O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo’lyozma huquqida

UDK: 532.5.013.001.891.573

ESHNAZAROV ULUG’BEK UBAYDILLO O’G’LI

GAZODINAMIKA JARAYONLARINING MATEMATIK MODELI

70540101- Matematika (yo’nalishlar bo’yicha) mutaxassisligi bo’yicha Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar: f.-m.f.d. prof. Ro’ziyev Sh.N.

Termiz- 2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2023-yil __________________________ sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti “ Algebra va geometriya” kafedrasida bajarilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilan Termiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Barkamol avlod ko‘chasi 43-uy.)

Ilmiy rahbar: ___________ f.-m.f.d. prof.Ro’ziyev Sh.N.

Kafedra mudiri: __________ dots. S. Choriyeva

Magistratura bo‘limi boshlig‘i: ___________ PhD. A.B. Narbayev

“Gazodinamika jarayonlarining matematik modeli” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTATSIYASI

Tayanch so’zlar: xususiy hosilali differensial tenglama, ekstremum, potensial, nolakal masala, noma`lum chegara, aprior baho,gazodinamika jarayonlari.

Tadqiqot obektlari: Gazodinamik jarayonlarning chiziqsiz modellari, matematik modellar,parabolik tenglamar.

Ishning maqsadi: Gazodinamik jarayonlarning matematik modellarini yaratish va bu masalalarni hayotga tadbiq etish.

Dissertatsiyada

- Parabolik tipdagi tenglamalar va ayrim ekologik jarayonlar o`rganiladi.
- Tabiiy jarayonlar,issiqlik jarayonlari va gazodinamika jarayonlarining matematik modellari o`rganiladi.

Tadqiqot metodlari: tadqiqot ishida integral tenglamalar nazaryasining metodlaridan,parabolik tenglamalar uchun chegaraviylik masalalarining yechimlari va teoremalaridan,shuningdek ketma-ket yaqinlashish usullaridan va ayrim ekologik jarayonlar uchun matematik modellardan foydalanilgan

Olingan natijalar va ularning yangiligi: Magistirlik dissertatsiyasida qaralayotgan mavzu bo`yicha bir qancha yetuk matematiklar izlanishlar olib borgan . Ushbu ishda oldin o`rganilmagan jarayonlar o`rganildi. Ya`ni oldin o`rganilmagan masalalar o`rganiladi.

Amaliy ahamiyati: Olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo`lib, ulardan tabiatda uchraydigan turli jabhalarning, ekologik jarayonlarning matematik modellarini qurishda tadbiq etish mumkin. Shu bilan birga dissertatsiya ishini differinsial tenglamalar va matematik fizik tenglamalari sohasida maxsus kurslarni o`qishda foydalanish mumkin.

Tatbiq etish darajasi va iqtisodiy samradorligi: Tadqiqot jarayonida ishlab chiqilgan xulosa va takliflar to'liq nazariy ahamiyatga ega. Dissertatsiyaning materiallari matematika (yo'nalishlari bo'yicha) o'qiyotgan magistr talabalarga o'quv dasturini takomillashtirishda foydalanilmoqda.

Qo'llanish sohasi: ish nazariy, oliy o'quv yurtlarida ilmiy tadqiqotchilar, magistrlar dissertatsiya ishlarida, "70540101-Matematika" yo'nalishi talabalari BMI larida ma'lumotnoma sifatida foydalanishlari mumkin

Key words:differential equation with particular derivative,extremum,potential,nonlocal problem,unknown limit,a priori estimate.

Research objects: nonlinear models of gasodynamic processes, mathematical models parabolic eqution.

The purpose of the work: nto create mathematical madels of gasodynamic processes and to apply these issues to life.Parabolic equations and some ecological prosesses are studied in the dissertation.

Mathematical models of natural processes,heat processes and gasdynamic processes are studied.

Research methods: methods of the theory of integral equations,theorems of solutions of boundary value problems for parabolic equations,as well as successive approximation methods were used in the research work.

Obtained results and their novelty:Several advanced mathematicians conducted research on the subject under consideration in the Master's dissertation.That is,issues that have not been studied before will be studied.

Practical importance: The obtained results are of theoretical importance,and they can be applied in the construction of mathematical models of various aspects and ecological processes occurring in nature.At the same time,the thesis work can be used in studying special courses in the field of differential equations and mathematical physics equations.

Level of implementation and economic efficiency: conclusions and proposals developed during the research are of full theoretical importance.The materials of the dissertation are being used to improve the curriculum for master’s students studying mathematics.

Field of application: Theoretical work, researchers in higher education, master's dissertations, students of "70540101-Mathematics" can use it as a reference in graduate qualifying work.

MUNDARIJA

KIRISH…………………………………………………………………. 3

I BOB. BIRINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR……………………………………………………………10

1.1-§. Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida sosiy tushunchalar…………………………………………………………..….10

1.2-§. Ikki o'zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar……………………………………………………………….12

1.3-§. Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning xarakteristikasi umumiy yechish usullari……………………………………………………..16

II BOB. GAZODINAMIKA JARAYONLARI UCHUN GIPERBOLIK TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASI…………………...…29

2.1-§. Tenglama uchun boshlang'ich va chegaraviy shartli masalalar……….…29

2.2-§. Tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar………………….. 39

2.3-§. Umumiy yechimni topish usullari…………………………………....43

III BOB. GAZODINAMIKA JARAYONLARINING MATEMATIK MODELI……………………………………………………………………53

3.1-§.Tenglamalar sistemasi uchun koshi masalasi……………………………53

3.2-§. Tenglamalar sistemasi uchun chegaraviy masalalar……………………56

Xulosa……………………………………………………………………..63

Foydalanilgan adabiyotlar………………………………………………...……66

KIRISH

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusiningasoslanishi va uning dolzarbligi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi matematik analiz, funksional analiz, differensial va integral hisob kabi bir qator fundamental fanlar ustiga qurilgan nisbatan yosh matematik fan tarmog'i bo'lib, u ishlab chiqarishni optimal boshqarish nazariyasi, fizika-mexanika, akustika, gaz dinamikasi, gidrodinamika, differensial geometriya, to'lqin nazariyasi, filtratsiya nazariyasi, bioligiya, ximiya, ekologiya kabi fanlarning muammolarini yechish zaruratidan vujudga kelgan. Bu fan sohasining debochasi sifatida birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama hamda tenglamalar sistemasi o'rganiladi. Hozirgi kunga kelib bu fan sohasi mustaqil fundamental fanlar qatoriga qo'shilgan bo'lib, keng miqiyosdagi ilmiy-amaliy izlanishlar natijasida ko'plab tabiiy jarayonlarning matematik modellari xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida xususan, birinchi tartibli tenglamalar va giperbolik sistemalar yordamida tuzilmoqda.

Birinchi tartibli giperbolik tenglamalar sistemasi to'lqin xarakteridagi tabiiy jarayonlarni, suyuqlik va gazlarning muhitda tarqalish qonuniyatlarini, suyuqlik va gazlarda jismlar harakati qonuniyatlarini, tovush to'lqinlarining tarqalish qonuniyatlarini va boshqa fizik, gidrodinamik, aerodinamik, gazodinamik jarayonlarni o'rganishga, modellarini tuzishga keng tadbiq qilinadi [4,5,6,7,8,9]. Demak, birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar tabiatini o'rganish hamda ularga asoslangan holda giperbolik tenglamalar sistemasi mavzusini o'rganish o'zining keng ko'lamli nazariy va amaliy ahamiyatiga ega ekan.

Hozirgi kunda Prezdentimiz Sh.Mirziyoyev tomonidan **"Mening nazarimda,jamiyat hayotining tanasi iqtisodiyot bo'lsa, uning joni va ruhi – ma'naviyatdir.Biz yangi O'zbekistonni barpo etishda ana shu ikkita mustahkam ustunga,ya'ni , bozor tomoyillariga asoslangan kuchli iqtisodiyotga hamda ajdodlarimizning boy merosi, milliy va umuminsoniy qadriyatlarga asoslangan kuchli ma'naviyatga tayanamiz"[1].**

Yoshlarga keng imkoniyatlar yaratib berilmoqda, katta-katta loiha ishlari ustida ishlamoqda . Ularning bilim va iste'dodlarini shakillantirib, milliy ma'naviyatimizni uzoqlashib ketayotganligi sezilib qolmoqda. Ular o'zlari o'qib kelgan xorijiy davlatlardagi tajriba almashib kelmoqda. **Yangi O'zbekiston taraqqiyot strategiyasining maqsadi- aholining barcha qatlamlariga munosib hayot darajasini va turmush sharoitlarini yaratib berish, ijtimoiy himoya va bandlikni ta'minlash, daromadlar barqaror o'sishiga erishish, jamiyatning madaniy darajasi, bag'rikenglik va mehribonlik fazilatlarini yanada mustahkamlashdan iborat[2].** Mashhur alloma bobomiz Abu Rayhon Beruniy tavalludining 1050 yilligi 2023 – yili jahon miqiyosida nishonlandi. Yubiley munosabati bilan ulug' ajdodimiz faoliyat ko'rsatgan Ma'mun akademiyasi faoliyatini yangi bosqichga ko'rtarish , allomaning to'la asarlari to'plamini nashr etish, uning hayoti va ilmiy merosiga bag'ishlab xalqaro konferensiya o'tkazildi.Ma'naviyat va sport muassasalari, teatr muzeylarning moddiy-texnik bazasini yaxshilash bo'yicha maxsus dasturlar ijrosi ta'minlandi.

Milliy kino va kutubxonalar tizimini yanada rivojlantirish, xalq hunarmandchiligini qo'llab-quvvatlashga doir aniq va samarali ishlar olib boriladi. **Yangi O'zbekiston –ma'rifatparvar davlat.[3]** Ushbu sohada amalga oshirilgan ishlarimiz jamiyatimizni yangi bosqichga ko'tarish , yuksak marralarni egallash, Uchinchi renessans poydevorini qurishga xizmat qilayotgani hozirning o'zida yaqqol namoyon bo'lmoqda. Yangi O'zbekiston taraqqiyot strategiyasining bu boradagi maqsadi milliy o'ziga xoslimizni, asrlar sinovidan o'tgan an'analarimizni, iymon – e'tiqod bilan yashash kabi hayotiy tamoyillarimizni ham saqlab qolish, ham yuksaltirishga qaratilgandir. Shu munosabat bilan **''Yangi O'zbekiston – ma'rifatli jamiyat'' konsepsiyasi va uni amalga oshirish milliy dasturi** ishlab chiqiladi**[4-5]** . Bu, avvalo, hayotimizning milliy-g'oyaviy asoslarini davr talablariga mos ravishda boyitish va rivojlantirish , shu orqali jamiyatning ma'naviy yuksalishiga erishish demakdir. O'z navbatida, bu jamiyat a'zolarining ongi va tafakkurini, hayot falsafasi va dunyoqarashini kengaytirish va boyitishni anglatadi. Yangi

O’zbekistonda ma’rifatli jamiyatni shakllantirishda quyidagi omillarga alohida ahamiyat qaratish lozim:

a) aholi o’rtasida huquqiy madaniyatni shakllantirish bo’yicha huquqiy-ma’rifiy tadbirlarni xalqimizning boy tarixi, ilmiy- madaniy merosi, milliy- diniy qadriyatlarini o’rgatish bilan uyg’un holda tashkil qilish;
b) davlat siyosatining ustuvor yo’nalishlari, keng ko’lamli islohatlarning mohiyati, qabul qilingan qonun hujjatlari va davlat dasturlarining ahamiyatini keng jamoatchilikka yetkazish;

c) talaba yoshlar va professor-o’qituvchilarda Vatanga muhabbat, uning taqdiriga daxldorlik, kasbga sadoqat hissini mustahkamlashga qaratilgan choratadbirlarni amalga oshirish, ta’lim-tarbiya jarayonlari hamda ma’naviy-ma’rifiy ishlarni kuchaytirish;
d) ushbu yo’nalishda ilmiy va uslubiytadqiqotlar samarodorligini oshirish, ijtimoyma’naviy muhit barqarorligini mustahkamlashga qaratilgan doimiy monitoring tizimini joriy qilish.

O’zbekiston Respublikasi Prizidentining 2017-yil 7-fevraldagi ПК-4947-son “O’zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo’yicha xarakatlar strategiyasi to’g’risida”gi,2017-yil 17-fevraldagi ПК-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati,ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish,boshqarish va moliyalashtirishni yanadatakomillashtirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi,2017-yil 20-apreldagi ПК-2909-son “Oliy talim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi,2018-yil 27-apreldagi ПК-3682-son “Innavatsion g’oyalar,texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi,2020-yil 7-maydagi ПК-4708-son “Matematika soxasidagi talim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to’g’risida”gi,qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-xuquqiy xujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya taqdimoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Hozirgi kunda ilm–fanga Prezidentimiz tomonidan alohida e'tibor berilmoqda.Ayniqsa, 2020 yilning Prezidentimiz tomonidan “Ilm, ma’rifat va raqamli rivojlantirish yili” deb e’lon qilinishi hamda bu yilda matematika, kimiyo, biologiya va geologiya fanlarini rivojlantirishga alohida e’tibor berilishi biz yosh matematiklarni ilm-fan bilan shug’ullanishga ilhomlantirib yubordi.

Jamiyat ijtimoiy sohasining eng muhim tarkibiy qismlaridan biri ta'lim tarbiya sohasi bo’lib, uning rivoji siyosiy –huquqiy, iqtisodiy va ma'naviy sohalarga bevosita ta'sir etadi hamda ijtimoiy sohalar me'yoriy mohiyatini, kamolot darajasini belgilab beradi.

Shu ma'noda olib qaraganda, yoshlarning yangi avlodi istiqbol masalalarini kun tartibiga dadil qo’yadigan va uni yecha oladigan, fikr yuritishning yuksak madaniyatini egallagan, siyosiy hamda ijtimoiy iqtisodiy hayotda o’ziga mustaqil yo’l topa oladigan qobiliyatga ega bo’lishi kerak [6]. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi mavzusi ana shu talab va vazifalardan kelib chiqib tanlandi.

Mazkur tadqiqot respublika fan va texnalogiyalar rivojlantirish IV.”Matematika,mexanika va informatika”ustuvor yo’nalishi doirasida bajarilgan

Tadqiqotning ob’yekti va predmeti.

Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi uchun boshlang’ich va chegaraviy masalalar.

Giperbolik tenglamalar sistemasi uchun masalalarni yechishda xarakteristikalar metodi, masala yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremalarini isbotlash.

Magistrlik dissertatsiya ishining maqsadi va vazifalari.

- Mavzuga oid ilmiy metodik adabiyotlar , maqolalar, darsliklar, o’quv qo’llanmalarni o’rganish va tahlil qilish;
  - Giperbolik tenglamalar sistemasi uchun qo’yiladigan boshlang’ich va chegaraviy masalalarni o’rganish.
-
- Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama va gipebolik tenglamalar sistemasi, uning xarakteristikasi, umumiy yechimini topish usullarini o’rganish;
- Asosiy boshlang’ich va chegaraviy shartli masalalar qo’yilishi, masala yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremalarini o’rganish;
- Giperbolik tenglamalar sistemasiga oid yangi chegaraviy masalalarni yechish.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi.

Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805 – 1859) 1837 yilda o‘zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi x(n) funksiyasini va Re$s=\sigma>1$ bo’lganda

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\ ,\qquad s=\sigma+it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyada tub sonlar soninnig cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko’plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi.

Ushbu ishda Dirixle $L-$funksiyasi $L(s,\chi)$ning no‘llari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [29] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T\geq T_0\geq 14{,}135$ bo’lganda $\sigma>1-\frac{0{,}0109}{\ln T}$ sohada $L(s,\chi)$ning no‘llari yo‘q ekanligi ko’rsatilgan.

Olihgan natija [29] dagi shu boradagi natijaning son qiymati jihatdan yaxshilanganidir.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari.

- Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Lagranj metodini chuqur o’rganish;
- Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar va sistemalar uchun xarakteritikalarni tahlil qilish;
- Sonlar nazariyasining bir qancha yechimini topgan va hali to’la yechimini topmagan masalalarni o’rganish oldindan olingan natija va boholarni o’rganib tahlil qilish.
- Tadqiqotning ishlab chiqilgan ilmiy takliflari va amaliy tavsiyalari natijalarida gazodinamika jarayonlarining ko’plab additiv masalalarini birinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar orqali yechish mumkin bo’ladi;

- **Tadqiqot mavzusi bo’yicha adabiyotlar sharxi.** Magistlik tadqiqot ishini oʻrganish davomida quyidagi adabiyotlardan foydalanildi. Allakov I. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta’lim» 2012, 200b. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел.-М.:Наука,1975.–182 с. Девенпорт Г. Мультипликативная теории чисел.-М: “Наука” 1971г. Чудаков Н.Г. Введение в теорию функций Дирихле.-М: Гостехиздат.1947г. Pintz J., Elementary methods in the of L-functions v. The theorems of Landau and Page, Acta Arith., 32 (2), 1977, 163-171. Allakov I.,Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. TerDu. “Algebra va analizning dolzarb masalalari” xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. Termiz-2023.11-12-betlar. Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. BuxDu. “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muamollari” xalqaro ilmiy-amaliy anjumani. Buxoro-2022. 83-84 betlar.
- **Tadqiqotda qoʻllanilgan metodikaning tavsifi.** Dissertatsiya ishida ilmiy abstraksiya, tahlil va sintez, monografik kuzatish, taqqoslash, induksiya va deduksiya, statik guruhlash, tizimli tahlil, usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotda olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati: Dissertatsiya ishi ilmiy – nazariy xarakterda bo‘lib, matematikaning turli additiv masalalarini yechishda, xususan, gazodinamik jarayonlarda uchrashi mumkin bo’lgan asosiy masalalarda,gazodinamika jarayonlarining matematik modellarini yaratishda foydalanish mumkin.

Magistrlik dissertatsiya tuzilmasining tavsifi:

Mazkur Magistrlik dissertatsiya ishi kirish, asosiy qism (3 ta bobdan iborat), xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro’yhati, hamda asosiy tushunchalarning izohli lug’atidan iborat. Birinchi bobda asosiy tushunchalar, ikkita erkli o’zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama, tenglamaning xarakteristikasi, tenglamaning umumiy yechimi, tenglama uchun qo’yiladigan asosiy boshlang’ich va chegaraviy masalalarning qo’yilishi, masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar hamda teorema isbotlari keltirilgan [1,2,3,4,5,6,7,8]. Ikkinchi bobda giperbolik tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar, sistemaning umumiy yechimini topish usullari ko’rib chiqilgan. Uchinchi bobda esa giperbolik tenglamalar sistemasi uchun asosiy boshlang’ich va chegaraviy masalalarning yechimini topish o’rganilgan hamda yangi chegaraviy masala yechilgan.

I BOB. BIRINCHI TARTIBLI HUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

1.1-§. Asosiy tushunchalar.

Chiziqlar.

$I = [0;1]$ kesmada aniqlangan $f: I \to R^3$ akslantirish silliq funksiyadan iborat bo'lsin [ ]. Har bir $t \in I$ nuqta uchun $f = (f_1, f_2, f_3)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya R^3 soxada chiziqni ifoda etadi, bu yerda

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),\ t \in I \tag{1.1.1}$$

Bu yerda t parameter bo'lib, (1.1.1) ifoda R^3 fazoda aniqlangan chiziqning parametric berili deyiladi. Keyingi hollarda chiziqni quyidagicha belgilash bilan tushunamiz:

$$C: \big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big), t \in I$$

yoki qisqacha $C: (f_1, f_2, f_3)$.

Sirtlar.

Keling biz o'zimizga tanishroq tushunchalarda boshlaylik. Bizga

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\,, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

berilgan bo'lsin. Malumki,

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1.1.2}$$

(2) tenglama R^3 fazoda markazi koordinata boshi (0,0,0,) nuqtada va radiusi birga teng sferani ifoda etadi. Berilgan $f(x, y, z)$ ifoda R^3 da (2) sirtni aniqlar ekan. Kuzatishlarni umumlashtirsak,

$$f: I \to D\ , (D \in R^3 \text{ mos soxa})$$

silliq funksiya quyidagicha tenglama orqali berilgan sirtni aniqlaydi:

$$S: f(x, y, z) = 0\ , (x, y, z) \in D \subset R^3 \tag{1.1.3}$$

Demak, biz keying hollarda sirt tushunchasini ishlatganimizda (1.1.3) yoki qisqacha $S\colon f=0$ ifodadan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $f\in C^1$ uzluksiz differensiallanuvchi funskiyalar sinfiga tegishli bo'lsin. U holda ∇f operator yordami S sirtning $P(x,y,z)\in S$ nuqtasidagi normali aniqlanadi. Bu sirtni parametrik tenglamalar orqali ifodalashga uchun qulaylik yaratadi:

$$S\colon f(x,y,z)=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,,\ (u,v)\in D_1\subset R^2.$$

Ba'zi mulohazalar.

(i) $S\colon F(x,y,z)=0$ sirt, bu sirtga tegishli $C\colon \big(x(t),y(t),z(t)\big)\in S\,,t\in I$ chiziq hamda $P(x(t),y(t),z(t))\in C$ nuqta berilgan bo'lsin. U holda berilgan nuqtadagi berilgan sirtga o'tkazilgan normal quyidagi yo'nalishda bo'ladi:

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

C chiziqning berilgan nuqtadagi urinma yo'nalishi esa $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),t\in I$ kabi bo'ladi. Bitta nuqtadagi normal va urinma o'zaro ortogonal ekanligidan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0 \qquad (1.1.4)$$

(1.1.4) tenglikka ega bo'lamiz.

(ii) Parametrik oshkor ifodalar.

Faraz qilaylik, S sirt quyidagicha parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$S\colon\ x=F_1(u,v),\ y=F_2(u,v),\ z=F_3(u,v)\,,\ (u,v)\in D_1\subset R^2 \qquad (1.1.5)$$

U holda (x,y,z) erkli o'zgaruvchilarni (u,v) parametrlarga almashtirish Yakobyanini tekshiraylik,

$$\mathcal{J}=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Faraz qilaylik, $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ nuqtada yakobiani noldan farqli bo'lsin. u holda (1.1.5) ifodadagi birinchi 2ta tenglama teskari funksiya haqidagi teoremaga ko'ra P nuqtaning biror atrofida u va v larga nisbatan yechiladi:

$$u = \alpha(x, y), v = \beta(x, y).$$

Bundan hamda (1.1.5) dan foydalansak

$$z = F_3(u, v) = z = F_3\big(\alpha(x, y), \beta(x, y)\big) = G(x, y) \qquad (1.1.6)$$

o'rinli bo'lib, (1.1.6) S sirtning oshkor ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi.

$$z = G(x, y).$$

1.2.§ Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Tenglamaning tarifi.

Bizga $D \subset R^n$ $(n \in N, n \geq 2)$ soxada aniqlangan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noma'lum funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya D soxada C^1 sinfga tegishli bo'lsin.

1-tarif: Noma'lum funksiya va uning erkli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan birinchi tartibli xususiy hosilalarini bog'lovchi tenglamaga *birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi va uning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0\ .$$

Agar $n = 2$ bo'lsa, u holda (7) tenglamaga *ikki no'malum o'zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilalali differensial tenglama* deyiladi (keyingi hollarda tenglama deyilganda ikkita no'malumli birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani tushunamiz)

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.2.1}$$

yoki qisqacha, $p = u_x$, $q = u_y$ belgilash kiritib,

$$F(x, y, u, p, q) = 0$$

Bu yerda *a,b,c* - koeffitsient va d – manbani ifoda etuvchi C^1 sinfga tegishli funksiyalardir.

Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama injeneriya, fizika va matematika, biologiya va ximiyaga doir ko'pgina masalalardan kelib chiqqan.

- Oddiy differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko'paytuvchi μ ni olsak,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M)$$

ko'rinishdagi tenglikni qanoatlantirib, bu μ nisbatan xususiy hosilali tenglamadan iborat.

- Bizga quyidagi sirt berilgan bo'lsin: $z = F(x, y, a, b)$ va $p = u_x$, $q = u_y$ bo'lsin. U holda oxirgi uchta tenglikdan a va b larni yo'qotish yo'li bilan birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaga ega bo'lamiz, agar quyidagi matritsa ranggi 2 ga teng bo'lsa:

$$rang\begin{pmatrix} F_a & F_{xa} & F_{ya} \\ F_b & F_{xb} & F_{yb} \end{pmatrix}=2$$

Masalan, $z = x + ax^2y^2 + b^2$ bu sirt tenglamasi uchun $p = 1 + 2axy^2$, $q = 2ax^2y$ bo'lib, $xp + yq = x$ tenglamaga ega bo'lamiz.

- S sirtni quyidagicha aniqlab olaylik:

$S : F(u, v) = 0$ bu yerda $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$. U holda murakkab funksiya hosilasidan foydalanib F funksiyadan x va y lar bo'yicha xususiy hosilalarini olsak, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_u(u_x + pu_x) + F_v(v_x + pv_x) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_u(u_v + qu_v) + F_v(v_y + pv_v) = 0.$$

Yuqoridagi ifodalardan F_u va F_v larni yo'qotish yo'li bilan quyidagi birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$p \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} + q \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \qquad (1.2.2)$$

Tenglamaning klassifikatsiyasi.

Umumiy holda (1.2.1) tenglama berilishiga qarab **(a)** hamda tenglamaning fizik va mexanik manosidan kelib **(b)** chiqib turlarga ajratiladi [1,13,14].

(i) (1.2.1) tenglamaga *chiziqli tenglama* deyiladi, agar u, u_x, u_y funksiyalar chiziqli bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa:

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = d(x,y) \quad (1.2.3)$$

Bu yerda a, b, c, d – berilgan C^1 sinfga tegishli (xususiy holda o'zgarmas) funksiyalar. Agar $d(x,y) \equiv 0$ bo'lsa, (1.2.3) ga *chiziqli bir jinsli tenglama,* aks holda *bir jinssiz tenglama* deyiladi.

(ii) Agar (1.2.3) tenglamani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa, unga *yarim chiziqli tenglama* deyiladi:

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = d(x,y,u) \quad (1.2.4)$$

Demak, yarim chiziqli tenglamada koeffitsient funksiyalar faqat x va y o'zgaruvchilar bog'liq hamda ozod had x, y va $u(x,y)$ larga bog'liq funksiya ekan.

(iii) (1.2.1) tenglama *kvazi chiziqli tenglama* deyiladi, agar uni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa:

$$a(x,y,u)u_x(x,y) + b(x,y,u)u_y(x,y) = c(x,y,u). \qquad (1.2.5)$$

(1.2.5) Kvazi chiziqli tenglama xususiy hosilalarga nisbatan chiziqli tenglama deb ham ataladi.

(iv) (1.2.1) tenglama (*to'liq) chiziqsiz tenglama* deyiladi, agar uni yuqoridagi (i), (ii), (iii) hollardagi kabi ifodalash mumkin bo'lmasa.

Chiziqli tenglamalar yarim chiziqli tenglamalar sinfiga, yarim chiziqli tenglamalar esa kvazi chiziqli tenglamalar sinfiga va o'z navbatida kvazi chiziqli tenglamalar chiziqsiz tenglamalar sinfiga to'plam sifatida qism to'plamdir. Bularining barchasini (1.2.1) tenglama o'zida umumlashtiradi. Mazkur Magistrlik dissertatsiya ishida chiziqli, yarim chiziqli va kvazi chiziqli tenglamalar va shu tipdagi tenglamalardan tashkil topgan giperbolik sistemalar o'rganiladi[8].

Gaz dinamikasining aksariyat saqlanish qonunlari birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi, jumladan, massaning saqlanish qonuni, impulsning saqlanish qonuni, uzluksizlik (ba'zi adabiyotlarda "tutashlik") qonuni, energiyaning saqlanish qonuni, oqim harakati kabi jarayonlarni ifodalovchi tenglamalar fizika, gaz dinamikasining asosiy qonunlari ifodalaydi[10]. Bunda $\rho = \rho(x,t), u = u(x,t), p = p(x,t)$ funksiyalar mos ravishda zichlik, tezlik va bosimni ifodalaydi. $p = (\gamma - 1)(e - \frac{1}{2}\rho u^2)$ bu yerda E energiyani, γ – esa

(1.2.6) $\rho_t + (\rho u)_x = 0$ uzluksizlik tenglamasi

(1.2.7) $(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$ impulsning tenglamasi

(1.2.8) $e_t + u(e+p)_x = 0$ energiya tenglamasi

1-Misollar.

(1) $u_y + a u_x = 0$, $(a = const)$ — chiziqli bir jinsli tenglama

(2) $a u_y + b u_x + c u = f$ — chiziqli bir jinssiz tenglama

(3) $y u_y + (x+y) u_x = u^2$ — yarim chiziqli bir jinsli tenglama

(4) $u_y + u u_x = 0$ — kvazi chiziqli bir jinsli tenglama

(5) $(u_y)^2 + a(u_x)^2 = 0$ — chiziqsiz bir jinsli tenglama

1.3-§. Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy yechimini topish metodlari, xarakteristikasi.

Tenglamaning umumiy yechimi.

Uzluksiz differensiallanuvchi $z = z(x,y)$ funksiya *tenglamaning yechimi* deyiladi agar bu funksiya va uning erkli o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarini tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantirsa .

2-Misollar. 2.1. $z = ax + by$, $(a, b \in R)$ funksiya $x z_x + y z_y = z$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

2.2. $z^2 = y^2 + (x+1)^2$ funksiya esa $(z_x)^2 + (z_y)^2 = 0$ tenglamaning yechimidir.

(7) tenglamning R^2 fazoda aniqlangan $z = u(x, y)$ yechimi R^3 fazoda 3 o'lchamli giperbolik sirtni ifoda etadi, bu sirtga *tenglamaning integral sirti* deyiladi. Ya'ni tenglamaning tenglamaning integral sirtini topish va tenglamaning yechimini toppish bu ekvivalent tushunchalardir. $S : z = z(x, y)$ 2 parametrli $z = F(x, y, a, b)$ yechimlar oilasi (7) *tenglamaning to'liq integrali* deyiladi, agar quyidagi matritsa ranggi 2 ga teng bo'lsa,

$$M = \begin{pmatrix} F_a & F_{xa} & F_{ya} \\ F_b & F_{xb} & F_{yb} \end{pmatrix}.$$

$F(u, v) = 0$ silliq (oshkor yoki nooshkor) funksiya (7) *tenglamaning umumiy yechimi* deyiladi, agar z , z_x , z_y lar $F(u, v) = 0$ munosabatni qanoatlantirsa, bu yerda $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$. [2,3]

Tenglamaning *xususiy yechimi* deb to'liq integralni qanoatlantiradigan va a,b larni quyidagicha yo'qotish yo'li bilan hosil qilingan yechimga aytiladi,

$$z = F(x, y, a, b),\ F_a = 0,\ F_b = 0\ .$$

3-Misollar. 3.1. $F\left(x + y, x - \sqrt{z}\right) = 0$ oshkormas funksiya $z_x - z_y = 2\sqrt{z}$ tenglamaning yechimidir. $u = x + y,\ v = x - \sqrt{z}$ ekanligidan funksiyadan *x* va *y* lar bo'yicha xususiy hosilalarini olamiz:

$$F_u + \left(1 - \frac{z_x}{2\sqrt{z}}\right) F_v = 0\ ,\ F_u + \left(-\frac{z_y}{2\sqrt{z}}\right) F_v = 0\ .$$

Bu yerdan F_u va F_v larni yo'qotish yo'li bilan $z_x - z_y = 2\sqrt{z}$ tenglama hosil bo'ladi.

3.2. $F(a, y, a, b) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - 1$ funksiya quyidagi tenglamning umumiy yechimidan iborat: $z^2\left(1 + (z_x)^2 + (z_y)^2\right) = 1$.

3.3. $z_x \cdot z_y = 1$ tenglamaning yechimi esa $z = ax + \frac{y}{b} + b$ dan iborat.

Lagranj metodi.

Quyidagi (1.2.5) kvazi chiziqli tenglamani qaraymiz:

$$a(x, y, u)u_x\ (x, y) + b(x, y, u)u_y\ (x, y) = c(x, y, u). \qquad (1.2.5)$$

Bu yerda a, b, c mos $D \subset R^3$ sohada aniqlangan ma'lum funksiyalardir. Biz odatda $a, b, c \in C^1$ sinfga tegishli va bir vaqtda nolga teng bo'lmagan, chegaralangan funskiyalar deb faraz qilamiz.

Agar $S: z = u(x,y)$, $(x,y) \in D$ sirt (1.2.5) tenglamaning integral sirti va $P = P(x,y,z) \in S$ nuqta bo'lsa, u holda berilgan sirtning berilgan nuqtasidagi nolmali (1.1.4) ga ko'ra, $(u_x, u_y, -1)$ vektor yo'nalishida bo'ladi. (1.2.5) tenglamadan kelib chiqsak, quyidagi xulosalarni olamiz:

1. $(u_x, u_y, -1)$ va *(a,b,c)* vektorlar o'zaro ortogonal bo'ladi.

2. $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ yordamida aniqlangan vektorlar to'plami S sirtning P nuqtasidagi urinma tekisligida yotadi.

3. S sirt ustida yotuvchi $C: (x(t), y(t), z(t))$ chiziq uchun $\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$ vektor urinma tekislikdagi $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ vektorga parallel bo'ladi ya'ni,

$$\frac{\dot{x}}{a} = \frac{\dot{y}}{b} = \frac{\dot{z}}{c} \tag{1.3.1}$$

Bu esa quyidagi bilan ekvivalentdir:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = dt. \tag{1.3.2}$$

(1.3.2) sistemaga (1.2.5) tenglamaning *xarakteristik sistemasi* deyiladi. Farazga ko'ra, (1.3.2) sistemaning birinchi integrallari mavjud bo'ladi, ya'ni:

$$v_1(x,y,z) = c_1,\ v_2(x,y,z) = c_2\ .$$

Bu xulosalar yordamida quyidagi natijani olamiz[10].

<u>1-Teorema:</u> Agar $a, b, c \in C^1$ bo'lsa, u holda (11) tenglamaning yechimi mavjud bo'lib,

$$F(v_1,\ v_2) = 0 \tag{1.3.3}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot: (1.3.2) xarakteristik sistemaning chiziqli erkli yechimlari $v_1 = c_1$ va $v_2 = c_2$ bo'lsin. U holda $dv_1 = 0$ va $dv_2 = 0$ hamda

$$v_{1x}dx + v_{1y}dy + v_{1z}dz = 0$$

$$v_{2x}dx + v_{2y}dy + v_{2z}dz = 0$$

o'rinli bo'ladi. (1.3.1) ga ko'ra

$$av_{1x} + bv_{1y} + cv_{1z} = 0$$

$$av_{2x} + bv_{2y} + cv_{2z} = 0$$

kelib chiqadi. Bulardan a, b, c larga nisbatan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{a}{\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(y,z)}} = \frac{b}{\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(z,x)}} = \frac{c}{\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x,y)}}. \qquad (1.3.4)$$

Ikkinchidan, $F(v_1,\ v_2) = 0$ va bunda (1.2.2) tenglik

$$u_x \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} + u_y \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (1.2.2)$$

hosil bo'ladi (8) va (1.3.4) tenglamalarni taqqoslasak,

$$au_x + bu_y = c$$

(1.2.5) tenglamaga ega bo'lamiz. Bu esa $F(v_1,\ v_2) = 0$ parametrik tenglama bilan berilgan sirt (1.2.5) tenglamaning integral sirti ekanligini bildiradi, ya'ni $F(v_1,\ v_2) = 0$ (1.2.5) tenglamaning umumiy yechimi ekan. Teorema isbotlandi.■

Demak, Lagranj metodi yordamida (11) tenglamaning umumiy yechimini topishimiz uchun (1.3.2) xarakteristik sistemaning $v_1(x, y, z) = c_1$ hamda $v_2(x, y, z) = c_2$ yechimlarini olib (1.3.3) formula foydalanar ekanmiz.

4-misollar. 4.1. tenglamani yeching: $x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y)u$.

Yechish: (1.3.2) xarakateristik sistemani olamiz:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

1) $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1 \ \Rightarrow\ v_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1$

2) $\frac{dx-dy}{x^2-y^2} = \frac{du}{(x+y)u} \ \Rightarrow\ \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{du}{u} \ \Rightarrow\ x - y = c_2 u \ \Rightarrow\ v_2 = \frac{u}{x-y} = c_2$

U holda (1.3.3) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimi $F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{u}{x-y}\right) = 0$ dan iborat.

Tenglamaning xarakteristikasi.

Bizga umumiy holdagi (1.2.5) kvazi chiziqli tenglama berilgan bo'lsin

$$a(x, y, u)u_x\,(x, y) + b(x, y, u)u_y\,(x, y) = c(x, y, u). \qquad (1.2.5)$$

$a, b, c \in C^1$ berilgan bir vaqtda nolga teng bo'lmagan hamda chegaralangan funksiya bo'lsin. U holda quyidagi oddiy differensial tenglamalarni tekshiramiz.[5,6]

2-tarif: (11) *tenglamaning xarakteristik chizig'lari (xarakteristikasi)* deb, quyidagi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) \\ \frac{du}{dt} = c(x, y, u) \end{cases} . \qquad (1.3.5)$$

sistemaning integral chiziqlari to'plamiga aytiladi, (1.3.5) ga (1.2.5) tenglamaning *xarakteristik sistemasi* deyiladi.

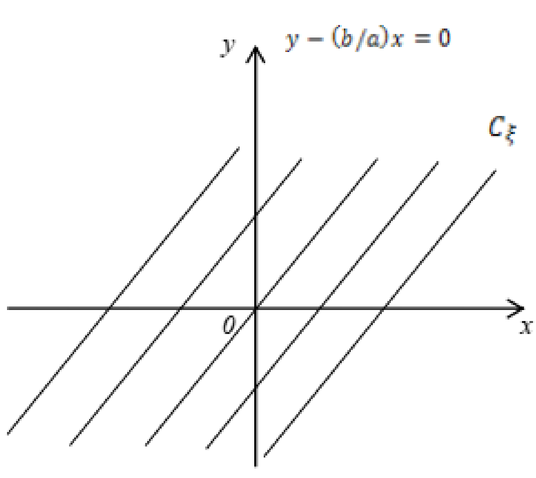
Xarakteristik chiziqlarni qisqacha C_ξ harfi bilan belgilaymiz.

4-misollar. 4.1 $au_x + bu_y = 0$, a, b – o'zgarmas sonlar bo'lsa, tenglamaning xarakteristik chiziqlarini toping.

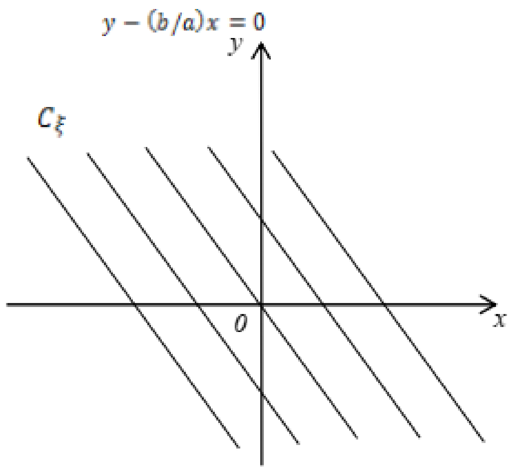
Yechish: Avvalo xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Bu oddiy differensial tenglamani yechsak, C_ξ: $y - \frac{b}{a}x = c_1$, $(c_1 = const)$ integral chiziqlarga ega bo'lamiz (1,2-chizmalar).



1-chizma. *(b/a)>0* holatda.



2-chizma. *(b/a)<0* holatda

4.2. $\frac{1}{x^2}u_x + au_y = 0$ tenglamaning xarakteristik chiziqlarini toping.

Yechish: tarifga ko'ra, $\frac{dy}{dx} = ax^2$ xarakteristik tenglamani yechsak, 4.2. tenglamaning $C_\xi: y = \frac{ax^3}{3} + c_1$ xarakteristikasini hosil qilamiz (3-chizma).

2-Teorema: (1.2.5) tenglamaning yechimi bo'lgan $u = u(x,y)$ funksiya xarakteristik chiziqlar ustida o'zgarmasdir.

Isbot: (1.3.5) xarakteritik sistemadan foydalanib

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)} = dt. \tag{1.3.6}$$

ga ega bo'lamiz. Bunda quyidagi

$$u_x = \frac{c(x,y,u)}{a(x,y,u)}\ ,\ u_y = \frac{c(x,y,u)}{b(x,y,u)}. \tag{1.3.7}$$

tengliklar o'rinliligi kelib chiqadi.

Endi x , y erkli o'zgaruvchilar C_ξ: $\Big(x(t), y(t), u\big(x(t), y(t)\big)\Big)$ xarakteristika bo'ylab o'zgarganda $u = u(x(t), y(t))$ funksiyaning qiymatlarini tekshiramiz. U holda (1.2.5) tenglamaning yechimi C_ξ xarakteristika ustida $u = u\big(x(t), y(t)\big) = g(t)$ kabi aniqlangan murakkab funksiyada iborat. u funksiya uzluksiz differensiallanuvchi ekanligidan $g(t)$ murakkab funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi. $g(t)$ funksiyani *t* bo'yicha differensiallab, (1.3.6) ni inobatga olsak:

$$\frac{dg(t)}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt} = u_x \cdot a(x,y,u) + u_y \cdot b(x,y,u) = c(x,y,u) \tag{1.3.8}$$

ga ega bo'lamiz. Ikkinchi tomondan (1.3.7) hisobga olsak,

$$\frac{dg(t)}{dt} = u_x\frac{dx}{dt} + u_y\frac{dy}{dt} = 2c(x,y,z) \tag{1.3.9}$$

o'rinli bo'lib, oxirgi (1.3.8) va (1.3.9) tengliklardan

$$\frac{dg(t)}{dt} = 0$$

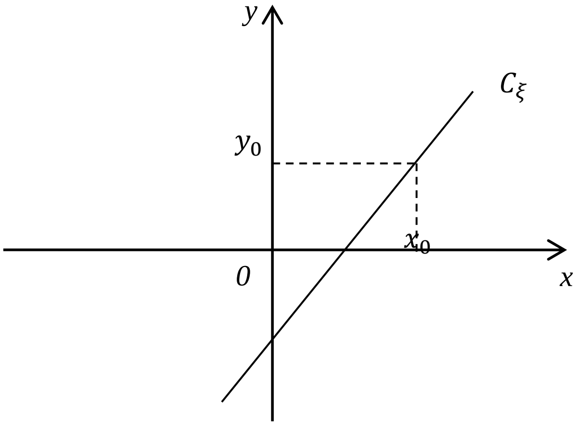
kelib chiqadi. Bu esa $g(t)$ — o'zgarmas funksiya, o'z navbatida, (1.2.5) tenglamaning $u = u(x,y)$ yechimi C_ξ xarakteristika ustida o'zgarmas qiymat qabul qilishini bildiradi, ya'ni

$$u = u(x,y)|_{C_\xi} = const.$$

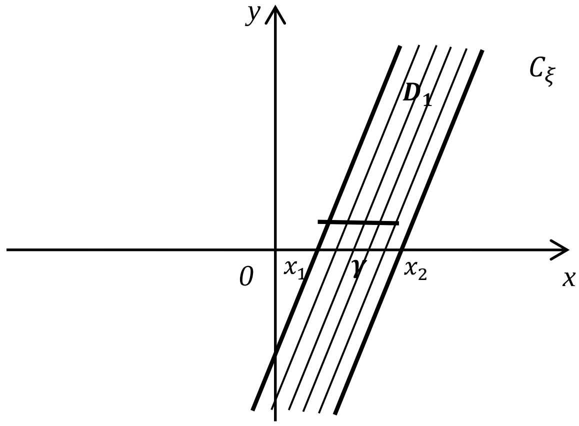
Teorema isbotlandi [2]. ■

2-Teoremaning ahamiyati shundan iboratki, agar $D \subset R^2$ sohada birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama va biror (x_0, y_0) nuqtada tenglama yechimining qiymati berilgan bo'lsa, u holda bu qiymatni (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi tenglamaning xarakteristikasi butun *D* soha bo'ylab olib ketadi (6-chizma).

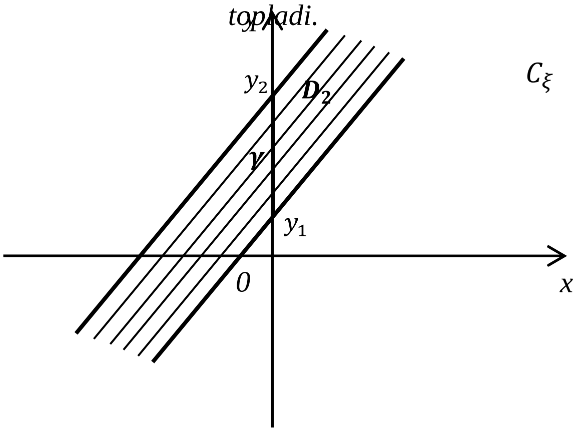
Umumiy holda tenglamaning xarakteristik chiziqlari bilan bittadan ortiq bo'lmagan biror noxarakteristik γ: $\big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$, $t \in [t_1, t_2]$ silliq chiziq ustida bu tenglamaning yechimi bo'lgan $u = u(x,y)$ funksiyaning qiymatlari berilgan bo’lsa, u holda berilgan sohaning $t_1 \leq t \leq t_2$ shart bajariluvchi xarakteristika chiziqlar bilan chegaralangan qismida yechimning barcha qiymatlarini hisoblash mumkin bo’ladi (7,8,9-chizmalar).



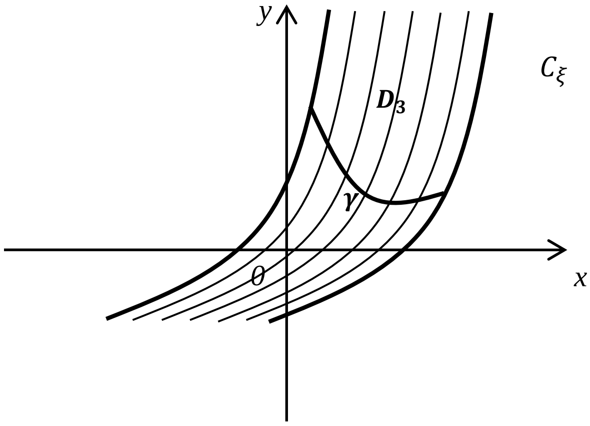
6-chizma. *Berilgan chiziq bo’ylab yechim topiladi.*



7-chizma. D_1 *sohada yechim topiladi.*



8-chizma. D_2 *sohada yechim topiladi.*



9-chizma. D_3 *sohada yechim topiladi.*

Xarakteristikalar metodi.

(a) Bizga quyidagicha chiziqli bir jinsli 1-tartibli xususiy hosilali differensial tenglama

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{1.3.9}$$

berilgan bo’lsin. U holda 2-tarifga ko’ra (22) ning xarakteristik tenglamasi

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} \tag{1.3.10}$$

ko’rinishda bo’lib, (1.3.10) oddiy differensial tenglamaning integral chiziqlariga (1.3.9) ning xarakteristiksidan iborat bo’ladi. Agar (1.3.9) tenglama yechimi D sohada izlanayotgan bo’lib, $a(x,y), b(x,y) \in C^1$ sinfga tegishli hamda $a^2(x,y) + b^2(x,y) \neq 0$ shart bajarilsa, u holda D sohaning har bir nuqtasidan faqatgina bitta xarakteristik chiziq o’tadi [2,3,].

3-Tarif: Agar (1.3.10) xarakteristik tenglamaning yechimi bo’lgan

$$\xi(x,y) = c \tag{1.3.11}$$

funksiyaga (22) tenglamaning *bosh integrali* deyiladi, (c – ixtiyoriy o’zgarmas).

3-Teorema: Agar $\xi(x,y)=c$ funksiya (1.3.9) tenglamaning bosh integrali bo’lsa, u holda (1.3.9) tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y)=F(\xi(x,y)) \tag{1.3.12}$$

formula yodamida topiladi, bu yerda F ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

Isbot: teoremani isbotlashda x va y o’zgaruvchilarni tenglamaning xarakteristikasi bo’ylab o’zgaradigan qilib "qotirib" qo’ysak, ya’ni

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=y \end{cases} \tag{1.3.13}$$

xarakteristik almashtirishlar kiritsak, o’zgaruvchilarni almashtirish Yakobiani

$$\mathcal{J}=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.3.14}$$

shartni qanoatlantirganda, X0Y tekisligida $u(x,y)$ funksiya ξ0η tekisligida $v(\xi,\eta)$ funksiya bir xil qiymatlar qabul qiladi, ya’ni

$$u(x,y)\equiv v(\xi,\eta) \tag{1.3.15}$$

U holda 2-teoremaga ko’ra,

$$v(\xi,\eta)=F(c)=const \tag{1.3.16}$$

$F\in C^1$ o’zgarmas funksiyadan iborat bo’lib, 3-teorema sharti va (1.3.15) dan foydalansak,

$$u(x,y)=F(\xi(x,y))$$

kelib chiqadi. Teorema isbotlandi [13,14]. ■

(b) Bizga bir jinssiz 1-tartibli xususiy hosilali differensial tenglama

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=c(x,y) \tag{1.3.17}$$

berilgan bo’lsin.

4-Teorema: Agar (1.3.17) tenglamaning

$$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)}=\frac{du}{b(x,y)} \tag{1.3.18}$$

xarakteristik sistemasi ikkita chiziqli erkli integrallari

$$v_1(x,y,u)=c_1\,,\; v_2(x,y,u)=c_2 \tag{1.3.19}$$

lardan iborat bo’lsa, u holda tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = F(v_1, v_2) \tag{1.3.20}$$

formula yordamida topiladi, F – ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

Isbot: teoremaning isboti 1-teoremaga anologik ravishda keltirib chiqariladi.

Izoh: Tenglama kvazi chiziqli bo'lsa ham yuqoridagi (b) holatdagi mulohazalar o'rinlidir.

5-misollar. Tenglamaning umumiy yechimini toping:

5.1. $au_x + bu_y = 0$, $(a, b - const, a \neq 0)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: (1.3.10) dan foydalanib berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

va uni yechib $y - \frac{b}{a}x = c$, $c = const$ tenglamaning bosh integraliga ega bo'lamiz, ya'ni $\xi(x,y) = y - \frac{b}{a}x$ ekanligidan va (1.3.12) formuladan foydalansak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = F\left(y - \frac{b}{a}x\right), \qquad F \in C^1$$

funksiyadan iborat ekan.

5.2. $au_x + bu_y + cu = f$, $a, b, c - const, f \in C^1_{x,y}$.

Yechish: xarakteristik tenglamani olsak,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

uning yechimini $\xi(x,y) = x - \frac{a}{b}y$ ko'rinishida topamiz. x, y o'zgaruvchilar uchun (1.3.13) dan foydalanib xarakteristik almashtirishni kiritamiz:

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{a}{b}x \\ \eta = x \end{cases} \tag{1.3.21}$$

Almashtirish Yakobiani - $\mathcal{J} \neq 0$ noldan farqli ekanini tekshirish mumkin, va (1.3.15) tenglikdan

$$u(x,y) \equiv v(\xi,\eta), \; f(x,y) = \tilde{f}(\xi,\eta) \tag{1.3.22}$$

biektiv almashtirishga ega bo'lamiz. $v(\xi,\eta)$ funksiyadan x va y lar bo'yicha murakkab funksiyasi hosilasi qoidasidan foydalanib u_x, u_y xususiy hosilalarni hisoblaymiz

$$u_x = v_\xi \cdot \xi_x + v_\eta \cdot \eta_x = v_\xi \left(-\frac{a}{b}\right) + v_\eta\,, \quad u_y = v_\xi \cdot \xi_y + v_\eta \cdot \eta_y = v_\xi \quad (1.3.23)$$

Olingan xususiy hosilalarni tenglamaga qo'yib

$$a v_\eta + c v = \tilde{f} \qquad (1.3.24)$$

yangi tenglamaga ega bo'lamiz. $a \neq 0$ deb faraz qilib, (1.3.24) ning ikkala tomonini $\frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta}$ integrallovchi ko'paytuvchiga ko'paytirsak, quyidagi o'rinliligi ko'rinadi

$$\frac{d}{d\eta}\left(v(\xi,\eta) e^{\frac{c}{a}\eta}\right) = \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta} \tilde{f}(\xi,\eta). \qquad (1.3.25)$$

(1.3.25) tenglikning ikkala tomonini o dan η gacha integrallaymiz, ya'ni

$$\int_0^\eta \frac{d}{ds}\left(v(\xi,s) e^{\frac{c}{a}s}\right) ds = \int_0^\eta \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta} \tilde{f}(\xi,\eta) ds. \qquad (1.3.26)$$

integralni hisoblasak,

$$v(\xi,\eta) = v(\xi,0) e^{-\frac{c}{a}\eta} + \frac{1}{a}\int_o^\eta e^{-\frac{c}{a}(\eta - s)} f(\xi,\eta)\, ds \qquad (1.3.27)$$

ga ega bo'lamiz hamda (1.3.22) ga teskari almashtirishdan mavjudligidan berilgan tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'lamiz va u quyidagi formula yordamida topiladi [1]

$$u(x,y) = u\left(y - \frac{a}{b}x, o\right) e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{a}\int_o^x e^{-\frac{c}{a}(x-s)} f(y - \frac{a}{b}(x-s), s)\, ds\,. \quad (1.3.28)$$

I bob bo'yicha xulosa

Dissertasiyaning birinchi bobi birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalalar va ularni yechishga bag'ishlandi. Differensial tenglamalar uchun ekstremum prinsipi va undan kelib chiqadigan bir qator xossalari o'rganildi.

Xususiy xosilali differensial tenglamalarning eng sodda vakili issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi va bir qator fizik jarayonlarning matematik modellari issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga keltirilishi o'rganildi. Shu bilan birgalikda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala chekli sohada to'la echilgan. Masala echimining yagonaligi, mavjudligi, turg'unligi va bir qator xossalari o'rganildi.

Jumladan masala echimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib ko'rsatildi. Masala echimining mavjudligi esa o'zgaruvchilarni ajratishning bir qancha usullari yordamida ko'rsatildi.

Bundan tashqari chegaraviy masalalarni echishda issiqlik potensiallari usuli ham katta ahamiyatga ega. Shuning uchun ishda issiqlik potensiallari ya'ni, oddiy va ikkilangan qatlam potensiallari va uning xossalari qaraldi. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun yarim chegaralangan sohada va chekli sohada birinchi chegaraviy masala echimining mavzjudligi issiqlik potensiallari yordamida echildi.

II BOB. GAZODINAMIKA JARAYONLARI UCHUN GIPERBOLIK TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASI

2.1-§. Tenglama uchun boshlang'ich va chegaraviy shartli masalalar

Koshi masalasi.

Ko'pincha (ikki erkli o'zgaruvchili) birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida 1-erkli o'zgaruvchi sifati masofa hamda 2-erkli o'zgaruvchi sifatida vaqt qaraladigan $u(x,t)$ funksiya va uning xususiy hosilalari qatnashgan tenglamalar hamda tenglamalar sistemasi o'rganiladi. Biz yuqorida umumiy holda o'zgaruvchilarni x va y lar sifatida olib tenglamaning xarakteristikasi, yechish usullari borasida to'xtalgan edik. Endi keyingi hollarda $x \to t$ va $y \to x$ kabi almashtirish yordamida tenglama va tenglamalar sistemasi uchun qo'yiladigan boshlang'ich va chegaraviy masalalar o'rganiladi. Demak, 1 o'lchamli fazoda vaqtga bog'liq o'zgaruvchi noma'lum $u(x,t)$ funksiya va uning o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalari qatnashgan tenglama va sistemalarni o'rganamiz [3,5,7,8].

3-Tarif: $D \in R^2$ sohada

$$a(x,t)u_t(x,t) + b(x,t)u_x(x,t) = 0 \tag{2.1.1}$$

(1.3.9) tenglamaning yechimi $u(x,t)$ funksiyaning $t = t_0$ momentdagi qiymati

$$u(x,t_0) = \varphi(x)\,, -\infty < x < +\infty \tag{2.1.2}$$

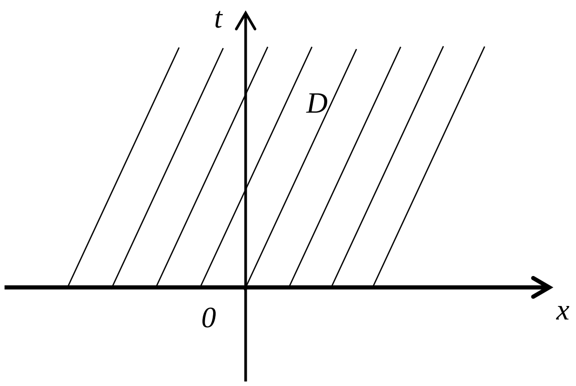
berilgan holda $t > t_0$ shartni qanoatlantiruvchi tenglamaning yechimini topish masalasiga *Boshlang'ich shartli masala* yoki *Koshi masalasi* deyiladi. Bu yerda $\varphi \in C^1$ sinfga tegishli berilgan funksiya. $t = t_0$ chiziqqa *boshlang'ich moment* deyiladi.

Bunday hollarda (masalan, quyidagi (2.1.1)tenglamada) $\frac{dx}{dt} = \frac{b(x,t)}{a(x,t)} = \lambda$ — (masofadan vaqt bo'yicha olingan hosila) tenglamaning *xarakteristik soni yoki xarakteristik tezligi* deyiladi. Hamda tenglamaga qo'yilgan masalani hal qilishda xarakteristik sonning ishorasi muhim rol o'ynaydi. Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, tenglamaning xarakteristikalari *x* bo'yicha o'suvchi bo'lib, tenglamaning yechimini ifodalovchi to'lqin o'ng tomonga harakatlanayotganini bildiradi (1-,4-,7-,8-,9-rasmlar) va aksincha.

Izoh: Agar tenglamada *x* va *t* erkli o'zgaruvchilar masofa o'zgaruvchilari bo'lsa, u holda tenglama uchun Koshi masalasi $C: (s, o, \varphi(s))$ parametrik ko'rinishda berilgan chiziqni o'z ichida saqlagan tenglamaning integral sirtini topish masalasi bilan ekvivalent bo'ladi.

Amaliyotda boshlang'ich moment sifatida $t_0 = 0$ qaraladi. U holda Koshi masalasining yechimi quyidagi D sohada izlanadi (10-chizma) .

(2.1.1)-(2.1.2) masalani yechish uchun xarakteristikala metodidan foydalanamiz.



10-chizma.

(2.1.1) tenglamaning umumiy yechimiga ko'ra (1.3.12) dan foydalanib

$$\varphi(x) = F(\xi(x, t_0)) \tag{2.1.3}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan $x = x(\xi)$ teskari almashtirshdan foydalanib

$$u(x,t) = \varphi(\xi(x,t)) \tag{2.1.4}$$

Koshi masalasi yechimiga ega bo'lamiz.

6-misollar. 6.1. Transport tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimini toping.

$$au_t + bu_x = 0\,, (x,t) \in D \tag{2.1.5}$$

$$u(x,o) = \varphi(x)\,, -\infty < x < +\infty \tag{2.1.6}$$

Yechish: Avvalo (4.5) tenglamaning xarakteristikasini topamiz:

$$\frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} \rightarrow \xi = x - \frac{b}{a}t = const.$$

Bu yerdan umumiy yechimni topsak

$$u(x,t) = F(x - \frac{b}{a}t)$$

dan iborat bo'lib, u boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechim bo'lishi uchun$F(x) = \varphi(x)$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur. U holda Koshi masalasining yechimi

$$u(x,t) = \varphi(x - \frac{b}{a}t) \tag{2.1.7}$$

formula yordamida topiladi.

6.2.
$$au_{st} + bu_x + cu = f\,, a, b, c - const, f \in C^1_{x,t} \tag{2.1.8}$$

$$u(x,o) = \varphi(x)\,,\ -\infty < x < +\infty \tag{2.1.9}$$

Yechish: (2.1.8)-(2.1.9) masalani yechishda 1.3.4. banddagi 5.2. misolning umumiy yechimi

$$u(x,t) = u\left(x - \frac{a}{b}t, o\right)e^{-\frac{c}{a}t} + \frac{1}{a}\int_o^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)} f(x - \frac{a}{b}(t-s), s)\, ds \tag{2.1.10}$$

dan foydalanib, (2.1.9) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimni topamiz:

$$u(x,t)=\varphi\left(x-\frac{a}{b}t\right)e^{-\frac{c}{a}t}+\frac{1}{a}\int_o^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)}f(x-\frac{a}{b}(t-s),s)\,ds. \quad (2.1.11)$$

Chegaraviy masala.

$D\in R^2$ sohada

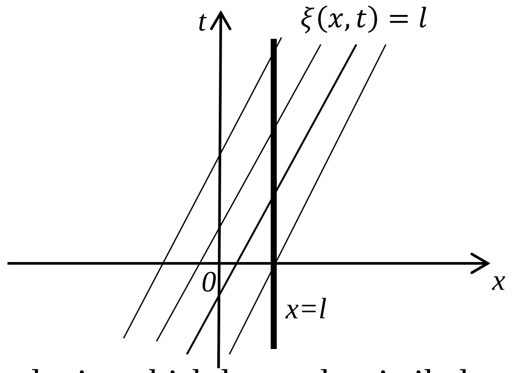
$$au_t(x,t)+bu_x(x,t)+cu=f(x,y) \quad (2.1.1)$$

boshlang'ich shartni hamda $x=l$ chegarada

$$u(l,t)=\psi(t)\,,\ x=l \quad (2.1.12)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga *chegaraviy masala* deyiladi. Bu yerda $\psi\in C^1$ sinfga tegishli funksiya.

Izoh: Agar tenglamada x va t erkli o'zgaruvchilar masofa o'zgaruvchilari bo'lsa, u holda (2.1.1),(2.1.2) chegaraviy masala C: $\left(l,s,\psi(s)\right),\ s\in R$ parametrik ko'rinishda berilgan chiziqni o'z ichiga olgan tenglamaning integral sirtini topish masalasi bilan ekvivalentdir.



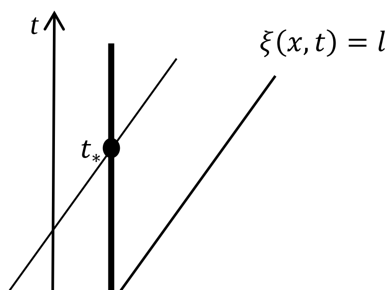
11-chizma. $\lambda>0$.

(2.1.1),(2.1.2) masalani yechishda xarakteristikalar metodidan foydalanamiz. Bunda xar bir (l,t_1) nuqtadagi $u(x,t_1)$ funksiyaning qiymatini (1.4.12) chegaraviy shartdan foydalanib topiladi va bu qiymatni shu nuqtadan o'tuvchi tenglama xarakteristikasi butun soha bo'ylab olib ketadi. Natijada butun $D\in R^2$ sohada masala yechimi topiladi.

Masalani yechishda (1.3.21) xarakteristik almashtirishdan foydalanib,

$$u(x,y)\equiv v(\xi,\eta),\qquad f(x,y)=\tilde{f}(\xi,\eta)$$

yangi v funksiya uchun masala olamiz hamda (39) integralni t_* dan t gacha xarakteristik chiziq bo'ylab integrallab masala yechimiga ega bo'lamiz. Bunda t_* nuqtani $\xi(x,t)=\ \xi(l,t_*)$ xarakteristik munosabat orqali topiladi (12-chizma).



Demak, (39) integralni quyidagicha aniqlab olamiz

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\left(v(\xi,s)e^{\frac{c}{a}s}\right) ds = \int_{t_*}^{t} \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta} \tilde{f}(\xi,\eta) ds \,. \qquad (2.1.13)$$

u holda yechim quyidagi formula yordamida topiladi

$$u(x,y) = \psi(t_*)e^{\alpha t} + \frac{1}{a}\int_{t_*}^{t} e^{\beta(t-s)} f(y-\alpha(x-s),s)\, ds$$

Bu yerda α, β — (2.1.13) integralni hisoblashda hosil bo'luvchi koeffitsientlar (xususiy holda o'zgarmas) [1].

7-Misollar. 7.1. Quyidagi transport tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching.

$$au_t \pm bu_x = 0\,,\ (x,t) \in D, a > 0, b > 0 \qquad (2.1.5)$$

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l \qquad (2.1.12)$$

Yechish: 6.1. dan foydalanib tenglamaning umumiy yechimini olsak

$$u(x,t) = F(x \mp \frac{b}{a}t) \qquad (2.1.14)$$

dan iborat va uni chegaraviy shartga tekshirib $u(l,t) = F(l \mp \frac{b}{a}t)$ hamda $z = l \mp \frac{b}{a}t$ ifodani t ga nisbatan yechamiz va F hamda ψ funksiyalar orasidagi bog'liqlikni topamiz, u holda

$$F(z) = \psi\left(\frac{b}{a}(l \mp z)\right)$$

bo'lib, bundan chegaraviy masala yechimi

$$u(x,t) = \psi\left(t \mp \frac{a}{b}(x-l)\right) \qquad (2.1.15)$$

formula yordamida topilar ekan.

7.2. Quyidagi chegaraviy masalani yeching.($a > 0, b > 0$)

$$au_t \pm bu_x + cu = f\ , a, b, c - const, f \in C^1_{x,t} \tag{2.1.8}$$

$$u(l,t) = \psi(t)\ ,\ x = l \tag{2.1.12}$$

Yechish: masalani xarakteristikalar metodidan foydalanib yechamiz. Buning uchun xarakteristik almashtirishlar kiritib (5.2-misol) (2.1.13) integralni (2.1.12) chegaraviy shart bilan sistema qilib yechimga ega bo'lamiz.

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\left(v(\xi,s)e^{\frac{c}{a}s}\right)ds = \int_{t_*}^{t} \frac{1}{a} e^{\frac{c}{a}\eta} \tilde{f}(\xi,\eta)ds \tag{2.1.16}$$

t_* nuqtani xarakteristik almashtirishlarda topsak, $t_* = t \mp \frac{a}{b}(x-l)$ ga ega bo'lamiz (12-chizma). (2.1.13) integralni hisoblab tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = u\left(l, t \mp \frac{a}{b}(x-l)\right)e^{\mp\frac{c}{b}(x-l)} + \frac{1}{a}\int_{t\mp\frac{a}{b}(x-l)}^{t} e^{-\frac{c}{a}(t-s)} f(x \mp \frac{a}{b}(t-s), s)\, ds \tag{2.1.17}$$

kelib chiqib, bu yerda esa (2.1.12) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi masala yechimini topamiz

$$u(x,y) = \psi\left(t \mp \frac{a}{b}(x-l)\right)e^{\mp\frac{c}{b}(x-l)} + \frac{1}{a}\int_{t\mp\frac{a}{b}(x-l)}^{t} e^{-\frac{c}{a}(t-s)} f(x \mp \frac{a}{b}(t-s), s)\, ds\ . \tag{2.1.18}$$

Demak, (2.1.8),(2.1.12) masala yechimi (2.1.18) formula yordamida topilar ekan.

Aralash masala.

$D \in R^2$ sohada

$$a(x,t)u_t(x,t) + b(x,t)u_x(x,t) + c(x,t)u = f(x,t) \tag{2.1.1}$$

tenglamani $t = 0$ boshlang'ich momentda

$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ \ t = 0 \tag{2.1.12}$$

boshlang'ich shartni hamda $x = l$ chegarada

$$u(l,t) = \psi(t)\ ,\ x = l \tag{2.1.13}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi tenglamaning yechimini topish masalasiga *boshlang'ich va chegaraviy shartli* yoki *aralash* masala deyiladi.

Aralash masalada λ xarakteristik sonning ishorasiga qarab chegaraviy shart qo'yilishi ikki turga bo'linadi.

(a) $\lambda > 0$, o'ng tomonga haratlanayotgan to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich shart

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ t = 0,\ x \geq l \tag{2.1.18}$$

hamda chegaraviy shart

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l\,,\ t \geq 0 \tag{2.1.19}$$

dan iborat bo'lib, (2.1.19) shartga *chap chegaraviy* shart deyiladi.

(2.1.1),(2.1.18)-(2.1.19) aralash masalaga esa *chap chegaraviy shartli aralash masala* deyiladi. (13-rasm)

(b) $\lambda < 0$, chap tomonga haratlanayotgan to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich shart

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ t = 0,\ x \leq l \tag{2.1.20}$$

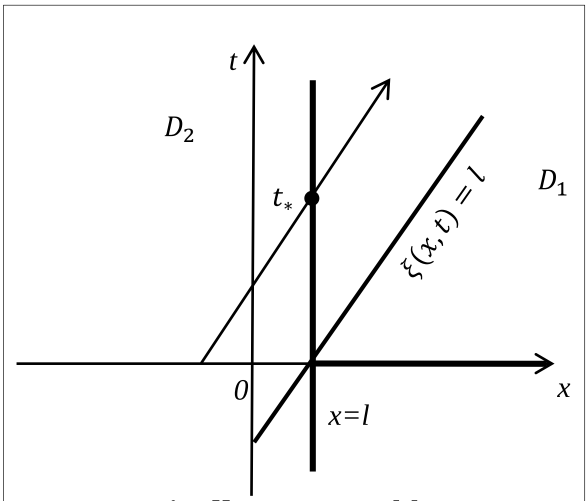
hamda chegaraviy shart

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l\,,\ t \geq 0 \tag{2.1.21}$$

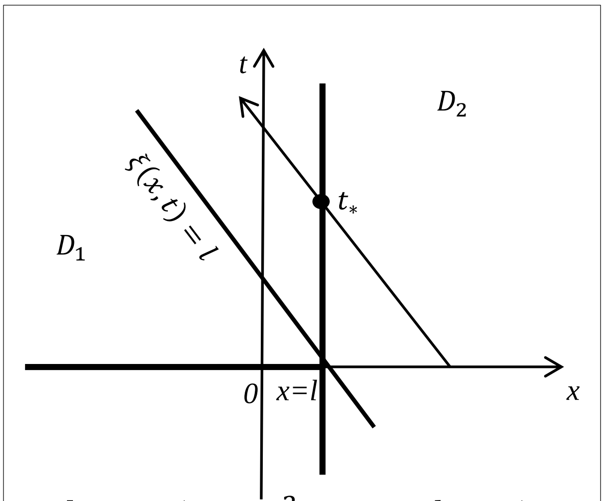
dan iborat bo'lib, (2.1.21) shartga *o'ng chegaraviy* shart deyiladi.

(2.1.1),(2.1.20)-(2.1.21) aralash masalaga esa *o'ng chegaraviy shartli aralash masala* deyiladi. (14-rasm)

Aralash masalani yechishda xarakteristika metodidan hamda masala yechimining uzluksizligini taminlash uchun $\varphi, \psi \in C^1$, $\varphi(l) = \psi(0)$ farazlardan foydalanamiz. Buning uchun D sohani tenglamaning $\xi(x,t) = l$ xarakteristikasi yordamida ikki qismga ajratamiz, ya'ni $D = D_1 \cup D_2$ (13-,14-chizmalar). U holda D_1 sohada boshlang'ich shartdan foydalanib Koshi masalasi, D_2 sohada esa chegaraviy shartdan foydalanib chegaraviy masala yechiladi, shu yo'l bilan butun D sohada aralash masala yechimi topiladi [1,2,4,5,6].



13-chizma. $\lambda > 0$.



14-chizma. $\lambda < 0$.

8-Misollar. 8.1. Ushbu transport tenglamasi ($D \in R^2$, $a > 0, b > 0$)

$$au_t + bu_x = 0\,,\ (x,t) \in D \tag{2.1.22}$$

uchun quyidagi boshlang'ich

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ t = 0,\ x \geq l \tag{2.1.18}$$

shartni va

$$u(l,t) = \psi(t)\,,\ x = l\,,\ t \geq 0 \tag{2.1.19}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi chap chegaraviy shartli aralash masalaning yechimi topilsin.

Yechish: Tenglamaning xarakteristikasini topamiz

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} = \lambda \ \Rightarrow \ \xi(x,t) = x - \frac{b}{a}t$$

hamda D sohani xarakteristik chiziq yordamida ikki qismga ajratamiz, ya'ni $D_1 = \{(x,t)\colon\ \xi(x,t) \geq l\}$, $D_2 = \{(x,t)\colon\ \xi(x,t) < l\}$.

D_1 sohada (2.1.22),(2.1.18) boshlang'ich masala yechimini (2.1.7) formuladan hamda D_2 sohada (2.1.22)-(2.1.19) chegaraviy masalasi yechimini (2.1.15) formuladan foydalanib topamiz, u holda butun D sohada masala yechimi

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(x - \frac{b}{a}t\right), & (x,t) \in D_1 \\ \psi\left(t - \frac{a}{b}(x-l)\right), & (x,t) \in D_2 \end{cases} \tag{2.1.23}$$

formuladan foydalanib topiladi.

8.3. Ushbu transport tenglamasi ($D \in R^2,\ a > 0, b > 0$)

$$au_t - bu_x = 0\ ,\ (x,t) \in D \qquad (2.1.24)$$

tenglama uchun (1.20)-(1.21) o'ng chegaraviy shartli aralash masalaning yechimi topilsin.

Masalani oldingi masalaga anologik ravishda yechib, yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi\left(x + \frac{b}{a}t\right),\ (x,t) \in D_1 \\ \psi\left(t + \frac{a}{b}(x-l)\right),\ (x,t) \in D_2 \end{cases} \qquad (2.1.25)$$

Bu yerda $D_1 = \{(x,t):\ \xi(x,t) \le l\}$, $D_2 = \{(x,t):\ \xi(x,t) > l\}$.

8.3. Quyidagi chap chegaraviy shartli aralash masalani yeching.($D \in R^2,\ a > 0$, $b > 0$)

$$au_t + bu_x + cu = f \qquad (2.1.26)$$

D sohada (2.1.26) tenglamani hamda

$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ \ t = 0,\ x \ge l \qquad (2.1.27)$$

boshlang'ich va

$$u(l,t) = \psi(t)\ ,\ x = l\ ,\ t \ge 0 \qquad (1.4.28)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi chap chegaraviy shartli aralash masalaning yechimi topilsin.

Yechish: $D_1 = \{(x,t):\ \xi(x,t) \le l\}$ sohada (2.1.26)-(2.1.27) boshlang'ich shartli masalaning yechimini (2.1.11) formuladan hamda $D_2 = \{(x,t):\ \xi(x,t) > l\}$ sohada esa (2.1.26)-(2.1.28) chegaraviy shartli masalaning yechimini (2.1.18) formuladan foydalanib topiladi. Demak topilganlarni umumlashtirsak, butun D sohada chap chegaraviy shartli masala yechimiga ega bo'lamiz va u quyidagi formula orqali topiladi:

$$u(x,t)=\begin{cases}\varphi\left(x-\frac{a}{b}t\right)e^{-\frac{c}{a}t}+\frac{1}{a}\int_o^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)}f(x-\frac{a}{b}(t-s),s)\,ds\\ \psi\left(t-\frac{a}{b}(x-l)\right)e^{-\frac{c}{b}(x-l)}+\frac{1}{a}\int_{t-\frac{a}{b}(x-l)}^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)}f(x-\frac{a}{b}(t-s),s)\,ds\end{cases} \tag{2.1.29}$$

8.4. D sohada

$$au_t-bu_x+cu=f \tag{2.1.30}$$

tenglamani hamda

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ \ t=0,\ x\le l \tag{2.1.31}$$

boshlang'ich va

$$u(l,t)=\psi(t)\,,\ x=l\,,\ t\ge 0 \tag{2.1.32}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi o'ng chegaraviy shartli aralash masalaning yechimi topilsin.

Yechish: (2.1.30)-(2.1.32) masala yechimi oldingi masalaga o'xshash yechiladi, tekshirishlarga ko'ra yechim quyidagi formula orqali hisoblanadi

$$u(x,t)=\begin{cases}\varphi\left(x+\frac{a}{b}t\right)e^{\frac{c}{a}t}+\frac{1}{a}\int_o^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)}f(x+\frac{a}{b}(t-s),s)\,ds\\ \psi\left(t+\frac{a}{b}(x-l)\right)e^{\frac{c}{b}(x-l)}+\frac{1}{a}\int_{t+\frac{a}{b}(x-l)}^t e^{-\frac{c}{a}(t-s)}f(x+\frac{a}{b}(t-s),s)\,ds\end{cases} \tag{2.1.33}$$

2.2-§. Tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.

Tenglamalar sistemasi, uning xarakteristikasi.

Biz quyidagi ko'rinishda berilgan x,y erkli o'zgaruvchilarga bog'liq $u(x,y)=\begin{pmatrix}u_1(x,y)\\u_2(x,y)\end{pmatrix}$ - 2 o'lchamli vektor funksiya va uning erkli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan xususiy hosilalari qatnashgan sistemani qaraylik

$$A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=f \tag{2.2.1}$$

bu yerda f - x, y erkli o'zgaruvchilarning 2 o'lchamli vektor funksiya, A va B lar 2×2 tartibli matritsalar [4,6,9,11].

(2.2.1) sistemaga sistemaga *ikkita o'zgaruvchili birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(2.2.1) tenglamalar sistemasi fizik masalalardan kelib chiqan bo'lib (masalan, gaz dinamikasi), bunda bitta erkli o'zgaruvchi sifati vaqt qaraladi, demak, (2.2.1) sistemani quyidagicha ifodalash o'rinli

$$A(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f \qquad (2.2.2)$$

(2.2.1) sistema tarkibidagi tenglamalar *kvazi chiziqli* tenglamalar bo'lib, sistema $u(x, y)$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalariga nisbatan chiziqli deyiladi.

Amaliyotda tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}u_{1t} + a_{12}u_{2t} + b_{11}u_{1x} + b_{12}u_{2x} = f_1 \\ a_{21}u_{1t} + a_{22}u_{2t} + b_{21}u_{1x} + b_{22}u_{2x} = f_2 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

shaklda beriladi, bu yerda $u_i = u_i(x, t)$ izlanayotgan no'malum hamda a_{ij} , b_{ij}, f_i — berilgan va bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $C^1_{x,t}$ sinfga tegishli funksiyalardir, $(i, j = 1,2)$. Differensiallash qoidasiga ko'ra $u_{it} = \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}, u_{ix} = \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x}$.

(2.2.3) sistemadan quyidagicha

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_1 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.4)$$

belgilashlarni kiritsak, u holda (2.2.3) sistemaning (2.2.2) vektor ko'rishiga ega bo'lamiz.

Bizga (2.2.2) sistema berilgan bo'lsin.

<u>1-Tarif</u>: Agar shunday $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ funksiya topilib, funksiya va xususiy hosilalari (2.2.2) tenglikni ayniyatga aylantirsa, u holda $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ funksiyaga (2.2.2) ***sistemaning yechimi*** deyiladi.

Aytaylik (2.2.3) sistema biror D bog'lamli sohada yechimga ega bo'lsin. Ushbu D sohada (x_1, t_1) nuqta va bu nuqtadan o'tuvchi γ chiziq olamiz. $u_1, u_2 \in C^1(D)$ ekanligidan bu nuqtada quyidagi to'la differensiallarni hisoblay olamiz

$$u_{1t}dt + u_{1x}dx = du_1$$

$$u_{2t}dt + u_{2x}dx = du_2.$$

Oxirgi ikkita tenglik va (2.2.3) sistemani birgalikda olib u_{1t}, u_{2t}, u_{1x}, u_{2x} xususiy hosilalarga nisbatan to'rtta noma'lumli to'rtta tenglamadan iborat yangi

$$\begin{cases} a_{11}u_{1t} + a_{12}u_{2t} + b_{11}u_{1x} + b_{12}u_{2x} = f_1 \\ a_{21}u_{1t} + a_{22}u_{2t} + b_{21}u_{1x} + b_{22}u_{2x} = f_2 \\ u_{1t}dt + u_{1x}dx = du_1 \\ u_{2t}dt + u_{2x}dx = du_2 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Uni vektor ko'rinishda ifodalaymiz

$$\begin{cases} Au_t + Bu_x = f \\ dtEu_t + dxEu_x = du \end{cases}. \tag{2.2.6}$$

Bu yerda E 2x2 tartibli birlik matritsa bo'lib, (2.2.6) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun asosiy matritsasining determenanti nolga teng bo'lishi lozim, ya'ni

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{Edt} & \mathrm{Edx} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ \mathrm{dtE} & dxE \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.2.7}$$

<u>2-Tarif</u>: (1) *sistemaning xarakteristik chiziqlari* (yoki *xarakteristikasi*) deb

$$|AdxE - BdtE| = 0 \tag{2.2.8}$$

shartni qanoatlantiruvchi chiziqlarga aytiladi (*tox* koordinatalar sistemasida).

(2.2.8) determenantga (2.2.3) *sistemaning xarakteristik tenglamasi* deyiladi [5].

(2.2.8) sistemaning $\frac{dx}{dt} = \lambda_{1,2}$ ko'rinishdagi yechimlariga (2.2.3) sistemaning *xarakteristik soni* yoki *xarakteristik tezligi* deyiladi. Bunda uchta hol kuzatilishi mumkin.

(a) (2.2.8) sistema ikkita $\lambda_{1,2}$ haqiqiy yechimlariga ega bo'lsa, u holda (2.2.3) sistemaning ikkita xarakteristikasi mavjud bo'lib, (2.2.3) sistemaga *giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(b) Agar (2.2.8) sistema $\lambda_1 = \lambda_2$ ustma-ust tishuvchi haqiqiy yechimlariga ega bo'lsa, u holda (2.2.3) sistemaga *parabolik tipdagi tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(c) (2.2.8) sistema $\lambda_{1,2}$ qo'shma kompleks yechimlariga ega bo'lsa, u holda (2.2.3) sistemaning ikkita mavhum xarakteristikasi mavjud bo'lib, (2.2.3) sistemaga *elliptik tipdagi tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(2.2.5) sistema yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranggi teng bo'lishi, ya'ni $du = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}$ vektor quyidagi shartni qanoatlantirishi lozim

$$rang\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A & B & df \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix}. \qquad (2.2.9)$$

1-Misol. 2.1.Quyidagi sistemaning xarakteristik chiziqlari topilsin [8].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Yechish: (2.7) sistemaning xarakteritikasini (2.5) determinant orqali topamiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = 0.$$

Determenantni hisoblasak

$$(dx - c_0 dt)(dx + c_0 dt) = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz, u holda

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0$$

tenglamaning integral chiziqlari xarakteristik chiziqlardan iborat bo'ladi, ya'ni

$$C_\xi : \begin{cases} \xi_1(x,t) = x - c_0 t = const \\ \xi_2(x,t) = x + c_0 t = const \end{cases}.$$

2.3.§ Tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.

Bizga quyidagi eng sodda noma'lum funksiyalari ajralgan tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} au_{1t} + bu_{1x} = 0 \\ cu_{2t} - du_{2x} = 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

$a, b, c, d \in R$ musbat o'zgarmas haqiqiy sonlar bo'lsin.

(2.3.1) sistemani vektor ko'rinishi

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kabi bo'ladi. Demak, (2.2.1) giperbolik sistema va

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

matritsalar diagonal matritsalardan iborat ekan.

Bizdan (2.3.1) sistemaning umumiy yechimini topish talab qilinsin. U holda I bob 3§ dan ma'lumki, (2.3.1) sistemadagi ajralgan tenglamalarning xarakteristikalari

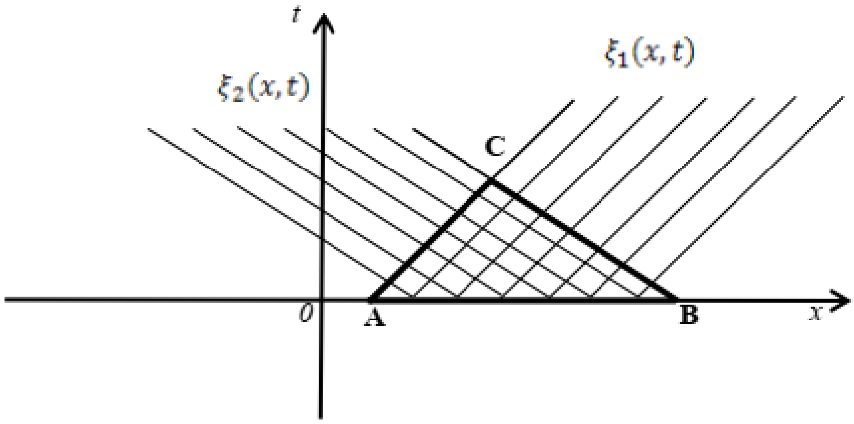
$$\xi_1(x,t) = x - \frac{b}{a}t,\ \xi_2(x,t) = x + \frac{d}{c}t \qquad (2.3.2)$$

chiziqlar bo'lib, umumiy yechimlari

$$u_1(x,t) = f\left(x - \frac{b}{a}t\right),\ u_2(x,t) = g\left(x + \frac{d}{c}t\right) \qquad (2.3.3)$$

lardan iborat. Bu (2.3.1) giperbolik sistemaning (2.3.3) yechimlari xarakteristikalarning kesishishidan tor hosil qilgan ΔABC uchburchakda topiladi. Bu uchburchakka giperbolik sistemaning *xarakteristik uchburchagi* deyiladi (15-chizma).

Tahlillarni umumlashtiradigan bo'lsak, agar bizdan (2.3.3) sitemaning umumiy yechimini topish talab qilinsa, u holda sistemani ikkita ajralgan birinchi tartibli differensial tenglamaga keltirishimiz va undan keyingina xarakteristikalar metodi yordamida sistemaning umumiy yechimlarni topishimiz mumkin ekan. Buning uchun (2.3.2) sistemadagi barcha matritsalarni diagonal matritsalar shaklida ifodalashimiz zarur bo'ladi [6,8,9].



15-chizma. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ holatda.

Bizga umumiy holda quyidagi giperbolik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$Au_t + Bu_x + Cu = f.$$

Bu yerda A va C matritsalar teng bo'lib, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ shartlar bajarilsin

$$Au_t + Bu_x + Au = f. \qquad (2.3.4)$$

U holda A matritsaga shunday A^{-1} teskari matritsa topilib,

$$A \cdot A^{-1} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B \cdot A^{-1} = D\,,\ f \cdot A^{-1} = \tilde{f} \tag{2.3.5}$$

belgilashlardan keyin, (2.3.4) sistemaning ko'rinishi

$$u_t + Du_x + u = \tilde{f} \tag{2.3.6}$$

ga keladi [6,8,9,12]. Demak, (2.3.6) sistemada faqatgina D diagonal bo'lmagan matritsa bo'lib, agar uni ham diagonal ko'rinishga olib kelsak, u holda berilgan (2.3.4) sistema ikkita ajralgan tenglamalardan iborat sistemaga keladi. Agar D normal matritsa bo'lsa, ya'ni

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},\ |D| \neq 0,\ DD^{-1} = D^{-1}D \tag{2.3.7}$$

shartlar bajarilsa, u holda D matritsa diagonal ko'rinishga keladi. D matritsani diagonallash uchun quyidagi amallar ketma-ketligining bajarilishi talab etiladi. D matritsaning

$$|B - \lambda E| = 0 \tag{2.3.8}$$

xarakteristik tenglamasidan $\lambda_{1,2}$ xos sonlarni topamiz. λ_i $(i = 1,2)$ xos songa mos kelgan xos vektorni $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{pmatrix}$ ustun ko'rinishida izlaymiz, ya'ni

$$(B - \lambda_i E)\vec{e}_i = 0 \tag{2.3.9}$$

Tenglamadan foydalanib, D matritsaning xos vektorlarini topamiz. Bu $\vec{e}_i$ ustunli xos vektorlar P matritsaning ustun vektorlaridan iborat bo'ladi, ya'ni

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.3.10}$$

P^{-1} matritsa P matritsaga teskari bo'lgan matritsadan iborat bo'lib, uni P matritsaning algebraik to'ldiruvchilari va determenanti yordamida topiladi. Yuqoridagi amallardan keyin D matritsaning o'ng ustunli xos vektorlaridan tuzilgan

P hamda chap satrli xos vektorlaridan tuzilgan P^{-1} matritsalar uchun quyidagi tenglik o'rinli ekanligi bizga algebra kursidan ma'lum, ya'ni D matritsa

$$P^{-1}DP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (2.3.11)$$

kabi Λ diagonal matritsa ko'rinishiga keladi [12] bu yerda $\lambda_{1,2}$ sonlar sistemaning xarakteristik son (tezlik) laridan iborat.

(2.3.6) sistemadan quyidagicha

$$u = Pw \qquad (2.3.12)$$

belgilash orqali yangi tenglamalar sistemasga ega bo'lamiz.

$$Pw_t + DPw_x + PW = P\tilde{f} \qquad (2.3.13)$$

$$P^{-1}Pw_t + P^{-1}DPw_x + P^{-1}PW = P^{-1}P\tilde{f} \qquad (2.3.14)$$

Bu yangi sistema esa

$$w_t + \Lambda w_x + W = \tilde{f} \qquad (2.3.15)$$

sistema bilan ekvivalentdir.

Demak, (2.3.1) sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w_x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{f} \qquad (2.3.16)$$

ko'rinishi ifoda etiladi, ya'ni

$$\begin{cases} w_{1t} + \lambda_1 w_{1x} + w_1 = \tilde{f_1} \\ w_{2t} + \lambda_2 w_{2x} + w_2 = \tilde{f_2} \end{cases} \qquad (2.3.17)$$

ikkita ajralgan tenglamadan tashkil topgan yangi sistema hosil bo'ladi. (2.3.17) tenglamalari ajralagan sistemaning yechimlarini topib, (2.3.12) dan foydalangan holda talab qilinga (2.3.4) giperbolik sistemaning yechimlariga ega bo'lamiz.

Bu (2.3.17) tenglamalari ajralgan sistema ikkita alohida tenglamalardan iborat bo'lib, bu tenglamalar haqidagi barcha tushunchalar bilan I bobda tanishib chiqqan edik, demak, (2.3.17) sistemani $w = \begin{pmatrix} w_1(x,t) \\ w_2(x,t) \end{pmatrix}$ vektor funksiyaga nisbatan yechib, (2.3.12) almashtirish orqali talab qilinga (2.3.4) giperbolik sistemaning yechimlari bo'lgan noma'lum $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ funksiyalar topiladi [6].

Ba'zi ilmiy adabiyotlarda (2.3.17) sistemaga (2.3.4) *berilgan sistemaning kanonik ko'rinishi* deb tarif beriladi. Biz keyingi hollarda (2.3.17) ni tenglamalari ajralgan sistema deb ataymiz. I bobdan ma'lumki, (2.3.17) sistemadagi har bir tenglamaning umumiy yechimlarni xarakteristikalar metodidan foydalanib topiladi.

2-Misol: 2.3. Quyidagi sistemaning umumiy yechimini toping.

$$\begin{cases} u_{1x} + u_{2x} + u_{1t} - 3u_{2t} = 0 \\ u_{1x} + u_{2x} - 3u_{1t} + u_{2t} = 0 \end{cases}$$

Yechish: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning satrlari chiziqli bog'liq, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lgani uchun

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_x + B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t = 0$$

sistemani chapdan $B^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga ko'paytirib

$$E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t + C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_x = 0, \qquad C = B^{-1}A = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemaning xarakteristik tenglamasidan

$$\begin{vmatrix} E & C \\ dxE & dtE \end{vmatrix} = 0$$

$\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dx}{dt} = -1$ xarakteristik sonlarga va bu oddiy differensial tenglamalarni yechib $x = c_1$, $x + t = c_2$ sistema xarakteristikalariga ega bo'lamiz. C matritsa normal matritsa ekanligidan (4.14) dan uni diagonallashimiz mumkin va C matritsa uchun $C \to P^{-1}CP$ amalni bajarib hamda

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritib berilgan sistemani ikkita ajralgan tenglamalardan iborat yangi sistema bilan almashtiramiz

$$\begin{cases} w_{1t} = 0 \\ w_{2t} - w_{2x} = 0 \end{cases}.$$

Bu sistemaning umumiy yechimi esa $w_1 = f(x), w_2 = g(x+t)$ bo'lib, yuqoridagi belgilashdan berilgan sistemaning umumiy yechimini topamiz

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x) + g(x+t)\big),$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\big(f(x) - g(x+t)\big).$$

2.2. $\begin{cases} u_{1t} + u_{2t} + 2u_{1x} + 2u_{2x} = 0 \\ -u_{1t} + u_{2t} + 4u_{1x} + 2u_{2x} = 0 \end{cases}$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Berilgan sistemani vektor ko'rinishda qaytadan yozib olamiz, ya'ni

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} u_x = 0.$$

Bu yerda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ekan, ya'ni

$$Au_t + Bu_x = 0$$

$|A| = 2 \neq 0$ ekanligida, shunday A ga teskari A^{-1} maritsa mavjud, u

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dan iborat bo'lib, $A^{-1}A = E$, $A^{-1}B = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ o'rinli. U holda sistemaning ko'rinishi

$$u_t + Du_x = 0$$

ga keladi, bu yerda $|D| = -2 \neq 0$ ekanligidan D matritsa diagonallanuvchidir. U holda D matritsaning $\lambda_{1,2}$ xos sonlarini va o'ng ustunli xos vektorlaridan tuzilgan P hamda chap satrli xos vektorlaridan tuzilgan P^{-1} matritsalarni topsak,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

larga ega bo'lamiz. Bulardan foydalanib hamda

$$u = Pw$$

yangi w funksiya kiritib, quyidagi amallarni bajaramiz

$$u_t + Du_x = 0,$$

$$Pw_t + DPw_x = 0,$$

$$P^{-1}Pw_t + \ P^{-1}DPw_x = 0,$$

$$w_t + \Lambda w_x = 0,$$

Demak, yangi sistemaning ko'rinishi

$$w_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} w_x = 0,$$

bo'lib, u tenglamalari ajralgan sistemaga keldi, ya'ni

$$\begin{cases} w_{1t} - w_{1x} = 0 \\ w_{2t} + 2w_{2x} = 0 \end{cases}.$$

I bobdan bizga ma'lumki, bu sistemaning yechimi

$$w = \begin{pmatrix} w_1(x,t) \\ w_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) \\ g(x-2t) \end{pmatrix},$$

vektor funksiyadan iborat, u holda berilgan sistemaning yechimini

$$u = Pw$$

munosabatdan fodalanib topsak,

$$u = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) \\ -f(x+t) + g(x-2t) \end{pmatrix}$$

ga ega bo’lamiz.

II bob bo’yicha xulosa

Fizika,matematika,mexanika, biologiya, ekologfiya va boshqa ko’plab sohalarning juda ko’pgina masalalarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalar uchun turli ko’rinishdagi masalalarni o’rganishga keltiriladi. Ishlab chiqarishning va fanning rivoji bugungi kunga kelib, nafaqat klassik masalarni o’rganishni balki, noklasssik masalalarni ham o’rganishni talab qilmoqda. Noklassik masalalar jumlasiga nolokal masalalar (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati emas, balki sohaning u yoki bu qismi orasidagi bog’lanishlar beriladi) kiradi.

Tabiatdagi ko’pgina jarayonlarning matematik modeli differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Jumladan, issiqlik tarqalishi, diffuziya hodisalari va boshqa ko’plab fizikaviy jarayonlarni o’rganishda jarayonning matematik modeli parabolik tipdagi tenglamalarning eng soda vakili bo’lgan issiqlik tarqalish tenglamasi va unga qo’yiladigan boshlang’ich va boshlang’ich-chegaraviy shartli klassik masalalar bilan ifodalanadi.

Xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun klassik chiziqli masalalar juda ko’plab avtorlar tomonidan o’rganilgan.

Chiziqli tenglamalar uchun turli ko’rinishdagi boshlang’ich va boshlang’ich-chegaraviy masalalar juda ko’pgina olimlar tomonidan rivojlantirildi va juda kata yuruqlarga erishildi.

Hozirgi kunga kelib differensial tenglamalarning turli ko’rinishlari uchun turli xil nolokal shartli matematik modellar tuzilgan va ularni yechish usullari chiqarilgan. Shuningdek,xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy shartli masalalar, balki chiziqsiz xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun ham turli ko’rinishdagi masalalar o’rganilgan va yanada rivojlantirilib borilmoqda.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasining 2-bobida gazodinamika jarayonlari uchun giperbolik tenglamalar va tenglamalar sistemasi qaraldi. Har bir masala yechimi uchun aproir baholar olindi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi o’rganildi.

III BOB. GAZODINAMIKA JARAYONLARINING MATEMATIK MODELI

3.1-§.Tenglamalar sistemasi uchun koshi masalasi

Bizga $G \in R^2$ sohada (2.2.6) sistemaga o’xshash vektor ko’rinishidagi quyidagi sistema berilgan bo’lsin

$$u_t + Au_x + u = f. \qquad (3.1.1)$$

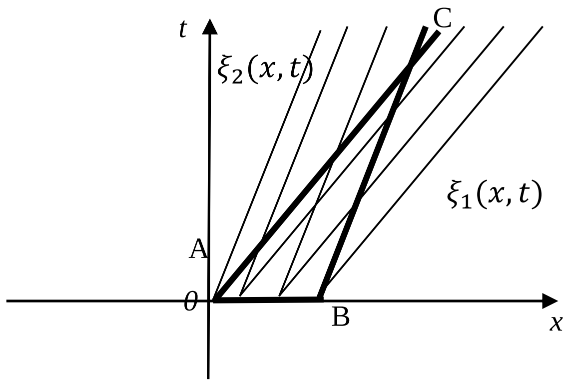
(3.1.1) sistemaning quyidagi

$$u(x,o)=\begin{pmatrix}u_1(x,0)\\u_2(x,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\\varphi_2(x)\end{pmatrix} \qquad (3.1.2)$$

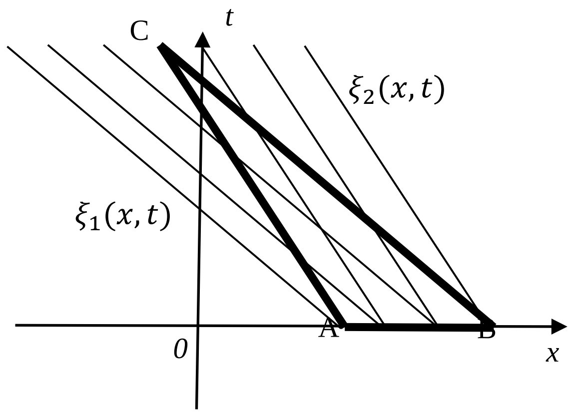
(3.1.1)-(3.1.2) boshlang'ich masalaning yechimini xarakteristikalar metodi yordamida topamiz. Agar A matritsa (2.2.7) shartni qanoatlantirsa, u holda (2.3.1) sistema (2.2.17) ko'rinishdagi tenglamalari ajralgan yangi sistema bilan teng kuchli almashtiriladi. So'ngra (2.2.6)-(2.2.17) munosabatlardan hamda

$$w(x,0)=P^{-1}u(x,0) \qquad (3.1.3)$$

boshlang'ich shartdan foydalanib, w vektor funksiyaga nisbatan yangi sistema uchun Koshi masalasining yechimlarini topib (2.2.12) alamashtirish orqali talab qilingan (3.1)-(3.2) masala yechimiga ega bo'lamiz.



16-chizma. $\lambda_2>\lambda_1>0$



17-chizma. $\lambda_1<\lambda_2<0$

(3.1.1)-(3.1.2) Koshi masalasining yechimi ΔABC xarakteristik uchburchakda bir qiymatli topiladi (15-,16-,17-chizmalar) [5,6,9].

3-Misol. Quyidagi

$$u_t-\begin{pmatrix}1&0\\5&3\end{pmatrix}u_x=0,$$

sistema uchun

$$u(x,0)=\begin{pmatrix}u_1(x,0)\\u_2(x,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{iax}\\0\end{pmatrix}, a\in R$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasining yechimini toping.

Yechish: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3$ larga teng bo'lib, ularga mos kelgan xos vektorlar $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ lardan iborat. U holda

$$P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{5}{2} & 1\end{pmatrix},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

topiladi. (1.20) dan $u=Pw$ belgilashni kiritib, quyidagicha ketma-ketlikdagi amallar yordamida yangi giperbolik sistemaga ega bo'lamiz, ya'ni

$$u_t+Au_x=0,$$

$$Pw_t+APw_x=0,$$

$$w_t+P^{-1}APw_x=0,$$

$$w_t+\Lambda w_x=0.$$

Demak, yangi

$$w_t+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}w_x=0,$$

sistemani boshlang'ich shart bilan birgalikda olib

$$w(x,0)=P^{-1}u(x,0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{5}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{iax}\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}e^{iax}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$$

quyidagicha ikkita alohida masalaga kelamiz

$$\begin{cases}w_{1t}-w_{1x}=0\\ w_1(x,0)=\frac{1}{2}e^{iax}\end{cases}\ \text{va}\ \begin{cases}w_{2t}-3w_{2x}=0\\ w_1(x,0)=\frac{5}{2}e^{iax}\end{cases}.$$

Yuqoridagi ikkita Koshi masalasini xarakteristikalar usulida yechib

$w_1(x,t)=\frac{1}{2}e^{ia(x+t)}$ va $w_2(x,t)=\frac{5}{2}e^{ia(x+3t)}$

larga ega bo'lamiz. U holda (1.19) formula orqali

$$u = Pw = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{ia(x+t)} \\ \frac{5}{2} e^{ia(x+3t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{ia(x+t)} \\ -\frac{5}{2} e^{ia(x+t)} + \frac{5}{2} e^{ia(x+3t)} \end{pmatrix}$$

talab qilingan masala yechimi topiladi, demak Koshi masalasining yechimi

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{ia(x+t)} \\ -\frac{5}{2} e^{ia(x+t)} + \frac{5}{2} e^{ia(x+3t)} \end{pmatrix}$$

dan iborat ekan.

3.2.§. Tenglamalar sistemasi uchun chegaraviy masalalar.

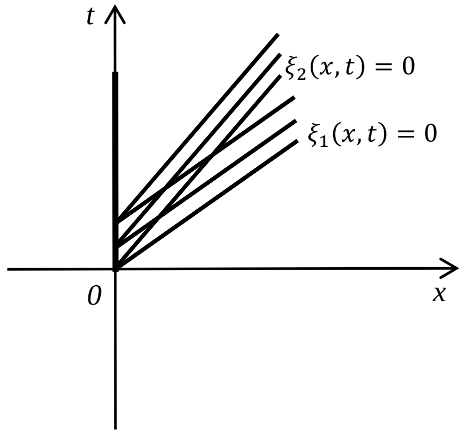
Bizga $D = \{(x,t): 0 \le x, t < +\infty\}$ sohada

$$u_t + Au_x + u = f \qquad (3.2.1)$$

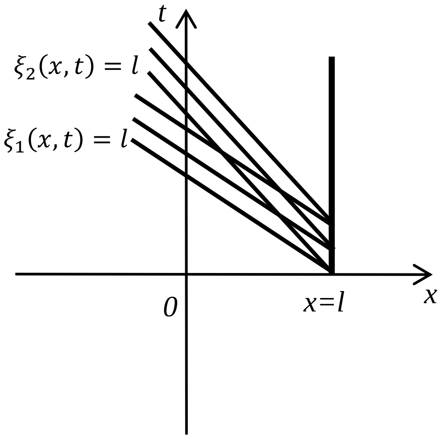
(3.1) sistemaning quyidagi

$$u_1(0,t) = \psi_1(t),\ u_2(l,t) = \psi_2(t) \qquad (3.2.2)$$

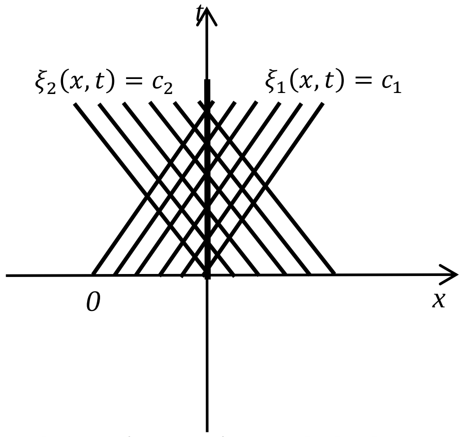
chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. U holda bu masalasiga (3.2.1) *sistema uchun chegaraviy masala* deyiladi.



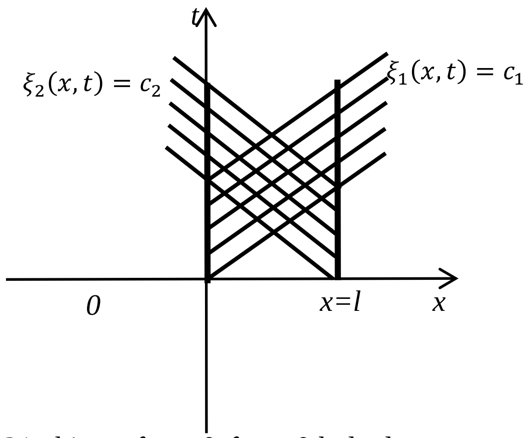
18-chizma. $\lambda > 0$ holatda



19-chizma. $\lambda < 0$ holatda



20-chizma.$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ holatda



21-chizma.$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ holatda

Chegaraviy masalalar qo'yilishida $\lambda_{1,2}$ xarakteristik sonlarning ishorasi muhim rol o'ynaydi, I bob, 1.4.3. mavzudagi (a) va (b) mulohazalar o'rinli bo'ladi.

- Agar $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ bo'lsa, u holda (3.2.3) shart chap chegarada beriladi hamda chap chegaraviy shartli masalaning yechimi D sohaning $\xi_1(x,t)$ xarakteristikaning yuqori qismida bir qiymatli topiladi (18-chizma);
- Agar $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ bo'lsa, u holda (3.2.3) shart o'ng chegarada beriladi hamda o'ng chegaraviy shartli masalaning yechimi D sohaning $\xi_2(x,t)$ xarakteristikaning yuqori qismida bir qiymatli topiladi (19-chizma);
- Agar $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$) bo'lsa, u holda (3.2.3) shart
  a) x bo'yicha bitta chegarada berilgan holda masala butun D sohada bir qiymatli yechiladi (20-chizma)
  b) o'ng ham chap chegaralarda beriladi, bunda masalaning yechimi $\xi_1(x,t), \xi_2(x,t)$ sistema xarakteristikalarining yuqori qismida bir qiymatli topiladi (21-chizma).

Agar A normal matritsa bo'lsa, ya'ni (3.1.7) shartlarni qanoatlantirsa u holda (3.1.6)-(3.1.17) formulalar yordamida, (3.1.1) sistemani tenglamalari ajralgan

$$\begin{cases} w_{1t} + \lambda_1 w_{1x} + w_1 = \widetilde{f_1} \\ w_{2t} + \lambda_2 w_{2x} + w_2 = \widetilde{f_2} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

ko'rinishidagi w vektor funksiyaga nisbatan yangi sistemaga almashtirish mumkin bo'ladi. (3.1.6)-(3.1.17) formulalardan foydalanib w vektor funksiyaning umumiy yechimini topib

$$\begin{pmatrix} w_1(x=0,t) \\ w_2(x=l,t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

shart bilan birgalikda chegaraviy masalaning yechimi (4.15') formuladan topiladi hamda 1.4§ ,1.4.2 dagi (1.4.18) formuladan $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ larga nisbatan (3.2.1)-(3.2.2) masala yechimiga ega bo'lamiz.

Endi quyidagicha masalani qaraylik. $D = \{(x,t): 0 \leq x, t < +\infty\}$ sohada

$$u_t + Au_x + u = f. \tag{3.2.1}$$

tenglamani $t = 0$ boshlang'ich momentda

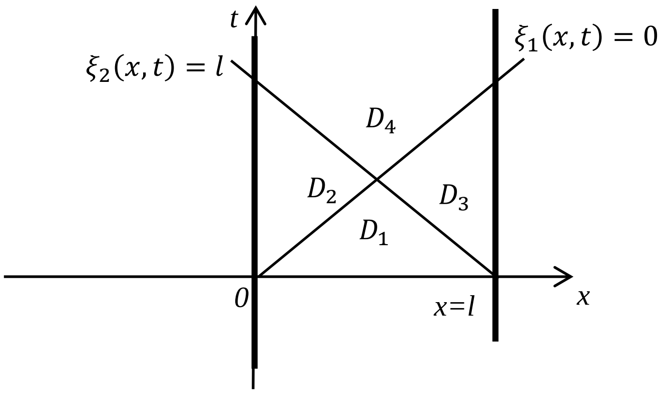
$$u_1(x,0) = \varphi_1(x),\ u_2(x,0) = \varphi_2(x) \tag{3.2.5}$$

boshlang'ich shartlarni hamda $x = 0$, $x = l$ chegaralarda

$$u_1(0,t) = \psi_1(t),\ u_2(l,t) = \psi_2(t) \tag{3.2.6}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi masala yechimi topilsin. Bu masalaga *boshlang'ich va chegaraviy shartli (*yoki *aralash) masala* deyiladi.

Masalani yechish uchun (3.2.1) sistemani kanonik ko'rinishga keltirib, *D* sohani sistema xarakteritikalari yordamida qismlarga ajratamiz (22-rasm).



22-chizma. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

D_1 sohada (3.2.1)-(3.2.5) boshlang'ish shartli Koshi masalasining yechimi (1.4.11) formula yordamida, D_2, D_2 sohalarda (3.2.1)-(3.2.5)-(3.2.6) boshlang'ish va chegaraviy shartli masalaning yechimi (3.1.29) formula yordamida, D_3 sohada esa (3.2.1)-(3.2.6) chegaraviy shartli masalaning yechimi esa (1.4.18) formulada topiladi va shu yo'l bilan butun D sohada (1.4.1),(1.4.5)-(1.4.6) aralash masalaning yechimi topiladi [1,6].

Ma'lumki, saqlanish qonunlarining giperbolik sistemalarni yechish usullari gazadinamika masalalariga keng qo'llaniladi. Quyida gazning truba orqali harakatini modellashtiruvchi ikki fazali masala qaraymiz.

1-Masalaning qo'yilishi: $D_1 = \{(x,t): -\infty < x < 0 \,, t > 0\}$ va

$D_2 = \{(x,t): 0 < x < +\infty \,, t > 0\}$ sohalarda

$$\begin{cases} u_{1t}(x,t) + a_1 v_{1x}(x,t) + b_1 u_1(x,t) = f_1(x,t) \\ v_{1t}(x,t) + a_1 u_{1x}(x,t) + b_1 v_1(x,t) = g_1(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{2t}(x,t) + a_2 v_{2x}(x,t) + b_2 u_2(x,t) = f_2(x,t) \\ v_{2t}(x,t) + a_2 u_{2x}(x,t) + b_2 v_2(x,t) = g_2(x,t) \end{cases} \tag{2}$$

sistemalarni va

$$u_1(x,0) = \phi_1(x) \,, v_1(x,0) = \psi_1(x) \ \,, -\infty < x \le 0 \tag{3}$$

$$u_2(x,0) = \phi_2(x) \,, v_2(x,0) = \psi_2(x) \ \,, 0 < x \le +\infty \tag{4}$$

boshlang'ich hamda

$$u_1(0,t) - v_1(0,t) = \mu(t), \ t \ge 0 \tag{5}$$

$$u_2(0,t) + v_2(0,t) = \mu(t), \ t \ge 0 \tag{6}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u_i(x,t)$, $v_i(x,t)$ noma'lum funksiyalar topilsin, $i = 1,2$. Bu yerda $f_i(x,t), g_i(x,t), \phi_i(x), \psi_i(x), \mu(t)$ - berilgan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar, a_i, b_i o'zgarmas sonlar, $a_i > 0, b_i > 0$, $i = 1,2$.

Yechish: Masalani yechish uchun quyidagicha yangi funksiyalar kiritamiz $i = 1,2$

$$\begin{cases} U_i(x,t) = u_i(x,t) + v_i(x,t) \\ V_i(x,t) = u_i(x,t) - v_i(x,t) \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} F_i(x,t) = f_i(x,t) + g_i(x,t) \\ G_i(x,t) = f_i(x,t) - g_i(x,t). \end{cases} \tag{8}$$

$$\Phi_i(x) = \phi_i(x) + \psi_i(x), \Psi_i(x) = \phi_i(x) - \psi_i(x) \tag{9}$$

Natijada (7) ,(8) va (9) almashtishlardan keyin (1)-(6) masala quyidagicha ko'rinishga keladi

$$\begin{cases} U_{1t}(x,t) + a_1 U_{1x}(x,t) + U_1 u_1(x,t) = F_1(x,t) \\ V_{1t}(x,t) - a_1 V_{1x}(x,t) + b_1 V_1(x,t) = G(x,t) \end{cases} \tag{10}$$

$$U_1(x,0) = \Phi_1(x)\ , V_1(x,0) = \Psi_1(x)\ \ , 0 < x \le +\infty \tag{11}$$

$$V_1(0,t) = \mu(t), t \ge 0 \tag{12}$$

$$\begin{cases} U_{2t}(x,t) + a_2 U_{2x}(x,t) + b_2 U_2(x,t) = F_2(x,t) \\ V_{2t}(x,t) - a_2 V_{2x}(x,t) + b_2 V_2(x,t) = G_2(x,t) \end{cases} \tag{13}$$

$$U_2(x,0) = \Phi_2(x)\ , V_2(x,0) = \Psi_2(x)\ \ , 0 < x \le +\infty \tag{14}$$

$$V_1(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0. \tag{15}$$

Xarakteristikalar metididan foydalanib (10)-(15) masalayechimini qidiramiz [ ].

Bunda har bir tenglamani mos xarakteristik chizig'i ustida integrallab kerakli yechim topiladi. (10)-(15) sistema xarakteristikalari

$$\frac{dx}{dt} = \pm a_i$$

oddiy differensial tenglama orqali topiladi.

Xarakteristikalar metodidan foydalanib, (10)-(15) masala yechimini yozamiz

$$U_1(x,t) = \Phi_1(x - a_1 t)e^{-b_1 t} + \int_0^t e^{-b_1(t-\eta)} F_1(x - a_1(t-\eta), \eta)d\eta,\ \ -\infty < x \le 0, \tag{16}$$

$$V_1(x,t) = \Psi_1(x + a_1 t)e^{-b_1 t} + \int_0^t e^{-b_1(t-\eta)} G_1(x + a_1(t-\eta), \eta)d\eta,\ -\infty < x \le -a_1 t, \tag{17}$$

$$V_1(x,t) = \mu\left(t + \frac{x}{a_1}\right)e^{\frac{b_1}{a_1}x} + \int_{t+\frac{x}{a_1}}^t e^{-b_1(t-\eta)} G_1(x + a_1(t-\eta), \eta)d\eta,\ -a_1 t \le x \le 0, \tag{18}$$

$$U_2(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a_2}\right)e^{-\frac{b_2}{a_2}x} + \int_{t-\frac{x}{a_2}}^t e^{-b_2(t-\eta)} F_2(x - a_2(t-\eta), \eta)d\eta,\ \ 0 \le x \le a_2 t, \tag{19}$$

$$U_2(x,t) = \Phi_2(x - a_2 t)e^{-b_2 t} + \int_0^t e^{-b_2(t-\eta)} F_2(x - a_2(t-\eta),\eta)d\eta,, \quad a_2 t \le x \le \infty, \quad (20)$$

$$V_2(x,t) = \Psi_2(x + a_2 t)e^{-b_2 t} + \int_0^t e^{-b_2(t-\eta)} G_2(x + a_2(t-\eta),\eta)d\eta, \; 0 < x \le \infty. \quad (21)$$

Agar yechimni ikkita deb teskarisidan faraz qilsak, bu yechimlar ayirmasi masala chiziqli ekanligidan yana yechim bo'ladi hamda yechimning oshkor (aniq) ko'rinishidan bu ayirma nolga tengligi kelib chiqadi, farazimiz ziddiyatga olib keladi. Demak, (10)-(15) masala yechimi yagona ekanligi kelib chiqadi. (7),(8),(9), (16)-(21) munosabatlar orqali (1)-(6) masala yechimi topiladi.

III bob bo'yicha xulosa

Bugungi kunda zamonaviy ilm-fan sohasida nochiziqli muhitda yuz beradigan jarayonlarga qiziqish ortib bormoqda. Yangi muammolarni shakllantirish bilan bog'liq holda, chiziqli bo'lmagan muhitlarda jarayonlarning matematik modellari yordamida hal qilinadigan matematik fizikaning chiziqli bo'lmagan muammolarini o'rganishda yangi yondashuvlarni ishlab chiqish zarur bo'ladi. Shu bilan birga,xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun ushbu vazifalarning aksariyati noma'lum chegara bilan chegara vazifalariga olib keladi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, so'nggi yillarda noma'lum chegara bilan bog'liq vazifalar turli muammolarni o'rganishda keng qo'llanilmoqda. Masalan, ular onlayn tarmoq, biologik jarayonlar, ekologik jarayonlar, jarohatni davolashda tibbiy-biologik jarayonlar, ayrim diffuziya jarayonlarining matematik modellari.

Tabiatdagi juda ko'p tabbiiy jarayonlarni matematik moddalari differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Jumladan muzning erish masalasi, havoning ifloslanishi, turlarning tarqalishi, bakteriyalarning tarqalishi, diffuziya jarayonlari, filtratsiya jarayonlari, o'simliklarning o'sish jarayonlari, va inson organizmidagi hujayralarda kislorod va moddalar almashinuvi jarayonlarining matematik modellari xususiy xosilali differensial masalaga keltiriladi.

Ushbu dissertatsiyaning III bobida gazodinamik jarayonlarning matematik modellariga qaraldi. Har bir masala yechimi uchun aprior baholar olindi va noma'lum chegaraning harakteri o'rganildi.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi Giperbolik tenglamalar sistemasi uchun qo'yiladigan boshlang'ich va chegaraviy masalalar yechimi hamda gazodinamik jarayonlarning matematik modellarini yaratish haqida. Ishda xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy shartli masala va nolokal chegaraviy shartli masalalar, noma'lum chegarali chiziqsiz masalalar o'rganilgan. Chunki, fizika, mexanika, biologiya, ekologiya va boshqa ko'plab sohalarning juda ko'pgina masalalarining matematik modellari giperbolik tipdagi tenglamalar uchun turli ko'rinishdagi masalalarni o'rganishga keltiriladi. Ishlab chiqarishning va fanning rivoji bugungi kunga kelib, nafaqat klassik masalalarni o'rganishni balki, noklassik masalalarni ham o'rganishni talab qilmoqda. Noklassik masalalar jumlasiga nolokal masalalar (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati emas, balki sohaning u yoki bu qismi orasidagi bog'lanishlar beriladi) kiradi.

Tabiatdagi ko'pgina jarayonlarning matematik modeli differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Jumladan, issiqlik tarqalishi, diffuziya hodisalari va boshqa ko'plab fizikaviy jarayonlarni o'rganishda jarayonning matematik modeli giperbolik tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik tarqalish tenglamasi va unga qo'yiladigan boshlang'ich va boshlang'ich-chegaraviy shartli klassik masalalar bilan ifodalanadi.

Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun klassik chiziqli masalalar juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan.

Chiziqli tenglamalar uchun turli ko'rinishdagi boshlang'ich va boshlang'ich-chegaraviy masalalar juda ko'pgina olimlar tomonidan rivojlantirildi va juda katta yutuqlarga erishildi.

Hozirgi kunga kelib giperbolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun turli xil nolokal shartli matematik modellar tuzilgan va ularni yechish usullari ishlab chiqarilgan. Shuningdek, nafaqat giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal chegaraviy shartli masalalar, balki chiziqsiz giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ham turli ko'rinishdagi nolokal masalalar o'rganilgan va yanada rivojlantirilib borilmoqda.

Ishning birinchi bobi birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar, ularning xarakteristkalari,umumiy yechish usullari giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalalar va ularni yechishga bag'ishlandi. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipi va undan kelib chiqadigan natijalar ko'rsatib o'tilgan. Shu bilan birgalikda ishda issiqlik potensiallari ya'ni, oddiy va ikkilangan qatlam potensiallari va uning xossalari qaraldi.

Ishning ikkinchi bobida gazodinamik jarayonlar uchun giperbolik tenglamalar va tenglamalar sistemasi o'rganilgan. Bobda giperbolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki nolokal chegaraviy shartli masala va nolokal chegaraviy shartli masalalar qaraladi. Har bir masala yechimi uchun aproir baholar olindi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi o'rganildi.

Ushbu ishning uchinchi bobida gazodinamik jarayonlarning matematik modellari o'rganilgan. Bu bobdan tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi,tenglamalar sistemasi uchun chegaraviy masalalargaxam etibor berib o'tilgan. Har bir masala uchun aprior baho olingan va noma'lum chegara harakteri o'rganilgan.

Mazkur Magistrlik dissertatsiya ishi gazadinamika, gidrodinamika, aerodinamikaning masalalarini hal qilishda asos bo'lib hizmat qiluvchi birinchi tartibli xususiy hosilali giperbolik sistemalarga bag'ishlangan bo'lib, unda asosan [1,3,5,6,8,9,13,14] adabiyotlardagi ma'lum mavzular yuzasidan bilim va ko'nikmalar shakllantirildi hamda shulardan foydalangan holda yangi (1)-(6) boshlang'ich va chegaraviy shartli masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Ko’plab ilmiy adabiyotlarda (2.1.2) ko’rinishidagi giperbolik sistemalar o’rganilgan bo’lib, ushbu Magistrlik dissertatsiya ishida (2.1.2) sistemaga nisbatan umumiyroq (2.2.4) yangi giperbolik sistema bilan bilan almashtirilgan holda sistemaning xarakteristikasini, umumiy yechimini topish, sistemaga qo’yiladigan asosiy boshlan’ich va chagaraviy shartli masalalarning qo’yilishi hamda masala yechimining mavjudligi ko’rsatilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining asosiy qismi ikkita bobdan iborat bo’lib, I bobda birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tengamalar haqida asosiy tushunchalar, tenglamaning xarakteritikasi, tenglamaning umumiy yechimini topish usullari, tenglamaga qo’yiladigan boshlang’ish hamda chegaraviy shartli masalalarning qo’yilishi keltirilgan.

Magistrlik dissertatsiya ishining II bobida esa I bobdagi bilimlarga asoslangan holda birinchi tartibli giperbolik sistemalar xarakteristikasi, umumiy yechimini topish, sistema uchun qo’yiladigan boshlang’ish shartli Koshi masalasi va boshlang’ish va chegaraviy shartli aralash masalalarning qo’yilishi, masala yechimining mavjudligi va yagonaligi o’rganilgan.

FOYDALANILGAN DABIYOTLAR

1. John C. Strikwerda. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition, 2004.
   www. ec-securehost.com/SIAM/ot88.html.
2. Peter J. Olver. “Introduction to Partial Differential Equations”, 2012, 544 p.
   www.math.umn.edu/~olver/pdn.html
3. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 416 с.
4. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилтнейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.:Наука, 1968, 592 с.
5. С. К. Годунов. Уравнения математической физики.
   –М.: Наука, 1979, 392 ст.
6. Yanovsky I. Partial differential equations: graduate level problems and solutions. 2005. 396 p.
   www.math.ucla.edu/~yanovsky/handbooks/PDEs.pdf
7. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., 1996 г., 260 с.
8. Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И., Подивилов Е. В., Черных А. И., Швниро Д. А., Шапиро Е. Г. Задачи по математическим методам физики. М: Эдиториал УРСС, 2000. - 288 с.
9. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
10. Donald w. Trim. Applied Partial Differential Equations. © 2013.
    home.cc.umanitoba.ca/~dtrim/Courses/Math1010/.../book.pdf
11. Shaidurov V. V. and Olivier Pironneau “An In-troduction to Finite Volumes Methods for gas dynamics” in Encyclopedia Of Life Support Sys-tems (EOLSS, Unesco), Mathematical Sciences, Computational Methods and Algorithms. volume 2, p. 36-105, 2009. Present edition 21 January 2011.

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/84/77/PDF/dubois-volfi2k.13janv2011.pdf

12. Прасолов в.в. Задачи и теоремы линейной алгебры. — 2-е изд. — м., 2008. 536 с.
ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/linalg/linalg2.pdf
13. www.math.iitb.ac.in/~siva/ma51510/pde2.pdf
14. http://www.asianscientist.com/books/wp-content/uploads/2013/05/5516_chap01.pdf
15. www.eqworld.ipmnet.ru

___16.Knapowski S. On Linnik's theorem concerning exceptional L- zeros. // Publ. Math. Debrecen 1962, № 9, p.168-178.

17.Привалов И.И.Введение в теорию функций комплексного переменного. – М. "Высшая школа", 1999,-432с.

18.Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета функция Римана.-М.: Физматлит. 1994. - 268с

19.Rosser J.B., Schoenfeld L. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. - 1962. -№6. - p.64-94.

20.Chen Jing ren and Pan Chendong. The exceptional set of Goldbach-number (I) // Sci. Sinica. – 1980. - № 4(23). – P. 416- 430.

21.Pintz J., Elementary methods in the of L-functions v. The theorems of Landau and Page, Acta Arith., 32 (2), 1977, 163-171.

22.Dickson L. E. modern Elementary Theory of Numbers Chicago, Ielinois,

U. S. A. 1960. 308p.

23.Miech R. J., A number-theoretic constant, Acta Arith, 15 (1968), 119-137.

24.Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. – 1975.- V.27. –P.353-370.

25.Vaughan R.C. On Goldbach's problem // Acta arithm. - 1972. -№1(22). - P.21-48.

26.Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. “Математика”. – Казань, 2000. - № 8(459). –С.3-15.

27.Vaughan R.C. The Hardi-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p. Русча нашри:Метод Харди-Литтлвуда. –М.: Мир, 1985.–184 с.

28.Исраилов М.И. О коэффициентах разложения Лорана дзета-функции Римана. Докл. АНРУз. 12 , 1979, с.9-10.

29.Аллаков И. Искючительное множество суммы двух простых чисел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ленинград. ЛГУ, 1983. 148с.

30.Аллаков И. Определение констант в модифицированном плотностном неравенстве Галлахера // Докл. АН РУз. -Ташкент, 1981. -№ 11. -С.3-5.

31.Аллаков И. А. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. - Т.: 1981, 76 с. - С решением редколлегии Узб. матем. журнала Деп. в ВИНИТИ 30.10.81. № 5166-81.

32. Allakov I. Otsenka trigonometricheskix summ i ix prilojeniya k resheniyu nekotorix additivnix zadach teorii chisel. Termez. “Surxan nashr” 2021. 160s.

33.Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. BuxDu. “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muamollari” xalqaro ilmiy-amaliy anjumani. Buxoro-2022. 83-84 betlar.

34. Allakov I.,Abduraimov Y. Dirixlening L-funksiyasining nollari mavjud bo’lmagan soha haqida. TerDu. “Algebra va analizning dolzarb masalalari” xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. Termiz-2023.11-12-betlar.

35.Allakov I. Sonlar nazariyasining ba’zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T , «Ta’lim» 2012, 200b.

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

Учредитель ООО «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». ИНН 4205325649. ОГРН 1164205058380. 650024, Кемеровская область, Город Кемерово, ул. Космическая, дом 7.

СПРАВКА
О ПРИНЯТИИ МАТЕРИАЛА К ПУБЛИКАЦИИ

Наименование материала: **YUKLATILGAN PARABOLIK TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA**

Авторы: **Eshnazarov Ulug'bek Ubaydillo òǧli**
Учебные заведения: **Terdu matematika 2-kurs magistranti**

Данный материал получил положительную экспертную оценку и принят к публикации в номер «28» 2022 года международного научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». ISSN: 2782-4365.
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Главный редактор, ответственный за выпуск — С.В. Пестерев

Общество с ограниченной ответственностью «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА» ИНН 4205325649 ОГРН 1164205058380 г. Кемерово

№ А3-20230531-6 от 31052023г

Является средством массовой информации. Свидетельство о регистрации СМИ №ЭЛ ФС 77-77927 от 19.02.2020 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

obrmpcareer@mail.ru

http://mpcareer.ru

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

СЕРТИФИКАТ

О ПУБЛИКАЦИИ

Настоящий сертификат подтверждает публикацию материала в международном научно-образовательном электронном журнале «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» (ISSN 2782-4365)

Eshnazarov Ulug'bek Ubaydillo òg'li

Terdu matematika 2-kurs magistranti

Наименование материала: **YUKLATILGAN PARABOLIK TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA**

Главный редактор,
ответственный за выпуск

С.В. Пестерев

№ А3-20230531-6 от 31052023г

Является средством массовой информации. Свидетельство о регистрации СМИ №ЭЛ ФС 77-77927 от 19.02.2020 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

«МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА»

БЛАГОДАРСТВЕННОЕ ПИСЬМО

Eshnazarov Ulug'bek Ubaydillo òg'li

Terdu matematika 2-kurs magistranti

ЗА ЛИЧНЫЙ ВКЛАД В ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ
СОВМЕСТНО С МЕЖДУНАРОДНЫМ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ
«МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА»

Председатель оргкомитета С.В. Пестерев

http://mpcareer.ru

№ А3-20230531-6 от 31052023г

Является средством массовой информации. Свидетельство о регистрации СМИ №ЭЛ ФС 77-77927 от 19.02.2020 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)