O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo‘lyozma huquqida
UDK:_____________

BOYSOATOVA YULDUZ ISMOIL QIZI

DIRIXLE XARAKTERLARINING SONLAR NAZARIYASINING ADDITIV MASALALARIGA TADBIQI

70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi bo‘yicha Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar: **f.-m.f.f.d. Safarov.A.Sh**

TERMIZ-2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2021-yil 3-martdagi №6-T/M sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti Algebga va geometriya kafedrasida bajarilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilan Termiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Barkamol avlod ko‘chasi 43-uy.)

Ilmiy rahbar: ___________ PhD. A.Sh.Safarov

Kafedra mudiri: ___________ PhD. S.Choriyeva

Magistratura bo‘limi boshlig‘i: ___________ PhD. A.B. Narbayev

70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi magistranti Boysoatova Yulduz Ismoil qizining “Dirixle xarakterining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqi” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTATSIYASI

Tayanch so‘zlar: Tub modul, ko‘rsatgich darajasi, boshlang‘ich ildiz, indeks, xarakter, Dirixle xarakteri, bosh xarakter, primitiv xarakter, juft va toq xarakter, indutsirlangan xarakter, kompleks, additiv masalalar.

Tadqiqot obyektlari: Sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarida Dirixle xarakterini qo‘llash.

Ishning maqsadi: Avvaliga tub modul bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar va indekslar o‘rganish, so‘ngra ulardan foydalangan xolda xarakter hamda Dirixle xarakterini o‘rganib, sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarini yechimida Dirixle xarakterlarini qo‘llash. Bu usulning qanchalik samarali yoki murakkab ekanligini, yutuq va kamchiliklarini aniqlash.

Tadqiqot metodlari: Dissertatsiya ishida ilmiy abstraksiya, tahlil va sintez, monografik kuzatish, taqqoslash, induksiya va deduksiya, statik guruhlash, tizimli tahlil, grafik ifodalash metodlaridan foydalanilgan.

Olingan natijalar va ularning yangiligi: Bitta masalani bir necha usullardan foydalangan xolda yechimini topish mumkin. Bu usullarning eng samaralisi va eng qulayi va har doim eng aniqlikda tog‘ri yechim beradiganini qo‘llash maqsadga muvofiqdir albatta. Sonlar nazariyasining additiv masalalarini yechimini topishda ham Dirixe xarakterlaridan foydalanib samarali natijaga erishildi.

Amaliy ahamiyati: Tadqiqot natijasida Dirixle xarakteri chuqurroq o‘rganiladi. Sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarini yechimini topishda Dirixle xarakterlaridan keng ko‘lamda foydalanish boshlandi.

Tadqiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi: tadqiqot jarayonida ishlab chiqilgan xulosa va takliflar hamda o‘rganilgan masalalardan olingan natijalar keying yangi va boshqa additiv masalalar yechimini topishga tadbiq etish

mumkin. Algebra va sonlar nazariyasining zamonaviy masalalarini yechimini topishda bu tadqiqotdan olingan natijalar yordam beradi.

Qo'llash sohasi: Sonlar nazariyasining ko'plab additiv masalalarini yechimini topishda.

ANATATION

"Application of Dirichlet's character to additive problems of number theory" master's dissertation on the topic.

Keywods: Radical module, index degree, initial root, index, character, Dirichlet character, prime character, primitive character, even and odd character, induced character, complex, additive problems.

Objects of research: Application of Dirichlet's character in several additive problems of number theory.

Purpose: First, to study the initial roots and indices of the prime module, then to study the character and the Dirichlet character using them, and to apply the Dirichlet characters in the solution of several additive problems of number theory. To determine how effective or complicated this method is, its advantages and disadvantages.

Research methods scientific abstraction, analysis and synthesis, monographic observation, comparison, induction and deduction, static grouping, systematic analysis, graphic representation methods were used in the dissertation work.

Gold results and their news: One problem can be solved using several methods. It is definitely advisable to use the most effective and convenient of these methods and the one that always gives the most accurate solution. An effective result was achieved by using Dirichte characters in finding the solution of additive problems of number theory.

Practical significance: As a result of the study, the character of Dirichlet is studied in depth. Dirichlet characters were widely used to solve several additive problems of number theory.

Level of Implementation: the conclusions and proposals developed in the research process and the results obtained from the studied issues can then be applied to find solutions to new and other additive issues. The results obtained from this research will help in finding solutions to modern problems of algebra and number theory.

Field of application: in finding solutions to many additive problems of number theory.

MUNDARIJA

KIRISH.

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. Yurtimiz istiqlolga erishgan ilk kunlardanoq, davlatimiz tomonidan amalga oshirilayotgan bunyotkorlik ishlari vatanimiz mustaqilligi va ozodligi tufaylidir. Mustaqillik zamirida yuz berayotgan islohatlar sezilarli darajada insoniyat turmush tarzini o’zgartirib yubordi. Soʻngi yillarda yoshlarga yaratilgan imkoniyatlar har bitta yigit qizni harakatdan toʻhtamaslikka undaydi.

Hozirgi kunda Prezidentimiz Sh.Mirziyoyev tomonidan “Mening nazarimda, jamiyat hayotining tanasi iqtisodiyot bo’lsa, uning joni va ruhi – ma’naviyatdir. Biz yangi Oʻzbekistonni barpo etishda ana shu ikkita mustahkam ustunga, ya’ni, bozor tamoyillariga asoslangan kuchli iqtisodiyotga hamda ajdodlarimizning boy merosi, milliy va umuminsoniy qadriyatlarga asoslangan kuchli ma’naviyatga tayanamiz”[1.4]. Yoshlarga keng imkoniyatlar yaratib berilmoqda, katta – katta loyihalar ustida ishlanmoqda. Ularning bilim va istedodlarini shakllantirib, milliy ma’naviyatimizni uzoqlashib ketayotgani sezilib qolmoqda. Ular oʻzlari oʻqib kelgan xorijiy davlatlardagi tajribani oʻrganib, tajriba almashib kelishmoqda. Yangi Oʻzbekiston taraqqiyot strategiyasining maqsadi – aholining barcha qatlamlariga munosib hayot darajasini va turmush sharoitlarini yaratib berish, ishtimoiy himoya va bandlikni ta’minlash, daromadlar barqaror o’sishiga erishish, jamiyatning madaniy darajasi, bag’rikenglik va mehribonlik fazilatlarini yanada mustahkamlashdan iborat [1.3].

Oʻzbekistonda ta’lim tizimini isloh qilishning dasturiy hujjatlarida takidlanganidek, mamlakatimiz ta’lim tizimi hodimlari oldiga raqobatbardosh kadrlar tayyorlash, ta’lim tarbiya jarayonini jahon andozalari darajasiga yetkazishni asosiy vazifa qilib qoʻygan[1.1]. Shu ma’noda olib qaraganda, yoshlarning yangi avlodi istiqbol masalalarini kun tartibiga dadil qo’yadigan va uni yecha oladigan, siyosiy hamda ijtimoiy – iqtisodiy hayotda oʻziga mustaqil yoʻl topa oladigan qobiliyatga ega boʻlishi kerak.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “2020-2022-yillarda iqtisodiyot tarmoqlari va ijtimoiy soha uchun matematika bo’yicha oliy malakali kadrlar tayyorlash chora – tadbirlari dasturini ishlab chiqish toʻgʻrisida” gi Qarori, 2021-yil 19-yanvardagi 23-sonli “Oʻzbekistonda yoshlarga oid davlat siyosatini 2025-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi Qarori bu boradagi amaliy ishlarning jadal suratlar bilan amalga oshirilayotganinini koʻrsatadi. Oliy maʻlumotli kadrlar sonini oshirish maqsadida 2022 yilda oliygohlar soni yana 5 taga oshirilib, 115 taga yetkazildi. 2021 yilda esa ularning soni 110 tani tashkil etgan. Bu haqida 2022 yil uchun ishlab chiqilgan budjetnomada ma’lumot berilgan [1.6]. So’ngi yillarda mamlakatimizda oliy ta’lim sifatini oshirishga qaratilgan bir qancha islohatlar amalga oshirilmoqda. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi mavzusi ana shu talab va vazifalardan kelib chiqib tanlandi.

Biz avvalo, tub son darajasi moduli boʻyicha Dirixle xarakterlarining ta’rifi va xossalari bilan tanishib chiqamiz. Keyin esa aniqlangan xarakterlardan foydalanib ixtiyoriy q moduli boʻyicha xarakterlarni kiritamiz. Soʻngra sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarini o’rganamiz va Dirixlening xarakteristik funksiyasi yordamida ushbu additiv masalalarni yechimlarini koʻrib chiqamiz.

Xorijlik olimlar K.M.Zminyan, Davenport H, Rooney B, Borwein P, K.M.Eminyan, J.B.Rosser, Schoenfeld L, K.M.Eminyan tomonidan olib borilgan tadqiqotlar, ilmiy asarlar, risolalar va maqolalarda investitsion muhit, investitsiyani boshqarish masalalari oʻrganilgan.

Hamdoʻstlik davlatlaridan A.A.Karatsuba, A.F.Lavrik, A.I.Vinogradov, Yu.V.Linnik, I.M.Vinogradov kabi olimlar tub va murakkab modul boʻyicha boshlangʻich ildizlar va indekslarni, xarakterlarni chuqur tahlil qilib berishgan.

Bu boradagi mavjud muammolarning ayrim jihatlari va yechimlari respublikamiz olimlari Allakov I, A.S.Yunusov, D.I.Yunusova, Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov, Safarov A.Sh, Z.X.Rahmonov ilmiy ishlarida tadqiq etilgan va oʻrganilgan.

Tadqiqotning ob’yekti va predmeti boʻlib ishda algebraik metodlar, boshlang’ich ildizlar va indekslar, Dirixle xarakterlari va sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalari, ularni yechish metodlari, olingan baholar tahlili hisoblanadi. Tadqiqotning predmeti bo’lib, sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalarini Dirixle xarakterlari orqali tadbiqi va bunda olingan natijalar tahlili hisoblanadi.

Tadqiqotning maqsadi va vazifalari sonlar nazariyasining additiv masalalarini yechimini topishda Dirixle xarakterlari boʻyicha ilmiy, uslubiy va amaliy takliflar ishlab chiqishdan iborat.

Dissertatsiyaning maqasadidan kelib chiqib, unda quyidagi vazifalar belgilangan:

- Boshlangʻich ildizlar va indekslar, ularning xossalarini chuqurroq oʻrganish.
- Dirixle xarakterlariga tarif berishda boshlangʻich ildizlar va indekslardan keng foydalanish.
- Tub modul boʻyicha indekslar oʻrganilgach, ixtiyoriy murakkab modul bo’yicha indekslar ham oʻrganish va ularning oʻzaro uzviyligini koʻrib oʻrganib chiqish.
- Boshlangʻich ildizlar va indekslardan foydalanilib Dirixle xarakterlariga ta’rif berilgandan so’ng Dirixle xarakterlarining xossalari koʻrib chiqish.
- tub modul va murakkab modullar bo’lgan hollarda Dirixle xarakterlari oʻrganish.
- Sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalari oʻrganish.

- Sonlar nazariyasining additiv masalalaridan boʻlgan Goldbahning binar va ternar muammosi, Varing muammolarini chuqurroq oʻrganish va oldingi olingan natijalarni tahlil etish.
- Sonlar nazariyasining additiv masalalarini yechishda avval qoʻllanilgan usullardan foydalanib Dirixle xarakterlarida tadbiqini koʻrib chiqish.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Boshlangʻich ildizlar va indekslar, ularning xossalari chuqurroq oʻrganiladi va Dirixle harakterlariga tarif berishda boshlangʻich ildizlar va indekslardan keng foydalaniladi.

Tub modul boʻyicha indekslar oʻrganilgach, ixtiyoriy murakkab modul boʻyicha indekslar ham oʻrganildi va ularning oʻzaro uzviyligi, farqi algoritmi koʻrib chiqildi.

Boshlangʻich ildizlar va indekslardan foydalanilib Dirixle xarakterlariga ta’rif berildi hamda Dirixle xarakterlarining xossalari koʻrib chiqildi, tub modul va murakkab modullar boʻlgan hollarda Dirixle xarakterlari oʻrganildi.

Sonlar nazariyasining bir nechta additiv masalalari oʻrganildi va ularni yechishda avval qoʻllanilgan usullardan farqli ravishda Dirixle xarakterlaridan foydalanildi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Tadqiqot ishida quyidagi asosiy masalalar qaraldi:

- Boshlangʻich ildizlar va indekslarni hamda ularning xossalarini chuqur oʻrganish.
- Dirixle xarakterlari, ularning xossalari, primitiv xarakterlar, bosh xarakterlarni chuqur oʻrganish.
- Ixtiyoriy tub va murakkab modullar bo’yicha Dirixle xarakterlari mavjudligini tekshirish va mavjud boʻlsa ularni topish.
- Sonlar nazariyasining bir qancha yechimini topgan va hali toʻla yechimini topmagan masalalarini oʻrganish oldindan olingan natija va baholarni oʻrganib tahlil qilish.

Tadqiqotning ishlab chiqilgan ilmiy takliflari va amaliy tavsiyalari natijasida sonlar nazariyasining ko'plab additiv masalalarini Dirixle xarakterlari orqali yechish mumkin boʻladi.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharxi. Magistlik tadqiqot ishini oʻrganish davomida quyidagi adabiyotlardan foydalanildi. Allakov I. Abdusamatova H. Tub sonlar qatnashgan binar additiv masalaning yechimlari soni haqida. Matematika ta'lim yoʻnalishi boʻyicha magistr akademik darajasini olish uchun taqdim etilgan avtoreferat. Termiz -2017. Allakov I. Sonlar nazariyasining ba'zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta'lim» 2012, 200b. A.A. Карацуба. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле 2008 г. июль — август т. 63, вып. 4(382). A.A. Карацуба, "Суммы характеров на последовательности сдвинутых простых чисел и их применения", Матем. заметки, 17:1 (1975), 155–159; англ. пер.: Ayupov.Sh.A., B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H. Haydarov, Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent 2019, 317 b. А.Ф. Лаврик, "Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях", Изв. АН СССР. Сер. матем., 30:2 (1966), 433–448. А.И. Виноградов, "О свойстве симметрии сумм характеров Дирихле", Изв. АНУзбССР. Сер. физ.-матем., 9:1 (1965), 21–27. И.М. Виноградов, "Сонлар назарияси асослари", Тошкент, (1965), 82-147. Чудаков Н.Г. Введение в теорию –функций Дирихле. Москва 1947 Ленинграт. Ю. В. Нестеренко, Теория чисел. Физико-математичское науки, Москва Издательский центр « Академия» 2008. 158-173 с. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политехинс-та. –Ростов-Дон, 1930, т. 14, №2-3,с.328Ю.В.Нестеренко. "Теория чисел". Москва. Издательский центр –"Академия" 2008-й. 152-170-б. Boysoatova Y. "Ikki hadli taqqoslamalarni indekslar yordamida yechish", Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to'plami. Andijon, 28 mart 2022 yil. 374-bet. Boysoatova Y. " Ixtiyoriy modul bo'yicha Dirixle xarakterlarini misollar yordamida tushuntirish", Algebra va analizning dolzarb masalalari Respublika ilmiy – amaliy anjumani materiallari to'plami. Termiz, 18 noyabr 2022 yil. 22-bet. Boysoatova Y. " Sonlar nazariyasining ba'zi additiv masalalari tarixi haqida" Ilm – fan muammolari yosh tadqiqotchilar talqinida Respublika ilmiy konferensiyasi to'plami. Farg'ona, 30.03.2023 yil. 67-bet.

Tadqiqotda qoʻllanilgan metodikaning tavsifi. Dissertatsiya ishida ilmiy abstraksiya, tahlil va sintez, monografik kuzatish, taqqoslash, induksiya va deduksiya, statik guruhlash, tizimli tahlil, usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotda olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati: Tadqiqot natijasida ishlab chiqilgan ilmiy taklif va amaliy tavsiyalar Algebra va sonlar nazariyasining additiv masalalarini yangicha uslubda Dirixle xarakterlari orqali yechishga imkon beradi.

Magistrlik dissertatsiya tuzilmasining tavsifi: Ushbu magistrlik dissertatsiya ishi Dirixle xarakterlarini oʻrganib, Sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqini oʻrganishga bag'ishlangan. Ushbu dissertatsiya tarkibi kirish, 3 ta bob, 9 ta paragraph, xulosa va takliflar, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Kirish qismi masalaning aktualligi, maqsadi va amalga oshiriladigan ishlar asoslanadi va berilgan sohada masalaning hozirgi holati aytilib, asosiy tushunchalar qisqacha keltiriladi.

Dissertatsiya ishining birinchi bobida boshlangʻich ildizlar va indekslar hamda ularning xossalari mukammal oʻrganilgan. Misollar yordamida tahlil etiladi. Birinchi bob 3 ta paragrafdan iborat.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobida Dirixle xarakterlari va ularning xossalari, ixtiyoriy tub va murakkab modul bo'yicha Dirixle xarakterlari oʻrganilgan. Dirixle –L funksiyasi ham ko'rib chiqilgan. Ikkinchi bob 3 ta paragrafdan iborat.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobida esa Sonlar nazariyasining bir qancha additiv masalalariga toʻhtalib oʻtilgan. Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv muammolarida tadbiqi o'rganilgan. Uchinchi bob 3 ta paragrafdan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 90 betdan iborat.

I BOB. SONLAR NAZARIYASINING ADDITIV MASALALARINI O‘RGANISHDA ZARUR BO‘LADIGAN BOSHLANG‘ICH TUSHUNCHALAR TAHLILI

1.1-§. Tub va murakkab modul bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar.

Biz algebra va sonlar nazariyasi fanini o‘rganish davomida uning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lgan taqqoslamalar va ularning xossalarini ham o‘rgandik. Taqqoslamalarni yechish jarayonida esa Eyler va Ferma teoremalarini o‘rganib isboti va tadbiqlarini ko‘rib chiqdik. Endi bizga mavzuning asosiy qismi bo‘lgan Dirixle xarakterlarini o‘rganishimiz uchun, uning ta’rifi va xossalarini berishimiz uchun zarur bo‘ladigan barcha tushunchalarni o‘rganib chiqamiz. Ulardan dastlab boshlang‘ich ildizlar va ularning asosiy xossalarini misollar yordamida ko‘rib chiqamiz.

1.1.1. Boshlang‘ich ildizlar.

Bizga ma’lumki Eyler teoremasiga asosan $(a,m)=1$ bo’lganda

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m \quad (1.1.1)$$

taqqoslama o’rinli. (1.1.1) taqqoslamaning ikkala tomonini *k*- darajaga ko‘tarsak

$$a^{k\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m \quad (1.1.2)$$

ega bo‘lamiz.

(1.1.1) va (1.1.2) ni umumlashtirib quyidagicha yozamiz.

$(a,m)=1$ bo‘lganda har doim $\exists \gamma \epsilon N$ topiladiki,

$$a^{\gamma} \equiv 1 \pmod m \quad (1.1.3)$$

chin bo’ladi.

Biz algebra va sonlar nazariyasi kursida avval oʻrganganmizki natural sonlar sistemasini koʻrganda har qanday natural sonlar toʻplamining doimo eng kichik elementi mavjud bo’ladi. (1.1.3) taqqoslamani qanoatlantiruvchi natural sonlar toʻplamining eng kichik elementini, δ orqali belgilaymiz.

1.1.1- ta’rif: Agar $(a,m)=1$ bo’lib, (1.1.3) taqqoslamani qanoatlantiradigan γ larning ($\gamma>0$¿ eng kichigi δ bo’lsa, u holda a son m modul boʻyicha δ **ko’rsatgichga** tegishli deyiladi.

Bu ta’rifga asosan $\delta\leq\varphi(m)$.

1.1.2- ta’rif: Agar $\delta=\varphi(m)$ bo’lgan holda (1.1.3) taqqoslama o’rinli boʻlsa, a son m modul bo’yicha **boshlangʻich ildiz** deyiladi.

Demak biz hozir istalgan a son uchun tegishli daraja koʻrsatkichini topishni quyidagi misolda ko’ramiz.

1.1.1-misol: $m=13$ modul bo’yicha 2, 3, 5, 7, 11 sonlari tegishli bo’lgan koʻrsatkichlar topilsin.

Yechish: Misol shartiga asosan har bir son bo’yicha alohida alohida daraja koʻrsatkichlarini topib chiqamiz va ularning orasida boshlangʻich ildiz bormi, agar boʻlsa qaysilari boshlangʻich ildiz boʻlishini koʻrsatib beramiz.

a) $a=2$ bo’lganda,

$\varphi(p)=p-1$ dan foydalanib $\varphi(13)=13-1=12$ ni topib olamiz. Endi esa $2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \dots 2^{12}$ darajalarni 13 modul bo’yicha ko’rib chiqamiz.

$2^1\equiv 2(mod\,13);\ 2^2\equiv 4(mod\,13);\ 2^3\equiv 8(mod\,13);$

$2^4\equiv 3(mod\,13);\ 2^5\equiv 6(mod\,13);\ 2^6\equiv 12(mod\,13);$

$2^7\equiv 11(mod\,13);\ 2^8\equiv 9(mod\,13);\ 2^9\equiv 5(mod\,13);$

$2^{10}\equiv 10(mod\,13);\ 2^{11}\equiv 7(mod\,13);\ 2^{12}\equiv 1(mod\,13);$

Yuqoridagi hisoblashlardan ko'rinadiki 2 soni 13 modul bo'yicha $\delta = 12$ koʻrsatkichga ega ekan.

b) $a=3$ bo'lganda,

$3^1 \equiv 3; 3^2 \equiv 9; 3^3 \equiv 1 (mod\, 13)$

Demak 3 soni 13 modul bo'yicha 3 koʻrsatkichga tegishli ekan.

c) $a=5$ boʻlganda,

$5^1 \equiv 5; 5^2 \equiv 12; 5^3 \equiv 8; 5^4 \equiv 1 (mod\, 13)$

5 soni 13 modul bo'yicha 4 ko'rsatkichga ega ekan.

d) $a=7$ bo'lganda,

$$7^1 \equiv 7; 7^2 \equiv 10; 7^3 \equiv 5; 7^4 \equiv 9; 7^5 \equiv 11; 7^6 \equiv 12; 7^7 \equiv 6; 7^8 \equiv 3;$$

$$7^9 \equiv 8; 7^{10} \equiv 4; 7^{11} \equiv 2; 7^{12} \equiv 1 (mod\, 13)$$

7 soni ham 13 modul bo'yicha 12 koʻrsatkichga ega ekanligini ko'rdik.

e) $a=11$ bo'lganda,

$$11^1 \equiv 11; 11^2 \equiv 4; 11^3 \equiv 5; 11^4 \equiv 3; 11^5 \equiv 7; 11^6 \equiv 12; 11^7 \equiv 2;$$

$$11^8 \equiv 9; 11^9 \equiv 8; 11^{10} \equiv 10; 11^{11} \equiv 6; 11^{12} \equiv 1 (mod\, 13)$$

Va nihoyat ohirgi son 11 ham 13 modul bo'yicha 12 ko'rsatkichga tegishli ekanini ko'rishimiz mumkin. Ushbu misolda a), d) va e) hollarda $\delta = \varphi(m)$ shart bajarilayotgani uchun $a = 2, 7, va\, 11$ sonlari 13 modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'ladi. Bundan koʻrinadiki bitta modul boʻyicha bir nechta boshlangʻich ildizlar mavjud boʻlishi mumkin ekan. Biz ushbu 1.1-misol orqali ham daraja koʻrsatkichini, ham boshlangʻich ildizlarni topish masalasini oʻrgandik.

1.1.2. m modul bo'yicha bir xil ko'rsatkichli sinflar haqida.

1.1.1-teorema: Biror m modul boʻyicha tuzilgan bitta sinfning barcha chegirmalari shu modul boʻyicha bir xil koʻrsatkichga tegishli boʻladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $a \equiv a_1 (mod\, m)$ bo'lib, $a^{\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ va $a_1^{\delta_1} \equiv 1 (mod\, m)$ hamda $\delta \neq \delta_1$ bo'lsin. Aniqlik uchun $\delta < \delta_1$ yoki $\delta > \delta_1$ deb olamiz. $\delta < \delta_1$ boʻlishi mumkin emas, chunki $a^{\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ va

$a \equiv a_1 (mod\, m)$ ekanligidan ohirgi taqqoslamani δ darajaga ko'tarib,

$$a^{\delta} \equiv a_1^{\delta} (mod\ m) \quad (1.1.4)$$

ga ega boʻlamiz. Bundan $a^{\delta} \equiv 1$ ekanligidan $a_1^{\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ bo'ladi. Agar a_1 son δ_1 ko'rsatkichga tegishli boʻlsa, koʻrsatkichning ta'rifiga asosan $\delta_1 \leq \delta$ ga ega boʻlamiz. Bu esa $\delta < \delta_1$ shartga zid. Endi $\delta > \delta_1$ deb faraz qilamiz va

$a \equiv a_1 (mod\, m)$ ning ikkala tomonini δ_1 darajaga ko'taramiz:

$$a^{\delta_1} \equiv a_1^{\delta_1} (mod\, m) \rightarrow a^{\delta_1} \equiv 1 (mod\, m).$$

a son m modul bo'yicha δ ko'rsatkichga tegishli bo'lgani sababli

$$\delta \leq \delta_1; (\delta \leq \delta_1) \cap (\delta_1 \leq \delta) \rightarrow \delta_1 = \delta \quad .$$

Teorema isbot etildi.

Demak agar biror a son m modul bo'yicha biror δ koʻrsatkichga tegishli boʻlsa, a bilan m modul boʻyicha teng qoldiqlilar sinfining barcha elementlari shu koʻrsatkichga tegishli boʻlar ekan, ya'ni berilgan modul boʻyicha bitta koʻrsatkichga tegishli boʻlgan sonlar sinfi toʻgʻrisida gapirish mumkin. m modul boʻyicha δ koʻrsatkichga tegishli boʻlgan har bir a son m bilan oʻzaro tub boʻlishi lozim. Aksincha, ya'ni $(a, m) = d > 1$ bo'lsa, $a^{\gamma} \equiv 1 (mod\, m)$ taqqoslama o'rinli boʻlmaydi.

Agar a son m modul boʻyicha boshlangʻich ildiz boʻlsa, unda biz endi boshlangʻich ildizlar sinfi haqida fikr yuritamiz.

1.1.3. $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{\delta-1}$ sonlar sistemasining xuxusiyatlari.

1.1.2-teorema: agar $(a, m) = 1$ shartda

$$a^{\delta} \equiv 1 (mod\, m) \quad (1.1.5)$$

bo’lsa,

$$1=a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{\delta-1} \tag{1.1.6}$$

sonlar sistemasi m modul bo‘yicha taqqoslanuvchi bo‘la olmaydi.

Isbot: teskarisini faraz qilaylik. $(\forall\, l, k \in N)(a¿¿ l \equiv a^k (mod\, m))¿$ chin bo‘lib, bu yerda $\delta-1 \geq l > k \geq 0$ bo’lsin. $(a, m)=1$ bo‘lgani uchun yuqoridagi taqqoslamaning ikkala tomonini a^k ga bo’lish mumkin:

¿¿

Lekin bu taqqoslamaning o‘rinli bo’lishi mumkin emas, chunki a son m modul bo‘yicha δ ko‘rsatkichga tegishlidir.

1.1.1-natija: $\delta=\varphi(m)$ bo’lganda (1.6) sistema m modul bo‘yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil qiladi. Xaqiqattan,

1. (1.6) sistemada $\varphi(m)$ ta element mavjud;

2. ($(a, m)=1 \rightarrow (a¿¿k, m)=1¿;$

3. a^k elementlarning har biri [1.1.2] teoremaga asosan m modul bo‘yicha har xil sinfga tegishli. Bu uchta shart keltirilgan chegirmalar sistemasining shartlaridan iboratdir.

1.1.2-natija: $m=p$ bo‘lib, a son m modul bo‘yicha boshlang‘ich ildiz bo‘lsa, (1.6) qator quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$1=a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{p-2} \tag{1.1.7}$$

1.1.2-misol: 13 modul bo’yicha 11 boshlang‘ich ildiz uchun (1.1.6) ko‘rinishidagi sistema tuzilsin.

Yechish: misolni shartidan ko‘rinib turibdiki $m=p$ ya’ni $m=13$ tub son. Biz yuqoridagi (1.1.2) natijadan foydalanib sistemani tuzamiz.

$1=11^0, 11^1, 11^2, \ldots, 11^{11}$ va har bir natijani 13 modul bo’yicha eng kichik musbat chegirmalar bilan almashtiramiz.

$$11^1 \equiv 11; 11^2 \equiv 4; 11^3 \equiv 5; 11^4 \equiv 3; 11^5 \equiv 7; 11^6 \equiv 12; 11^7 \equiv 2;$$

$$11^8 \equiv 9; 11^9 \equiv 8; 11^{10} \equiv 10; 11^{11} \equiv 6; 11^{12} \equiv 1 (mod\, 13)$$

Ular quyidagilardan iborat edi: 1, 6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11.

Haqiqatan ham bu sistema 13 modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasidan iboratdir.

1.1.3-teorema: a son m modul bo'yicha δ ko'rsatkichga tegishli bo'lganda

$$a^{\gamma} \equiv a^{\gamma_1} (mod\, m) \qquad (1.1.8)$$

taqqoslama o'rinli bo'lishi uchun

$$\gamma \equiv \gamma_1 (mod\, \delta) \qquad (1.1.9)$$

ning chin bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti: (Zarurligi) a son m modul bo'yicha δ ko'rsatkichga tegishli va

$$a^{\gamma} \equiv a^{\gamma_1} (mod\, m)$$

taqqoslama o'rinli bo'lsin. U holda $\gamma\, va\, \gamma_1$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\gamma = \delta q + r;\ 0 \leq r \leq \delta;\ \gamma_1 = \delta\, q_1 + r_1;\ 0 \leq r_1 \leq \delta$$

va $r = r_1$ ekanligini ko'rsatamiz. γ va γ_1 ning bu qiymatlarini (1.1.8) ga qo'yamiz:

¿

Lekin, $a^{\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ bo'lgani uchun ohirgi taqqoslama $a^{r} \equiv a^{r_1} (mod\, m)$

ko'rinishini oladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan 1.1.2- teoremaga asosan bu taqqoslama faqat $a^{r} = a^{r_1}$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Bundan $r = r_1$ va $\gamma \equiv \gamma_1 (mod\, \delta)$.

Yetarliligi: $a^{\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ va $\gamma \equiv \gamma_1 (mod\, \delta)$ o'rinli bo'lsin. Bu ohirgi taqqoslamani tenglik yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\gamma = \delta q + r;\ 0 \leq r \leq \delta;\ \gamma_1 = \delta\, q_1 + r;$$

a son m modul bo'yicha δ ko'rsatkichga tegishli bo'lganligi sababli

$$¿\ a^{\gamma}\equiv a^{\gamma_1}(mod\,m)$$

Teorema isbot etildi.

1.1.3-natija: $\gamma\equiv 0(mod\,\delta)$ bo‘lganda va faqat shundagina $a^{\gamma}\equiv 1(mod\,m)$ o‘rinli bo’ladi.

Haqiqatan, agar $\gamma\equiv\gamma_1(mod\,\delta)$ da $\gamma_1=0$ desak, $a^{\gamma}\equiv a^{\gamma_1}\equiv 1(mod\,m)$ hosil bo’ladi. Boshqacha qilib aytganda, γ/δ bajarilsa, $a^{\gamma}\equiv 1(mod\,m)$ bo’ladi.

1.1.4-natija: a son m modul bo‘yicha δ ko‘rsatkichi $\varphi(m)$ ning bo‘luvchisi bo‘ladi. (Agar a boshlang‘ich ildiz bo‘lsa, δ ko’rsatkich $\varphi(p)=p-1$ ni bo’ladi. Chunki Eyler teoremasiga asosan $a^{\varphi(m)}\equiv 1(mod\,m)$ taqqoslama $(a,m)=1$ shartda doimo o’rinli bo‘lib tegishli ko‘rsatkich δ ning aniqlanishiga ko‘ra $\delta\le\varphi(m)$ edi. Demak, biz δ ko‘rsatkichni topmoqchi bo‘lsak, $a^0,a^1,a^2,\ldots,a^{\delta-1}$ sistemadagi barcha darajalarni hisoblab o‘tirishimiz shart bo‘lmay, uning o‘rniga daraja ko‘rsatkichi $\varphi(m)$ ni bo‘ladiganlari hisoblanadi, holos.

Masalan: 3 soni 11 modul bo’yicha tegishli bo’lgan daraja ko’rsatkichini topaylik. $\varphi(p)=p-1$ dan foydalanib $\varphi(11)=11-1=10$ bo’lib, 10 ning bo’luvchilari 1, 2, 5, 10 dir. Shuning uchun quyidagilarni hisoblaymiz:

$3^1\equiv 3(mod\,11)$, $3^2\equiv 9(mod\,11)$, $3^5\equiv 1(mod\,11)$, $3^{10}\equiv 1(mod\,11)$;

Bulardan esa tegishli ko’rsatkich 5 ga teng degan xulosaga kelamiz. Xuddi shunday hisoblashlar yordamida biz anchain daraja ko‘rsatkichi va boshlang‘ich ildizlarni topishda qulayliklarga erishamiz.

1.1.5-natija: Agar a son m modul bo’yicha δ ko‘rsatkichga tegishli bo‘lsa, a^k son shu modul bo’yicha $\frac{\delta}{(\delta,k)}$ ko‘rsatkichga tegishli bo‘ladi.

Isboti: a^k son m modul bo’yicha γ ko’rsatkichga tegishli bo’lsin, ya’ni $a^{k\gamma}\equiv 1(mod\,m)$ chin bo’lsin. 1-natijaga asosan bu taqqoslama $k\gamma\equiv 1(mod\,\delta)$ bo’lganda va faqat shundagina o’rinli bo’ladi. Taqqoslamalarning xossasiga asosan ohirgi taqqoslamani quyidagicha yoza olamiz:

$$\gamma \equiv 0 \left(mod \frac{\delta}{(\delta, k)} \right).$$

Natija isbot etildi.

1.1.5-natija: Agar $(\delta, k) = 1$ bo'lsa, a^k ham δ ko'rsatkichga tegishli bo'ladi.

1.2-§. p^α va $2p^\alpha$ modullar bo'yicha boshlang'ich ildizlar va ularni hisoblash.

Yuqoridagi paragrafda biz daraja ko'rsatkichi, boshlang'ich ildiz nima ekanligi va ularni oddiy tub modullarga bog'liq holda qanday hisoblanishini ko'rib chiqdik. Endi esa murakkab modullar bo'yicha ham boshlang'ich ildizlar mavjudmi degan savolga javob beramiz. Bunda biz tub son darajasi moduli bo’yicha ya’ni p^{α} va $2p^{\alpha}$ modullar bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjudligini ko’rib chiqamiz.

1.2.1. p^{α} va $2p^{\alpha}$modul bo’yicha boshlang’ich ildizlar.

Bizga avvaldan ma’lumki p toq tub son va $\alpha \geq 1$ bo’lsin. p^{α} va $2p^{\alpha}$ modullar bo’yicha boshlang’ich ildizlarning mavjudligini isbot qilaylik.

1.2.1-teorema. Agar *x* son *m* modul bo’yicha biror *ab* ko’rsatkichga tegishli bo’lsa, x^{a} son shu *m* modul bo’yicha *b* ko’rsatkichga tegishli bo’ladi.

Isboti: Haqiqatan ham, x^{a} son δ ko’rsatkichga tegishli bo’lsin. U holda, ¿, bundan esa quyidagini $x^{a\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ o’rinli bo’ladi. Shu sababdan *aδ son ab* songa, ya’ni a son δ ga bo’linishi kelib chiqadi. Bundan $\delta = b$.

1.2.2-teorema. Agar *x* son *m* modul bo’yicha biror a ko’rsatkichga va y esa shu modul bo’yicha b ko’rsatkichga tegishli bo’lib, $(a, b) = 1$ bo’lsa, xy son m modul bo’yicha ab ko’rsatkichga tegishli bo’ladi.

Isboti: Haqiqatan, xy son δ ko’rsatkichga tegishli bo’lsin, u vaqtda ¿ bajariladi. Bundan, $x^{b\delta} y^{b\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ bo’ladi va bundan $x^{b\delta} \equiv 1 (mod\, m)$ kelib chiqadi. Shuning uchun $b\delta$ son a ga bo’linadi va $(b, a) = 1$ bo’lgani uchun δ son a ga bo’linadi. Huddi shunday δ ning b ga bo’linishini ham aniqlaymiz. Bundan esa δ son a va b sonlariga bo’linishidan va $(a, b) = 1$ ekanligidan, y son ab ga ham bo’linadi. Ikkinchi tomondan, $x^{a} \equiv 1 (mod\, m)$, $y^{b} \equiv 1 (mod\, m)$ bo’lib, bundan $(xy)^{ab} \equiv 1 (mod\, m)$ bo’ladi va ab ning δ ga bo’linishi kelib chiqadi. Shuning uchun ham $\delta = ab$.

1.2.3-teorema. Modul p bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjuddir.

Isboti: Haqiqatan,

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_r \tag{1.2.1}$$

ko’rsatkichlarning eng kichik umumiy bo’linuvchisini τ bilan belgilab, bu ko’rsatkichlardan har qaysisiga modul p bo’yicha $1, 2, 3, \ldots, p-1$ qatorning aqalli bitta soni tegishli deb olaylik. τ ning kanonik yoyilmasi $\tau = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ bo’lsin. U vaqtda har bir s uchun (1.2.1) sonlar orasida $q_s^{\alpha_s}$ ga bo’linuvchi va $\delta=q_s^{\alpha_s}$ ko’rinishga ega bo’lgan δ son mavjuddir. Agar x son δ ko’rsatkichga tegishli bo’lsa, b ga asosan, $x_s=x^a$ son $q_s^{\alpha_s}$ ko’rsatkichga tegishli bo’ladi, bunda $s=1,2,\dots,k;$ ga asosan, $g=x_1 x_2 \dots x_k$ son $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}=\tau$ ko’rsatkichga tegishli.

Lekin, (1.2.1) ko’rsatkichlar τ ning bo’luvchilarini ifodalagani uchun, barcha $1,2,3,\dots,p-1$ sonlar $x^\tau \equiv 1(mod\, p)$ taqqoslamani qanoatlantiradi. Demak,

$p-1 \le \tau$ ekan. Bunda τ son $p-1$ ning bo’luvchisini ifodalagani uchun

$\tau=p-1,$ ya’ni g boshlang’ich ildizdir.

1.2.4-teorema: g son modul p bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’lsin. Shunday t sonni topish mumkinki, ¿ tenglik bilan aniqlangan u son p ga bo’linmaydi. Shu tenglikdagi $g+pt$ son istalgan $\alpha>1$ uchun p^α modul bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’ladi.

Isboti: Haqiqatan,

$$g^{p-1}=1+pT_{0,}$$

¿ (1.2.2)

Bunda $t$bilan birga u ham p modul bo’yicha to’la sistemaning chegirmakariga teng qiymatlarni qabul qiladi. Shu sababli, shunday t ni topish mumkinki, u son p ga bo’linmaydi. Bunday t uchun (1.2.2) dan quyidagilarni chiqaramiz:

¿ (1.2.3)

Bu yerda u_2, u_3, … sonlar p ga bo’linmaydi.

$g+pt$ son modul p^α bo’yicha δ ko’rsatkichga tegishli bo’lsin. U vaqtda,

$$(g+pt)^\delta \equiv 1(mod\, p^\alpha) \qquad (1.2.4)$$

bo’ladi. Bundan esa $(g+pt)^\delta \equiv 1(mod\, p)$ bo’ladi; demak, δ son $p-1$ ga bo’linadi. Endi, $\varphi(p¿¿\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)¿$ son δ ga bo’lingani uchun

$$\delta=p^{r-1}(p-1)$$

bo’ladi. Bunda r son $1,2,3,\ldots.\alpha$ larning birini ifodalaydi. (1.2.4) taqqoslamaning chap tomonini (1.2.2) va (1.2.3) tengliklardagi mos ifodalar bilan almashtirsak, quyidagi hosil bo’ladi. ($u=u_1$¿.

$$1+p^r u_r \equiv 1\left(mod\ p^\alpha\right), p^r \equiv 0\left(mod\ p^\alpha\right), r=\alpha, \delta=\varphi\left(p^\alpha\right),$$

ya’ni $g+pt$ son p^α modul bo’yicha boshlang’ich ildizni ifodalaydi.

1.2.5-teorema. $\alpha \geq 1$ va $g_1$son p^α modul bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’lsin. $g_1\, va\, g_1+p^\alpha$ sonlarning qaysi biri toq bo’lsa o’shanisi $2p^\alpha$ modul bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’ladi.

Isboti: haqiqatan ham, $x^\gamma \equiv 1\left(mod\ p^\alpha\right)$ va $x^\gamma \equiv 1\left(mod\, 2p^\alpha\right)$ taqqoslamalardan birini qanoatlantiruvchi toq son x ikkinchisini ham qanoatlantiradi. Shu sababli, $\varphi(p$¿¿$\alpha)=\varphi(2p$¿¿$\alpha)$¿¿ bo’lgani uchun, p^α va $2p^\alpha$ modullardan biri bo’yicha boshlang’ich ildizni ifodalagan toq son x ikkinchisi bo’yicha ham boshlang’ich ildizni ifodalaydi. Lekin p^α modul bo’yicha ikkita $g_1\, va\, g_1+p^\alpha$ boshlang’ich ildizlarning bittasi albatta toq bo’ladi. Demak, y, $2p^\alpha$ modul bo’yicha ham boshlang’ich ildiz bo’ladi.

1.2.2. p^α va $2p^\alpha$modul bo’yicha boshlang’ich ildizlarni topish.

Biz yuqorida p^α va $2p^\alpha$ modullar bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjud ekanligini isboti bilan ko’rdik. Endi esa agar boshlang’ich ildizlari mavjud bo’lsa ular qanday topiladi degan masalani ko’rib chiqamiz.

p toq tub son va $\alpha \geq 1$ bo’lganda p^α va $2p^\alpha$ modullar bo’yicha boshlang’ich ildizlarni quyidagi umumiy teoremadan foydalanib topishimiz mumkin.

1.2.6-teorema: $c=\varphi(m)$ bo’lsin, q_1, q_2, … , q_k, sonlarni esa c ning xar hil tub bo’luvchilari deb olaylik. m bilan o’zaro tub bo’lgan g son modul m bo’yicha boshlang’ich ildiz bo’lishi uchun, bu g son ushbu

$$g^{\frac{c}{q_1}} \equiv 1\left(mod\, m\right), g^{\frac{c}{q_2}} \equiv 1\left(mod\, m\right), \ldots, g^{\frac{c}{q_k}} \equiv 1\left(mod\, m\right), \qquad (1.2.5)$$

taqqoslamalardan hech birini qanoatlantirmasligi zarur va yetarlidir.

Isboti: haqiqatan, agar $q-¿$ boshlang'ich ildiz bo'lsa, u, c ko'rsatkichga tegishli va, (1.2.5) taqqoslamadan hech birini qanoatlantirmaydi.

Aksincha, g son (1.2.5) taqqoslamalardan hech birini qanoatlantirmaydi deb faraz qilaylik. Agar g son δ ko'rsatkichga tegishli va $\delta < c$ bo'lsa, q bilan $\frac{c}{\delta}$ ning tub bo'luvchilaridan birini belgilab,

$$\frac{c}{\delta}=qu, \frac{c}{q}=\delta u, g^{\frac{c}{q}} \equiv 1 (mod\ p)$$

larga ega bo'lamiz. Bu esa bizning farazimizga qarshi. Demak, $\delta = c$ va $g-¿$ boshlang'ich ildiz ekan.

1.2.1-misol: $m=61$ modul bo'yicha boshlang'ich ildizlar mavjudmi va agar mavjud bo'lsa ularni toping.

Yechilishi: Demak bizga malum $m=61$ $\varphi(p)=p-1$ dan foydalanib $\varphi(61)=61-1=60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ tub ko'paytuvchilarga ajratib oldik. Endi esa

$$\frac{60}{5}=12; \frac{60}{3}=20; \frac{60}{2}=30;$$

Demak, 61 ga bo'linmaydigan g son modul 61 bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'lishi uchun, bu g son

$$g^{12} \equiv 1 (mod\,61), g^{20} \equiv 1 (mod\,61), g^{30} \equiv 1 (mod\,61), \qquad (1.2.6)$$

taqqoslamalardan hech birini qanoatlantirmasligi zarur va yetarlidir.

Lekin 2, 3, 4, … sonlarini (61 modul bo'yicha) sinash yo'li bilan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$2^{12} \equiv 9, 3^{12} \equiv 1, 4^{12} \equiv 18, 5^{12} \equiv 12, 6^{12} \equiv 10,$$

$$2^{20} \equiv 1, 3^{20} \equiv 14, 4^{20} \equiv 1, 5^{20} \equiv 16, 6^{20} \equiv 4,$$

$$2^{30} \equiv 10, 3^{30} \equiv 1, 4^{30} \equiv 8, 5^{30} \equiv 1, 6^{30} \equiv 18,$$

Bundan ko'rinadiki, 2, 3, 4, 5 sonlari boshlang'ich ildiz emas, chunki ular (1.2.6) taqqoslamalarning eng kamida bittasini qanoatlantiradi. 6 soni esa (1.2.6) taqqoslamalardan hech birini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun ham 6 boshlang’ich ildiz bo’ladi.

1.2.2-misol: $m=61^2$ modul bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjudmi va agar mavjud bo’lsa ularni toping.

Yechilishi: bu yerda ham boshlang’ich ildizni umumiy teoremadan foydalanib topish mumkin edi. Lekin biz uni 1.2.2-teoremadan foydalanib osonroq yo’l bilan topamiz. 61 modul bo’yicha boshlang’ich ildiz 6 ekanligi avvalgi misoldan malumligi uchun ushbu

$$6^{60}=1+61(3+61l),$$

$$(6+61t)^{60}=1+61\left(3+61l-6^{59}t+61T\right)=1+61u$$

tengliklarga ega bo’lamiz. $u$ning 61 ga bo’linmasligi uchun, $t=0$ bo’lishi kifoya. Shu sababli modul $61^2=3721$ bo’yicha boshlang’ich ildiz sifatida $6+61\cdot 0=6$

ni olishimiz mumkin.

1.2.3-misol: $m=7442$ modul bo’yicha boshlang’ich ildizni toping.

Yechilishi: bizga ma’lumki $m=7442=2\cdot 3721$ bo’lib, bu yerda ham boshlang’ich ildizni umumiy teoremadan foydalanib topishimiz mumkin, lekin biz uni 1.2.4-teoremadan foydalanib topamiz. Bizga oldingi misoldan ma’lumki 3721 modul bo’yicha boshlangich ildiz 6 ekanligi ma’lum. Shu sababdan 7442 modul bo’yicha boshlang’ich ildiz sifatida, 6, 6+3721 sonlaridan toqini, ya’ni 3727 ni boshlang’ich ildiz sifatida olishimiz mumkin.

Biz ushbu paragrafda p^α va $2p^\alpha$ modullar bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjudligini ko’rdik va ularning mavjud ekanligidan qanday hisoblanishini ham ko’rib o’tdik. Berilgan teoremalardan foydalanib bir nechta misollar yechimini o’rgandik. Bunda $p=61;\, p^\alpha=61^2;\, 2p^\alpha=2\cdot 61^2$ bo’lgan hollarni ko’rib o’tdik va natijalar oldik.

1.3-§. Indekslar va ularning xossalari.

1.3.1. Indekslar va ularni hisoblash.

Biz bundan oldingi 1.1-1.2-§ larda har qanday p tub modul bo'yicha boshlang'ich ildiz mavjudligini ko'rsatdik. Ma'lumki, g son p modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'lsa,

$$g^0, g^1 g^2, \ldots, g^{p-2} \qquad (1.3.1)$$

sonlar qatori shu p modul bo'yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini tashkil qiladi. (1.3.1) qatorning hadlari p bilan o'zaro tub bo'lib, ular p modul bo'yicha $\varphi(p)=p-1$ ta sinfning vakillaridan iboratdir. Demak agar $(a, p)=1$ bo'lsa, (1.3.1) qatorda p modul bo'yicha a son bilan taqqoslanuvchi yagona element topiladi, ya'ni

$$a \equiv g^{\gamma} (mod\, p) \qquad (1.3.2)$$

taqqoslama chin bo'ladi. Bu yerda $0<\gamma \le p-2$.

1.3.1-ta'rif: Agar g son p modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'lib, $(a,p)=1$ bo'lganda (1.3.2) taqqoslama chin bo'lsa, $\gamma \ge 0$ ga a *sonning* p *modul bo'yicha* g *asosga nisbatan indeksi* deyiladi. U $\gamma = ind_g a$ orqali belgilanadi. Agar asos avvaldan tayinlangan bo'lsa, a ning indeksi $inda$ orqali belgilanadi.

Bu ta'rifdan foydalanib, (1.3.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$a \equiv g^{ind_a} (mod\, p) \qquad (1.3.3)$$

Yuqoridagilarga asosan $(a,p)=1$ shartni qanoatlantiruvchi har bir a son g asos bo'yicha

$$0,1,2,3,\ldots,p-2 \qquad (1.3.4)$$

sonlarning bittasi bilan aniqlanuvchi indeksga ega. Asosning o'zgarishi bilan indeks ham umuman o'zgaradi.

Masalan, 11 modul bo'yicha $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ sonlari va ular bilan berilgan 11 modul bo'yicha taqqoslanuvchi barcha sonlar 5 asosga nisbatan

$$5^0 \equiv 1(mod\, 11), 5^1 \equiv 5(mod\, 11), 5^2 \equiv 3(mod\, 11)$$

$$5^3 \equiv 4(mod\, 11), 5^4 \equiv 9(mod\, 11), 5^5 \equiv 1(mod\, 11)$$

$$5^6 \equiv 5(mod\, 11), 5^7 \equiv 3(mod\, 11), 5^8 \equiv 4(mod\, 11)$$

$$5^9 \equiv 9(mod\, 11), 5^{10} \equiv 1(mod\, 11),$$

bo'lgani uchun mos ravishda $5^0 \equiv 1(mod\, 11), 5^4 \equiv -2(mod\, 11), 5^2 \equiv 3(mod\, 11)$

$$5^3 \equiv 4(mod\, 11), 5^1 \equiv 5(mod\, 11), 5^5 \equiv 1(mod\, 11)$$

$$5^9 \equiv -2(mod\, 11), 5^7 \equiv 3(mod\, 11), 5^8 \equiv 4(mod\, 11)$$

$$5^6 \equiv 5(mod\, 11),$$

yozib olsak, bundan $0,4,2,3,1,5,9,7,8,6$ indekslarga ega bo'lamiz.

g son p modul bo'yicha boshlang'ich ildiz bo'lgani uchun boshlang'ich ildizning ta'rifiga asosan

$$g^{p-1} \equiv 1 (mod\ p) \qquad (1.3.5)$$

taqqoslama aynan o'rinli bo'ladi. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini $t>0$ darajaga ko'tarib,

$$1 \equiv g^{t(p-1)} (mod\ p) \qquad (1.3.6)$$

ga ega bo'lamiz. Endi (1.3.2) va (1.3.6) taqqoslamalarni hadlab ko'paytiramiz:

$$a \equiv g^{\gamma+t(p-1)} (mod\ p) \qquad (1.3.7)$$

(1.3.7) taqqoslama $(a, p)=1$ shartni qanoatlantiruvchi har bir a son g boshlang'ich ildiz bo'yicha cheksiz ko'p indeksga ega ekanligini ko'rsatadi. Bu indekslarning hammasi

$$g^{\gamma} \equiv g^{\gamma_1} (mod\ p) \qquad (1.3.8)$$

shartni qanoatlantiradi. Bizga 1.1-§, da berilgan 1.1.3- teoremaga asosan (1.3.8) ning o'rinli bo'lishi uchun

$$\gamma \equiv \gamma_1 (mod\ p-1) \qquad (1.3.9)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir. Demak, p modul bo'yicha tuzilgan va p bilan o'zaro tub bo'lgan har bir sinfga (1.3.9) taqqoslama bilan aniqlanuvchi indekslar to'plami mos keladi.

Agar, $a \equiv b (mod\ p)$, bo'lsa yuqoridagilarga asosan

$$ind\, a \equiv ind\, b\, (mod\ p-1) \qquad (1.3.10)$$

bo'ladi. (1.3.2) va (1.3.3) ga asosan

$$g^{\gamma} \equiv g^{ind a} (mod\ p) \qquad (1.3.11)$$

Bundan

$$\gamma \equiv ind\, a (mod\ p-1) \qquad (1.3.12)$$

bo’ladi.

1.3.2. Indekslarning asosiy xossalari.

Biz yuqorida indekslar nima ekanligi va ularni topish, hisoblash jarayonlarini o’rgandik. Endi esa bevosita indekslarni hisoblash jarayonida qulaylik yaratuvchi xossalarni ko’rib chiqamiz.

1.3.1-xossa: Ko’paytmaning indeksi $p-1$ modul bo’yicha ko’paytuvchilar indekslarining yig’indisi bilan taqqoslanuvchidir:

$$ind\, ab\ldots l \equiv ind\, a + ind\, b + \ldots + ind\, l \,(mod\ p-1).$$

Isboti: Indeksning ta’rifiga asosan quyidagi taqqoslamalarni yozib olamiz:

$$a \equiv g^{ind\, a} (mod\ p),$$

$$b \equiv g^{ind b} (mod\ p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l \equiv g^{ind\, l} (mod\ p).$$

Bularni hadlab ko’paytiramiz. U holda

$$a \cdot b \cdot \ldots \cdot l \equiv g^{ind\, a + ind\, b + \ldots + ind\, l} (mod\ p)$$

hosil bo’ladi. Bundan (1.3.2) va (1.3.12) ga asosan

$$ind\,(a \cdot b \cdot \ldots \cdot l) \equiv ind\, a + ind\, b + \ldots + ind\, l\,(mod\ p-1) \qquad (1.3.13)$$

bo’ladi. Xossa isbotlandi.

1.3.2-xossa: Natural ko’rsatkichli darajaning indeksi $p-1$ modul bo’yicha asos indeksi va daraja ko’rsatkichining ko’paytmasi bilan teng qoldiqli bo’ladi, ya’ni

$$ind\, a^n \equiv n\, ind\, a\,(mod\ p-1).$$

Isboti: Faraz qilaylik, $a=b=c=\ldots=l$ bo’lsin. Unda 1.3.1-xossaga asosan

$$ind\,(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \equiv ind\, a + ind\, a + \ldots + ind\, a\,(mod\ p-1)$$

yoki

$$ind\, a^n \equiv n\, ind\, a \pmod{p-1}.$$

ekanligi isbotlandi.

1.3.3-xossa: p ixtiyoriy tub son bo'lganda birning indeksi $p-1$ modul bo'yicha nol bilan, g asosning indeksi esa 1 bilan teng qoldiqlidir.

Isboti: Xaqiqatan, $g^0 \equiv 1 \pmod{p}$ va $g^1 \equiv g \pmod{p}$ bo'lganidan

$ind\, 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$ va $ind\, g \equiv 1 \pmod{p-1}$.

Demak yuqoridagi xossalardan shunday xulosaga kelishimiz mumkinki indekslar ham logarifmlar kabi xossalarga ega.

1.3.1-misol: $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$ taqqoslamani indekslar yordamida yeching.

Yechilishi: Biz ushbu misolni yechimini topishda yuqoridagi indekslarning asosiy xossalaridan foydalanamiz. Ushbu taqqoslamaning har ikkala tomonini indekslab yuboramiz, natijada:

$$2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$ind\left(2x^8\right) \equiv ind\, 5 \pmod{12}$$

1.3.1-xossadan foydalanib

$$ind\, 2 + 8\, ind\, x \equiv ind\, 5 \pmod{12}$$

Endi esa indekslar jadvalidan foydalangan holda $ind\, 2 = 1\ va\ ind\, 5 = 9$ ekanligidan

$$1 + 8\, ind\, x \equiv 9 \pmod{12}.$$

Taqqoslamalarning xossalaridan foydalangan holda

$$8\, ind\, x \equiv 8 \pmod{12}$$

va xossani yana qo'llab taqqoslamaning barcha hadlarini 4 ga bo'lib yuboramiz:

$$2\, ind\, x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$ind\, x \equiv 1 \pmod{3}$$

yechimga ega bo’lamiz. Bu taqqoslamaning ildizi 4 ta bo’lib ular:

$$ind\, x_1 \equiv 1 \pmod{12},\, x_1 \equiv 2 \pmod{13}$$

$$ind\, x_2 \equiv 4 \pmod{12},\, x_2 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$ind\, x_3 \equiv 7 \pmod{12},\, x_3 \equiv 11 \pmod{13}$$

$$ind\, x_4 \equiv 10 \pmod{12},\, x_4 \equiv 10 \pmod{13}.$$

kabi natijaga ega bo’lamiz. Ushbu misol yechimidan ko’rinadiki taqqoslamalarni indekslarni xossalaridan foydalanib yechish anchain qulay.

1.3.3. Ikki xadli taqqoslamalarni indekslar yordamida yechish.

Taqqoslamalarni o’rganishda davom etar ekanmiz bir nomalumli, ikki hadli, ko’p xadli kabi turli ko’rinishdagi taqqoslamalarni yechishga to’g’ri keladi. Bu yechimlarni oson va qulay usullarda yechishda turli olimlar ish olib borishgan. Xususan ikki xadli taqqoslamalarni yechishda I.M.Vinogradov, Yu.V.Nesterenko va yana boshqa ko’plab olimlar o’z izlanishlarida boshlang’ich ildizlar va indekslardan foydalangan holda ikki hadli taqqoslamalarni yechimini topishgan.

Indekslarning xossalaridan foydalanib, ikki hadli taqqoslamalarni osongina yechish mumkin. Bunday misollarni yechish uchun berilgan son bo’yicha uning indeksini va aksincha berilgan indeksga ko’ra, unga mos keluvchi sonni topishga to’g’ri keladi.

Faraz qilaylik,

$$a x^n \equiv b \pmod{p} \tag{1.3.14}$$

taqqoslama berilgan bo’lib, $(a, p)=1$ bo’lsin. Indekslar tushunchasidan foydalanib, (1.3.14) ni unga teng kuchli bo’lgan

$$ind\, a + n ind\, x \equiv ind\, b \pmod{p-1}$$

yoki

$$n ind\, x \equiv ind\, b - ind\, a \pmod{p-1} \tag{1.3.15}$$

taqqoslama bilan almashtiramiz. Endi $ind\, x$ ni noma’lum sifatida qarab, (1.3.15) taqqoslamani yechamiz. Agar taqoslama umuman yechimga ega bo’lsa, quyidagi ikki holdan biri bo’lishi mumkin.

1-hol. $(n, p-1)=1$;

2-hol. Agar 1-hol o'rinli bo'lsa, (1.3.15) taqqoslama $ind\,x$ ga nisbatan yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $ind\,x=c$ yechim bo'lsa, indekslar jadvalidan foydalanib, x ni topamiz. x ning topilgan qiymati p modul bo'yicha berilgan taqqoslamaning yechimi bo'ladi.

$$(n, p-1)=d>1 .$$

Bunda yana quyidagi ikki hol yuz beradi:

a) $ind\,b-ind\,a\,d$, ya'ni $ind\,b-ind\,a\,son\,d$ ga bo'linmaydi. Bunday holda taqqoslamaning xossasiga asosan (1.3.15) taqqoslama yechimga ega bo'lmaydi. (1.3.14) va (1.3.15) teng kuchli bo'lgani uchun (1.3.14) ham yechimga ega emas;

b) $ind\,b-ind\,a/d$, ya'ni $ind\,b-ind\,a\,son\,d$ ga bo'linsin. Unda (1.3.15) taqqoslamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{n}{d}ind\,x\equiv\frac{ind\,b-ind\,a}{d}\left(mod\,\frac{p-1}{d}\right).$$

Bu yerda $\left(\frac{n}{d},\frac{p-1}{d}\right)=1$ bo'lgani uchun oxirgi taqqoslama $\frac{p-1}{d}$ modul bo'yicha faqat bitta yechimga ega bo'ladi. Ya'ni (1.3.15) taqqoslama $p-1$ modul bo'yicha d ta yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlarni $ind\,x$ lar bo'yicha topib, indekslar jadvali yordamida esa (1.3.14) ning yechimlarini topamiz.

Indekslar odatda biror boshlang'ich ildizga nisbatan tuzilgani uchun har bir taqqoslamaning yechimini albatta dastlab berilgan modul bo'yicha topish kerak. Chunki boshlang'ich ildizlar o'zgarishi bilan indekslar ham o'zgaradi.

1.3.2-misol: $x^{12}\equiv 37\,(mod\,41)$ taqqoslama yechilsin. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini indekslaymiz:

$$12\,ind\,x\equiv ind\,37\,(mod\,40)$$

Indekslar jadvaliga asosan,

$$ind\,37=32 ,$$

$$12\,ind\,x\equiv 32\,(mod\,40)\Rightarrow ind\,x\equiv 6\,(mod\,10) ,$$

$$(12{,}40)=4 .$$

bo'lgani uchun berilgan taqqoslama yechiladi va 41 modul bo'yicha 4 ta yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlar

$$ind\,x_1\equiv 6\,(mod\,40) ;\qquad ind\,x_2\equiv 16\,(mod\,40);$$

$$ind\,x_3\equiv 26\,(mod\,40);\qquad ind\,x_4\equiv 36\,(mod\,40) ;$$

indekslardan kelib chiqadigan yechimlarni hosil qilamiz:

$x_1\equiv 39$, $x_2\equiv 18$, $x_3\equiv 2$, $x_4\equiv 23\,(mod\,41)$,

$x^n\equiv a\,(mod\,p)$ (1.3.16) taqqoslamaning yechilish kriteriyasi.

Bu taqqoslamaning yechilish kriteriyasini keltirib chiqarish uchun uning ikkala tomonini indekslaymiz:

$$n\, ind\, x \equiv ind\, a \pmod{p-1} \qquad (1.3.17)$$

$(n, p-1)=d$ bo'lganda bu taqqoslamaning yechimga ega bo'lishi uchun $ind\, a$ ning d ga bo'linishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$ind\, a \equiv 0 \pmod{d} \qquad (1.3.18)$$

bajarilishi shart. (1.3.18) shartni $p\, va\, d$ orasidagi bog'lanish orqali ifodalaylik. Buning uchun (1.3.18) ning ikkala tomonini va modulni $\frac{p-1}{d}$ ga ko'paytiramiz. Unda (1.3.18) taqqoslama bilan teng kuchli bo'lgan

$$\frac{p-1}{d} ind\, a \equiv 0 \pmod{p-1}$$

taqqoslama hosil bo'ladi. Indekslar tushunchasidan foydalanib, oxirgi taqqoslamani

$$ind\, a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 0 \pmod{p-1}$$

Shaklda yozamiz. $0 \equiv ind\, 1 \pmod{p-1}$ bo'lganidan va yuqoridagi taqqoslamaga muvofiq

$$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (1.3.19)$$

ni yozamiz. Hosil bo'lgan (1.3.19) shart (1.3.16) taqqoslamaning yechilish kriteriyasidan iboratdir.

1.3.1-natija: Ushbu $x^n \equiv a \pmod{m}$ taqqoslama yechiladigan bo'lishi uchun $ind\, a$ ning d ga bo'linishi zarur va yetarli.

I BOB BO'YICHA XULOSALAR.

"Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqi" mavzusidagi dissertatsiya mavzusini o'rganishda I bob "Boshlang'ich ildizlar va indekslar" uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrifida tub modul bo'yicha boshlang'ich ildizlarlar va ularning xossalari, ikkinchi paragrafda p^{α} va $2p^{\alpha}$ modullar bo'yicha boshlang'ich ildizlar va ularni topish, uchinchi paragrafda esa indekslar va ularning xossalaridan iboratdir. Birinchi paragrafda jami 9 ta teorema, 4 ta ta'rif, 8 ta misol, 7 ta xossa va 6 ta natija ko'rib chiqildi.

Birinchi paragrafni o'rganishda asosan boshlang'ich ildizlar, ularni topishda daraja ko'rsatkichlarini aniqlash, boshlang'ich ildizlarning asosiy xossalari va ularga doir misollar o'rganildi. Bu paragrafni o'rganishda turli xil chet el va O'zbekistonlik matematik olimlarning imiy izlanishlari, kitoblari va maqolalaridan foydalanildi. Boshlang'ich ildizlarni avvaliga tub modul bo'yicha o'rganilgan bo'lsa keyin esa murakkab modul bo'yicha p^{α} va $2p^{\alpha}$ modul bo'yicha boshlang'ich ildizlarning mavjudligi va ularni hisoblash o'rganildi. Misollar yordamida yanada mustahkamlandi.

Uchinchi paragrafda esa indekslar va ularning xossalari ko'rib chiqildi. Birinchi paragrafdan foydalangan holda indekslarga ta'rif berildi. So'ng p^{α} va $2p^{\alpha}$ modul bo'yicha indekslar va ularni hisoblash ko'rib chiqildi. Boshlang'ich ildizlar va indekslarni chuqurroq o'rganishdan asosiy maqsad ikki hadli taqqoslamalarni indekslar yordamida yechimini topishdan iborat. Uchinchi paragrafda ikki hadli taqqoslamalarni indekslar orqali hisoblash o'rganilgan va unga doir misollar yechilgan.

Birinchi bobning har uchala paragrafida teoremalar va xossalar isbotlari bilan ko'rib chiqildi, natijalar olindi hamda misollar bilan tushuntirildi. Har bir olingan natijalar keyingi bobni o'rganishda va misollarni amaliy yechimini olishda yordam beradi.

Birinchi bobni o’rganish keyinchalik ikkinchi bobni ya’ni Dirixle xarakterlariga ta’rif berishda yordam beradi.

II BOB. DIRIXLE XARAKTERLARI, ULARNING XOSSALARI VA UNING MAVJUDLIGINI TEKSHIRISH METODLARI

Birinchi bo’lib xarakterlar tushunchasini fanga nemis matematigi Peter Gustav Lejen Dirixle (1805-1859) tomonidan natural sonlar ketma-ketligidan berilgan arifmetik progressiyaga tegishli sonlarni ajratib olish uchun kiritilgan. Keyinchalik turli xarakteristik funksiyalar paydo bo’lishi bilan xarakterlarga Dirixle xarakterlari deb yuritila boshlandi. Sonlarning analitik nazariyasida ko’pchilik masalalar, arifmetik progressiyadagi eng kichik tub sonni yuqoridan baxolash, Xardi-Litlvud, Varing, Eyler-Goldbax, Xuo-Lo-Ken kabi masalalar yechimi Dirixle funksiyasining xossalari, ular uchun olingan baholarga bog’liq holda izlanadi.

2.1-§. Dirixle xarakteristikasi va uning xossalari.

2.1.1. Tub son darajasi moduli bo‘yicha Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari.

Berilgan butun sonlar ketma-ketligidan $kn+l, n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ arifmetik progressiyaga tegishli qismiy ketma-ketlikni ajratish imkonini beruvchi multiplikativ funksiyaning mavjud ekanligi bu yerda ham tub sonlarning natural sonlar qatorida taqsimlanishini o‘rganishda foydalanilgan usullardan foydalanish imkonini beradi. Bunday xossaga ega bo‘lgan funksiya L.Dirixle tomonidan kiritilgan va xarakterlar deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasidir. Bundan keyin biz xarakterlar deganda Dirixle xarakterlarini tushunamiz.

Biz avvalo, $k=p^{\alpha}$ moduli bo‘yicha xarakterlarni kiritib, ularning sodda xossalarini o‘rganamiz. Keyin esa aniqlangan xarakterlardan foydalanib ixtiyoriy k moduli bo‘yicha xarakterlarni kiritamiz.

Faraz etaylik, $p>2$ –tub son, $k=p^{\alpha}, \alpha\geq 1$ – butun son bo‘lsin. Bizga ma’lumki, bunday k moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildizlar mavjud. g ularning eng kichigi bo‘lsin. $indn$ bilan $(n,k)=1$ shartni qanoatlantiruvchi n sonining k moduli bo‘yicha g asosga ko‘ra indeksini belgilaymiz, ya’ni $\gamma=\gamma(n)=indn$ soni $g^{\gamma}\equiv n(modk)$ taqqoslamadan aniqlanadi.

2.1.1-ta’rif. $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son, $\alpha\geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha xarakter deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat

$$\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k;m)=\begin{cases} 0, \text{агар } (n,k)>1 \text{ бўлса};\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{\varphi(k)}}, \text{агар } (n,k)=1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi. Bunda m –butun son,
$\varphi(k)-¿$ Eyler funksiyasi.

Ta’rifga ko‘ra $\chi(n)=\chi(n;k;m)$ xarakter m parametrga bog‘liq, m bo‘yicha davriy bo‘lib davri $\varphi(k)$ ga teng, ya’ni umuman aytganda k moduli bo‘yicha $\varphi(k)$ ta xarakter mavjud bo‘lib ularni $m=0,1,2,\ldots,\varphi(k)-1$ deb olib hosil qilish mumkin.

Endi, faraz etaylik $k=2^{\alpha}, \alpha\geq 3$ – butun son bo‘lsin. Bu holda ma’lumki, har qanday toq n soni uchun k moduli bo‘yicha $\gamma_0=\gamma_0(n), \gamma_1=\gamma_1(n)$ indekslar sistemasi mavjud, ya’ni $n\equiv(-1)^{\gamma_0}\cdot 5^{\gamma_1}(modk)$ taqqoslamani qanoatlantiruvchi γ_0, γ_1 sonlari mavjud va ular mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ sonlariga karrali bo‘lgan sonlargacha aniqlik bilan aniqlanadi.

2.1.2-ta’rif. $k=2^{\alpha}$ ($\alpha\geq 1$ – butun son) moduli bo‘yicha xarakter deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat quyidagi tengliklarning biri bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi:

$$\chi(n)=\chi(n;2)=\chi(n;2;0;0)=\begin{cases} 0, \text{агар } (n,2)>1 \text{ бўлса};\\ 1, \text{агар } (n,2)=1 \text{ бўлса},\end{cases}$$

$$\chi(n)=\chi(n;4)=\chi(n;4;m_0;0)=\begin{cases} 0, \text{агар } (n,4)>1 \text{ бўлса};\\ (-1)^{m_0\gamma_0}, \text{агар } (n,4)=1 \text{ бўлса}\end{cases},$$

bunda $n\equiv(-1)^{\gamma_0} mod\, 4¿$, m_0- butun son;

$$\chi(n)=\chi(n;2^{\alpha})=\chi(n;2^{\alpha};m_0;m_1)$$

$$¿\begin{cases} 0, \textit{агар}\ (n,2^{\alpha})>1\ \textit{бўлса}; \\ (-1)^{m_0\gamma_0}e^{2\pi i\frac{m_1\gamma_1}{2^{\alpha-2}}}, \textit{агар}\ (n,2^{\alpha})=1, \alpha\ge 3-\textit{бўлса}; \end{cases}$$

Bu yerda m_0, m_1 lar butun sonlar.

2.1.2-ta’rifdan $\chi(n;2^{\alpha};m_0;m_1)$ funksiya m_0, m_1 parametrlarga bog‘liq va m_0, m_1 lar bo‘yicha davriy bo‘lib davri mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ ga teng, ya’ni umuman aytganda $k=2^{\alpha}$ moduli bo‘yicha $\varphi(k)=\varphi(2^{\alpha})=2^{\alpha-1}$ ta xarakter mavjud va bu xarakterlarni m_0 ni 0,1 ga m_1 ni esa $0,1,2,\dots,2^{\alpha-1}-1$ larga teng deb olib hosil qilish mumkin.

Berilgan sonning indeksi yoki indekslar sistemasi davriy bo‘lib davri funksiyaning moduliga teng, additiv, ya’ni ko‘paytmaning indeksi ko‘paytuvchilar indekslari yig‘indisiga teng bo‘lganligi uchun $\chi(n)$ xarakterlarning quyidagi xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi:

1°. k moduli bo‘yicha $\chi(n)$ xarakter davriy bo‘lib, davri k ga teng, ya’ni $\chi(n)=\chi(n+k)$.

2°. $\chi(n)$ multiplikativ funksiya, ya’ni $\chi(n\cdot m)=\chi(n)\cdot\chi(m)$.

Shuningdek, tushunarliki $\chi(1)=1$.

2.1.1-lemma. $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son, $\alpha\ge 1$ – butun son) moduli bo‘yicha $\varphi(k)$ ta har xil xarakter mavjud.

Isboti. Ta’riflarga ko‘ra $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son, $\alpha\ge 1$ – butun son) moduli bo‘yicha $\varphi(k)$ ta xarakter mavjud. Lemmani isbotlash uchun aniqlangan $\varphi(k)$ xarakterlar orasida aynan tenglari yo‘q ekanligini ko‘rsatish yetarli. Avvalo ixtiyoriy a butun son uchun

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\begin{cases}0, \text{агар } a\not\equiv 0\,(mod\, m)\,\textit{бўлса};\\ 1, \text{агар } a\equiv 0\,(mod\, m)\,\textit{бўлса},\end{cases} \quad (2.1.1)$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatan sham, agar $a\not\equiv 0\,(mod\,m)$ bo‘lsa, u holda (2.1.1) ning chap tomonidan

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\frac{1}{m}\left(1+e^{2\pi i\frac{a}{m}}+e^{2\pi i\frac{2a}{m}}+\dots+e^{2\pi i\frac{(m-1)a}{m}}\right)=\frac{1}{m}\cdot\frac{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot m}-1}{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot}-1}=¿$$

$$¿\frac{1}{m}\cdot\frac{0}{e^{2\pi i\frac{a}{m}\cdot}-1}=0.$$

Arapda $a\equiv 0(mod\,m)$ bo‘lsa, u holda $a=mt$ va

$$\frac{1}{m}\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi i\frac{ax}{m}}=\frac{1}{m}\cdot\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi itx}=¿\frac{1}{m}\cdot\sum_{x=0}^{m-1}1=\frac{1}{m}\cdot m=1.¿$$

Agar *n* soni *k* moduli bo‘yicha chegirmalarning keltirilgan sistemasini qabul qilib o‘zgarsa, u holda $\gamma(n)$ yoki $\gamma_0(n),\gamma_1(n)$ lar $\varphi(k)$ moduli yoki 2 vaa $2^{\alpha-2}$ modullari bo‘yicha ($k=2,k=4$ hollar trivial) chegirmalarning to‘la sistemasini qabul qiladi.

Endi, agar $\chi(n;k,m_1)$ va $\chi(n;k,m_2)$ lar $k=p^{\alpha}$ ($p>2$) moduli bo‘yicha har xil xarakterlar bo‘lsalar, ya’ni $m_1\not\equiv m_2(mod\,\varphi(k))$ bo‘lsa, u holda ularning aynan teng ekanligidan (2.1.1) ga asosan

$$\varphi(k)=\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{k}\frac{\chi(n;k,m_1)}{\chi(n;k,m_2)}=\sum_{x=0}^{\varphi(k)-1}e^{2\pi i\frac{(m_1-m_2)x}{\varphi(k)}}=0$$

ni hosil qilamiz. $k=p^{\alpha}$ ¿2 bo‘lgani uchun $\varphi(k)>0$,ya’ni oxirgi tenglik bajarilishi mumkin emas. Bu qarama-qarshilik $\varphi(k)$ ta xarakterlar orasida o‘zaro aynan tenglari yo‘q ekanligini ko‘rsatadi. $k=2^{\alpha}$ bo‘lgan hol ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

2.1.3-ta’rif. n ning $(n,k)=1$shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\chi(n)=1,$ n ning $(n,k)>1$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa $\chi(n)=0$ bo‘lgan xarakterga *k* moduli bo‘yicha *bosh xarakter* deyiladi va $\chi_0(n)$ ko‘rinishida belgilanadi.

Yuqoridagi 2.1.1- 2.1.3 ta’riflardan $k=2$ da $\chi_0(n)=\chi(n);$ $k=4$ bo‘lsa $\chi_0(n)=\chi(n;4,0);$ $k=2^{\alpha},\alpha\geq 3$ da $\chi_0(n)=\chi(n;k,0,0)$ va $k=p^{\alpha},$ $p¿2$ moduli bo‘yicha $\chi_0(n)=\chi(n;k,0)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi Dirixle xarakterlarining asosiy xossalaridan biri ortogonallik xossasini keltiramiz.

2.1.2-lemma. Ushbu

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{\chi(mod k)}\chi(n)=\begin{cases}0\,, \text{агар } n\not\equiv 1(mod\,k)\,бўлса\,;\\ 1\,, \text{агар } n\equiv 1(mod\,k)\,бўлса\,,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\begin{cases}0\,, \text{агар } \chi(n)=\chi_0(n)\,бўлса\,;\\ 1\,, \text{агар } \chi(n)\neq\chi_0(n)\,бўлса\end{cases}$$

tengliklar o'rinli. Bu yerda yig'indi *k* moduli bo'yicha barcha $\varphi(k)$ ta xarakterlar bo'yicha olinadi.

Bu lemmaning isboti (2.1.1)- tenglik va 2.1.1-2.1.3 ta'riflardan kelib chiqadi ([**6**] ga qarang).

2.1.2. Primitiv xarakterlar va ularning xossalari. Umuman olganda $\chi(n)$ xarakterning eng kichik davri uning modulidan kichik bo'lishi mumkin. Ko'pchilik tekshirishlarda primitiv (boshlang'ich) xarakterlar deb ataluvchi eng kichik davri uning moduliga teng xarakterlar muhim ahamiyatga ega. Endi ana shunday xarakterlarni qaraymiz.

2.1.4-ta'rif. Agar $(m,k)=1$ bo'lsa, u holda $k=p^{\alpha}$ ($p>2$ – tub son) moduli bo'yicha bosh xarakterga bo'lmagan $\chi(n)=\chi(n;k,m)$ xarakterga *primitiv xarakter* deyiladi;

agarda $m_0=1,(m_1,2)=1$ bo'lsa,$k=2^{\alpha}$,¿ – butun son) moduli bo'yicha bosh xarakterdan farqli $\chi(n)=\chi(n;k)=\chi(n;k;m_0;m_1)$ xarakterga *primitiv xarakter* deyiladi;

4 moduli bo'yicha bosh xarakterdan farqli xarakterga *primitiv xarakter* deyiladi.

Qolgan barcha xarakterlarga k moduli bo'yicha *hosilaviy xarakterlar* deyiladi.

2.1.4-ta'rifdan $k=p^{\alpha}$ moduli bo'yicha har bir hosilaviy xarakterga unga aynan teng bo'lgan $k_1=p^{\beta}(\beta<\alpha)$ moduli bo'yicha primitiv xarakter mos kelishi kelib chiqadi. Primitiv xarakterlar uchun ularning qiymatlari va Gauss yig'indisi

$$S=S(k,a,\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{2\pi i\frac{an}{m}}$$

ning qiymati orasidagi bog'lanishni ifodalovchi quyidagi formula o'rinli.

2.1.3-lemma. Agar $\chi(n)$ *k* moduli bo'yicha primitiv xarakter bo'lsa, u holda

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}},(2.1.2)$$ bu yerda

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}},|\tau(\chi)|=\sqrt{k}.(2.1.3)$$

Isboti. $k=4$ bo‘lganda (2.1.2) va (2.1.3) tengliklarni bevosita tekshirib ko‘rish mumkin. $k\neq 4$va $(n,k)=1$ bo‘lsin. U holda *m* ni $mn\equiv 1(mod\,k)$ taqqoslamadan aniqlab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)\chi(n)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(am)e^{2\pi i\frac{a}{k}}=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}.$$ Bu yerda biz $\overline{\chi}(n)$, ning

multiplikativ ekanligidan $\overline{\chi}(n)$ va $e^{2\pi i\frac{n}{k}}$

larningdavriyligi hamda agar a soni k moduli bo‘yicha chegirmalarning to‘la sistemasini qabul qilsa, u holda an ham shu sistemani qabul qilishidan foydalandik.

Endi $(n,k)>1$ holni qarash qoldi. Bu holda (2.1.2) ning chap tomoni nolga teng. Agar $k=p>2$bo‘lsa, u holda $(n,k)=p$ va (2.1.2) ning o‘ng tomoni

$\chi(n)\neq\chi_0(n)$ va

$\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=0$ bo‘lgani uchun nolga teng.Endi faraz etaylik $k=p^{\alpha},\alpha>1,n=rp$ bo‘lsin. U holda

$$\sum_{a=1}^{p^{\alpha}}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{arp}{p^{\alpha}}}=¿\sum_{v=1}^{p^{\alpha-1}}\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}(u\,p^{\alpha-1}+v)e^{2\pi i\frac{vr}{p^{\alpha-1}}}.¿$$

Bu yerdagi ichki yig‘indida

$$\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}(u\,p^{\alpha-1}+v)=0$$

ekanligini ko‘rsatamiz. $(v,p)=1$ va $\overline{\chi}$ davriy, multiplikativ bo‘lgani uchun

$$\sum_{u=0}^{p-1}\overline{\chi}(u\,p^{\alpha-1}+1)=0$$

tenglikni ko‘rsatish yetarli. $p>2$ bo‘lsin. U holda $g+pt$ soni p^{α} moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildiz bo‘ladi. Bu yerda *g* sonii *p* moduli bo‘yicha boshlang‘ich ildiz, *t* esa

$$(g+pt)^{p-1}=1+pb,(b,p)=1$$

shartni qanoatlantiradi. Agar γ soni $u\,p^{\alpha-1}+1$ sonining p^{α} moduli bo‘yicha indeksi bo‘lsa, u holda $\gamma=(p-1)\gamma_1$;

$$(g+pt)^{\gamma}=(1+pb)^{\gamma_1}\equiv u\,p^{\alpha-1}+1\left(mod\ p^{\alpha}\right).$$

Bu yerdan $\gamma_1=u\,b_1\,p^{\alpha-2},\ \ bb_1\equiv 1(modp)$ kelib chiqadi.

Shunday qilib,

$$\overline{\chi}\left(u\,p^{\alpha-1}+1\right)=e^{-2\pi i\frac{m\,ind\left(u\,p^{\alpha-1}+1\right)}{\varphi(p¿¿\alpha)}}=e^{-2\pi i\frac{mu\,b_1}{p}},¿$$

bu yerda $(m\,b_1,p)=1$;

$$\sum_{u=0}^{p-1}e^{-2\pi i\frac{mu\,b_1}{p}}=0.$$

Endi faraz etaylik $p=2,k=2^{\alpha},\alpha\geq 3$ bo‘lsin. U holda $u\,2^{\alpha-1}+1$ sonining indekslar sistemasi 0, $2^{\alpha-3}$ga teng, shuning uchun ham $\left(m_0=1,\left(m_1,2\right)=1\right)$

$$\sum_{u=0}^{1}\overline{\chi}\left(u\,2^{\alpha-1}+1\right)=1+(-1)^{0}e^{-2\pi i\frac{m_1 2^{\alpha-3}}{2^{\alpha-1}}}=0$$

bo‘ladi. Shunday qilib (2.1.2)-tenglik ixtiyoriy $n$uchun isbotlandi.

(2.1.1) va (2.1.2) lardan

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\tau\left(\overline{\chi}\right)\right|^{2}\left|\chi(n)\right|^{2}=\varphi(k)\left|\tau\left(\overline{\chi}\right)\right|^{2}=\sum_{n=1}^{k}\left|\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}}\right|^{2}=¿$$

$$\sum_{a,b=1}^{k}\overline{\chi}(a)\,\chi(b)\sum_{n=1}^{k}e^{2\pi i\frac{(a-b)n}{k}}=k\varphi(k)$$

kelib chiqadi. Bundan esa (2.1.3) ga ega bo‘lamiz. Lemma to‘la isbot bo‘ldi.

2.2-§ . Ixtiyoriy modul bo‘yicha Dirixle xarakterlari.

Faraz etaylik $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ berilgan k sonining kanonik yoyilmasi bo‘lsin.

2.2.1-ta’rif.k moduli bo‘yicha xarakter deb

$\chi(n)=\chi(n;k)=\prod_{t=1}^{r}\chi\left(n;p_t^{\alpha_t}\right)(2.2.1)$tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi.

2.2.2-ta’rif. Agar (2.2.1) da barcha $t=1,2,3,\ldots,r$ lar uchun

$$\chi\left(n;p_t^{\alpha_t}\right)=\chi_0\left(n;p_t^{\alpha_t}\right)$$

bo‘lsa, $\chi(n)$ ga k moduli bo‘yicha *bosh xarakter* deyiladi.

2.2.3-ta'rif. Agar (2.2.1) da barcha $t=1,2,3,\dots,r$ lar uchun $\chi\left(n;p_t^{\alpha_t}\right)$ lar primitiv bo'lsa, u holda 2.2.1-tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n;k)$ xarakterga primitiv xarakter aks holda hosilaviy xarakter deyiladi.

2.2.3-ta'rifdan k moduli bo'yicha har bir xarakterga n ning $(n,k)=1$ qiymatlarida unga aynan teng bo'lgan $\chi_1(n)(mod\,k_1)$primitiv xarakter mos keladi. Bunda k_1 soni k ning bo'luvchisi. Bunday holda $\chi(n)$xarakterni $\chi_1(n)$ primitiv xarakter bilan *indusirlangan xarakter* deb yuritiladi. $\chi_1(n)$ ni esa $\chi(n)$ga *mos keluvchi primitiv xarakter* deyiladi.

1.2.1 va 1.2.2-punktlarda $k=p^{\alpha}$moduli bo'yicha xarakterlar uchun isbotlangan tasdiqlar moduli ixtiyoriy k natural son bo'lgan xarakterlar uchun ham o'rinli bo'lishi yuqorida keltirilgan ta'riflardan bevosita kelib chiqadi. Endi $\chi(modk)$ xarakterning asosiy xossalarini bayon qilishga o'tamiz.

1^0. $\chi(modk)$ xarakter davriy funksiya bo'lib davri k ga teng va aynan nolga teng emas, ya'ni n ning $(n,k)>1$ qiymatlarida $\chi(n)=0$, n ning $(n,k)=1$ qiymatlarida esa $\chi(n)\neq 0$ bo'ladi.

2^0. Ixtiyoriy m va n natural sonlari uchun $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ bajariladi, ya'ni xarakter to'la multiplikativ funksiyadir.

3^0. $k$moduli bo'yicha $\varphi(k)$ ta har xil xarakterlar mavjud.

4^0. Quyidagi tenglikla o'rinli:

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{\chi(modk)}\chi(n)=\begin{cases}0, \text{агар } n\not\equiv 1(mod\,k)\,\textit{бўлса};\\ 1, \text{агар } n\equiv 1(mod\,k)\,\textit{бўлса},\end{cases}$$

Bu yerda yig'indi k moduli bo'yicha barcha $\varphi(k)$ ta xarakterlar bo'yicha olinadi;

$$\frac{1}{\varphi(k)}\cdot\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\begin{cases}0, \text{агар } \chi(n)=\chi_0(n)\,\textit{бўлса};\\ 1, \text{агар } \chi(n)\neq\chi_0(n)\,\textit{бўлса}.\end{cases}$$

Bu xossaga xarakterlarning ortogonallik xossasi deyiladi.

5^0. $\chi(modk)$ primitiv xarakter bo'lsa, u holda xarakter

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n)=\sum_{a=1}^{k}\overline{\chi}(a)e^{2\pi i\frac{an}{k}},\quad(2.2.2)\text{bu yerda}$$

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{k}},\ |\tau(\overline{\chi})|=\sqrt{k}.$$

Bu xossalar 2.2.1-2.2.3-ta’riflardan foydalanib 2.1.1 va 2.1.2. §- punktlarda isbotlangan xossalarga o‘xshash isbotlanadi. Shuning uchun ham biz 5^0-xossani isbotlash bilan chegaralanamiz. $k=k_1\cdot k_2, (k_1,k_2)=1$ bo‘lsin.

U holda

$$\chi(m;k)=\chi(m;k_1)\chi(m;k_2)$$

deb yoza olamiz. Ma’lumki, agar m_1 soni k_1 moduli bo‘yicha, m_2 soni k_2 moduli bo‘yicha chegirmalarning to‘la sistemasini qabul qilsa, $m_1k_2+m_2k_1$ soni k_1k_2 moduli bo‘yicha chegirmalarning to‘la sitsemasini qabul qiladi. Shuning uchun ham

$$S=S(n,k)=\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)e^{2\pi i\frac{mn}{m}}=¿$$

$$\sum_{m_1=1}^{k_1}\sum_{m_2=1}^{k_2}\overline{\chi}(m_1k_2+m_2k_1;k_1)\overline{\chi}(m_1k_2+m_2k_1;k_2)e^{2\pi i\frac{(m¿¿1k_2+m_2k_1)n}{k_1k_2}}=¿¿$$

$$\sum_{m_1=1}^{k_1}\overline{\chi}(m_1k_2;k_1)e^{2\pi i\frac{m_1n}{k_1}}\sum_{m_2=1}^{k_2}\overline{\chi}(m_2k_1;k_2)e^{2\pi i\frac{m_2n}{k_2}}=¿$$

$$¿\overline{\chi}(k_2;k_1)\overline{\chi}(k_1;k_2)S(n,k_1)S(n,k_2).$$

Bundan tashqari $\tau(\chi)=S(1,k)$. Bulardan va 2.1.3-lemmadan (2.2.2) –tenglik kelib chiqadi.

k moduli bo‘yicha $\chi(n)$ xarakterni 1^0 va 2^0 –xossalar yordamida aniqlash ham mumkin.

2.2.1-lemma. Agar *Y(n)* argumentli butun sonlar *n* dan iborat davriy funksiya bo‘lib davri k teng, aynan nolga teng bo‘lmagan, multiplikativ, ya’ni $Y(mn)=Y(m)Y(n)$ bo‘lsa va *n* ning $(n,k)>1$ qiymatlarida $Y(n)=0$ bajarilsa, u holda biror *m* uchun *Y(n)*$=\chi(n;k,m)$ bo‘ladi.

Isboti. Faraz etaylik$(a,k)=1$ bo‘lsin, u holda

$$T=\sum_{n=1}^{k}Y(n)\overline{\chi}(n)=¿\sum_{n=1}^{k}Y(an)\overline{\chi}(an)=¿Y(a)\overline{\chi}(a)T.¿¿$$

Shuning uchun ham biror χuchun yoki *Y(a)*$=\chi(a)$ yoki barcha χ lar uchun $T=0$.

Lekin bu oxirgi holda ixtiyoriy $b,(b,k)=1$ uchun

$$0=\sum_{\chi(modk)}\chi(b)\sum_{n=1}^{k}Y(n)\overline{\chi}(n)=\sum_{n=1}^{k}Y(n)\sum_{\chi(modk)}\chi(b)\overline{\chi}(n)=Y(b)\varphi(k)$$

bajarilishi kerak. Bu esa shartga ziddir. Shuning bilan lemma isbot bo‘ldi.

Natija. k_1 va k_2 modullari bo‘yicha ikkita xarakterning ko‘paytmasi $k_1 k_2$ modul bo‘yicha xarakterbo‘ladi.

Xarakterlar kompleks qiymatli funksiyalardir. Xarakterlar orasida bosh xarakterdan farqli faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi xarakterlar muhim ahamiyatga ega. Bunday xarakterlarga *haqiqiy xarakterlar* deyiladi.

Misol uchun agar $p>2$ tub son bo‘lsa,

$$\chi(n)=\chi\left(n;p,\frac{p-1}{2}\right)=\begin{cases} 0, агар\,(n,p)>1\, бўлса; \\ (-1)^{indn}, агар\,(n,p)=1\, бўлса \end{cases}$$

xarakter p moduli bo‘yicha haqiqiy xarakter bo‘ladi . Bu xarakterga Lejandr simvoli ham deyiladi va $\left(\frac{n}{p}\right)$ bilan belgilanadi. Hech bo‘lmasa birorta kompleks qiymat qabul qiladigan $\chi(n)$ xarakterga *kompleks xarakter* deyiladi. $\chi(n)$ xarakterga *qo‘shma kompleks* qiymat qabul qiluvchi xarakterga

$\chi(n)$ ning qo‘shmasi deyiladi va $\overline{\chi}(n)$bilan belgilanadi.

k modul bo‘yicha ixtiyoriy xarakter uchun

$$\chi^{\varphi(k)}(n)=\chi_0(n)$$

tenglik o‘rinli. $\chi^r(n)=\chi_0(n)$ tenglikni qanoatlantiruvchi eng kichik *r* natural soniga $\chi(n)$ *xarakterning darajasi* deyiladi.

Shunday qilib bosh xarakter birinchi darajali, haqiqiy xarakterning darajasi ikki, kompleks xarakterlar esa uchunchi va undan yuqori darajaga ega. Xarakterlar multiplikativ funksiya bo‘lgani uchun

$$\chi^2(-1)=\chi(-1)\chi(-1)=\chi((-1)\cdot(-1))=\chi(1)=1, \text{ ya'ni } \quad \chi(-1)=\pm 1.$$

$\chi(-1)=1$ shartni qanoatlantiruvchi xarakterlarga *juft*, $\chi(-1)=-1$

shartni qanoatlantiruvchi xarakterlarga esa *toq xarakterlar* deyiladi.

Misollarni ko’rib o’tamiz:

q=3 bo’lganda Dirixle xarakterlarini aniqlaymiz:

$$\chi(n)=\chi(n;3)=\chi(n;3;m)=\begin{cases} 0, agar\,(n;3)>1, \\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{2}}, agar\,(n;3)=1. \end{cases}$$

$\varphi(3)=2$,   m=0,1 ikkita xarakterni aniqlaymiz:

$$\chi_0(n)=\chi(n;3)=\chi(n;3;0)=\begin{cases}0, agar\ (n;3)>1,\\ 1, agar\ (n;3)=1.\end{cases}$$

$$\chi_1(n)=\chi(n;3)=\chi(n;3;1)=\begin{cases}0, agar\ (n;3)>1,\\ e^{indn\cdot\pi i}, agar\ (n;3)=1.\end{cases}$$

Xarakterlarning qiymatini aniqlashimiz mumkin:

$$\chi_0(1)=\chi_0(2)=1,\ \chi_0(3)=0.$$

$$\chi_1(1)=1,\ \chi_1(2)=-1,\ \chi_1(3)=0.$$

q=7 bo'lganda Dirixle xarakterlarini aniqlaymiz:

$$\chi(n)=\chi(n;7)=\chi(n;7;m)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

bu yerda m=0,1,2,3,4,5. Modul 7 bo'yicha eng kichik g - boshlang'ich ildizni aniqlaymiz: modul 7 bo'yicha boshlang'ich ildizlar 3 va 5 dan iborat $3^6=1(mod\,7)$, $5^6=1(mod\,7)$, eng kichigi 3 ni olamiz.

$\varphi(7)=6$ bo'lgani uchun m=0,1,2,3,4,5 6 ta xarakterni aniqlaymiz.

$$\chi_0=\chi(n;7)=\chi(n;7;0)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ 1, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

$$\chi_1=\chi(n;7)=\chi(n;7;1)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2=\chi(n;7)=\chi(n;7;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3=\chi(n;7)=\chi(n;7;3)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

$$\chi_4=\chi(n;7)=\chi(n;7;4)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1,\end{cases}$$

$$\chi_5=\chi(n;7)=\chi(n;7;5)=\begin{cases}0, agar\ (n;7)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\ (n;7)=1.\end{cases}$$

Xarakterning qiymatlarini aniqlashimiz mumkin:

$$\chi_0(1)=\chi_0(2)=\chi_0(3)=\chi_0(4)=\chi_0(5)=\chi_0(6)=1, \chi_0(7)=0.$$

$$\chi_1(1)=1, \chi_1(2)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_1(3)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\chi_1(4)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_1(5)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_1(4)=-1, \chi_1(7)=0.$$

$$\chi_2(1)=1, \chi_2(2)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_2(3)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\chi_2(4)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_2(5)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_2(6)=1, \chi_2(7)=0.$$

$$\chi_3(1)=1, \chi_3(2)=1, \chi_3(3)=-1, \chi_3(4)=1, \chi_3(5)=-1,$$

$$\chi_3(6)=-1, \chi_3(7)=0.$$

$$\chi_4(1)=1, \chi_4(2)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_4(3)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\chi_4(4)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_4(5)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_4(6)=1, \chi_4(7)=0.$$

$$\chi_5(1)=1, \chi_5(2)=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_5(3)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\chi_5(4)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_5(5)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \chi_5(6)=-1, \chi_5(7)=0.$$

Bu yerda $\chi_2(n)$ ga $\chi_4(n)$ qo'shma xarakter bo'ladi.

q=8 bo'lganda Dirixle xarakterlarini aniqlaymiz:

$$\chi(n)=\chi(n,2^{\alpha},m_0,m_1)=\begin{cases}0,agar\ (n,2^{\alpha})>1,\\ (-1)^{m_0\gamma_0}e^{2\pi i\frac{m_1\gamma_1}{2^{\alpha-2}}},agar\ (n,2^{\alpha})=1,\alpha\geq 1.\end{cases}$$

Bu yerda $m_0=0,1;m_1=0,1,\dots,2^{\alpha-1}-1$ butun sonlar,

$$\gamma_0=0,1,\dots,c_0-1,\gamma_1=0,1,\dots,c_1-1;$$

$$\alpha\geq 2\ ,\quad c_0=2,\quad c_1=2^{\alpha-1};\quad c_0c_1=\varphi(2^{\alpha}).$$

$$\begin{cases}c_0=2\\ c_1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma_0=0,1\\ \gamma_1=0,1\end{cases},$$

$$n\equiv(-1)^{\gamma_0}\cdot 5^{\gamma_1}(mod\ 2^3)\ ,$$

bundan $\gamma_0=0,\gamma_1=0$ da n=1; $\gamma_0=1,\gamma_1=1$ da n=3 ; $\gamma_0=0,\gamma_1=1$ da n=5 ; $\gamma_0=1,\gamma_1=0$ da n=7 ekanligi kelib chiqadi.

$$\chi_0(n)=\chi_0(n;2^3;0;0)=\begin{cases}0,agar\ (n;2^3)>1;\\ 1,agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_1(n)=\chi_1(n;2^3;1;0)=\begin{cases}0,agar\ (n;2^3)>1;\\ (-1)^{\gamma_0}e^{2\pi i\frac{0\cdot\gamma_1}{2}},agar(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2(n)=\chi_2(n;2^3;0;1)=\begin{cases}0,agar(n;2^3)>1;\\ e^{\gamma_1\pi i},agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3(n)=\chi_3(n;2^3;1;1)=\begin{cases}0,agar\ (n;2^3)>1;\\ (-1)^{\gamma_0}e^{\gamma_1\pi i},agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_4(n)=\chi_4(n;2^3;0;2)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ e^{2\gamma_1 \pi i}, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_5(n)=\chi_5(n;2^3;1;2)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ (-1)^{\gamma_0} e^{2\gamma_1 \pi i}, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_6(n)=\chi_6(n;2^3;0;3)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ e^{3\gamma_1 \pi i}, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_7(n)=\chi_7(n;2^3;1;3)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ (-1)^{\gamma_0} e^{3\gamma_1 \pi i}, agar\,(n;2^3)=1. \end{cases}$$

Xarakterning qiymatlarini aniqlashimiz mumkin:

$\chi_0(1)=\chi_0(3)=\chi_0(5)=\chi_0(7)=1,\ \chi_0(2)=\chi_0(4)=\chi_0(6)=\chi_0(8)=0;$

$$\chi_1(1)=\chi_1(1;2^3;1;0)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ 1, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_1(3)=\chi_1(3;2^3;1;0)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ -1, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_1(5)=\chi_1(5;2^3;1;0)=\begin{cases} 0, agar\,(n;2^3)>1; \\ 1, agar\,(n;2^3)=1, \end{cases}$$

$$\chi_1(7)=\chi_1(7;2^3;1;0)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ -1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_1(1)=\chi_1(5)=1, \chi_1(3)=\chi_1(7)=-1,$$

$$\chi_1(2)=\chi_1(4)=\chi_1(6)=\chi_1(8)=0.$$

$$\chi_2(1)=\chi_2(1;2^3;0;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ 1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2(3)=\chi_2(3;2^3;0;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ -1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2(5)=\chi_2(5;2^3;0;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ -1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2(7)=\chi_2(7;2^3;0;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ 1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2(1)=\chi_2(7)=1, \chi_2(3)=\chi_2(5)=-1,$$

$$\chi_2(2)=\chi_2(4)=\chi_2(6)=\chi_2(8)=0.$$

$$\chi_3(1)=\chi_3(1;2^3;1;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ 1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3(3)=\chi_3(3;2^3;1;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ 1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3(5)=\chi_3(5;2^3;1;1)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ -1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3(7)=\chi_3(7;2^3;1;1)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ -1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$\chi_3(1)=\chi_3(3)=1,\ \chi_3(5)=\chi_3(7)=-1,$

$\chi_3(2)=\chi_3(4)=\chi_3(6)=\chi_3(8)=0.$

$$\chi_4(1)=\chi_4(1;2^3;0;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ 1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_4(3)=\chi_4(3;2^3;0;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ 1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_4(5)=\chi_4(5;2^3;0;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ 1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_4(7)=\chi_4(7;2^3;0;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ 1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$\chi_4(1)=\chi_4(3)=\chi_4(5)=\chi_4(7)=1,\ \ \chi_4(2)=\chi_4(4)=\chi_4(6)=\chi_4(8)=0.$

$$\chi_5(1)=\chi_5(1;2^3;1;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ 1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_5(3)=\chi_5(3;2^3;1;2)=\begin{cases}0, agar\ (n;2^3)>1;\\ -1, agar\ (n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_5(5)=\chi_5(5;2^3;1;2)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_5(7)=\chi_5(7;2^3;1;2)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\-1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_5(1)=\chi_5(5)=1, \chi_5(3)=\chi_5(7)=-1,$$

$$\chi_5(2)=\chi_5(4)=\chi_5(6)\text{¿}\,\chi_5(8)=0.$$

$$\chi_6(1)=\chi_6(1;2^3;0;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_6(3)=\chi_6(3;2^3;0;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\-1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_6(5)=\chi_6(5;2^3;0;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\-1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_6(7)=\chi_6(7;2^3;0;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_6(1)=\chi_6(7)=1, \chi_6(3)=\chi_6(5)=-1,$$

$$\chi_6(2)=\chi_6(4)=\chi_6(6)\text{¿}\,\chi_6(8)=0.$$

$$\chi_7(1)=\chi_7(1;2^3;1;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_7(3)=\chi_7(3;2^3;1;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ 1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_7(5)=\chi_7(5;2^3;1;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ -1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_7(7)=\chi_7(7;2^3;1;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;2^3)>1;\\ -1, agar\,(n;2^3)=1,\end{cases}$$

$$\chi_7(1)=\chi_7(3)=1, \chi_7(5)=\chi_7(7)=-1,$$

$$\chi_7(2)=\chi_7(4)=\chi_7(6)¿\chi_7(8)=0.$$

q=1 modul bo'yicha $\varphi(1)=1$ ta xarakter mavjud bo'lib , u bosh xarakterdan iborat. Bu tivial xatakterdir.

$\chi\, n$	0
$\chi_0(n)$	1

q=2 modul bo'yicha $\varphi(2)=1$ ta xarakter mavjud:

$\chi\, n$	1	2
$\chi_0(n)$	1	0

Bu $\chi(n)$ xarakter $\chi(2)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 1 mod2 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir

q=3 moduli bo'yicha $\varphi(3)=2$ ta xarakter mavjud:

$\chi\, n$	1	2	3
$\chi_0(n)$	1	1	0
$\chi_1(n)$	1	-1	0

Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(2)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 2 mod3 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=4 moduli bo'yicha ham $\varphi(4)=2$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4
$\chi_0(n)$	1	0	1	0
$\chi_1(n)$	1	0	-1	0

Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(3)$bilan to'la aniqlanadi, chunki 3 mod4 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=5 moduli bo'yicha ham $\varphi(5)=4$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4	5
$\chi_0(n)$	1	1	1	1	0
$\chi_1(n)$	1	i	$-i$	-1	0
$\chi_2(n)$	1	-1	-1	1	0
$\chi_3(n)$	1	$-i$	i	-1	0

Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(2)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 2 mod5 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=6 moduli bo'yicha ham $\varphi(6)=2$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4	5	6
$\chi_0(n)$	1	0	0	0	1	0
$\chi_1(n)$	1	0	0	0	-1	0

Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(5)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 5 mod6 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=7 moduli bo'yicha ham $\varphi(7)=6$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4	5	6	7
$\chi_0(n)$	1	1	1	1	1	1	0
$\chi_1(n)$	1	ω^2	ω	$-\omega$	$-\omega^2$	-1	0
$\chi_2(n)$	1	$-\omega$	ω^2	ω^2	$-\omega$	1	0
$\chi_3(n)$	1	1	-1	1	-1	-1	0
$\chi_4(n)$	1	ω^2	$-\omega$	$-\omega$	ω^2	1	0
$\chi_5(n)$	1	$-\omega$	$-\omega^2$	ω^2	ω	-1	0

Bu yerda $\omega = \exp(\pi i/3)$. Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(3)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 3 mod7 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=8 moduli bo'yicha ham $\varphi(8)=4$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4	5	6	7	8
$\chi_0(n)$	1	0	1	0	1	0	1	0
$\chi_1(n)$	1	0	1	0	-1	0	-1	0
$\chi_2(n)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\chi_3(n)$	1	0	-1	0	-1	0	1	0

Bu $\chi(n)$ - xarakter $\chi(3)$ va $\chi(5)$bilan to'la aniqlanadi, chunki 3 va 5 mod8 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementlaridir.

q=9 moduli bo'yicha ham $\varphi(9)=6$ ta xarakter mavjud:

χn	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi_0(n)$	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$\chi_1(n)$	1	ω	0	ω^2	$-\omega^2$	0	ω	-1	0
$\chi_2(n)$	1	ω^2	0	$-\omega$	ω	0	ω^2	1	0
$\chi_3(n)$	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
$\chi_4(n)$	1	$-\omega$	0	ω^2	ω^2	0	$-\omega$	1	0
$\chi_5(n)$	1	$-\omega^2$	0	$-\omega$	ω	0	ω^2	-1	0

Bu $\chi(n)$ -xarakter $\chi(2)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 2 mod9 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

Quyida $k=10=2\cdot 5$ modul bo'yicha nechta xarakter bor va ular qanday topilishini misol yordamida tushuntiriladi.

$q=10$ bo'lganda Dirixle xarakterlarini aniqlaymiz:

$$\chi(n)=\chi(n;10)=\chi(n;10;m)=\begin{cases} 0, agar\,(n;10)>1; \\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\,(n;10)=1, \end{cases}$$

bu yerda $m=0,1,2,3$.

$\varphi(10)=4$ bo'lgani uchun $m=0,1,2,3,$ 4 ta xarakterni aniqlaymiz.

$$\chi_0=\chi(n;10)=\chi(n;10;0)=\begin{cases}0, agar\,(n;10)>1;\\ 1, agar\,(n;10)=1,\end{cases}$$

$$\chi_1=\chi(n;10)=\chi(n;10;1)=\begin{cases}0, agar\,(n;10)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\,(n;10)=1,\end{cases}$$

$$\chi_2=\chi(n;10)=\chi(n;10;2)=\begin{cases}0, agar\,(n;10)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\,(n;10)=1,\end{cases}$$

$$\chi_3=\chi(n;10)=\chi(n;10;3)=\begin{cases}0, agar\,(n;10)>1;\\ e^{2\pi i\frac{m\cdot indn}{6}}, agar\,(n;10)=1,\end{cases}$$

Xarakterning qiymatlarini aniqlashimiz mumkin:

$\chi\, n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi_0(n)$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$\chi_1(n)$	1	0	$-i$	0	0	0	$-i$	0	i	0
$\chi_2(n)$	1	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0
$\chi_3(n)$	1	0	i	0	0	0	i	0	$-i$	0

1-jadval.

Bu $\chi(n)$ xarakter $\chi(3)$bilan to'la aniqlanadi, chunki 3 mod 10 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

Yuqorida modul murakkab son bo'lganda ham xarakterlar mavjudligi ta'rif va misollar yordamida ko'risatib berildi. Demak $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ murakkab modullarni tub ko'paytuvchilarga ajratib, uning boshlang'ich ildizini topish va xarakterlarini hisoblash mumkin.

2.3-§. Dirixle L-funksiyasining asosiy xossalari.

Arifmetik progressiyadagi tub sonlar taqsimotini tekshirishda natural sonlar qatorida tub sonlar taqsimotini o‘rganishda Riman tomonidan $\zeta\,(s)$ funksiya

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s=\sigma+¿,\ \sigma>1 \qquad (2.3.1)$$

si kiritilganiga o‘xshash kompleks o‘zgaruvchili L-funksiya L.Dirixle tomonidan kiritilgan.

Faraz etaylik k natural son, χ esa k moduli boyicha biror xarakter bo‘lsin.

2.3.1-ta’rif. Ushbu

$$L=L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\ Res>1 \qquad (2.3.2)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga Dirixle L- funksiyasi deyiladi.

$|\chi(n)|\le 1$ bo‘lgani uchun $L(s,\chi)$ *нинг таърифидан унинг* $Res>1$ *ярим текисликда аналитик эканлиги келиб чиқади.*

Endi $L(s,\chi)$ ni $Res>1$ da ko‘paytma shaklida ifodalaymiz.

2.3.1-lemma. $Res>1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} (2.3.3)$$

tenglik o‘rinli**.**

Isboti. $X>1$ bo‘lganda

$$\Phi(s;X)=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

funksiyani qaraymiz. $Res>1$ bo‘lgani uchun

$$\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\cdots$$

ва демак, $\chi(n)$ ning multiplikativligidan foydalansak

$$\Phi(s;,X)=\prod_{p}\left\{1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right\}=\sum_{n\le X}\frac{\chi(n)}{n^s}+R(s,X) (2.3.4)$$

deb yoza olamiz. Bu yerda $\sigma>1$ va

$$|R(s,X)|\le\sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma}<\int_X^{\infty}\frac{du}{u^\sigma}=\frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma}.$$

$(2.3.4)$ da $X\to\infty$ da limitga o‘tib (2.3.3) tenglikni hosil qilamiz.

(2.3.3) dan

$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right|=\left|\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{s}}\right)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}<1+\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma}}=1+\frac{1}{\sigma-1}$$

yoki

$$|L(s,\chi)|>\frac{\sigma-1}{\sigma},$$

ya’ni $Res=\sigma>1\,бўлса$, $L(s,\chi)\neq 0$ bo‘ladi.

Agarda $\chi(mod\,k)$ bosh xarakter bo‘lsa, u holda $L(s,\chi)$ funksiya $\zeta(s)$ funksiyadan sodda ko‘paytuvchi bilan farq qiladi. Bu yerda quyidagi lemma o‘rinli:

2.3.2-lemma. Agar $\chi(n)=\chi_0(n)(mod\,k)$ bo‘lsa, u holda

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\text{¿}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)$$

bo‘ladi.

Isboti. (2.3.3) tenglikdan

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{s}}\right)^{-1}=\prod_{p\text{¿}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)\cdot\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\zeta(s)\prod_{p\text{¿}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right).$$

Bu yerda Eyler ayniyatiga ko‘ra

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}=\zeta(s)$$

ekanligdan foydalandik.

Isbotlangan lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

2.3.1-natija. $L(s,\chi_0)$ funksiya *s* kompleks tekislikdagi *s=1* nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda analitik, *s=1* nuqta qutb nuqtasi bo‘lib undagi qoldiq (chegirma)

$$\prod_{p\text{¿}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)$$

ga teng.

Agar $\chi(mod\,k)$ hosilaviy xarakter, $\chi_1(mod\,k_1)$ esa unga mos primitiv xarakter ($k_1\text{¿}$) bo‘lsa, u holda $L(s,\chi)$ funksiya $L(s,\chi_1)$ funksiyadan sodda ko‘paytuvchi bilan farq qiladi.

2.3.3-lemma. Agar $\chi_1(mod\,k_1)-\text{¿}$ primitiv xarakter, $\chi(mod\,k)\ у\,билан$

индуцирланган характер ва $k \neq k_1$ bo‘lsa, u holda $Res>1$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p¿\\ p\nmid k_1}}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti: (2.3.3) tenglik va $\chi_1(mod\, k_1)$ va $\chi(mod\, k)$ xarakterlarning xossalaridan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $p\nmid k_1$ bo‘lganda $L(s,\chi_1)$ning (2.3.3) ko‘rinishidagi ko‘paytuvchilarga yoyilmasidagi ko‘paytuvchilar $L(s,\chi)$ ning yoyilmasigi mos ko‘paytuvchilar bilan bir xil bo‘ladi. Agarda $p\nmid k_1, p¿$ bo‘lsa, $\chi_1(p)\neq 0, \chi(p)=0$ bo‘ladi, ya’ni

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\substack{p¿\\ p\nmid k_1}}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).$$

Bundan isbotlanish talab etilgan tenglik kelib chiqadi. $L(s,\chi)$ni xarakterlar yig‘indisidan foydalanib $Res>0$ yarim tekislikka osonlik bilan davom ettirish mumkin.

2.3.4-lemma. Agar $\chi(n)\neq\chi_0(n)$ bo‘lsa , u holda $Res>0$ bo‘lganda

$$L(s,\chi)=s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx(2.3.5)$$

tenglik o‘rinli. Bu yerda

$$S(x)=\sum_{n\le x}\chi(n).$$

Isboti. $N\ge 1$, $Res>1$ bo‘lsin. Abel almashtirishidan foydalanamiz. Unga ko‘ra “agar $f(x)$ funksiya [*a,b*] oraliqda uzluksiz, differensiallanuvchi, $c_n-¿$ ixtiyoriy kompleks sonlar va

$$C(x)=\sum_{a<n\le x}c_n$$

bo‘lsa u holda

$$\sum_{a<n\le b}c_n f(n)=-\int_a^b C(x)f'(x)dx+C(b)f(b)$$

tenglik o‘rinli” . Bundan foydalanib

$$\sum_{n=1}^N\frac{\chi(n)}{n^s}=1+s\int_1^N c(x)x^{-s-1}dx+\frac{c(N)}{N^s},$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $c(x)=S(x)-1.$

Bu tenglikning ikkala tomonida $N\to\infty$ da limitga o‘tib, $Res>1$ bo‘lganda (2.3.5) ni hosil qilamiz. Lekinda $|S(x)|\le\varphi(k)$, shuning uchun ham(2.3.5) dagi integral $Res>0$ bo‘lganda yaqinlashuvchi va u yerda analitik funksiyani aniqlaydi. Shuni isbotlash kerak edi.

2.3.2-natija. Agar $Res\ge\frac{1}{2}$, $\chi(n)\ne\chi_0(n)$ bo‘lsa, $|L(s,\chi)|\le 2|s|\varphi(k)$ bo‘ladi.

Endi quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

2.3.5-lemma. Agar $Res>1$ bo‘lsa,

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

tenglik o‘rinli.

Isboti. Agar$Res>1$ bo‘lsa (3.1) ga asosan

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Buning ikkala tomonini logarifmlab keyin differensiallasak quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$lnL(s,\chi)=\ln\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=-\sum_p\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=¿\sum_p\left(\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{2p^{2s}}+\cdots\right)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{m\,p^{ms}},$$

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{p^{ms}}\ln p^m=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

Endi $L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamani qaraymiz. Uni biz χ primitiv xarakter bo‘lgan hol uchun isbotlaymiz. Shuning bilan 2.3.3- lemmaga asosan χ ixtiyoriy xarakter bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiya s kompleks tekislikning barcha joyiga davom ettirilgan bo‘ladi.$L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamaning ko‘rinishi $\chi(n)$ xarakterning juft yoki toq ekanligiga, ya’ni

$\chi(-1)=+1$ $\chi(-1)=-1$ bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. Avvalo quyidagi yordamchi tasdiqni isbotlaymiz.$\chi(modk)$ primitiv xarakter bo‘lsin. Juft

χ xarakter uchun $\theta(x,\chi)$ funksiyani

$$\theta(x,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)e^{\frac{-n^2\pi x}{k}},x>0,$$

tenglik bilan, toq χ xarakter uchun esa $\theta_1(x,\chi)$ funksiyani

$$\theta_1(x,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\chi(n)e^{\frac{-n^2\pi x}{k}}, x>0$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

2.3.6-lemma. Yuqoridagicha aniqlangan $\theta(x,\chi)$ va $\theta_1(x,\chi)$funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\tau(\overline{\chi})\theta(x,\chi)=\sqrt{\frac{k}{x}}\cdot\theta\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right);(2.3.6)$$

$$\tau(\overline{\chi})\theta_1(x,\chi)=i\sqrt{\frac{k}{x^3}}\cdot\theta_1\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right),(2.3.7)$$

бу ерда $\overline{\chi}$ bilan χ ga qo‘shma xarakter belgilangan va

$$\tau(\chi)=\sum_{n=1}^{k}\chi(n)e^{\frac{2\pi in}{k}}$$

- Gauss yig‘indisi.

Isboti. Bizga ma’lum isbotlangan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(n+\alpha)^2\pi}{x}}=\sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x+2\pi in\alpha}(2.3.8)$$

tenglikdan foydalanamiz. Bunda $x>0$ va α-haqiqiy son.

Bundan va Gauss yig‘indisining aniqlanishiga ko‘ra

$$\tau(\overline{\chi})\theta(x,\chi)=\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi x}{k}+\frac{2\pi imn}{k}}=\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sqrt{\frac{k}{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-k\pi\left(n+\frac{m}{k}\right)^2}{x}}$$

$$¿\sqrt{\frac{k}{x}}\sum_{m=1}^{k}\overline{\chi}(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi(kn+m)^2}{kx}}=\sqrt{\frac{k}{x}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{\chi}(m)e^{\frac{-\pi m^2}{kx}}=\sqrt{\frac{k}{x}}\theta\left(\frac{1}{x},\overline{\chi}\right).$$

Shunday qilib (2.3.6) tenglik isbotlandi.

(2.3.7) tenglikni isbotlash uchun (2.3.8)- tenglikning ikkala tomonini hadlab differensiallaymiz va x nii $\frac{k}{x}$, α ni $\frac{m}{k}$ bilan almashtiramiz. ((2.3.8)-tenglikning ikkala tomonini hadlab differensiallash mumkin, chunki differensiallagandan keyin hosil bo‘lgan qatorlar tekis yaqinlashuvchi), u holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{\frac{-n^2 \pi x}{k}+\frac{2\pi i m n}{k}} = i\sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (kn+m) e^{\frac{-\pi (kn+m)^2}{kx}} .$$

Bu yerdan

$$\tau(\overline{\chi})\theta_1(x,\chi)=\sum_{m=1}^{k} \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{\frac{-n^2\pi x}{k}+\frac{2\pi i m n}{k}} = ¿ = i\sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{m=1}^{k} \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (kn+m) e^{\frac{-\pi(kn+m)^2}{kx}} = ¿\, i\sqrt{\frac{k}{x^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\overline{\chi}(n) e^{\frac{-\pi n^2}{kx}}$$

Shunday qilib (2.3.7)- tenglik va demak, lemma to‘liq isbot bo‘ldi.Endi $L(s,\chi)$ uchun funksional tenglamani ifodalovchi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2.3.1-teorema. Agar (2.3.7) tenglik o’rinli bo’lsa, u holda

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi).(2.3.9)$$

bo’ladi.

Isboti.$\chi(-1)=+1$ deb faraz qilamiz. $\Gamma(s)$ ning integral ko‘rinishidagi ifodasiga asosan

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.(2.3.10)$$

Bundan $Res>0$ bo‘lganda ixtiyoriy natural son n uchun

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = n^s \int_{0}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \pi^{\frac{s}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

ya’ni

$$\pi^{\frac{-s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi x}{k}} x^{\frac{s}{2}-1} dx .$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $\chi(n)$ ga ko‘paytirib $Res>1$ bo‘lganda n bo‘yicha yig‘sak

$$\pi^{\frac{-s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \int_{0}^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{\frac{-n^2\pi x}{k}} \right) dx$$

tenglik hosil bo‘ladi.$\chi(n)$– juft xarakter bo‘lgani uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{\frac{-n^2\pi x}{k}} = \frac{1}{2}\theta(x,\chi).$$

Bundan foydalanib yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\pi^{\frac{-s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx.$$

O‘ng tomondagi integralni

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx=\frac{1}{2}\int_0^{1} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx$$

ko‘rinishida yozib olib, o‘ng tomondagi birinchi integralda *x* ni $\frac{1}{x}$ bilan almashtiramiz. U holda

$$\pi^{\frac{-s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{-s}{2}-1}\theta\left(\frac{1}{x},\chi\right)dx$$

hosil bo‘ladi. Buning o‘ng tomonida

$$\pi^{\frac{-s}{2}} k^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\theta(x,\chi)dx+\frac{\sqrt{k}}{2\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} x^{\frac{-s}{2}-\frac{1}{2}}\theta(x,\overline{\chi})dx \quad (2.3.11)$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomoni *s* ixtiyoriy bo‘lganda analitik funksiyani ifodalaydi va shuning uchun ham $L(s,\chi)$ funksiyaning *s* kompleks tekislikning barcha joyiga analitik davomini beradi.$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\neq 0$ bo‘lgani uchun $L(s,\chi)$ barcha joyda regulyar funksiyadir. $\chi(-1)=+1$ bo‘lgani uchun *s* ni *1-s* ga va χ ni $\overline{\chi}$ ga almashtirsak (3.9) ning o‘ng tomoni $\frac{\sqrt{k}}{\tau(\overline{\chi})}$ ga ko‘paytiriladi. $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})=\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}=k$ ekanligini e’tiborga olsak, bu yerdan $\delta=0$ bo‘lganda teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi.

$\chi(-1)=-1$ deb faraz qilamiz. Bu holda (2.3.10) dan

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{-s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s}=\int_0^{\infty} n e^{\frac{-n^2\pi x}{k}} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini $\chi(n)$ ga ko‘paytirib $Res>1$ bo‘lganda *n* bo‘yicha yig‘sak va (2.3.7) dan foydalansak

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{-s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi)=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{\frac{-n^2\pi x}{k}}\right)x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx=\int_0^{\infty}\theta_1(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\theta_1(x,\chi)dx+\frac{i\sqrt{k}}{2\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} x$$

ga ega bo‘lamiz. Bu oxirgi tenglik $L(s,\chi)$ funksiyaning butun *s* tekislikka analitik davomidir.$L(s,\chi)$ barcha joyda regulyar funksiyani ifodalaydi. $\chi(-1)=-1$ bo‘lgani uchun *s* ni *1-s* ga va χ ni $\overline{\chi}$ ga almashtirsak bu tenglikning o‘ng tomoni $i\sqrt{k}\tau(\chi)$ ga ko‘paytiriladi. Bunda $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})=\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}=-k$ ekanligini e’tiborga olsak, bu yerdan $\delta=1$ bo‘lganda teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi. Shunday qilib teorema to‘la isbot bo‘ldi.

2.3.3-natija. $\xi(s,\chi)-¿$ butun funksiya; agar $\chi(-1)=+1$ bo‘lsa, u holda $Res\le 0$ bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari faqat $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ ning qutblaridan, ya’ni $s=0,-2,-4,\ldots$ nuqtalardan iborat bo‘ladi; agarda $\chi(-1)=-1$ bo’lsa u holda $Res\le 0$ bo‘lganda $L(s,\chi)$ funksiyaning nollari faqatgina $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ ning qutblaridan, ya’ni $s=1,-3,-5,\ldots$ nuqtalardan iborat bo‘ladi.

II BOB BO’YICHA XULOSALAR.

Ikkinchi bob “Dirixle xarakterlari” bo’lib, u 3 ta paragrafdan iboratdir. Birinchi paragraf Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari, ikkinchi paragraf ixtiyoriy modul bo’yicha Dirixle xarakterlari va uchinchi paragraf Dirixle –L funksiyasining asosiy xossalaridan iboratdir. Ushbu bobda jami 10 ta ta’rif, 7 ta lemma, 8 ta misol, 1 ta ta’rif, 3 ta natijadan iborat bo’lib, lemmalar ta’riflar va xossalar isbotlari bilan misollar yordamida tushuntirilgan.

Ikkinchi bobda asosan birinchi bobda o’rgangan boshlang’ich ildizlar va indekslar orqali Dirixle xarakterlariga ta’rif beriladi. Biz keyinchalik uchinchi bobda sonlar nazariyasining additiv masalalarini o’rganayotganda Dirixle xarakterlarining tadbiqini ko’rib chiqayotganda ikkinchi bobda o’rgangan ma’lumotlarimizdan keng foydalanamiz. Ikkinchi bobda Dirixle xarakterlari ularning barcha xossalari, ixtiyoriy modul bo’yicha Dirixle xarakterlari mavjudmi, agar mavjud bo’lsa u qanday aniqlanadi, misollar orqali tushuntirilgan va yechimlar ko’rsatilgan.

III BOB. SONLAR NAZARIYASINING BA'ZI ADDITIV MASALALARINI YECHISHDA DIRIXLE XARAKTERLARIDAN FOYDALANISH.

3.1-§. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalari.

Fazar qilaylik, M_i musbat butun sonlarning o’suvchi, cheksiz ketma ketligi

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{¿}, \ldots i=1,2, \ldots k \, (3.1.1)$$

bo’lsin. Agar k ta $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ketma - ketliklar (ularning orasida bir xillari ham bo’lishi mumkin) berilgan bo’lsa, elementlari

$$b_j = a_{1 j_1} + a_{2 j_2} + \ldots + a_{k j_k}, a_{1 j_1} \epsilon M_1 a_{2 j_2} \epsilon M_2, \ldots, a_{k j_k} \epsilon M_k \, (3.1.2)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ketma - ketlikka berilgan ketma-ketliklarning yig’indisi deb ataladi va $M_1 + M_2 + \ldots + M_k$ ko’rinishda belgilanadi.

$$P(M¿¿i) = inf_x \frac{N(x)}{x} ¿$$

kattalikka M_i ketma-ketlikning zichligi deb ataladi. Bunda $N(x)$ (3.1.1) ketma-ketlikdagi *x* dan katta bo’lmagan xadlar sonini bildiradi.

Bu yerda quyidagi masalalarni hal etish muhimdir:

1. Agar $M, M_1, M_2, \ldots, M_k$ ketma-ketliklar berilgan bo’lsa, M dagi (3.1.2) shartni qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan M' ketma-ketlikning zichligi qanday bo’ladi?

Shunga o’xshash M dagi (3.1.2) shartni qanoatlantirmaydigan elementlardan tuzilgan M'' ketma-ketlikning zichligini ham qarash mumkin.

2. b_j va k lar berilgan bo’lganda (3.1.2) shartni qanoatlantiruvchi $a_{1 j_1}, a_{2 j_2}, \ldots a_{k j_k}$ lar sonini bildiruvchi $R_k(b¿¿j)¿$ funksiyani tekshirish.

Boshqacha qilib aytganda, $R_k(b¿¿j)¿$ funksiya uchun aniq yuqori va aniq quyi chegaralarni topish yoki asimptotik formula keltirib chiqarish.

Bu keltirilgan masalalar: Varing muammosi, Eyler-Goldbax muammosi, Xardi-Littlvud muammosi, Xua-Lo-Ken muammosi va boshqa ko’plab sonlar nazariyasining additiv muammosini o’z ichiga oladi. Qo’yilgan masalalarni yechish uchun turli xil metodlar: Xardi-Litlvud-Ramanudjanning doiraviy metodi, V.Brun, A.Selberg, Yu.Linniklarning g'alvirlash metodi, G.Beyl va I.M.Vinogradovlarning trigonometrik yig'indilar metodi, G.Devenport va R.Vonlarning iteratsiya metodi va boshqa bir qancha metodlar yaratildi.

Hozirgi vaqtda juda ko'plab to'la hal etilmagan sonlar nazariyasining additiv masalalari mavjud. Ularni shartli ravishda ikki guruhga natural sonlar qatnashgan va tub sonlar qatnashgan additiv masalalarga bo'lish mumkin. Natural sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Varing muammosi, tub sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Goldbax muammosi yotadi. Quyida biz avvalo bu ikki masalaning tarixiga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Varing muammosi. Fransuz matematigi J.L.Lagranch (Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813)) 1770-yilda quyidagi teoremasini isbotlaydi. “Har qanday natural sonni to'rtta butun son kvadratlari yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.” Bu teoremadagi tasdiq birinchi bo'lib Diofantning “Arifmetika” sida keltirilgan. Uning isbotini Lagranch qilgan. 1770- yilda ingliz matematigi Varing (Edward Waring(1734-1798)) to'rt kvadratlar yig'indisi haqidagi J.L.Lagranch teoremasini umumlashtirishni taklif qildi va bu keyinchalik Varing muammosi deb ataldi. Zamonaviy terminalogiyada, buni quyidagicha ifodalash mumkin: $k\geq 2$ soni uchun shunday natural son $s=s(k)$ mavjudki, har bir natural son $n, s(k)$ ta manfiy bo'lmagan butun sonlarning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni n ni

$$n=n_1^k+n_2^k+\dots n_s^k \tag{3.1.3}$$

ko'rinishida ifodalash mumkin. Berilgan k uchun (3.1.3) tenglikni qanoatlantiruvchi chekli s ning mavjudligi 1909-yilda nemis matematigi Gilbert (Davit Hilbert (1862-1943)) tomonidan isbotlangan. Bu yerda berilgan n ni (3.1.3) ko'rinishida ifodalashlar soni $R_{k,s}(n)$ uchun asimptotik formula olish bilan birga $g(k) va G(k)$ funksiyalarning qiymatlarini aniqlash ham mumkin hisoblanadi. Bunda $g(k) va G(k)$ bilan mos ravishda $n\geq 2$ va yetarlicha katta n lar uchun (3.1.3) o'rinli bo'lgan s ning eng kichik qiymati belgilangan. Aynan shu masalalarda keyingi paytlarda diqqatga sazovor natijalarga erishildi. Xususan I.M.Vinogradov, L.G.Shnirelman, Yu.V.Linnik, S.X.Sirajiddinov, B.M. Bredixin, N.P.Romanov, A.A.Karatsuba, A.I.Vinogradov, A.F.Lavrik, Xuo-Lo-Ken, Vu Fang, Chen, Montgomeri, Von, A.G.Arxipov, V.I.Bernik, N.V.Kuznetsov, T.A.Azlarov, T.Zuparov, M.I.To'laganova, V.A.Plaskin, M.I.Israilov, S.T.To'laganov, X.N.Narzullayev, S.Sh.Shushbayev, Sh.I.Ismatullayev, A.S.Faynleyb va boshqalar tomonidan olingan natijalarni shular sirasiga kiritishimiz mumkin. Varing muammosi va shu bilan bog'liq masalalarda keyingi yillarda juda katta natijalarga erishilgan bo'lishiga qaramasdan, u bilan bog'liq barcha masalalar hozirgacha to'la hal etilmagan.

Goldbax muammosi. Nemis matematigi Xristian Goldbax (Christian Goldbach(1690-1764)) nomi bilan yuritiladigan Goldbax muammosi birinchi marta 1742-yilda Goldbax va Shvetsariyalik nemis matematigi Eyler (Leonhard Euler 1707-1783) o'rtasida yozishmalarda paydo bo'lgan. 1742-yilda Xristian Goldbax Leonard Eylerga yozgan xatida quyidagi taxminni aytadi:

Har qanday 6 dan kichik bo'lmagan juft natural sonni ikkita toq tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. (Goldbaxning binar muammosi);

Har qanday 9 dan kichik bo'lmagan toq natural sonni uchta toq tub son yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. (Goldbaxning ternar muammosi).

Bu muammolar birgalikda Eyler- Goldbax muammosi deb ham yuritiladi.

1930 yilda L.Shnirelman har bir 1dan katta butun sonning $s \le 8 \cdot 10^5$ ta tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashini isbotladi. Bu natija keyinchalik bir necha marta yaxshilandi va 1995-yilda $s \le 6$ ekanligi isbotlandi. Goldbaxning ternar muammosi bo'yicha quyidagi natijalar olindi: 1923 yilda Xardi va Litlvudlar hozirgacha isbotlanmagan Rimanning umumlashgan gipotezasini o'rinli deb faraz

qilib Goldbaxning ternar problemasining barcha yetarlicha katta toq sonlar uchun o'rinli ekanligini ko'rsatdilar.

Tushunarliki, Goldbaxning binar muammosining o’rinli ekanligidan ternar muammosining o’rinli ekanligi osonlik bilan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $2n = p_1 + p_2$ bo’lsa $2n+3 = p_1 + p_2 + 3$, n =3,4,… bajariladi.

1937-yilda I.V.Vinogradov bu tasdiqning Riman gipotezasiga bog’liq bo’lmagan isbotini berdi, ya’ni u yetarlicha katta toq sonlarni uchta tub sonning yig’indisi ko’rinishi tog’risida isbotlash mumkin ekanligini ko’rsatdi. K.Barozdin Vinogradovning yuqoridagi tasdig’i uchun,

$3^{315} \approx 3{,}25 \times 10^{6846168} \approx 10^{6846168}$ soni quyi chegara bo’lishini ko’rsatgan bu son deyarli 7 million raqamdan iborat bo’lgan son bo’lgani uchun Vinogradov teoremasini undan kichik bo’lgan barcha sonlar uchun tog’ridan tog’ri tekshirib chiqish imkoniyati bo’lmagan. Keyinchalik Vinogradovning natijasi bir necha marta yaxshilandi. 1989-yilda Van va Chenlar tomonidan Vinogradov teoremasi o’rinli bo’lgan sonlarning quyi chegarasini $e^{e^{11{,}503}} \approx 3{,}33339 \times 10^{43000} \approx 10^{43000{,}5}$ deb olish mumkin ekanligini ko’rsatdi. Lekin bu son ham kata son bo’lib ungacha bo’lgan barcha sonlar uchun teoremaning to’g’riligini bevosita tekshirib chiqish imkoniyati yo’q edi. 1997-yilda Deshouillers, Effinger, T.E. Riele va Zinovievlar Rimanning umumlashgan gipotezasidan Goldbaxning ternar muammosini o’rinli ekanligini isbotladilar. Ular teoremaning 10^{20} sonidan kata bo’lgan sonlar uchun isbotlagan bo’lib, ungacha bo’lgan sonlar uchun teoremaning o’rinli ekanligini tekshirib ko’rishni kompyuter orqali amalga oshirganlar. 2013-yilda asli kelib chiqishi Perulik bo’lgan hozirda Fransiyada yashovchi Harald A .Helfgott tomonidan Goldbaxning ternar muammosi uzil kesil hal etildi. Endi Goldbaxning binary muammosi bo’yicha olingan natijalarga to’xtalib o’tamiz. Shuni ham takidlash kerakki Goldbaxning binar muammosi o’z yechimida ancha uzoq. Vinogradovning mashhur ishlaridan keyin A.G.Chudakov, T.Esterman va Van-der Korpetlar 1938-yilda deyarli barcha juft sonlarning ikkita tub sonning yig’indisi ko’rinishida yozish mumkin ekanligini isbotladilar.

Agar biz $1 \le n \le X$ oraliqdagi ikkita tub son ko’rinishida ifodalash mumkin bo’lmagan sonlarning sonini $E(X)$ bilan belgilasak, u holda yuqoridagi mualliflar tomonidan isbotlangan natijani $E(X) \ll \frac{X}{\ln^A X}$ ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\ll$-Vinogradov simvoli, $A>0$- haqiqiy son. 1961-yilda A.F.Lavrik berilgan $n, 1 \le n \le X$ juft sonini arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni uchun assimptotik formula oldi.

Har qanday natural sonni to'rttadan ortiq bo'lmagan natural sonlarning kvadratlari yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkinligi to'g'risidagi J.L.Lagranchning o'sha davrdagi mashxur ishlaridan keyin E.Varing o'zining "Algebraik fikrlar" asarida har qanday juft natural sonni manfiy bo'lmagan butun sonlarning 9 tadan ortiq bo'lmagan kublari, 19 tadan ortiq bo'lmagan bikvadratlari va hokozo ko'rinishida ifodalash mumkin,- degan gipotezani ilgari surgan. Hozirgi vaqtda bu bilan Varing "Ixtiyoriy $k \ge 2$ butun soni uchun shunday *s* natural soni mavjudki, har bir *n* natural sonini *s* tadan ortiq bo'lmagan natural sonlarning *k*-darajalari yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin va agar shu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik *s* ni $g(k)$ desak, $g(3)=9$, $g(4)=19$ ekanligini nazarda tutgan deb hisoblashadi.

Barcha $k \ge 2$ lar uchun chekli $g(k)$ ning mavjudligini birinchi bo'lib 1909-yilda D.Gilbert isbotlagan.

1920-yilda ingliz matematiklari G.Xardi va J.Litlvudlar Varing muammosiga doiraviy usulni qo'llab, n yetarlicha katta bo'lganda

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k, k \ge 2$$

Tenglamaning natural yechimlari $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ soni $R_s(n,k)$ uchun asimptotik formula oldilar.

Lekin Goldbax muammosi ancha qiyin bo'lib chiqdi. Xattoki, 1912 yilda ham matematiklar orasida bu muammoni hozirgi zamon matematikasi usullari bilan hal qilib bo'lmaydi degan fikr mavjud bo'lgan. Faqat 1919-yilga kelib V.Brun, mazmuni Eratosfen g'alvirining takomillashganidan iborat bo'lgan, yangi usulni taklif etdi. U shu usuli yordamida har bir yetarlicha katta natural sonni har birida 9 tadan ortiq bo’lmagan tub ko’paytuvchi bo’lgan ikkita qo’shiluvchining yig’indisi ko’rinishida yozish mumkin ekanligini isbotladi. Keyinchalik, V.Brunning bu natijasi bir necha bor yaxshilandi, ammo Goldbax muammosi o’z yechimini topmadi. Shunga qaramasdan V.Brun usuli tub sonlar taqsimoti nazariyasida o’zining keng tadbiqini topdi va bu sohada qator muhim natijalarni olish imkonini berdi.

G.Xardi va J.Litlvudlar 1924-yilda Goldbaxning ternar muammosiga doiraviy usulni qo’lladilar va hozircha isbotlanmagan Dirixlening L-Funksiyasining nollari haqidagi Rimanning umumlashgan gipotezasiga tayangan holda ifodalashlar soni uchun asimptotik formula oldilar.

Xardi-Litlvud metodining asosiy mohiyati quyidagidan iborat:

$A=\{a_m\}$ – manfiy bo’lmagan butun sonlarning qatiy o’suvchi ketma-ketligi bo’lsin. Ushbu

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} z^{a_m}, (|z|<1)$$

funksiya va uning $s-$¿ darajasi

$$F^s(z)=\sum_{m_1}^{\infty}\dots\sum_{m_s}^{\infty} z^{a_{m1}+\dots+a_{m_s}}=\sum_{n=0}^{\infty} R_s(n)\, z^n$$

ni qaraymiz. Bu yerda $R_s(n)$ berilgan n sonini A dan olingan s ta hadlar yig’indisi ko’rinishida ifodalashlar sonini bildiradi. Masala $R_s(n)$ ni hech bo’lmaganda katta n lar uchun baholashdan iborat. Koshining integral formulasiga ko’ra

$$R_s(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} F^s(z)\, z^{-n-1} dz,$$

bunda $0<\rho<1$. Xardi-Litlvud-Rimanudjan metodi bo’yicha $R_s(n)$ integral ikkita I_1 va I_2 qo’shiluvchilarga ajratiladi. $R_s(n)$ uchun asimptotik formulada birinchi qo’shiluvchi I_1 bosh hadni, ikkinchi qo’shiluvchi I_2 esa qoldiq hadni beradi. Shunday qilib, uning doiraviy usuli, bu $R_s(n)$ dan tahmin qilinayotgan bosh hadni ajratish usulidir.

Ikkita tub son yig’indisi haqidagi muammoni esa Rimanning umumlashgan gipotezasiga tayanib ham hal etib bo’lmadi, ular faqatgina “deyarli barcha” juft sonlarning ikkita tub son yig’indisi ko’rinishida ifodalanishinigina ko’rsata oldilar xolos, ya’ni agar *E(X)* bilan X dan katta bo’lmagan va ikkita tub son yig’indisi ko’rinishida ifodalanmaydi deb gumon qilingan juft sonlar sonini belgilasak $\lim_{X\to\infty} X^{-1}E(X)=0$ ekanligini isbotladilar.

1930-yilda L.G.Shnirelman sonlar nazariyasining additiv masalalarini yechish uchun yangi metodni taklif etdi. U o’zi taklif etgan metod bilan shunday bir r absalyut doimiysi mavjudki, har bir n natural sonini r tadan ortiq bo’lmagan tub sonlar yig’indisi ko’rinishida ifodalash mumkin ekanligini ko’rsatdi. Lekin L.G.Shnirelman isbotidagi r soni ancha katta bo’lib chiqdi$(r\le 8\cdot 10^5)$.

Keyinchalik r ning qiymati ketma-ket bir necha bor N.P. Romanov, X.Xeyblron, E.Landau, Sherka, D.Richchi, X.Shapiro, J.Varga, In Ven-Lin, N.I.Klimov, P.Von va boshqa matematiklar tomonidan yaxshilandi.

3.2-§ . Sonlar nazariyasining additiv masalalari yechimiga doir olingan natijalar.

Biz bundan oldingi paragrafda takidlaganimizdek, Varing muammosida har bir n natural sonini s ta k-darajalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash, ya'ni

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k, k \geq 2 \qquad (3.2.1)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin ekanligini isbotlash kerak edi. Bunda $k \geq 2$ va $x_1, x_2, \ldots, x_s$ – natural sonlar.

(3.2.1) ni qanoatlantiruvchi chekli s ning mavjudligi D.Gilbert tomonidan isbotlangan bo'lsada, bu yerda quyidagi masalalar mavjud:

1) k berilgan bo'lganda barcha n lar uchun (3.2.1) ni qanoatlantiruvchi eng kichik s ni, ya'ni $g(k)$ ni aniqlash;

2) k berilgan bo'lganda yetarlicha katta n lar uchun (3.2.1) ni qanoatlantiruvchi eng kichik s ni, ya'ni $G(k)$ ni aniqlash;

3) n va k lar berilgan bo'lganda arifmetik progressiyaga tegishli tub sonlar bo'yicha olingan trigonometrik yig'indining yechimlari soni $R_s(k, n)$ uchun asimptotik formula olish.

Bu uchala masala ham ko'plab matematik olimlar tomonidan o'rganilgan, juda yaxshi natijalar olingan bo'lsa-da, ularning birortasi ham hozirgacha barcha k va n lar uchun to'la yechimini topmagan.

Yetarlicha katta X lar uchun $N_{k,s}(X)$ orqali (3.2.1) ko'rinishida ifodalanadigan natural $n \leq X$ sonlarning sonini belgilaylik. I.M.Vinogradov, G.Devenport, A.A.Karatsuba va boshqalarning shu sohadagi mashxur ishlaridan keyin R.C.Vaughan yangi iteratsiya metodini qo'llab barcha $k \geq 5$ lar uchun $G(k)$ ning barcha mavjud baholarini yaxshiladi. $s = 3, k \geq 3 \, va \, s = 4, 5 \leq k \leq 20$ bo'lganda esa u $N_{k,s}(X)$ ning baxolarini yaxshilashga erishdi.

Uzoq yillar davomida ko'plab matematik olimlar ilmiy izlanishlar olib borishda davom etib sonlar nazariyasining bir qancha additiv masalalarini yechimlari ustida bosh qotirishgan va bir qancha natijalar olishgan. Keyingi tadqiqotlar esa oldingi olingan baholarni bir qancha yangilashga hizmat qilgan. Shunga qaramasdan ilmning cheksiz yangiliklarga boy bir yo’l ekanligi sababli hali haligacha yechimini topib ulgurmagan masalalar ham talaygina.

Faraz etaylik, X va P – yetarlicha katta haqiqiy sonlar, N esa $\sqrt{N}<X\le N$ shartni qanoatlantiruvchi natural son; $p, p_1, p_2 - ¿$ tub sonlar; $D = D^{\vartheta}$ ¿ musbat butun son bo’lsin; $M_D(X)$ bilan

$$n = p_1 + p_2,\ p_i \equiv l_i (mod D), (l_i, D) = 1, i = 1,2 \qquad (3.2.2.)$$

Ko’rinishida ifodalash mumkin emas deb gumon qilinayotgan juft natural sonlar $n\le X$ to’plamni belgilaymiz, $E_D(X) = card\, M_D(X)$; $R(N)$ – berilgan n sonining (3.2.2) ko’rinishida ifodalashlar sonini bildirsin.

A.F.Lavrik birinchi bo’lib, $R(N)$ uchun ko’pi bilan $E_D(X) \lll X/\ln^A X$ (bunda $A>0$ o’zgarmas son) ta n dan boshqa barcha $n\le X$ lar uchun o’rinli bo’lgan asimptotik formulani isbotladi. Keyinchalik R.C.Vaughan va H.L. Montgomeri $E_D(X)$ ni $D=1$, holda qarab mos ravishda

$E_1(X) < X exp(-c\sqrt{lnX})\ va\ E_1(X) < X^{1-\delta}, 0<\delta<1$ baholarni isbotlashdi. Chen Jing ren va Pan Chendong, I.Allakovlar birinchi marta $R(N)$ uchun

($D=1$bo’lganda) ko’pi bilan $n, n\le X$ ning $X^{1-\delta}$ ta qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlari uchun o’rinli bo’lgan quyidan baho olgan va δ ning son qiymatini aniqlaganlar.

Faraz etaylik, $\chi_m - m$ modul bo’yicha Dirixle xarakteri va

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n) \qquad (3.2.3)$$

bo’lsin. Keyingi izlanishlarimiz uchun zarur bo’lgan bir nechta ma’lum lemmalarni keltiramiz.

3.2.1-lemma: Agar X va N lar yetarlicha katta sonlar bo’lib,

$\sqrt{N}<X\le N, 3\le n\le X$ shartlar bajarilsa, u holda barcha $m\le \exp$ ¿ lar uchun quyidagi tasdiqlar o’rinli:

a) Agar $E_{\tilde{\beta}}=0$ yoki $E_{\tilde{\beta}}=1$ bo’lib, χ_m xarakterning moduli m maxsus haqiqiy xarakter $\tilde{\chi}_r$ ning yetakchi moduli r ga bo’linmasa, u holda

$$\psi(n,\chi_m)=\delta_x n+\rho_n \tag{3.2.4}$$

bajariladi;

b) Agarda $E_{\tilde{\beta}}=1$ va $r\vee m$ bo’lsa, u holda

$$\psi(n,\chi_m)=\delta_x n-\frac{n^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}+\rho_n \tag{3.2.5}$$

bajariladi.

Ikkala holda ham ρ_n uchun

$$\rho_n \ll X\cdot\exp\left(-c_6\sqrt{lnX}\right) \tag{3.2.6}$$

baho o’rinlidir.

3.2.2-lemma: Agar $\chi'(t)\, va\, \chi''(t)$ lar mos ravishda Q' va Q'' modullari bo’yicha Dirixle xarakterlari va $d=(Q¿¿',Q'')¿$, $Q=Q'Q''d^{-1}$ bo’lsa, u holda $\chi'(t)\chi''(t)$ ning bosh xarakter bo’lishi uchun, barcha $t,(t,Q)=1$ lar va d moduli bo’yicha xarakterlardan biri bo’yicha hosil qilingan hosilaviy xarakter χ' uchun $\chi'(t)=\overline{\chi''}(t)$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\overline{\chi''}(t)$ bilan $\chi''(t)$ ga qo’shma xarakter belgilangan.

Ayrim belgilashlarni kiritib olamiz va bu bizga keyingi qilinadigan ishlarda yordam beradi.

$$P_1=\exp\left(\frac{c_6\sqrt{lnN}}{200}\right), \tag{3.2.7}$$

$$P_2=P_1^{1/4} \tag{3.2.8}$$

shuningdek, agar $E_{\tilde{\beta}}=0$ yoki $E_{\tilde{\beta}}=1$ va $P_2<r$ bo’lsa, $P=P_2$, qolgan barcha hollarda $P=P_1$ deb belgilab olamiz.

Endi

$$Q=N\,P^{-1} \tag{3.2.9}$$

deb olib, $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ segmentni asosiy va qo’shimcha intervallarga bo’lamiz. $a \le q \le P$ va $(a, q)=1$ lar uchun $M(q, a)$ bilan ¿ yopiq intervalni belgilaymiz. Tushunarliki, bu asosiy intervallar kesishmaydi va $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ ga tegishli. $[Q^{-1}, 1+Q^{-1}]$ ga tegishli lekin birorta ham $M(q, a)$ ga tegishli bo’lmagan nuqtalar $\alpha, Q^{-1} < \alpha < 1+Q^{-1}$ to’plamini T bilan belgilaymiz. Bundan keyin barcha $M(q, a)$ larning birlashmasini katta yoy, T ni esa kichik yoy deb ataymiz.

Quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$S_i(X, \alpha) = \sum_{\chi_D} \overline{\chi_D}(l_i) \sum_{2 < p_i \le X} \chi_D(p_i) \ln p_i e(p_i \alpha), \tag{3.2.10}$$

$$g_u^{(i)}(X, \alpha) = \sum_{2 < p_i \le X} n_i^{u-1} e(n_i \alpha), i = 1,2; \tag{3.2.11}$$

$$V_i(X, \alpha, q, a) = R(q) \frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} e\left(\frac{a}{q} N_1 l_i\right) g_1^{(i)}(X, \eta), i = 1,2; \tag{3.2.12}$$

bu yerda $\alpha = a q^{-1} + \eta, d = (q, D), N_1 = g q d^{-1} (mod\, q)$ soning $modq$ bo’yicha musbat chegirmasi, q esa $mod\, d$ bo’yicha $g q d^{-1} \equiv 1 (mod\, d)$ taqqoslamadan aniqlanadi. Agar $(q d^{-1}, D) = 1$ bo’lsa, $R(q) = 1;$ qolgan hollarda $R(q) = 0$ deb olamiz.

Yozuvda qulaylik uchun

$$S = S(X, \alpha) = S_1(X, \alpha) \cdot S_2(X, \alpha),$$

$$V = V(X, \alpha, q, a) = V_1(X, \alpha, q, a) \cdot V_2(X, \alpha, q, a) \tag{3.2.13}$$

deb belgilash kiritamiz. U holda

$$S(X, \alpha) = \varphi^2(D) \sum_{2 < n \le 2X} R(X, n) e(a, n), \tag{3.2.14}$$

bunda

$$R(X, n) = \sum_{n = p_1 + ¿ p_2 2 < p_i, p_2 \le X ¿ p_1 \equiv l_1 \equiv l_2 (modD)} \ln p_1 \ln p_2 \tag{3.2.15}$$

Tushunarliki, agar $2<n\leq N$ bo'lsa, u holda

$$\frac{n}{2}<J(N,n)\ll N,\left(J(N,n)=2(n-2)\right). \qquad (3.2.16)$$

Agar $\frac{1}{2}\leq u\leq 1$ bo'lsa, u holda bo'laklab yig'ish yordamida

$$g_u^{(i)}(X,\alpha)\ll min\,¿ \qquad (3.2.17)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $\|\alpha\|$ bilan α dan unga eng yaqin turgan butun songacha bo'lgan masofa belgilangan.

3.3-§ . Sonlar nazariyasining ba'zi additiv masalalari yechimida Dirixle xarakterlarining tadbiqi.

Biz ushbu bobda dastlab sonlar nazariyasining bir qancha additiv masalalarini o'rgandik. Additiv masalalar qanday masalalar va ularning yechimini topishda qanday metodlardan foydalanish yaxshiroq natija berishi haqida fikr mulohazalarni o'rganish davomida turli olimlarning izlanishlari natijasida olingan natijalarni ko'rib o'tdik. Bundan oldingi bobda esa Dirixle xarakterlarini to'la o'rgangan edik. Endi esa sonlar nazariyasining ba'zi additiv masalalarini yechishda Dirixle xarakterlarining tadbiqi qanday ekanligini ko'rib chiqaylik.

3.3.1-lemma: Agar N yetarlicha katta bo'lsa, u holda

$$\int_T ¿ S ¿ ¿ \tag{3.3.1}$$

$$\int_T ¿ \sum_{q \le P} \sum_{a=1}^{q} V ¿ ¿ \tag{3.3.2}$$

baholar o'rinli.

Isboti: 3.2.13- tenglikka asosan

$$\int_T ¿ S ¿ ¿ \tag{3.3.3}$$

Bu yerda

$$\int_T ¿ S_2 ¿ ¿$$

K.Praxar o'z teoremasiga asosan $N \ge 2 \, va \, D \le N^{1/2}$ bo'lganda

$$\sum_{\substack{p \le N \\ p \equiv l (mod D)}} lnp \ll N \varphi^{-1}(D)$$

bajariladi. Shuning uchun ham

$$\int_T ¿ S_2 ¿ ¿ \tag{3.3.4}$$

$\max_{\alpha \in T} ¿ S_1(N, \alpha) \vee ¿ ¿$ ni baholash uchun A.F.Lavrikning bizga ma'lum teoremasi natijasidan foydalanamiz. Unga ko'ra, agar $P < q \le N P^{-1}, 1 \le P \le N^{\frac{1}{3}}$,

$¿\alpha - a q^{-1} \vee \leq 2P¿$ bo'lsa, u holda

$$S_i(N,\alpha) \ll N P^{\frac{-1}{2}} D¿ \qquad (3.3.5)$$

o'rinli bo'ladi. Dirixle teoremasiga ko'ra, shunday $q \leq Q \, va \, a, 1 \leq a \leq q, (a,q)=1$ sonlari mavjudki, $|\alpha - a q^{-1}| < ¿$ tengsizlik bajariladi. Bu esa agar $q \leq P$ bo'lsa, $\alpha \in M(q,a)$ ekanligini bildiradi.

Demak, $\alpha \in T$ lar uchun $q > P$ va shuning uchun ham $\max_{\alpha \in T} ¿ S_1(N,\alpha) \vee ¿¿$ ni baholashda (3.3.5) dan foydalanishimiz mumkin.

Endi esa $P = P_2$ bo'lgan holni qarab chiqaylik.

$$\sum_{q>y} \sum_{a=1}^{q} V(X,\alpha,q,a) = \sum_{2<n\leq 2N} J(N,n)\sigma(y,n)e(n\alpha) \qquad (3.3.6)$$

Bunda

$$\sigma(y,n) = \sum_{q>y} R(q) \frac{\mu^2\left(\frac{q}{d}\right)}{\varphi^2\left(\frac{q}{d}\right)} \sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a}{q}\left(N_1(l_1+l_2)-n\right)\right). \qquad (3.3.7)$$

3.3.2-lemma: Agar $\alpha \in M(q,a)$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{q\leq P} \sum_{a=1}^{q} \int_{M(q,a)} ¿ \sum_{\substack{k\leq P \\ k\neq q}} \sum_{h=1, h\neq a}^{k} V(N,\alpha,k,h) ¿^2 d\alpha \ll \frac{P^9}{Q} ¿¿$$

bo'ladi.

Isboti. $a \leq q \leq P, (a,q)=1, h \leq k \leq P, (h,k)=1, k \neq q, h \neq a$ va $\alpha \in M(q,a)$ bo'lsin. U holda $|\alpha - a q^{-1}| < ¿$ va demak,

$¿$

Shuning uchun ham $n \geq 3$ bo'lganda $n\varphi^{-1}(n) \ll lnlnn$ va $d_1 = (k,D) \leq D$ ekanligini etiborga olib (3.2.12), (3.2.13) va (3.2.17) dan

$$¿\sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}}\sum_{h=1,h\ne a}^{k}V(N,\alpha,k,h)¿^2 \ll \vee\sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}}\mu^2 ¿¿¿$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib

$$\sum_{q\le P}\sum_{a=1}^{q}\int_{M(q,a)} ¿\sum_{\substack{k\le P\\ k\ne q}}\sum_{h=1,h\ne a}^{k}V(N,\alpha,k,h)¿^2 d\alpha \ll \sum_{\substack{q\le P\sum_{a=1}^{q}¿¿¿¿\\ ¿}} ¿¿$$

bajariladi. Shuning bilan lemma to'liq isbotlandi.

3.3.3-lemma: Yetarlicha katta N lar uchun

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\left|\sum_{q>P}\sum_{a=1}^{q}V(N,\alpha,q,a)\right|^2 d\alpha \ll N^3P^{-2}¿¿$$

baho o'rinli.

3.3.4-lemma: Agar $a\le q\le P,(a,q)=1,\ \alpha\in M(q,a)$ bo'lsa, u holda

$$S_i(N,\alpha)-V_i(N,\alpha,q,a)\ll N^2q^{-1}Q^{-1}\exp\left(-c_6\sqrt{lnN}\right)$$

bo'ladi.

Isboti. Tushunarliki

$$\left|\sum_{p_i\le N}\chi_D(p_i)\ln p_i e(p_i\alpha)-\sum_{\substack{p_i\le N\\ p_i/q}}\chi_D(p_i)\ln p_i e(p_i\alpha)\right|\le lnq\,(3.3.8)$$

Xarakterlarning ortoganallik xossasidan foydalanib (3.3.8) tengsizlikning chap tomonidagi ayriluvchi yig'indini

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_q}\left(\sum_{j=1}^{q}\overline{\chi_q}¿(j)e\left(\frac{aj}{q}\right)\right)\sum_{p_i\le N}(\ln p_i)\chi_D(p_i)\chi_q(p_i)e(p_i\eta)¿ \qquad (3.3.9)$$

ko'rinishida yoza olamiz. Endi

$$A_i=A_i(\chi_D,\chi_q,q,a)=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi_D,\chi_q}¿¿$$

$$G_i = G_i(\chi_D, \chi_q, N) = \sum_{p_i \le N} (\ln p_i) \chi_D(p_i) \chi_q(p_i) e(p_i \eta) i = 1,2 (3.3.11)$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda (3.3.8) va (3.3.11) lardan foydalanib,

$$S_i(N, \alpha) = A_i G_i + O(\varphi(D) lnq), i = 1,2 \qquad (3.3.12)$$

ni hosil qilamiz.

Avvalo, G_i ni qaraymiz. $\chi_D(p_i) \cdot \chi_q(p_i) = \chi_m(p_i), m = qDd^{-1}$ deb olamiz, u holda (3.3.10) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$G_i = \sum_{p_i \le N} \chi_m(p_i) \ln p_i e(p_i \eta) = ¿ = \sum_{n_i \le N} \chi_m(n_i) \wedge (n_i) e(n_i \eta) - \sum_{\substack{p^v \le N \\ v \ge 2}} \chi_m(p_i^v) \ln p_i e(p_i^v \eta) = ¿ = \sum_{n_i \le N} ¿¿¿¿¿¿$$

Bundan 3.2.1-lemmaning a) qismidan foydalanib

$$G_i(\chi ¿¿ m, N) - \delta_x \sum_{2 < n_i \le N} e(n_i \eta) \ll \left| \sum_{2 < n_i \le N} (\rho_{n_i} - \rho_{n_{i-1}}) e(n_i \eta) \right| + \sqrt{N} \ll \ll \left| \sum_{2 < n_i \le N} (\rho_{n_i} - \rho_{n_{i-1}}) \right| + ¿¿¿$$

munosabatga ega bo’lamiz. Endi $¿ e(n_i \eta) - e((n_i + 1)\eta) \vee \ll \vee \eta \vee \le (qQ^{-1})$ ni inobatga olib

$$G_i(\chi ¿¿ m, N) - \delta_x \sum_{2 < n_i \le N} e(n_i \eta) \ll |\rho| + \frac{N}{qQ} \max_{n_i} ¿ \rho_{n_i} \vee + \sqrt{N} \ll \frac{N}{qQ} |\rho_N| \ll \frac{1}{qQ} N^2 \exp(-c_6 \sqrt{lnN}) (3.3.13) ¿$$

ga ega bo’lamiz. Shunday qilib, (3.3.12) tenglik va (3.3.13) bahodan

$$S_i(N, \alpha) = \delta_x A_i \sum_{2 < n_i \le N} e(n_i \eta) + O\left(\frac{1}{qQ} N^2 \vee A_i \vee ¿ \exp(-c_6 \sqrt{lnN})\right) (3.3.14) ¿$$

kelib chiqadi.

Endi A_i ni qaraymiz. $\chi_D(p_i) \cdot \chi_q(p_i) = \chi_m(p_i) = \chi_m^{\circ}$, ning bosh xarakter (ya’ni $\delta_x = 1$) bo’lishi uchun barcha $p_i, (p_i, m) = 1$ lar uchun $\chi_D(p_i) = \chi_q(p_i)$

Va $\chi_q(p_i) = \chi_d(p_i)$ tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shuning uchun ham $Q' = D, Q'' = q, Q = m$ deb olsak, (3.3.10) tenglikdan

$$A_i = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_D, \chi_q} ¿¿$$

kelib chiqadi. *Место для уравнения*.

3.3.4 –lemma: Ushbu

$$\int_{-Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S(N,\alpha) - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{q} {}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha \ll \frac{N^3 D^2}{P} \ln^{12} N$$

baho o'rinli.

Isboti: 3.3.3-lemmadan foydalanib baholanayotgan integralni

$$\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} \left| S(N,\alpha) - \sum_{q \le P} \sum_{a=1}^{q} {}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha + O\left(\frac{N^3 D^2 \ln^4 N}{P^2} \right) (3.3.15)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin. $M = [Q ¿¿ -1, 1+Q^{-1}] ¿¿$ bo'lganligi uchun, (3.3.15)-ifodadagi $[Q ¿¿ -1, 1+Q^{-1}] ¿$ bo'yicha integaralni M va T bo'yicha olingan integrallar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bu integrallarni mos ravishda $K_1 \, va \, K_2$ bilan belgilaymiz. K_2 ni baholasak, u holda

$$K_2 \ll \int_T |S(N,\alpha)|^2 d\alpha + ¿ \int_T \left| \sum_{k \le P} \sum_{h=1}^{k} {}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha \ll \frac{N^3 D^2}{P} \ln^{12} N \, (3.3.16) ¿$$

bajariladi.

Endi K_1 integralni baholasak,

$$K_1 \ll \int_M \left| S(N,\alpha) - \sum_{\substack{k \le P \\ a \in M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k} {}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha + ¿ \int_M \left| \sum_{\substack{k \le P \\ a \notin M(k,h)}} \sum_{h=1}^{k} {}' V(N,\alpha,q,a) \right|^2 d\alpha \ll \ll N^3 P^3 D^2 \exp(-2$$

ga ega bo'lamiz. Endi (3.3.15) va (3.3.17) baholardan 3.3.4- lemma kelib chiqadi.

$P = P_1$ holni qaraymiz. Bu holda $E_{\tilde{\beta}} = 1$ va moduli

$$r \le P_1^{\frac{1}{4}} = P_2 \qquad (3.3.18)$$

shartni qanoatlantiruvchi maxsus haqiqiy xarakter $\widetilde{\chi_r}$ mavjud.

Faraz etaylik, $\tau(\chi_k)$ Gauss yig'indisi, ya'ni

$$\tau(\chi_k)=\sum_{n=1}^{k}\chi_k(n)e\left(\frac{n}{k}\right)(3.3.19)$$

bo'lsin. Dirixle L funksiyasining nollari to'g'risidagi Peydj va Zigel teoremalaridan

$$1-c_7\ln^{\frac{1}{2}}N<\beta<1-c(\varepsilon)r^{-\varepsilon},$$

ya'ni $r\gg(lnN)^{1/2\varepsilon}$ ekanligi kelib chiqadi. $\varepsilon=\varepsilon_1=(2A+6)^{-1}$ deb olsak, u holda

$$r>(lnN)^{A+2} \qquad (3.3.20)$$

hosil bo'ladi. Ma'lumki, haqiqiy primitiv xarakterning yetakchi moduli faqat va faqat 4,8 va $p>3-¿$ tub songa teng bo'lishi mumkin.
$m=qDd^{-1},d=(q,D),D=p^{v},p>2,D\ll\ln^{A}X,(qd^{-1},D)=1,qd^{-1}-¿$kvadratsiz bo'lgani uchun bu yerdan r/m munosabatning r/qd^{-1} ga, ya'ni r/q ga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi.

3.3.5-lemma: Agar primitiv xarakter $\chi^{¿}(modr)$ bilan industrlangan bo'lsa, u holda r/k va

$$\tau(\chi_k)=\mu\left(\frac{k}{r}\right)\chi_r^{¿}\left(\frac{k}{r}\right)\tau(\chi_r^{¿}),\vee\tau(\chi_r^{¿})¿^2=r$$

o'rinli bo'ladi.

3.3.6-lemma: Agar $m=qDd^{-1}$ modul bo'yicha maxsus xarakter mavjud bo'lsa, u holda

$$A_i(\chi_D,\chi_q,q,a)=\frac{1}{\varphi(q)}\widetilde{\chi_m}(al_i)\sum_{h=1}^{q}{}'\,\overline{\chi_m}(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$$

tenglik bajariladi. Bu lemma (3.3.10) tenglikdan va Dirixle xarakterlarining xossalaridan bevosita kelib chiqadi.

III Bob bo'yicha xulosalar.

"Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqi" mavzusidagi dissertatsiya mavzusini o'rganishda III bob "Sonlar nazariyasining additiv masalalari yechimida Dirixle xarakterlarining tadbiqi" uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrifida sonlar nazariyasining additiv masalalari tarixi haqida, ikkinchi paragrafda sonlar nazariyasining additiv masalalari yuzasidan olingan natijalar, uchinchi paragrafda esa Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqidan iboratdir. Birinchi paragrafda asosan sonlar nazariyasining additiv masalalari tarixi ko'rib chiqildi.

Birinchi paragrafni o'rganishda asosan sonlar nazariyasining shu kungacha ma'lum bo'lgan yechimini topgan va hali yechimini topib ulgurmagan muammolari ko'rib chiqildi, o'rganildi. Bu paragrafni o'rganishda turli xil chet el va O'zbekistonlik matematik olimlarning imiy izlanishlari, kitoblari va maqolalaridan foydalanildi.

Ikkinchi va uchinchi paragrafda esa sonlar nazariyasining additiv masalalaridan shu kungacha olingan natijalar va olingan baholar o'rganilib tahlil etildi. Uchinchi bobning har uchala paragrafida 6 ta lemma isbotlari bilan ko'rib chiqildi, natijalar olindi hamda misollar bilan tushuntirildi.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi ishi Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqini o'rganishga bag'ishlangan. Ushbu dissertatsiya ishida kirish, 3 ta bob, 9 ta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat. Kirish qismda masalaning aktualligi, maqsadi va amalga oshiriladigan ishlar asoslanadi va berilgan sohada masalaning hozirgi holati haqida aytilib, asosiy tushunchalar qisqacha keltiriladi. "Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqi" mavzusidagi dissertatsiya mavzusini o'rganishda I bob "Boshlang'ich ildizlar va indekslar" uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrifida tub modul bo'yicha boshlang'ich ildizlarlar va ularning xossalari, ikkinchi paragrafda p^α va $2p^\alpha$ modullar bo'yicha boshlang'ich ildizlar va ularni topish, uchinchi paragrafda esa indekslar va ularning xossalaridan iboratdir. Birinchi paragrafda jami 9 ta teorema, 4 ta ta'rif, 8 ta misol, 7 ta xossa va 6 ta natija ko'rib chiqildi.

Birinchi paragrafni o'rganishda asosan boshlang'ich ildizlar, ularni topishda daraja ko'rsatkichlarini aniqlash, boshlang'ich ildizlarning asosiy xossalari va ularga doir misollar o'rganildi. Bu paragrafni o'rganishda turli xil chet el va O'zbekistonlik matematik olimlarning imiy izlanishlari, kitoblari va maqolalaridan foydalanildi. Boshlang'ich ildizlarni avvaliga tub modul bo'yicha o'rganilgan bo'lsa keyin esa murakkab modul bo'yicha p^α va $2p^\alpha$ modul bo'yicha boshlang'ich ildizlarning mavjudligi va ularni hisoblash o'rganildi. Misollar yordamida yanada mustahkamlandi.

Uchinchi paragrafda esa indekslar va ularning xossalari ko’rib chiqildi. Birinchi paragrafdan foydalangan holda indekslarga ta’rif berildi. So’ng p^{α} va $2p^{\alpha}$ modul bo’yicha indekslar va ularni hisoblash ko’rib chiqildi. Boshlang’ich ildizlar va indekslarni chuqurroq o’rganishdan asosiy maqsad ikki hadli taqqoslamalarni indekslar yordamida yechimini topishdan iborat. Uchinchi paragrafda ikki hadli taqqoslamalarni indekslar orqali hisoblash o’rganilgan va unga doir misollar yechilgan.

Birinchi bobning har uchala paragrafida teoremalar va xossalar isbotlari bilan ko’rib chiqildi, natijalar olindi hamda misollar bilan tushuntirildi. Har bir olingan natijalar keyingi bobni o’rganishda va misollarni amaliy yechimini olishda yordam beradi.

Birinchi bobni o’rganish keyinchalik ikkinchi bobni ya’ni Dirixle xarakterlariga ta’rif berishda yordam beradi.

Ikkinchi bob “Dirixle xarakterlari” bo’lib, u 3 ta paragrafdan iboratdir. Birinchi paragraf Dirixlening xarakteristik funksiyasi va uning xossalari, ikkinchi paragraf ixtiyoriy modul bo’yicha Dirixle xarakterlari va uchinchi paragraf Dirixle –L funksiyasining asosiy xossalaridan iboratdir. Ushbu bobda jami 10 ta ta’rif, 7 ta lemma, 8 ta misol, 1 ta ta’rif, 3 ta natijadan iborat bo’lib, lemmalar ta’riflar va xossalar isbotlari bilan misollar yordamida tushuntirilgan.

Xorijlik olimlar K.M.Zminyan, Davenport H, Rooney B, Borwein P, K.M.Eminyan, J.B.Rosser, Schoenfeld L, K.M.Eminyan tomonidan olib borilgan tadqiqotlar, ilmiy asarlar, risolalar va maqolalarda investitsion muhit, investitsiyani boshqarish masalalari o’rganilgan.

Hamdo’stlik davlatlaridan A.A.Karatsuba, A.F.Lavrik, A.I.Vinogradov, Yu.V.Linnik, I.M.Vinogradov. kabi olimlar tub va murakkab modul bo’yicha boshlang’ich ildizlar va indekslarni, xarakterlarni chuqur tahlil qilib berishgan.

Bu boradagi mavjud muammolarning ayrim jihatlari va yechimlari respublikamiz olimlari Allakov I, A.S.Yunusov, D.I.Yunusova, Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov, Safarov A.Sh, Z.X.Rahmonov ilmiy ishlarida tadqiq etilgan va o’rganilgan.

Ikkinchi bobda asosan birinchi bobda o’rgangan boshlang’ich ildizlar va indekslar orqali Dirixle xarakterlariga ta’rif beriladi. Biz keyinchalik uchinchi bobda sonlar nazariyasining additiv masalalarini o’rganayotganda Dirixle xarakterlarining tadbiqini ko’rib chiqayotganda ikkinchi bobda o’rgangan ma’lumotlarimizdan keng foydalanamiz. Ikkinchi bobda Dirixle xarakterlari ularning barcha xossalari, ixtiyoriy modul bo’yicha Dirixle xarakterlari mavjudmi, agar mavjud bo’lsa u qanday aniqlanadi, misollar orqali tushuntirilgan va yechimlar ko’rsatilgan.

Ushbu dissertatsiya ishida asosiy o’rganiladigan obyekt Dirixle xarakterlari va sonlar nazariyasining additiv masalalari hisoblanadi. Dirixle xarakterlarini xar taraflama chuqur o’rganish keyinchalik istalgan muammoda xarakterlarni qo’llash mumkinmi yo’qmi, agar mumkin bo’lsa yaxshiroq natijaga erishish mumkinmi degan muammoli savollarga yechim topish mumkin.

III bob “Sonlar nazariyasining additiv masalalari yechimida Dirixle xarakterlarining tadbiqi” uchta paragrafdan iborat bo’lib, birinchi paragrifida sonlar nazariyasining additiv masalalari tarixi haqida, ikkinchi paragrafda sonlar nazariyasining additiv masalalari yuzasidan olingan natijalar, uchinchi paragrafda esa Dirixle xarakterlarining sonlar nazariyasining additiv masalalariga tadbiqidan iboratdir. Birinchi paragrafda asosan sonlar nazariyasining additiv masalalari tarixi ko’rib chiqildi.

Birinchi paragrafni o’rganishda asosan sonlar nazariyasining shu kungacha ma’lum bo’lgan yechimini topgan va hali yechimini topib ulgurmagan muammolari ko’rib chiqildi, o’rganildi. Bu paragrafni o’rganishda turli xil chet el va O’zbekistonlik matematik olimlarning imiy izlanishlari, kitoblari va maqolalaridan foydalanildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "O'zbekiston Respublikasining 2021– 2023 yillarga mo'ljallangan Investitsiya dasturini amalga oshirish chora – tadbirlari to'g'risida"gi (PQ-4937-son. 28.12.2020y.) Qarori. // www.lex.uz
2. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-sonli "2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasi rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi Farmoni. // www.lex.uz
3. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 14-iyuldagi PF-6260-sonli "Yoshlarni har tomonlama qo'llab quvvatlash va ularning ijtimoiy faolligini yanada oshirishga oid qo'shimcha chora – tadbirlar to'g'risida" gi qarori.
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 19-yanvardagi 23-sonli "O'zbekistonda yoshlarga oid davlat siyosatini 2025-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida" gi qarori.

5. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi PF-4708 sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora - tadbirlari to’g’risida”gi qarori.
6. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “2020-2022-yillarda iqtisodiyot tarmoqlari va ijtimoiy soha uchun matematika bo’yicha oliy malakali kadrlar tayyorlash chora – tadbirlari dasturini ishlab chiqish to’g’risida” gi qarori.
7. “Axborot tehnologiyalari va kommunikatsiyalari sohasini yanada takomillashtirish chora tadbirlari to’g’risida”gi O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018-yil 19-fevraldagi PF-5349 –sonli qarori.
8. O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Magistratura to’g’risidagi nizomini tasdiqlash haqida” qarori. 02.03.2016-yil.

9. A.Safarov. Sonlarni arifmetik progressiyadan olingan tub sonlar yig’indisi ko’rinishida ifodalash. Fizika-matematika fanlari bo’yicha falsafa doktori ilmiy darajasini olish uchun taqdim etilgan avtoreferat. Toshkent -2021.
10. Allakov I. Abdusamatova H. Tub sonlar qatnashgan binar additiv masalaning yechimlari soni haqida. Matematika ta’lim yo’nalishi bo’yicha magistr akademik darajasini olish uchun taqdim etilgan avtoreferat. Termiz -2017.
11. Allakov I. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta’lim» 2012, 200b.
12. Аллаков И. Искючительное множество суммы двух простых чисел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ленинград. ЛГУ, 1983. 148с.
13. Аллаков И. Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1981. -№ 11. -С.3-5.
14. Аллаков И. А. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 30.10.81. № 5166-81.

15. А.А. Карацуба. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле 2008 г. июль — август т. 63, вып. 4(382).
16. А.А. Карацуба, “Суммы характеров на последовательности сдвинутых простых чисел и их применения”, Матем. заметки, 17:1 (1975), 155–159; англ. пер.:
17. Ayupov.Sh.A., B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H. Haydarov, Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent 2019, 317 b.
18. A.S.Yunusov, D.I.Yunusova, Algebra va sonlar nazariyasi. “Ilm-ziyo”, Toshkent 2009. 248-b.
19. А.Ф. Лаврик, “Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 30:2 (1966), 433–448.
20. А.А. Карацуба. “Арифметические проблемы теории характеров Дирихле” “ Успехи математических наук “. January 2008. 44-60-б.
21. А.И. Виноградов, “О свойстве симметрии сумм характеров Дирихле”, Изв. АНУзбССР. Сер. физ.-матем., 9:1 (1965), 21–27.
22. Borwein, P., Choi, S., Rooney, B., and Weirathmueller, A. (2008).The Riemann Hypothesis. Canadian Mathematical Society.
23. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory. New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997,178p.
24. Haitboyev S. m-subgarmonik funksiyalar sinfida Dirixle masalasi. Magistr akademik darajasini olish uchun taqdim etilgan avtoreferat. Urganch 2017.
25. H. Davenport, D.J. Lewis, “Character sums and primitive roots in finite fields”, Rend.Circ. Mat. Palermo (2), 12:2 (1963), 129–136.
26. И.М. Виноградов, “Сонлар назарияси асослари”, Тошкент, (1965), 82-147.
27. И.М. Виноградов, Особые варианты метода тригонометрических сумм, Наука,М., 1976.

28. И.М. Виноградов, “Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 30:3 (1966), 481–496.
29. И.М. Виноградов, Избранные труды, Изд-во АН СССР, М., 1952.
30. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел.-М.:Наука,1983.–240 с.
31. К.М. Эминян, “О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 (1991), 680–686; англ. пер.: K.M. Eminyan, “On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers”, Math. USSR-Izv., 38:3 (1992), 669–675.
32. Сафаров А.Ш. О количестве представлений четного числа в виде суммы двух простих чисел из арифметической прогрессии// Карши 4-5 октября 2019 года. Сю259-260.
33. Yunusov A.S., Yunusova D.I. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tayyorlangan nazorat topshiriqlari to’plami. TDPU. 2004.
34. Чудаков Н.Г. Введение в теорию –функций Дирихле. Москва 1947 Ленинграт.
35. Ю. В. Нестеренко, Теория чисел. Физико-математичское науки, Москва Издательский центр « Академия» 2008. 158-173 с.
36. Ю.В. Линник, “О распределении характеров”, Докл. АН СССР, 42:8 (1944),323–325.
37. Ю.В. Линник, “О распределении характеров”, Докл. АН СССР, 42:8 (1944),323–325.
38. З.Х. Рахмонов, “О распределении значений характеров Дирихле”, УМН, 41:1 (1986), 201–202; англ. пер.: Z.Kh. Rakhmonov, “On the distribution of values of Dirichlet characters”, Russian Math. Surveys, 41:1 (1986), 237–238.

39. З.Х. Рахмонов, “Об оценке сумм характеров с простыми числами”, Докл. АН ТаджССР, 29:1 (1986), 16–20.
40. З.Х. Рахмонов, “О наименьшем Гольдбаховом числе в арифметической прогрессии”, Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-матем. и геол. наук, 1986, №2(100), 103–106.
41. З.Х. Рахмонов, “Распределение чисел Харди–Литтлвуда в арифметических прогрессиях”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:1 (1989), 211–224; англ. пер.:
42. Z.Kh. Rakhmonov, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, Math. USSR-Izv., 34:1 (1990), 213–228.
43. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политехинс-та. –Ростов-Дон, 1930, т. 14, №2-3,с.328Ю.В.Нестеренко. “Теория чисел”. Москва. Издательский центр –“Академия” 2008-й. 152-170-б.
44. К.М. Эминян, “О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 (1991), 680–686;англ. пер.: K.M.`Eminyan, “On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers”, Math. USSR-Izv., 38:3 (1992), 669–675.
45. К.М. Эминян, “Об одной бинарной задаче”, Матем. заметки, 60:4 (1996),634–637; англ. пер.: K.M. ` Eminyan, “A binary problem”, Math. Notes, 60:4 (1996),478–481.
46. Лаврик А.Ф. К. бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связис методом тригонометрических сумм И.М.Виноградова // Вестник ЛГУ.-Ленинград,1961. -№13.-С. 11-27.
47. Ш.Х. Михелевич. “Теория чисел”. 2-нашри; “Висшая школа” М. 1967 г.
48. Boysoatova Y. “Ikki hadli taqqoslamalarni indekslar yordamida yechish”, Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to’plami. Andijon, 28 mart 2022 yil. 374-bet.

49. Boysoatova Y. “ Ixtiyoriy modul bo’yicha Dirixle xarakterlarini misollar yordamida tushuntirish”, Algebra va analizning dolzarb masalalari Respublika ilmiy – amaliy anjumani materiallari to’plami. Termiz, 18 noyabr 2022 yil. 22-bet.
50. Boysoatova Y. “ Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalari tarixi haqida” Ilm – fan muammolari yosh tadqiqotchilar talqinida Respublika ilmiy konferensiyasi to’plami. Farg’ona, 30.03.2023 yil. 67-bet.
51. http:// www..dissercat.com;
52. https:// www. t.me./ilmiy_tadqiqotlar_magistr;
53. http:// www.dslib.net;
54. http:// www.dissforal.com;
55. http:// www.samdu.uz;
56. http:// www.library.ziyonet.uz;
57. http:// www.elibrary.ru;
58. http:// www. t.me./avtoreferat;
59. http:// www. arxiv.org;
60. http:// www. edu.uz.