirda umumlashgan Riman gipotezasi deyiladi.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ va $L(s, \chi)$ funksiyalarning nollari to‘g‘risida turli olimlar tomonidan ko‘plab natijalar olingan va bu natijalar yuqorida keltirilgan ikki gipotezaning ham o‘rinli ekanligiga ishora qilsada bu gipotezalar o‘z isbotini topgan emas.

Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta_1 = \frac{1}{2} + i14{,}134725$ ekanligi isbotlangan. Shuningdek kompyuter yordamida ordinatasi $0 < t < 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan.Qaralayotgan funksiyaning nollari haqidadagi ma’lumotlar sonlar nazariyasining turli additiv masalalarini yechishda keng qo‘llanilmoqda. Bunday masalalar sirasiga Varing, Eyler – Goldbax, Xardi – Litlvud, Xua – Lo – Ken problemasi va boshqalarni kiritishimiz mumkin. Bu problemalar ham hozirgacha to‘la hal etilgan emas. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar algebra va sonlar nazariyasida dolzarb hisoblanadi.

Magistrlik dissertatsiyasining asosiy maqsadi $\zeta(s)$ va $L(s,\chi)$ funksiyalarining nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun mavjud baholarni aniqlashtirishdan iborat edi. Bu mavzuda 2 ta maqola e’lon qilingan.
Dissertatsiyaning asosiy ilmiy natijasi quyidagilar:

1. Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o‘zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $\mathrm{Re}\, s=\sigma>1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\,, \qquad s=\sigma+it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyada tub sonlar soninnig cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko‘plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi.

Ushbu ishda Dirixle $L-$funksiyasi $L(s,\chi)$ning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va I.Allakov ishidagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T\geq T_0\geq 14{,}135$ bo‘lganda $\sigma>1-\frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning nollari yo‘q ekanligi ko‘rsatilgan.

2. Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta=\frac{1}{2}+i\,14{,}\,134725$ ekanligi isbotlangan. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0<t\leq 33\cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma=\frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar aktual hisoblanadi.

Dzeta funksiyaning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va I.Allakov monografiyasidagi foydalanilgan usul yordamida , c_1 son qiymatini aniqlashtirib $c_1=0{,}0109$ deb olish mumkin ekanligi ko‘rsatilgan.

Dissertatsiya ishi kirish qismi, uchta bob, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi kompyuter yozuvida 83 betdan iborat. Kirish qismida masala tarixi, adabiyotlar tahlili qisqacha berilgan, dissertatsiya ishida qilingan ishlar to‘g‘risida qisqacha ma’lumotlar berib o‘tilgan va asosiy olingan natijalar bayoni keltirilgan.

Ishning kirish qismida mavzuning o‘rganilganlik darajasi va dolzarbligi, maqsadi va asosiy natijalari bayon qilingan.

1-bob “Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasining asosiy xossalari ” – deb nomlangan bo‘lib 3 ta paragrafdan iborat va bu bob materiallari yordamchi xarakterga ega, undagi ta’rif va teoremalardan keyingi boblarda foydalaniladi.

1.1-§da Rimanning dzeta funksiyasining asosiy xossalari bayon qilingan. 1.2-§da Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari o‘rganilgan. 1.3-§da Dirixlening L-funksiyasining asosiy xossalari isboti keltirilgan.

Ishning 2–bobi “Rimanning dzeta funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida” – deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi.

2.1-§ da Rimanning dzeta funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar va ularni isbotlash usuli natijaning talqini berilgan. 2.2-§ da Zigel teoremasi va uning isboti keltirilgan. 2.3-§ da Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho olingan.

Ishning 3–bobi “Dirixlening L - funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida ” – deb nomlangan. Bu bobda yuqoridagi 2 ta bobning natijalaridan foydalanib ishning asosiy natijalari isbotlangan. 3–bob 3 ta paragrafga bo‘lingan.

3.1-§ da Dirixle L-funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar 3.2-§ da L-funksiyaning haqiqiy nollarining chegarasi uchun yangi sonli baho isbotlangan. 3.3-§ da Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasida qatnashuvchi o‘zgarmasning son qiymati aniqlashtirilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi talab darajasida tartiblangan. E’lon qilingan ishlar tadqiqotning asosiy mazmunini o‘zida to‘liq ifodalagan.

Umuman bajarilgan ish Matematika mutaxasisligi bo‘yicha magistrlik dissertatsiyalariga qo‘yiladigan talablarga javob beradi va uning muallifi Abduraimov Yo‘lchi 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olishga munosib deb hisoblayman.

Magistrlik dissertatsiyasini Davlat Attestatsiya Kommissiyasi yig‘lishida himoya qilishga tavsiya etaman.

Ilmiy rahbar: ____________ f.-m.f.d. prof. I.Allakov

Termiz davlat universiteti magistratura bo‘limi Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi bitiruvchisi Abduraimov Yo‘lchi Norbo‘ta o‘g‘lining “Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixle L-funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida” mavzusida 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olish uchun yozgan dissertatsiyasiga

TAQRIZ

Dissertatsiya ishi kirish qismi, uchta bob, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi kompyuter yozuvida 83 betdan iborat.

Kirish qismida mavzuning o‘rganilganlik darajasi va dolzarbligi, ishning maqsadi va vazifalari, ishning sinovdan o‘tishi, masala tarixi, adabiyotlar tahlili qisqacha berilgan, dissertatsiya ishida qilingan ishlar to‘g‘risida qisqacha ma’lumotlar berib o‘tilgan va asosiy olingan natijalar bayoni keltirilgan.

Birinchi bob Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening L– funksiyasining asosiy xossalari deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Rimanning dzeta funksiyasining asosiy xossalari, Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari, Dirixlening L-funksiyasining asosiy xossalari isboti batafsil keltirilgan. Bu mavzular yordamchi xarakterga ega, undagi ta’rif va teoremalardan keying bobda foydalaniladi.

Ikkinchi bob Rimanning dzeta funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Rimanning dzeta funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar va ularni isbotlash usuli natijaning talqini berilgan, Zigel teoremasi va uning isboti keltirilgan, Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho olingan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi Dirixlening L - funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida haqida deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi, bu bobda Dirixle L-funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar, L-funksiyaning haqiqiy nollarining chegarasi uchun yangi sonli baho isbotlangan, Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasida qatnashuvchi o‘zgarmasning son qiymati aniqlashtirilgan. Bu bobda yuqoridagi 2 ta bobning natijalaridan foydalanib ishning asosiy natijalari isbotlangan.

Magistrlik dissertatsiyasini bajarib magistrant ushbu natijalarga erishgan:

1. Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o‘zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $\mathrm{Re}\, s=\sigma>1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\,,\qquad s=\sigma+it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyada tub sonlar soninnig cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko‘plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi.

Ushbu ishda Dirixle $L-$funksiyasi $L(s,\chi)$ning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14{,}135$ bo‘lganda $\sigma > 1 - \frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning nollari yo‘q ekanligi ko‘rsatilgan.

2. Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta = \frac{1}{2} + i\ 14,\ 134725$ ekanligi isbotlangan. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0 < t \leq 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = 1/2$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar aktual hisoblanadi.

Dzeta funksiyaning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [35] da foydalanilgan usul yordamida , c_1 son qiymatini aniqlashtirib $c_1 = 0{,}0109$ deb olish mumkin ekanligi ko‘rsatilgan.

Umuman bajarilgan ish Matematika mutaxassisligi bo‘yicha magistrlik dissertatsiyalariga qo‘yiladigan talablarga javob beradi va uning muallifi Abduraimov Yo‘lchi 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olishga munosib deb hisoblyman.

Magistrlik dissertatsiyasini Davlat Attestatsiya Kommissiyasi yig‘lishida himoya qilishga tavsiya etaman.

Termiz davlat universiteti

“Algebra va geometriya” kafedrasi

mudiri, f.-m.f.f.d., dotsent **S.Choriyeva**

Termiz davlat universiteti magistratura bo‘limi Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi bitiruvchisi Abduraimov Yo‘lchi Norbo‘ta o‘g‘lining “Rimanning dzeta funksiyasi va Dirixle L-funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida” mavzusida 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olish uchun yozgan dissertatsiyasiga

TAQRIZ

Dissertatsiya ishi kirish qismi, uchta bob, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi kompyuter yozuvida 83 betdan iborat.

Kirish qismida masala tarixi, adabiyotlar tahlili qisqacha berilgan, dissertatsiya ishida qilingan ishlar to‘g‘risida qisqacha ma’lumotlar berib o‘tilgan va asosiy olingan natijalar bayoni keltirilgan.

Ishning kirish qismida mavzuning o‘rganilganlik darajasi va dolzarbligi, maqsadi va asosiy natijalari bayon qilingan.

1-bob “Rimanning dzeta funksiyasi va Drixlening *L*– funksiyasining asosiy xossalari ” – deb nomlangan bo‘lib 3 ta paragrafdan iborat va bu bob materiallari yordamchi xarakterga ega, undagi ta’rif va teoremalardan keyingi boblarda foydalaniladi.

1.1-§da Rimanning dzeta funksiyasining asosiy xossalari bayon qilingan. 1.2-§da Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari o‘rganilgan. 1.3-§da Dirixlening L-funksiyasining asosiy xossalari isboti keltirilgan.

Ishning 2–bobi “Rimanning dzeta funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida” – deb atalgan va 3 paragrafni o‘z ichiga oladi.

2.1-§ da Rimanning dzeta funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar va ularni isbotlash usuli natijaning talqini berilgan. 2.2-§ da Zigel teoremasi va uning isboti keltirilgan. 2.3-§ da Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho olingan.

Ishning 3–bobi “Dirixlening *L* - funksiyasining nollari mavjud bo‘lmagan soha haqida ” – deb nomlangan. Bu bobda yuqoridagi 2 ta bobning natijalaridan foydalanib ishning asosiy natijalari isbotlangan. 3–bob 3 ta paragrafga bo‘lingan.

3.1-§ da Dirixle L-funksiyasi nollari joylashgan sohaning chegarasi uchun olingan baholar 3.2-§ da L-funksiyaning haqiqiy nollarining chegarasi uchun yangi sonli baho isbotlangan. 3.3-§ da Dirixlening L-funksiyasi nollari mavjud bo‘lmagan sohaning chegarasida qatnashuvchi o‘zgarmasning son qiymati aniqlashtirilgan.

Magistrlik dissertatsiyasini bajarib magistrant ushbu natijalarga erishgan:

1. Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o‘zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyada tub sonlar soninnig cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko‘plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi.

Ushbu ishda Dirixle L −funksiyasi $L(s,\chi)$ning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14{,}135$ bo‘lganda $\sigma > 1 - \frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning nollari yo‘q ekanligi ko‘rsatilgan.

2. Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali noli $\beta = \frac{1}{2} + i\ 14,\ 134725$ ekanligi isbotlangan. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0 < t \leq 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nollari $\sigma = 1/2$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar aktual hisoblanadi.

Dzeta funksiyaning nollari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [35] da foydalanilgan usul yordamida , c_1 son qiymatini aniqlashtirib $c_1 = 0{,}0109$ deb olish mumkin ekanligi ko‘rsatilgan.

Umuman bajarilgan ish Matematika mutaxasisligi bo‘yicha magistrlik dissertatsiyalariga qo‘yiladigan talablarga javob beradi va uning muallifi Abduraimov Yo‘lchi 70540101- -Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxasisligi bo‘yicha magistr akademik darajasini olishga munosib deb hisoblyman.

Magistrlik dissertatsiyasini Davlat Attestatsiya Kommissiyasi yig‘lishida himoya qilishga tavsiya etaman.

Samarqand davlat universiteti algebra

va geometriya kafedrasi dotsenti,fizika

matematika fanlari nomzodi X.Ro‘zimuradov