O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo‘lyozma huquqida

UDK:_____________

NORMURODOVA RO‘ZIXOL URALOVNA

TABIIY JARAYONLARNING MATEMATIK MODELI

70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi bo‘yicha Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar: **f.-m.f.n., dots. Qurbonov O.**

TERMIZ-2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2022-yil 2-apreldagi №20-T/M sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan. Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti “Algebra va geometriya” kafedrasida bajarilgan.Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilan Termiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (__ raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Barkamol avlod ko‘chasi 43-uy.)

Ilmiy rahbar:	___________	dots. O. Qurbonov
Kafedra mudiri:	___________	dots. S. Choriyeva
Magistratura bo‘limi boshlig‘i:	___________	PhD. A.B. Narbayev

70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi magistranti Normurodova Ro’zixol Uralovna **“Tabiiy jarayonlarning matematik modeli”** mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTATSIYA

Tayanch so‘zlar: Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamalari, boshlang’ich-chegaraviy masala, ekstremum prinsipi, yagonalik teoremasi, aralash masala, nolokal masala.

Tadqiqot obektlari: Issiqlik o’tkazuvchanlik jarayonlari, qattiq jismlar nazariyasi, nolokal, ichki nolokal masalalarni yechimini topishga qaratilgan.

Ishning maqsadi: Issiqlik o’tkazuvchanlik jarayonlarining noklassik modeli va boshqa sohalarda sodir bo’ladigan issiqlik jarayonlarining matematik modellarining o‘rni va rolini ko‘rsatib berish.

Dissertatsiyada

- Ichki nolakal va nolakal masalalar o`rganiladi.

Tadqiqot metodlari: tadqiqot ishida integral tenglamalar nazaryasining metodlaridan, shuningdek chegaraviy masalalarni yechish usullaridan foydalanilgan.

Olingan natijalar va ularning yangiligi:

Ushbu dissertatsiya oliy o’quv yurtlarida o’tkazish mumkin bo‘lgan bir qancha tajribalar yoritilgan, tahlil qilingan, asoslangan va ma’lumotlar foydalanish uchun tavsiyalar ishlab chiqilgan. Ushbu tajribalarni o‘tkazish metodikasi va tajribalarning fizik asoslari ochib berilgan. Magistirlik dissertatsiyasida qaralayotgan mavzu bo`yicha bir qancha yetuk matematiklar izlanishlar olib borilgan. Ushbu ishda oldin o`rganilmagan jarayonlar o`rganiladi.

Amaliy ahamiyati: olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo`lib, ulardan tabiatda uchraydigan turli sohalarning, issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarining matematik modellarini qurishda tadbiq etish mumkin. Shu bilan birga dissertatsiya ishini differinsial tenglamalar va matematik fizik tenglamalari sohasida maxsus kurslarni o`qishda foydalanish mumkin, issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarining noklassik modelini mukammal o'rganish turli fizikaviy masalalarni yechish va umumiyroq bo'lgan xususiy hosilali differentsial tenglamalar nazariyasini yaratishga imkoniyat beradi, o'quv materiallarini o'zlashtirish samaradorligini oshiradi.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi: Tadqiqot jarayonida ishlab chiqilgan xulosa va takliflar to'liq nazariy ahamiyatga ega. Dissertatsiyaning materiallari matematika (yo'nalishlari bo'yicha) o'qiyotgan magistr talabalarga o'quv dasturini takomillashtirishda foydalanilmoqda. Issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarining noklassik modelini qurish va uni tadqiq etish, sodda tajribalarni ko'rsatish va ularning moxiyatini ochib berishga undaydi.

Qo'llanilish sohasi: ish nazariy, oliy o'quv yurtlarida ilmiy tadqiqotchilar, magistrlar dissertatsiya ishlarida, "Matematika" yo'nalishi talabalari BMI larida ma'lumotnoma sifatida foydalanishlari mumkin.

"Mathematical model of natural processes "

ANATATION

Keywords: Physics, circle, thermal expansion, extracurricular, optional classes.

Objects of research: The educational process aimed at ensuring the continuity and continuity of physics education in the system of general secondary and secondary special education.

Purpose: To demonstrate the role and place of physics clubs in ensuring the continuity and continuity of physics courses in general secondary schools, academic lyceums and higher education systems.

Research methods: Analytical analysis, pedagogical observation, pedagogical experience, pedagogical design, systematization and mathematical-statistical methods.

Gold results and their news: Circles are one of the main types of extracurricular and extracurricular activities, and the following results were obtained in these three dissertations.

Practical significance: Project development projects on specific research topics have helped to increase the effectiveness of learning materials.

Research-related developments, as well as teaching materials designed on the basis of the new program, can be used in the organization of specific lessons in general secondary schools and secondary special education institutions.

Level of Implementation: Demonstrating simple interesting experiments in physics circles and revealing their essence enhances students 'interest in physics and encourages thinking.

The results obtained in this dissertation can be used in the organization of clubs in secondary schools and universities of the Republic.

Field of application: Higher education and general secondary schools.

MUNDARIJA

KIRISH

Hozirgi kunda ilm–fanga Prezidentimiz tomonidan alohida e'tibor berilmoqda [1]. Ayniqsa, 2023 yilning Prezidentimiz tomonidan "Insonga e'tibor va sifatli ta'lim yili" deb e'lon qilinishi hamda bu yilda matematika, kimyo, biologiya va geologiya fanlarini rivojlantirishga alohida e'tibor berilishi [2] biz yosh matematiklarni ilm-fan bilan shug'ullanishga ilhomlantirishi ajab emas.

Respublikamizda yoshlarning bilim olishi, mamlakatimizning rivojlanishiga ularni keng jalb qilish bo'yicha 2017-yil 20-apreldagi "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risidagi" PQ-2909 qarori asosida olib borilayotgan ishlar va tadbirlarda, shuningdek rejalashtirilayotgan vazifalarda oliy ta'lim muassasalari ilmiy salohiyatini mustahkamlash, oliy ta'lim da ilm-fanni yanada rivojlantirish, uning akademik institutlar bilan integratsiyalashuvini kuchaytirish, iqtidorli talaba yoshlarni ilmiy faoliyat bilan shug'ullanisha keng jalb qilish orqali ularning bilim darajasini yanada mustahkamlash masalalariga katta e'tibor berilgan. "Bizning vazifamiz-to'plangan tajriba va ilg'or xalqaro amaliyotga suyangan holda, o'zimizning taraqqiyot va yangilanish modelimizni qat'iy amalga oshirishdan iborat"

Muhammad al-Xorazmiy, Axmad Farg'oniy Abu Rayhon Beruniy, Mirzo Ulug'bek singari ulug' ajdodlarimiz tamal toshni qo'ygan matematika fani ilm-fan va texnikaning zamonaviy tarmoqlari jadal rivojlanishi munosabati bilan hozirgi kunda yanada katta ahamiyat kasb etmoqda. Axborot –kommunikatsiya texnoligiyalari, tibbiyot, biologiya, raqamli iqtisodiyot sohasida va boshqa ko'plab sohalarda uning roli ayniqsa ortdi.

Уurtimiz istiqlolga erishgan ilk kunlardanoq, davlatimiz tomonidan amalga oshirilayotgan bunyodkorlik ishlari Vatanimiz mustaqilligi va ozodligi tufaylidir.

Jamiyat ijtimoiy sohasining eng muhim tarkibiy qismlaridan biri ta'lim tarbiya sohasi bo'lib, uning rivoji siyosiy –huquqiy, iqtisodiy va ma'naviy sohalarga bevosita ta’sir etadi hamda ijtimoiy sohalar me’yoriy mohiyatini, kamolot darajasini belgilab beradi.

O'zbekistonda ta’lim tizimini isloh qilishning dasturiy hujjatlarida [2-5] ta’kidlanganidek, mamlakatimiz ta’lim tizimi xodimlari oldida raqobatbardosh kadrlar tayyorlash, ta’lim tarbiya jarayonini jahon andozalari darajasiga etkazishni ta’minlash asosiy vazifa qilib qo‘yilgan.

Shu ma’noda olib qaraganda, yoshlarning yangi avlodi istiqbol masalalarini kun tartibiga dadil qo‘yadigan va uni yecha oladigan, fikr yuritishning yuksak madaniyatini egallagan, siyosiy hamda ijtimoiy iqtisodiy hayotda o‘ziga mustaqil yo‘l topa oladigan qobiliyatga ega bo‘lishi kerak [6]. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi mavzusi ana shu talab va vazifalardan kelib chiqib tanlandi.

Mazkur dissertatsiya ishi parabolik tipdagi tenglamalar uchun noklassik masalalarga bag‘ishlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi: Dissertatsiyada parabolik tipdagi tenglamalar uchun noklassik masalalar ya’ni noklassik masala yechimining yagonaligi va mavjudligi o‘rganildi. Matematik fizikaning asosiy juda ko‘p masalalarini funksianallarning ekstrimumi masalasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Bunday tavsiflashda unga mos bo‘lgan chegaraviy masalalar yechimini tabiiy aniqlash iomkoniyati mavjud va shu bilan birga, ularni yechishga ma’lum usullarni qo‘llash mumkin. XX asrga kelib ularni amaliy masalalarga tadbig‘iga talab ortganligi tufayli izlanishlar kuchaydi va masalalarning qo‘yilishiga aniqlik kiritilib mutaxassislar oldiga butunlay yangi tipdagi masalalar qo‘yildi. Bu masalalar optimal boshqaruv masalalari degan nomni oldi. Har qanday optimal boshqaruv masalasi quyidagilar bilan harakterlanadi:

Obyektning holatini aniqlovchi differensial tenglama va shartlar. Tenglama va shartlar harakteri qabul qilingan matematik model orqali aniqlanadi. Masala tenglamasidagi o‘zgaruvchilarning obyekt parametrlarini aniqlovchi bog‘liq o‘zgaruvchilar guruhi va tashqaridan o‘zgartirish imkonigagina ega bo‘lgan, qiymatlari ma’lum bir funksional fazoning qismi bo‘lgan to‘plamga tegishli boshqaruviga ajratish mumkin.

Mazkur dissertatsiyada parabolik tipdagi noklassik masalalarga oid yangi natijalar olish ko‘zda tutilgan.

Tadqiqot obyekt va predmeti: Ushbu magistrlik dissertatsiyasining tadqiqod obyekti parabolik tipdagi noklassik masalalar.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari: Ushbu magistrlik dissertatsiyasining maqsadi parabolik tenglama uchun bitta noklassik masalani o`rganish, ya’ni parabolik tipdagi nolakal masalalarga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi: Magistirlik dissertatsiyasida qaralayotgan mavzu bo‘yicha bir qancha yetuk matematiklar izlanishlar olib borgan . Ushbu ishda oldin o‘rganilmagan jarayonlar o‘rganildi. Ya’ni oldin o‘rganilmagan masala o‘rganiladi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari: Tabiatdagi juda ko’p tabiiy jarayonlarni matematik moddalari parabolik tenglama uchun chegarali masalalar orqali ifodalanadi. Jumladan muzning erish masalasi, havoning ifloslanishi, turlarning tarqalishi, bakteriyalarning tarqalishi, diffuziya jarayonlari, filtratsiya jarayonlari, o’simliklarning o’sish jarayonlari, va inson organizmidagi hujayralarda kislorod va moddalar almashinuvi jarayonlarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi.

Masalaning qo‘yilishi. $D=\{(x,t):0<x<l,0<t\le T\}$ ***sohada***

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),\ \ (x,t)\in D \tag{1}$$

tenglamaning

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l \tag{2}$$

boshlang‘ich va chegaraviy

$$u_x(x,0)=\varphi(x),0\le t\le T \quad (3)$$

$$u(l,t)= bu(x_0,t),\ 0\le t\le T \quad (4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

Bu masalaning yechimi uchun aprior baholar olingan va noma’lum chegara xarakteri o‘rganilgan.

Tadqiqot mavzusi bo‘yicha adabiyotlar sharhi(tahlili): Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko’rinishlari uchun lokal shartli masalalar juda ko‘plab avtorlar tomonidan o‘rganilgan. Bunday masalalar A.Fridman, Krujkov S.N., Ilin A.M, Salaxiddinov M.S va boshqa olimlar tomonidan o’rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko‘plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko‘rinishlari uchun nolokal masalalarni o‘rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar bilan hozirgi kunda Jo‘rayev T.J., Sopuyev A.O., Egamberdiyev U.O., Toxirov J.O., Qodirov F.E., To’rayev R.N. va boshqa avtorlar dunyoning turli mamlakatlarida juda ko‘plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Tadqiqotda qo‘llanilgan metodikaning tavsifi: Magistirlik dissertatsiyasida haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazaryasi, funksional analiz va matematik fizika usullaridan biri-issiqlik tarqalish tenglamasini o‘zgaruvchilarni ajratib yechish usulidan foydalaniladi.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: Magistirlik dissertatsiyasida olinadigan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo‘lib, ulardan tabiatda uchraydigan turli jabhalarning, ekologik jarayonlarning matematik modellarini qurishda tadbiq etish mumkin. Shu bilan birga dissertatsiya ishini differinsial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari sohasida maxsus kurslarni o‘qishda foydalanish mumkin.

Ish tuzilmasining tavsifi: Mazkur magistrlik dissertatsiyasi kirish, 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yhatidan iborat bo‘lib, 60 betni tashkil etgan

Xulosa va takliflarning qisqacha umumlashtirilgan ifodasi: Magistirlik ishining kirish qismida asosiy belgilash, shu sohada qilingan ishlar haqida qisqacha ma’lumot va olingan natijalar bayon qilinadi. Asosiy qismida esa, olingan natijalar to‘laligicha keltiriladi.

Dissertatsiyaning birinchi bobda boshlang‘ich tushunchalar va masalaning qo‘yilishiga bag‘ishlangan bo‘lib, unda nolakal va birinchi chegaraviy masalaning qo‘yilishi, keltirilgan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi parabolik tenglamalar va ularni yechish usullariga bag’ishlangan. Bu bobda parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipi, oddiy qatlam va ikkilangan qatlam potensiallari, masala yechimining mavjudligi va yagonaligi o‘rganilgan.

Magistrlik dissertatsiyasining uchinchi bobi parabolik tenglama uchun noklassik masalani o‘rganishga bag‘ishlangan. Unda parabolik tipdagi noklassik masala yechimining yagonaligi va mavjudligi o‘rganilgan. Qaralayotgan masala qo‘yilgan va masala yechimi uchun aprior baho olingan.

I BOB. XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR.

Ushbu bobda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy fundamental tushunchalaridan biri ko‘p o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni turlarga ajratish o‘rganilgan. Shu bilan birga issiqlik tarqalish tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi keltirilgan. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, boshlang‘ich-chegaraviy masalaning qo‘yilishi matematik fizika tenglamalari fanining klassik masalaridan biri bo‘lib, unda muhim ahamiyat kasb etadi.

1.1-§. Matematik modellar haqida umumiy ma’lumotlar

Qattiq jism (x, y, z) nuqtaning t vaqtdagi harorati $u = u(x, y, z)$ bo’lsin. Agar qattiq jismning turli qismlarining harorati turlicha bo’lsa, u holda qaralayotgan qattiq jismda ko’proq isigan qismidan kamroq isigan qismiga tomon issiqlik harakati sodir bo’ladi. Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish Fur’e qonuniga asoslanadi. Bunga ko’ra ΔS sirtdan Δt vaqtda o’tuvchi ΔQ issiqlik miqdori quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}\ \Delta S \Delta t, \tag{1.1}$$

Bu yerda $k -$ issiqlik o’tkazuvchanlik koeffisiyenti , $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ esa ΔS sirtga o’tkazilgan N normal bo’yicha olingan hosila, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\mathrm{N}, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\mathrm{N}, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\mathrm{N}, z) = (grad\, u, \mathrm{N}),$$

Ya’ni normal bo’yicha olingan hosila ikkita

$$\mathrm{N} = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$$

$$grad\, u = \nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng.

Bu yerda i, j, k −koordinata o'qlarining yo'naltiruvchi birlik vektorlari,α, β, γ esa N normal bilan mos ravishda Oy, Ox, Oz o'qlar orasidagi burchak.

Yuqorida keltirilgan (1.1) formuladagi minus ishora issiqlikning jismning ko'proq isigan nuqtasidan kamroq isigan qismiga issiqlik harakatini bildiradi.

Endi faraz qilaylik, qaralayotga jism izotrop jism bo'lsin, ya'ni jismning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisienti k faqat (x, y, z) nuqtaga bog'liq, u ga va $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ ga bog'liq emas.

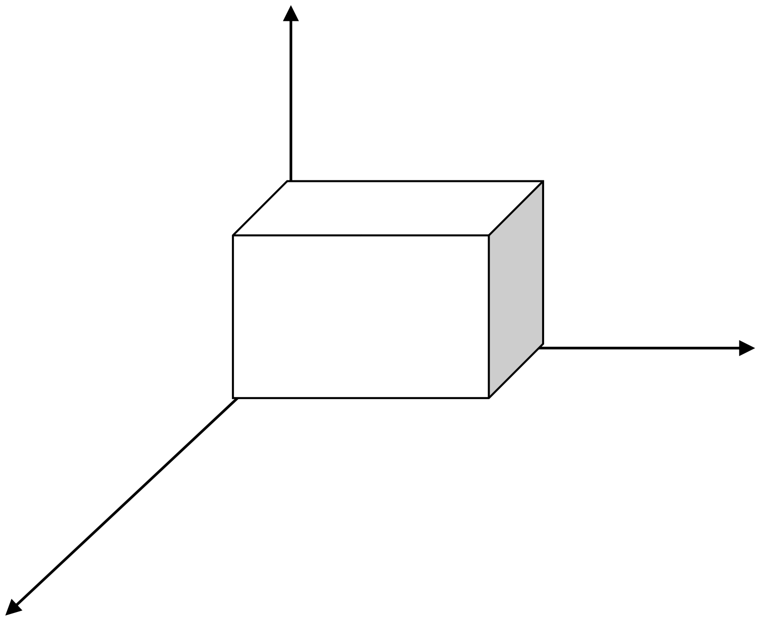
Agar qattiq jism anizatrop bo'lsa, u holda

$$k = k(x, y, z, N, u, \frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}})$$

bo'ladi.

Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish uchun qattiq jismdan (z, y, z) nuqtani o'z ichiga olgan yetarlicha kichik ixtiyoriy V parallelepiped ajratib olamiz, ya'ni

$$V = \{(x, y, z): x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y, z < \zeta < z + \Delta z\}$$



Endi V parallelepiped uchun issiqlik balansini tuzaylik. Parallelepipedning $\xi = x$ yuzasi orqali Δt vaqtda o'tgan issiqlik miqdori (1) formulaga ko'ra

$$Q_x = -k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\Delta y\Delta z\Delta t.$$

Parallelepipedning $\xi = x + \Delta x$ yuzasidan o'tayotgan issiqlik miqdori esa

$$Q_{x+\Delta x} = -k(x+\Delta x,y,z)\frac{\partial u(x+\Delta x,y,z,t)}{\partial x}\Delta y\Delta z\Delta t$$

ga teng. U holda V hajmda Ox o'qi bo'yicha qolgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_x = Q_x - Q_{x+\Delta x} = \Delta y\Delta z\Delta t \times \left(k(x+\Delta x,y,z)\frac{\partial u(x+\Delta x,y,z,t)}{\partial x} - k(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x',y,z)\frac{\partial u(x',y,z,t)}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\,,\ x' \in (x, x+\Delta x)$$

Xuddi shu kabi V parallelepipedning qolgan yoqlari bo'yicha issiqlik miqdori

$$\Delta Q_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right)\Delta y\Delta x\Delta z\Delta t\,,\ y' \in (y, y+\Delta y)$$

$$\Delta Q_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z',)\,\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\Delta y\Delta x\Delta z\Delta t\,,$$

$$z' \in (z, z+\Delta z)$$

U holda V hajmda Δt vaqtda oqayotgan umumiy issiqlik miqdori

$$= \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z =$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x',y,z)\,\frac{\partial u(x',y,z,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\,\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z',)\,\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\right\}\Delta \mathrm{x}\,\Delta y\Delta z\Delta t, \qquad (1.2)$$

formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, qaralayotgan V parallelepipedning ichida issiqlik manbalari bo'lsin. Parallelepipeddagi issiqlik manbalarining zichligi $F(x,y,z,t)$ bo'lsin, ya'ni $F(x,y,z,t)$ funksiya Δt vaqt ichida ΔV hajmdan ajralib chiqqan yoki unga singib ketgan issiqlik miqdori

$$Q_2 = F(x,y,z,t)\Delta x\,\Delta y\Delta z\Delta t, \qquad (1.3)$$

bo'ladi.

Qaralayotgan qattiq jismning Δt vaqtdagi haroratini o'lchash uchun $\Delta_t u$ sarflangan issiqlik miqdori

$$Q_3 = \Delta_t u\; c(x,y,z,)\; p(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$= [u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t)]c(x,y,z)p(x,y,z)\Delta x\,\Delta y\Delta z.$$

Bu yerda $p(x,y,z)$ qattiq jismning , $c(x,y,z)$ esa uning solishtirma issiqlik sig'imi bo'lib, ularni argumentlarining uzluksiz funksiyasi deb hisoblaymiz.Lagranj teoremasiga asosan sarf qilingan issiqlik miqdori uchun quyidagi

$$Q_3 = \frac{\partial u(x,y,z,t')}{\partial t}\;\Delta t\; c(x,y,z)p(x,y,z)\Delta x\,\Delta y\Delta z, \qquad (1.4)$$

Ifodani olamiz. Bu yerda $t' \in (t, t+\Delta t)$.

Endi V hajm uchun issiqlik balansi tenglamasini tuzamiz. Ma'lumki

$Q_3 = Q_1 + Q_2$, u holda (2)-(4) ifodalardan

$$\frac{\partial u(x,y,z,t')}{\partial t} \ \Delta t\, c(x,y,z)p(x,y,z)\Delta x\ \Delta y \Delta z$$
$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x',y,z)\frac{\partial u(x',y,z,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y',z)\frac{\partial u(x,y',z,t)}{\partial y}\right)\right.$$
$$+ \qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z',)\frac{\partial u(x,y,z',t)}{\partial z}\right)\right\}\Delta \mathrm{x}\ \Delta y \Delta z \Delta t$$
$$+ F(x,y,z,t)\Delta x\ \Delta y \Delta z \Delta t.$$

kelib chiqadi. Oxirgi ifodani $\Delta \mathrm{x}\ \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z} \Delta \mathrm{t} \neq 0$ ga qisqartirib so'ngra $\Delta \mathrm{x} \to 0, \Delta \mathrm{y} \to 0, \Delta \mathrm{z} \to 0$ va $\Delta \mathrm{t} \to 0$ limitga o'tsak, ushbu

$$\mathrm{c(x,y,z)p(x,y,z)}\frac{\partial \mathrm{u(x,y,z,t')}}{\partial \mathrm{t}} =$$
$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{k(x,y,z)}\frac{\partial \mathrm{u(x,y,z,t)}}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\mathrm{k(x,y,z)}\frac{\partial \mathrm{u(x,y,z,t)}}{\partial \mathrm{y}}\right) +$$
$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\mathrm{k(x,y,z)}\frac{\partial \mathrm{u(x,y,z,t)}}{\partial \mathrm{z}}\right) + \mathrm{F(x,y,z,t)} = \mathrm{div(k\,grad\,u)} +$$

$$+\mathrm{F(x,y,z,t)}, \qquad (1.5)$$

Tenglama hosil bo'ladi. Bunda vektor funksiyaning divergentsiyasini quyidagicha tushuniladi:

Agar $a(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ bo'lsa, u holda

$$div\ a(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

bo'ladi.

Oxirgi (1.5) tenglama bir jinsli bo'lmagan izotrop qattiq jismning *issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi* deyiladi .

Agar qattiq jism bir jinsli , ya'ni

$c(x,y,z) = const,\ \ p(x,y,z) = const,\ \ k(x,y,z) = const$, bo'lsa, u holda

$$\text{div(k grad u)} = k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = k = \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

$$= k\ \Delta u.$$

bo'ladi. U holda (1.5) tenglama quyidagi

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x, y, z, t)$$

Ko'rinishga keladi, bu yerda $a^2 = \frac{k}{cp}$, $f(x, y, z, t) = \frac{F(x,y,z,t)}{cp}$.

Agar qaralayotgan bir jinsli qattiq jismda tashqi issiqlik manbalari bo'lmasa , ya'ni $F(x, y, z, t) \equiv 0$ bo'lsa , u holda (1.5) tenglamadan ushbu

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasini olamiz.

Agar u harorat faqat x, y, t koordinatalarga bog'liq bo'lsa u holda bir jinsli yupqa plastinkada issiqlik tarqalish tenglamasiga ega bo'lamiz (1.5) tenglama quyidagi

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, y, t), u = u(x, y, t)$$

ko'rinishiga keladi.

O'lchamlari chiziqli bo'lgan jismlar uchun, masalan sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasi

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u = u(x, t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

1.2-§. Parabolik tenglamalar uchun boshlang'ich va chegaraviy masalalarning qo'yilishi.

Qattiq jismning ixtiyoriy vaqtdagi haroratni aniqlash uchun xususiy hosilali defferensiyal tenglamaning o'zi yetarli bo'lmaydi. Buning uchun masalaning fizik xossasiga asosan jism ichida boshlang'ich vaqtdagi haroratning taqsimlanishi (boshlang'ich shart)ni va jismning sirtida issiqlik rejimi (chegaraviy shartlar)ni bilish zarur.

Chegaraviy shartlar qattiq jism sirtidagi haroratga qarab turlicha berilishi mumkin.

1) Agar qattiq jism sirtining har bir nuqtasida bir xil harorat saqlanayotgan bo'lsa, u holda chegaraviy shart

$$u(x,y,z,t)|_S = \mu_1(x,y,z,t), \quad (x,y,z,t) \in S, t \geq 0, \tag{1.6}$$

ko'rinishda beriladi.

Bu yerda S qattiq jismning sirti $\mu_1(x,y,z,t)$, esa S sirtda berilgan funktsiya.

2) Qattiq jismning S sirtida issiqlik berilgan bo'lsin, ya'ni Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirti yuzasidan o'tuvchi issiqlik miqdori berilsa, u holda Fure qonuniga asosan (1.1) formuladan quyidagi

$$q = \frac{\mathrm{q}}{\Delta S\,\Delta t} = -k\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}.$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda ushbu chegaraviy shart

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} = \mu_2(x,y,z,t) = -\frac{q(x,y,z,t)\partial u}{k(x,y,z,t)\partial u}, \quad (x,y,z,) \in S, \ t \geq 0, \tag{1.7}$$

Kelib chiqadi. $\mu_2\ (x,y,z,t\ ) -$ berilgan funktsiya.

3) Qattiq jism sirtida atrof muhit bilan issiqlik almashinishi sodir bo'layotgan bo'lsa, Nyuton qonuniga asosan Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirtidan atrof muhitga chiqayotgan issiqlik miqdori qattiq jism sirtining haroratidan atrof muhit haroratining ayrimasiga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$q = H(u - u_0),$$

Bu yerda H issiqlik almashish koeffisienti bo'lib, $u - u_0$ ayrimaga bog'liq. Energiyani saqlanish qonuniga ko'ra bu issiqlik miqdori Fur'e qonuni bilan aniqlangan issiqlik miqdoriga

$$q = -k\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}$$

teng bo'ladi.

U holda S sirtda ushbu chegaraviy shartni

$$k\,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} = H(u - u_0)\,,$$

Olamiz, yoki $h = H/k$ deb almashtirib, S da quyidagi

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} + hu = hu_0$$

chegaraviy shartni olamiz.

Bundan izotrop qattiq jism uchun chegaraviy shartni quyidagi ko'rinishda

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + h(x,y,z,t)u\right)\Big|_S = \mu_3(x,y,z,t)\,, \qquad (x,y,z) \in S\,,\ t \geq 0. \qquad (1.8)$$

yozishimiz mumkin.

Shunday qilib, izotrop qattiq jismda issiqlik tarqalish tenglamasi ushun boshlang'ich chegaraviy masalalar quyidagicha qo'yiladi:

Birinchi chegaraviy masala.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini ushbu

$G = D \times (0,T) = \{(x,y,z,t) | (x,y,z) \in D \subset R^3,\ \ t \in (0,T)\}$

Silindrik sohada aniqlangan , uzluksiz quyidagi boshlang'ich

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D,$$

va

$$u(x,y,z,t)|_S = \mu_1(x,y,z,t), \quad (x,y,z,t) \in S, \ \ t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z, t)$ yechimi topilsin.

Ikkinchi chegaraviy masala.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining $G = D \times (0, T)$ silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang'ich $u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D,$

va

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}|_S = \mu_2(x, y, z, t) = -\frac{q(x, y, z, t)}{k(x, y, z)}, \qquad (x, y, z,) \in S, \qquad t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z, t)$ yechimi topilsin.

UCHINCHI CHEGARAVIY MASALA.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining

$$G = D \times (0, T) = \{(x, y, z, t) | (x, y, z) \in D \subset R^3, \ \ t \in (0, T)\}$$

silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang'ich

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D,$$

va

$$(\frac{\partial u}{\partial N} + h(x, y, z, t)u)|_S = \psi_3(x, y, z, t)\,, \qquad (x, y, z) \in \ S\,, \qquad t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z, t)$ yechimi topilsin.

Yuqoridagi keltirilgan masalalar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, ya'ni parabolik tipdagi tenglamalar uchun $boshlang'ich - chegaraviy\, masalalar$ deyiladi.

1.3-§. Ekstremum prinsipi va yagonalik teoremasi.

Endi parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o'rganishda eng ko'p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.9}$$

misolida parabolik tipdagi tenglamalar uchun quyiladigan masalalar va ulardan birinchi chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligini keltiramiz. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar va ularni echish usullarini [7; 152-160, 8; 143-152, 9; 400-407, 10; 208-213, 18; 3-141, 16; 329-346] adabiyotlardan ko'rish mumkin.

Birinchi chegaraviy masalaning qo'yilishi.

Berilgan $Q\{0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ sohada (1.9) tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \le x \le l) \tag{1.10}$$

boshlang'ich va

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad (0 \le t \le T) \tag{1.11}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimi topilsin. Bu yerda l uchi koordinat boshida bo'lgan sterjenining uzunligini, T esa Shu fizik jarayonni o'rganish qancha vaqt davom etishini bildiradi, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ lar ko'rsatilgan sohalarda berilgan funksiyalar.

Biz izlanayotgan $u(x,t)$ yechimni $\overline{Q}$ yopik sohada uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz va Shuning uchun berilgan $f(x,t)$, $\varphi(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiyalarni uzluksizligini va demak, $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$ bo'lishini talab qilamiz.

Agar (1.9)-(1.11) masalada (1.11) chegaraviy shart o'rniga

$$u_x|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u_x|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{1.12}$$

shartlar berilgan bo'lsa, masala ikkinchi chegaraviy masala, yoki (1.11) shartlar o'rniga

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left(\gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=l} = \mu_2(t), \tag{1.13}$$

chegaraviy shartlar berilgan bo'lsa, masala uchinchi chegaraviy masala deyiladi. Umuman $x=0$ va $x=l$ da beriladigan shartlarni turli kombinatsiyalarini olish hisobiga chegaraviy masalalar sonini ancha ko'paytirish mumkin.

Qaralayotgan Q to'rtburchakning $t=0$, $x=0$ va $x=l$ chiziqlar ustida yotgan chegaralari yig'indisini Γ deb belgilaymiz.

Endi birinchi chegaraviy masalaning yagonaligi va mavjudligi masalasi bilan Shug'ullanamiz. Buning uchun parabolik tenglamalar uchun ekstremum prinsipi va undan kelib chiqadigan ba'zi bir xossalarni qaraymiz.

Teorema 1.1 (Ekstremum prinsipi). Yopik $\overline{Q}$ sohada uzluksiz bo'lgan va Q soha ichida bir jinsli

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{1.14}$$

tenglamani qanoatlantiradigan $u(x,t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziq ustida erishadi.

I s b o t. Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiyaning Q to'rtburchak $\{0<x<l,\, 0<t\le T\}$ dagi eng katta qiymati M, Γ chiziq ustidagi eng katta qiymati esa m bo'lsin va ekstremum prinsipida aytilgan tasdiq o'rinli bo'lmasin. Bu degani Shunday $(\bar{x},\bar{t})$ ichki nuqta topilsinki, bu nuqtada $M>m$ bo'lsin deganidir. Quyidagi yordamchi

$$u(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2T}(\bar{t}-t)$$

funksiyani qaraylik. Q to'rtburchakning Γ chegarasida (ya'ni $t=0, x=0$ va $x=l$ da)

$$u(x,t) \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Shu bilan birga

$$u(\bar{x},\bar{t}) = u(\bar{x},\bar{t}) = M.$$

Demak, yordamchi $u(x,t)$ funksiya ham, $u(x,t)$ kabi o'zining eng katta qiymatiga Γ da erishmaydi.

Shunday ekan, faraz qilaylik $u(x,t)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga birorta ichki (x_1,t_1) $(0<x_1<l,\ 0<t_1<T)$ nuqtada erishsin. U holda, matematik analiz kursidan ma'lumki, Shu nuqtada

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1^2} \le 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}_1} \ge 0$$

$(\mathrm{t}_1 < T)$ bo'lsa, $\frac{\partial v}{\partial t_1} = 0;$ $\mathrm{t}_1 = \mathrm{T}$ bo'lsa, $\frac{\partial u}{\partial t_1} \ge 0$

munosabatlar o'rinli buladi. Demak, (x_1,t_1) nuqtada

$$u_t - a^2 u_{xx} \ge 0 \tag{1.15}$$

tengsizlik bajariladi. Ikkinchi tomondan

$$u_t - a^2 u_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - \frac{M-m}{2T} = -\frac{M-m}{2T} < 0$$

bo'lishi kerak. Bu esa (1.15) ga zid. Demak, $M > m$ bo'ladigan nuqta topiladi deb qilgan farazimiz noto'g'ri va eng katta qiymat uchun prinsip isbotlandi. Eng kichik qiymat uchun ham xuddi Shunday isbotlanadi.

Teorema 1.1 isbotlandi.

Endi ekstremum prinsipidan kelib chiqadigan va chegaraviy masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan ba'zi bir xossalarni isbotsiz keltiramiz [9; 408-415, 16; 329-346, 23; 1233-1257].

1-xossa. Agar $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo'lib, yopiq $\overline{Q}$ sohada eng katta (eng kichik) qiymatiga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $\overline{Q}$ sohada o'zgarmasdir.

2-xossa. Agar $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo'lsa, u holda $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli:

1) $\min\limits_{\Gamma} u(x,t) \le u(x,t) \le \max\limits_{\Gamma} u(x,t);$

2) $\quad |u(x,t)| \le \max\limits_{\Gamma} |u(x,t)|$.

3-xossa. Faraz qilaylik $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo'lsin. Agar $\forall (x,t) \in \Gamma$ uchun $u(x,t) \ge 0 (\le 0)$ bo'lsa, u holda $\forall (x,t) \in \bar{Q}$ uchun $u(x,t) \ge 0 (\le 0)$ o'rinli bo'ladi.

Isbotlangan ekstremum prinsipidan foydalanib (1)-(3) birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligini isbotlaymiz.

Teorema 1.2. Agar (1.9)-(1.11) masalaning yechimi mavjud bo'lsa u yagonadir.

Isbot. Haqiqatan ham, agar yechim ikkita u_1 va u_2 desak, ularning ayirmasi $u = u_1 - u_2$ bir jinsli (1.14) tenglamani qanoatlantiradi va biz quyidagi masalaga kelamiz.

Berilgan $Q\{0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ sohada (1.1.4) tenglamaning

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 \le x \le l) \tag{1.16}$$

boshlang'ich va

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (0 \le t \le T) \tag{1.17}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

U holda ekstremum prinsipiga binoan $u(x,t)$ funksiyaning Q sohadagi eng katta qiymati ham, eng kichik qiymati ham nolga teng, demak $u \equiv 0$ yoki $u_1 = u_2$.

Teorema 1.10 isbotlandi.

Endi isbotlangan ekstremum prinsipidan foydalanib (1.1)-(1.3) birinchi chegaraviy masala yechimining turg'unligini olamiz.

Teorema 1.3. Agar (1.9)-(1.11) masalaning yechimi $f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalarga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $u_1(x,t)$ funksiya (1.9)-(1.11) masalaning $f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan yechimi, $u_2(x,t)$ funksiya (1.9)-(1.11) masalaning $f^*(x,t), \varphi^*(x), \mu_1^*(t)$ va $\mu^*{}_2(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan yechimi bo'lsin. Berilgan funksiyalar uchun

$$| f(x,t) - f^*(x,t) | < \varepsilon;\ \forall (x,t) \in Q;$$

$$| \varphi(x) - \varphi^*(x) | < \varepsilon;\ 0 \le x \le l;$$

$$| \mu_i(t) - \mu_i^*(t) | < \varepsilon;\ i = 1,2,\ 0 \le t \le T.$$

Tengsizliklar bajarilsin. U holda $\forall (x,t) \in Q$ uchun ekstremum prinsipidan kelib chiqqan 2-xossaga ko'ra

$$| u_1(x,t) - u_2(x,t) | \le \max_{\Gamma} | u_1(x,t) - u_2(x,t) | = \max\left\{ \max_{\bar{Q}} | f(x,t) - f^*(x,t) |,\right.$$

$$\left. \max_{x\in[0,l]} | \varphi(x) - \varphi^*(x) |, \max_{t\in[0,T]} | \mu_i(t) - \mu^*{}_i(t) | \right\} .$$

bo'ladi. Bundan Q sohada $| u_1(x,t) - u_2(x,t) | < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik (1.9)-(1.11) masalaning turg'un ekanligini isbotlaydi.

Teorema 1.11. isbotlandi.

I bob bo’yicha hulosalar.

Ushbu bobda, issiqlik tarqalish tenglmalarini keltirib chiqarish, ekstremum prinspi va chegaraviy masalalarni yechishda ko’p qo’llaniladigan ba’zi bir xossalar, teoremalar ularning mavjudlik va yagonaligi isbotlari, qattiq jism va izotrop jismda iisiqlikning tarqalish tenglamasi, parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o’rganishda eng ko’p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo’lgan sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi keltirilgan.

Ushbu bobda, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy fundamental tushunchalaridan biri ko‘p o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni turlarga ajratish o‘rganilgan. Shu bilan birga issiqlik tarqalish tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi keltirilgan. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, boshlang‘ich-chegaraviy masalaning qo‘yilishi matematik fizika tenglamalari fanining klassik masalaridan biri bo‘lib, unda muhim ahamiyat kasb etadi.

II BOB. CHEGARAVIY MASALARNI YECHISH USULLARI TAHLILI

2.1-§. Parabolik tenglamalar uchun Grin funksiyasi va xossalari

Magistirlik dissertatsiya ishining ushbu paragrafida issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi va xossalari o‘rganilgan.

Ushbu tenglikka umumlashgan *Grin formulasi* deyiladi.

$$\int \ldots \int \left[vLu - uMv\right] dx_1 \ldots dx_n = \int \ldots \int \sum_{i=1}^{n} P_i \cos\left(v, x_i\right) d\tilde{A}$$

Grin formulasi soha bo‘yicha olingan integralni chegara bo‘yicha olingan integralga o‘tkazib beradi.

Eng sodda Grin formulasi quyidagicha

$$\iint \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \iint \left[Qdy + Pdx\right]$$

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegarasi Γ sirtdan iborat bo‘lgan biror D sohada birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi deb $M\left(v\right)=0$ tenglamani va

1) $v\left(\xi,\tau\right)|_{\tau=t}=0$

2) $v\left(\xi,\tau\right)|_{PA}=v\left(\xi,\tau\right)|_{BQ}=G_o\left(x,t,\xi,\tau\right)$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topishga aytiladi.

Birinchi tenglama uchun Grin formulasidan foydalanib (1.3.1)-(1.3.2) masala yechimining integral ifodasini keltirib chiqaramiz. Quyidagi operatorni qaraylik.

$$M(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.1}$$

$M(v)$ operator $\mathscr{L}(u)$ operatorga qo‘shma operator hisoblanadi. *PABQ* sohada ixtiyoriy $\varphi(x,t)$ *va* $\psi(x,t)$ yetarli marta differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

Bu funksiyalar ushbu ayniyatlar uchun o‘rinli.

$$\psi L(\varphi)-\varphi M(\psi)=a^2(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x)_x-(\varphi\psi)_t \tag{2.2}$$

$$\psi L(\varphi)-\psi a^2\varphi_{xx}-\psi\varphi_t=a^2(\psi\varphi_x)_x-a^2\psi_x\varphi_x-\psi\varphi_t$$

$$\varphi M(\psi)=\varphi a^2\psi_{xx}+\varphi\psi_t=a^2(\varphi\psi_x)_x-a^2\psi_x\varphi_x+\varphi\psi_t$$

$$\psi L(\varphi)-\varphi M(\psi)=a^2(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x)_x-(\varphi\psi)_t$$

(2.2) ayniyatga Grin formulasini qo‘llaymiz. Natijada quyidagi ifoda hosil bo‘ladi.

$$\iint\limits_D[\psi L(\varphi)-\varphi M(\psi)]dxdt=\oint\limits_{\partial D}\left[\varphi\psi dx+a^2(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x})dt\right] \tag{2.3}$$

Bu ifodaning o‘ng tomoni *PABQ* yopiq kontur bo‘yicha olingan integralni anglatadi.

Agar (2.3) formuladagi $L(\varphi)=0$ va $M(\psi)=0$ bo‘lsa, u holda (2.3) ifoda ushbu

$$\oint_{PABQ}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt\right]=0$$

ko‘rinishga keladi. Endi bu integralni *D* sohaning *PA, AB, BQ, PQ* chegaralari bo‘yicha yoyib chiqamiz.

$$\oint_{PABQ}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)dt\right]=-\int_{PQ}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)dt\right]+$$

$$+\int_{AB}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)dt\right]+\int_{BQ}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)dt\right]-$$

$$-\int_{AP}\left[\varphi\psi dx+a^2\left(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x\right)dt\right]=0$$

Natijada

$$\int_{PQ}\varphi\psi dx=\int_{AB}\varphi\psi dx+\int_{BQ}\left[\varphi\psi dx+a^2(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x)dt\right]-$$
$$-\int_{AP}\left[\varphi\psi dx+a^2(\psi\varphi_x-\varphi\psi_x)dt\right] \tag{2.4}$$

hosil bo‘ladi. Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiya $L(u)=0$ tenglamaning biror yechimi va

$$G_0(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

issiqlik tarqalish tenglamasining fundamental yechimi bo‘lsin.

Agar $\varphi(x,t)=u(x,t)$ va $\psi(x,t)=G_0(x,t,\xi,\tau)$ deb olsak, u holda (2.4) ifoda quyidagi

$$\int_{PQ}G_0(x,t,\xi,\tau)u(x,t)dx=$$
$$=\int_{PABQ}\left[u(x,t)G_0(x,t,\xi,\tau)dx+a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G_0}{\partial x}\right)d\tau\right]$$

ko‘rinishga keladi.

$G_0(x,t,\xi,\tau)$ funksiya $L(G_0)$ tenglamani x,t o‘zgaruvchilari bo‘yicha va unga qo‘shma bo‘lgan $M(G_0)$ tenglamani ξ,τ o‘zgaruvchilari bo‘yicha qanoatlantiradi.

$$L(G_0)=a^2G_{0xx}-G_{0t}=0$$

$$G_{0x}=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2(t-\tau)}\right)=-\frac{x-\xi}{4\sqrt{\pi}(a^2(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$G_{0xx}=-\frac{1}{4\sqrt{\pi}(a^2(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}=+\frac{2(x-\xi)^2}{16\sqrt{\pi}(a^2(t-\tau))^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$G_{0t}=-\frac{1}{4a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}=+\frac{2a^2(x-\xi)^2}{16\sqrt{\pi}(a^2(t-\tau))^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

ekanligini e'tiborga olsak, $L(G_0)=0$ bo'ladi. Xuddi shunday $M(G_0)=0$ ekanligini ko'rishimiz mumkin.

Faraz qilaylik, $M(x,t)$ va $M_1(x,t+h)$ nuqtalar D sohaning ichidan olingan biror fiksirlangan nuqtalari bo'lsin. Bu yerda $h>0$ son $u(x,t)$ funksiyaning qiymatini $M(x,t)$ nuqtada aniqlaymiz. $M(x,t)$ nuqta orqali PQ xarakteristika o'tkazamiz va (2.3) formuladagi x ni ξ ga, t ni τ ga almashtiramiz. Belgilash kiritamiz

$$\varphi(x,t)=u(\xi,\tau)\ va\ \psi(\xi,\tau)=G_0(x,t+h,\xi,\tau) \tag{2.5}$$

deb olamiz. Natijada (2.3) formuladan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{gathered}\int_{PQ}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 h}}e^{-\frac{(x-\xi)}{4a^2h}}u(\xi,\tau)d\xi=\\ =\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)G_0(x,t+h,\xi,\tau)d\xi+a^2(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi})d\tau\right]\end{gathered} \tag{2.6}$$

$G_0(x,t+h,\xi,\tau)$ va $\dfrac{\partial G_0}{\partial\xi}$ funksiyalarning D sohada h parametr bo'yicha uzluksizligidan $h\to 0$ limitga o'tamiz. Unda

$$\lim_{h\to 0}\int_{BQ}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 h}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}u(\xi,\tau)d\xi=u(x,t) \tag{2.7}$$

hosil bo'ladi. Belgilash kiritamiz.

$$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{h}}=z, \qquad \xi=x-2a\sqrt{hz}, \qquad d\xi=-2a\sqrt{h}dz$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{BQ}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 h}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}u(\xi,\tau)d\xi=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi a^2 h}}u(x-2a\sqrt{hz},t)(-2a\sqrt{h})dz\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\lim_{h\to 0}u(x-2a\sqrt{hz},t)e^{-z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-z^2}dz=\frac{u(x,t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{u(x,t)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=u(x,t)$$

Agar (x,t) nuqta PQ xarakteristikada yotsa quyidagi asosiy integralni olamiz.

$$u(x,t)=\int_{PABQ}u(\xi,\tau)G_0(x,t,\xi,\tau)d\xi+\int_{BQ+PA}a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right)d\tau \qquad (2.8)$$

$$u(x,t)=\int_{PABQ}u(\xi,\tau)G_0(x,t,\xi,\tau)d\xi+\int_{PABQ}a^2\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right)d\tau=$$

$$=\int_{PABQ}u(\xi,\tau)G_0(x,t,\xi,\tau)d\xi+\int_{BQ+PA}a^2(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi})d\tau$$

Bu yerda (2.8) ifoda issiqlik tarqalish tenglamasi ixtiyoriy yechimining integral ifodasi bo‘ladi. (2.8) ifodani umumiyroq ko‘rinishda yana bir marotaba yozamiz.

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_{PABQ}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}u(\xi,\tau)d\xi+\\&+a^2\int_{BQ+PA}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\frac{\partial u}{\partial\xi}d\tau-a^2\int_{BQ+PA}u(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\right)d\tau\end{aligned} \qquad (2.8')$$

Oxirgi formulalar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun qo‘yilgan chegaraviy masalaning yechimi bo‘la olmaydi. Chunki AE va BF egri chiziqlar

$u(x,t)$ va $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ qiymatlarini bilishimiz kerak. Faraz qilaylik, $v(x,t)$ funksiya $M(v)=0$ qo‘shma tenglamaning PQ da $v=0$ shartni qanoatlantiruvchi biror yechimi bo‘lsin. D sohada $u(x,t)$ va $v(x,t)$ funksiyalarga (2.2) formulani qo‘llaymiz. Natijada

$$0=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\xi+a^2\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)d\tau\right] \qquad (2.9)$$

hosil bo‘ladi.

Endi (2.8) formuladan (2.9) ifodani ayiramiz va quyidagi

$$u(x,t)=\int_{PABQ}\left[u(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi+a^2\left(G\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)d\tau\right] \qquad (2.10)$$

ifodani olamiz. Bu yerda

$$G(x,t,\xi,\tau)=G_0(x,t,\xi,\tau)-v \qquad (2.11)$$

Agar v funksiyani quyidagicha

$$G|_{PA}=0, \quad G|_{BQ}=0$$

deb tanlasak, u holda $u(x,t)$ funksiya uchun ushbu ko‘rinishdagi

$$u(x,t)=\int_{AB}u(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi+a^2\int_{AP}u\frac{\partial G}{\partial \xi}d\tau-a^2\int_{BQ}u\frac{\partial G}{\partial \xi}d\tau \qquad (2.12)$$

ifodaga ega bo‘lamiz.

Bu formula issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimini beradi. Bu yerda $G(x,t,\xi,\tau)$ funksiya (2.11) formula orqali aniqlanadi.

$v=v(\xi,\eta)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $v(\xi,\tau)$ funksiya $PABQ$ sohada aniqlangan va ixtiyoriy $\tau<t$ uchun $M(v)=0$ qo‘shma tenglamani qanoatantiradi.

2. $v(\xi,\tau)|_{\tau=t}=0$ shartni qanoatlantiradi.

3. $v(\xi,\tau)|_{PA}=v(\xi,\tau)|_{BQ}=G_0(x,t,\xi,\tau)$

yuqorida keltirilgan xossalarga ko‘ra $v(\xi,\tau)$ funksiya x va t parametrlarga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni

$$v=v(x,t,\xi,\tau)$$

Bu funksiyani aniqlash uchun (1.3.1)-(1.3.2) masalaga qo‘shma bo‘lgan quyidagi masalani yechimi topishimiz zarur.

Qo‘shma masala. $M(v)=0$ tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

1. $v(\xi,\tau)$ funksiya ixtiyoriy $(\xi,\tau)\in PABQ$ uchun $M(v)=0$ qo‘shma tenglamani qanoatantiradi.
2. $v(\xi,\tau)|_{t=\tau}=0$ shartni qanoatlantiradi.
3. $v(\xi,\tau)|_{PA}=v(\xi,\tau)|_{BQ}=G_0(x,t,\xi,\tau)$

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegarasi $\tilde{A}$ sirtdan iborat bo‘lgan biror D sohada birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi deb $M(v)=0$ tenglamani va 2 va 3 shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topishga aytiladi.

2.2-§. Tabiy jarayonlarning ba’zi modellari.

Qattiq jismning ixtiyoriy vaqtdagi haroratni aniqlash uchun xususiy hosilali defferensiyal tenglamaning o’zi yetarli bo’lmaydi. Buning uchun masalaning fizik xossasiga asosan jism ichida boshlang’ich vaqtdagi haroratning taqsimlanishi (boshlang’ich shart)ni va jismning sirtida issiqlik rejimi (chegaraviy shartlar)ni bilish zarur.

Chegaraviy shartlar qattiq jism sirtidagi haroratga qarab turlicha berilishi mumkin. Biz bu paragrafda birinchi chegaraviy masalaning qo’yilishi, yechimining yagonaligi va mavjudligi keltiramiz.

Masalaning qo'yilishi.

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in D \tag{2.13}$$

(2.13) tenglamaning $D = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ sohada

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.14}$$

boshlang'ich va

$$u(0,t) = \psi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.15}$$

$$u(l,t) = \psi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.16}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechimning yagonaligi.

Teorema: Agar (2.13)-(2.16) masalaning yechimi mavjud bo`lsa u yagonadir.

Isbot: Faraz qilaylik (2.13)-(2.16) masalalar 2 ta $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo`lsin. U holda (2.13) tenglama chiziqli bo`lganligi uchun

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

funksiya ham (2.13)-(2.16) masalaning yechimi bo`ladi va quyidagi masala o'rinli bo'ladi.

$$v_t = v_{xx}, \qquad (x,t) \in D \tag{2.17}$$

$$v(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.18}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.19}$$

$$v(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.20}$$

Ekstremum prinsipiga ko'ra $\min_{\bar{D}} u(x,t)$ va $\max_{\bar{D}} u(x,t)$ D sohaning chegarasida erishadi. Bir jinsli (2.18)-(2.20) shartlarga asosan D sohaning chegarasida $v(x,t)$ funksiya nolga teng. Demak $\forall(x,t)\in\bar{D}$ uchun $v(x,t)\equiv 0$ bo'ladi. Bundan $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ ekanligi kelib chiqadi.

Yechimning mavjudligi.

Faraz qilaylik $u(x,t)$ (2.13)-(2.16) masalaning yechimi bo'lsin. (2.13) tenglamada $x\to\xi,\ \ t\to\eta$ almashtirish bajaramiz.

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta}=0$$

Hosil bo'lgan funksiyani Grin funksiyasiga ko'paytiramiz va unga qo'shma bo'lgan

$$G_{\xi\xi}+G_{\eta}=0 \qquad (2.21)$$

tenglmani esa $u(\xi,\eta)$ ga ko'paytirib quyida gi sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} G(x,t,\xi,\eta)u_{\xi\xi}(\xi,\eta)-G(x,t,\xi,\eta)u_{\eta}(\xi,\eta)=0 \\ G_{\xi\xi}(x,t,\xi,\eta)u(\xi,\eta)+G_{\eta}(x,t,\xi,\eta)u(\xi,\eta)=0 \end{cases}$$

Bundan $Gu_{\xi\xi}-uG_{\xi\xi}-Gu_{\eta}-uG_{\eta}=0$ tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Gu_{\xi}-uG_{\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}(Gu)=0 \qquad (2.21)$$

Biz berilgan tenglikni Divergent yechim yoki Divergent ko'rinish deb ataymiz.

$\Omega_{\varepsilon}=\{(\xi,\eta):0<\xi<l,0<\eta<t-\varepsilon\}$ sohada

$$\iint_{\Omega_{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Gu_{\xi}-uG_{\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}(Gu)\right\}d\xi d\eta=0 \qquad (2.22)$$

(2.19) ga Grin formulasini qo'llasak

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} Gud\xi - \left(Gu_\xi - uG_\xi\right)d\eta = 0. \qquad (2.24)$$

Bu yerda $\partial\Omega_\varepsilon = \left\{A_\varepsilon A \cup AB\left(BB_\varepsilon \cup B_\varepsilon A_\varepsilon\right)\right\}$.

Endi (2.20) integralni hisoblab chiqsak

$$\int_0^l G\left(x,t,\xi,0\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi + \int_0^{t-\varepsilon} G_\xi\left(x,t,0,\eta\right)\psi_1\left(\eta\right)d\eta -$$
$$-\int_0^{t-\varepsilon} G_\xi\left(x,t,l,\eta\right)\psi_2\left(\eta\right)d\eta - \int_0^l G\left(x,t,\xi,t-\varepsilon\right)u\left(\xi,t-\varepsilon\right)d\xi = 0$$

hosil bo'ladi.

$$u\left(x,t\right) = \int_0^l G\left(x,t,\xi,0\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi + \int_0^t G_\xi\left(x,t,0,\eta\right)\psi_1\left(\eta\right)d\eta -$$
$$-\int_0^t G_\xi\left(x,t,l,\eta\right)\psi_2\left(\eta\right)d\eta = 0 \qquad (2.25)$$

(2.25) funksiya (2.13)-(2.16) masalaning yechimi bo'ladi.

Teorema (mavjudlik). Agar $\varphi\left(x\right) \in C\left[0,l\right],\ \psi_1\left(t\right),\ \psi_2\left(t\right) \in C\left[0,T\right]$ $f\left(x,t\right) \in C\left[\overline{\Omega}\right]$ C_0 yopiq sohada uzluksiz bo'lsa (2.25) tenglik bilan aniqlangan $u\left(x,t\right)$ funksiya (2.13)-(2.16) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isboti: (13) tenglikning o'ng tomondagi har bir qo'shiluvchini alohida o'rganamiz

$$u_1\left(x,t\right) = \int_0^l G\left(x,t,\xi,0\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi.$$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 \\ G_{xx} - G_1 = 0 \end{cases}$$

$$u_{xx}-u_t=\int_0^l \varphi(\xi)[G_{xx}-G_t]d\xi=0.$$

Qolgan qo'shiluvchilar ham xuddi shunday isbotlanadi. Demak (2.25) tenglik (2.13)-(2.16) masalaning yechimi bo'lar ekan.

Masalaning qo'yilishi.

$$u_t=u_{xx}, \quad (x,t)\in D \tag{2.26}$$

(2.26) tenglamaning $D=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ sohada

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2.27}$$

boshlang'ich va

$$u_x(0,t)=\psi_1(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{2.28}$$

$$u_x(l,t)=\psi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{2.29}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping. Bu masala $\varphi'(0)=\psi_1(0)$ va $\varphi'(l)=\psi_2(0)$ shartlarni qanoatlantirsa masala to'la korrekt qo'yilgan masala bo'ladi.

Yechimning yagonaligi.

Teorema: Agar (1)-(4) masalaning yechimi mavjud bo`lsa u yagonadir.

Isbot: Faraz qilaylik (1)-(4) masalaning 2 ta $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo`lsin. U holda (1) tenglama chiziqli bo`lganligi uchun

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

funksiya ham (2.26)-(2.29) masalaning yechimi bo`ladi va quyidagi masala o'rinli bo'ladi.

$$v_t = v_{xx}, \qquad (x,t)\in D \tag{2.30}$$

$$v(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{2.31}$$

$$v_x(0,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.32}$$

$$v_x(l,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.33}$$

Masala yechimi yagonaligini energiya integrali usulidan foydalanib ko'rsatamiz.

$$v(v_{xx}-v_t)=\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^2-v_x^2=0$$

divergent ko'rinishida yozib olamiz.

Bu ayniyatni $D_1=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T_1\}$ soha bo'yicha integrallaymiz

$$\iint\limits_{D_1} v_x^2dxdt=\iint\limits_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}v^2\right]dxdt$$

o'ng tomonga Grin formulasini qo'llaymiz va integralni hisoblasak

$$\iint\limits_{D_1} v_x^2dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^l v^2(x,T_1)dx=0$$

$$v(x,T_1)=0 \qquad T_1\in[0,T]$$

Bundan $v(x,T)\equiv 0$ yechim ekanligi kelib chiqadi. Demak

$v(x,T)=u_1(x,T)-u_2(x,T)=0$ ya'ni $u_1(x,T)=u_2(x,T)$ bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Yechimning yagonaligi hosila funksiyaning ishorasi haqidagi teoremadan ham isbotlanadi.

$$u_t=u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u \tag{2.34}$$

tenglamani D sohada qaraymiz.

Teorema. (Hosila funksiyaning ishorasi haqida) Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin.

1) $u(x,t)\equiv cons$ funksiya D sohada regulyar yechimi bo'lsin.

2) (2.34) tenglamada $D\cup A_0B_0$ sohada $c(x,t)\leq 0$ bo'lsin. U holda agar $u(x,t)$ funksiya qandaydir $P_0(x_0,t_0)\in \varGamma=\sigma\setminus\overline{AB}$ yoki chap yoki o'ng chegarada musbat maksimum (manfiy minimumga) erishgan bo'lsin.

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial\gamma}<0\qquad\left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial\gamma}>0\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

γ P_0 nuqtada $\varGamma$ chiziqqa o'tkazilga ichki normal bilan o'tkir burchak hosil qiluvchi ixtiyoriy yo'nalish.

1) $P_0(0,t)$

a) musbat maksimum $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial\gamma}<0$

b) manfiy minimum $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial\gamma}>0$ bo'ladi.

Yagonalik teoremasini hosila funksiyaning ishorasi haqidagi ekstremum prinsipida foydalanib isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ chap chegarada birorta P_0 nuqtada musbat maksimumga erishsin, u holda $v_x(P)<0$ bo'ladi. Demak maksimumga ega emas.

$v_x(P)>0$ bo'lganligi uchun minimumga ega emas. Chap chegarada $v(x,t)\equiv 0$ ekan.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya o'ng chegaradagi biror nuqtada musbat maksimumga erishsin. U holda $v_x(P)>0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya chap chegaradagi biror nuqtada manfiy minimumga erishsin. U holda $v_x(P)<0$ bo'ladi. $v_x(P)\equiv 0$ ekanligidan ziddiyatga kelamiz.

Demak o'ng chegarada ham $v(x,t)\equiv 0$ ekan. Bundan $v(x,T)=u_1(x,T)-u_2(x,T)=0$ ya'ni $u_1(x,T)=u_2(x,T)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

2.3-§. Tabiiy jarayonlar uchun aralash masalalar

Masalaning qo'yilishi.

$$u_t=u_{xx},\quad (x,t)\in D \tag{2.35}$$

(2.35) tenglamaning $D=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ sohada

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{2.36}$$

boshlang'ich va

$$u(0,t)=\psi_1(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{2.37}$$

$$u_x(l,t)=\psi_2(t),\qquad 0\le t\le T, \tag{2.38}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping. Bu masala $\varphi(0)=\psi_1(0)$ va $\varphi'(l)=\psi_2(0)$ shartlarni qanoatlantirsa masala to'la korrekt qo'yilgan masala bo'ladi.

Yechimning yagonaligi.

Teorema: Agar (2.35)-(2.38) masalaning yechimi mavjud bo`lsa u yagonadir.

Isbot: Faraz qilaylik (2.35)-(2.38) masalaning 2 ta $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo`lsin. U holda (2.35) tenglama chiziqli bo`lganligi uchun

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

funksiya ham (2.35)-(2.38) masalaning yechimi bo`ladi va quyidagi masala o'rinli bo'ladi.

$$v_t=v_{xx}, \qquad (x,t)\in D \tag{2.39}$$

$$v(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{2.40}$$

$$v(0,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.41}$$

$$v_x(l,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \tag{2.42}$$

Masala yechimi yagonaligini energiya integrali usulidan foydalanib ko'rsatamiz.

$$v(v_{xx}-v_t)=\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^2-v_x^2=0$$

divergent ko'rinishida yozib olamiz.

Bu ayniyatni $D_1=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T_1\}$ soha bo'yicha integrallaymiz

$$\iint_{D_1} v_x^2dxdt=\iint_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}v^2\right]dxdt$$

o'ng tomonga Grin formulasini qo'llaymiz va integralni hisoblasak

$$\iint_{D_1} v_x^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,T_1)dx=0$$

$$v(x,T_1)=0 \qquad T_1\in[0,T]$$

Bundan $v(x,T)\equiv 0$ yechim ekanligi kelib chiqadi. Demak
$v(x,T)=u_1(x,T)-u_2(x,T)=0$ ya'ni $u_1(x,T)=u_2(x,T)$ bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Yechimning yagonaligi hosila funksiyaning ishorasi haqidagi teoremadan ham isbotlanadi.

$$u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u \qquad (2.43)$$

tenglamani D sohada qaraymiz.

Teorema. (Hosila funksiyaning ishorasi haqida) Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin.

1) $u(x,t)\equiv cons$ funksiya D sohada regulyar yechimi bo'lsin.

2) (2.43) tenglamada $D\cup A_0B_0$ sohada $c(x,t)\le 0$ bo'lsin. U holda agar $u(x,t)$ funksiya qandaydir $P_0(x_0,t_0)\in \Gamma=\sigma\setminus\overline{AB}$ yoki chap yoki o'ng chegarada musbat maksimum (manfiy minimumga) erishgan bo'lsin.

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma}<0 \qquad \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma}>0\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

γ P_0 nuqtada Γ chiziqqa o'tkazilga ichki normal bilan o'tkir burchak hosil qiluvchi ixtiyoriy yo'nalish.

1) $P_0(0,t)$

a) musbat maksimum $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma}<0$

b) manfiy minimum $\dfrac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma}>0$ bo'ladi.

Yagonalik teoremasini hosila funksiyaning ishorasi haqidagi ekstremum prinsipida foydalanib isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ chap chegarada birorta P_0 nuqtada musbat maksimumga erishsin, u holda $v_x(P)<0$ bo'ladi. Demak maksimumga ega emas.

$v_x(P)>0$ bo'lganligi uchun minimumga ega emas. Chap chegarada $v(x,t)\equiv 0$ ekan.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya o'ng chegaradagi biror nuqtada musbat maksimumga erishsin. U holda $v_x(P)>0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya chap chegaradagi biror nuqtada manfiy minimumga erishsin. U holda $v_x(P)<0$ bo'ladi. $v_x(P)\equiv 0$ ekanligidan ziddiyatga kelamiz.

Demak o'ng chegarada ham $v(x,t)\equiv 0$ ekan. Bundan $v(x,T)=u_1(x,T)-u_2(x,T)=0$ ya'ni $u_1(x,T)=u_2(x,T)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Masalaning qo'yilishi.

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t)\in D \tag{2.44}$$

(1) tenglamaning $D=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ sohada

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2.45}$$

boshlang'ich va

$$u_x(0,t)=\psi_1(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{2.46}$$

$$u(l,t)=\psi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{2.47}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping. Bu masala $\varphi'(0)=\psi_1(0)$ va $\varphi(l)=\psi_2(0)$ shartlarni qanoatlantirsa masala to'la korrekt qo'yilgan masala bo'ladi.

Yechimning yagonaligi.

Teorema: Agar (2.44)-(2.47) masalaning yechimi mavjud bo`lsa u yagonadir.

Isbot: Faraz qilaylik (2.44)-(2.47) masalaning 2 ta $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo`lsin. U holda (2.44) tenglama chiziqli bo`lganligi uchun

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

funksiya ham (2.44)-(2.47) masalaning yechimi bo`ladi va quyidagi masala o'rinli bo'ladi.

$$v_t=v_{xx},\qquad (x,t)\in D \tag{2.48}$$

$$v(x,0)=0,\qquad 0\le x\le l, \tag{2.49}$$

$$v_x(0,t)=0,\qquad 0\le t\le T, \tag{2.50}$$

$$v(0,t)=0,\qquad 0\le t\le T, \tag{2.51}$$

Masala yechimi yagonaligini energiya integrali usulidan foydalanib ko'rsatamiz.

$$v(v_{xx}-v_t)=\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^2-v_x^2=0$$

divergent ko'rinishida yozib olamiz.

Bu ayniyatni $D_1=\{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t\le T_1\}$ soha bo'yicha integrallaymiz

$$\iint_{D_1} v_x^2\,dxdt=\iint_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}(vv_x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}v^2\right]dxdt$$

o'ng tomonga Grin formulasini qo’llaymiz va integralni hisoblasak

$$\iint_{D_1} v_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,T_1)dx = 0$$

$$v(x,T_1) = 0 \qquad T_1 \in [0,T]$$

Bundan $v(x,T) \equiv 0$ yechim ekanligi kelib chiqadi. Demak

$v(x,T) = u_1(x,T) - u_2(x,T) = 0$ ya’ni $u_1(x,T) = u_2(x,T)$ bo’ladi.

Teorema isbotlandi.

Yechimning yagonaligi hosila funksiyaning ishorasi haqidagi teoremadan ham isbotlanadi.

$$u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u \qquad (2.52)$$

tenglamani D sohada qaraymiz.

Teorema. (Hosila funksiyaning ishorasi haqida) Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilgan bo’lsin.

1) $u(x,t) \equiv cons$ funksiya D sohada regulyar yechimi bo’lsin.

2) (2.52) tenglamada $D \cup A_0B_0$ sohada $c(x,t) \le 0$ bo’lsin. U holda agar $u(x,t)$ funksiya qandaydir $P_0(x_0,t_0) \in \Gamma = \sigma \setminus \overline{AB}$ yoki chap yoki o’ng chegarada musbat maksimum (manfiy minimumga) erishgan bo’lsin.

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma} < 0 \qquad \left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma} > 0\right)$$

tengsizlik o’rinli bo’ladi.

γ P_0 nuqtada Γ chiziqqa o’tkazilga ichki normal bilan o’tkir burchak hosil qiluvchi ixtiyoriy yo’nalish.

1) $P_0(0,t)$

a) musbat maksimum $\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma} < 0$

b) manfiy minimum $\frac{\partial u(P_0)}{\partial \gamma} > 0$ bo'ladi.

Yagonalik teoremasini hosila funksiyaning ishorasi haqidagi ekstremum prinsipida foydalanib isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ chap chegarada birorta P_0 nuqtada musbat maksimumga erishsin, u holda $v_x(P) < 0$ bo'ladi. Demak maksimumga ega emas.

$v_x(P) > 0$ bo'lganligi uchun minimumga ega emas. Chap chegarada $v(x,t) \equiv 0$ ekan.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya o'ng chegaradagi biror nuqtada musbat maksimumga erishsin. U holda $v_x(P) > 0$ bo'ladi.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya chap chegaradagi biror nuqtada manfiy minimumga erishsin. U holda $v_x(P) < 0$ bo'ladi. $v_x(P) \equiv 0$ ekanligidan ziddiyatga kelamiz.

Demak o'ng chegarada ham $v(x,t) \equiv 0$ ekan. Bundan $v(x,T) = u_1(x,T) - u_2(x,T) = 0$ ya'ni $u_1(x,T) = u_2(x,T)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

II bob bo'yicha hulosalar.

Magistirlik dissertatsiya ishining ushbu paragrafida issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun Grin funksiyasi va xossalari o‘rganildi.

Bu boda tabiy jarayonlarning modellari ya’ni birinchi va ikkinchi chegaraviy masalar hamda aralash masalalar o’rganilgan. Birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib isbotlangan. Mavjudligi esa Grin funksiyasi yordamida isbotlangan. Ikkinchi chegaraviy va aralash masalar yechimining yagonaligi energiya integrali yordamida ko’rsatilgan. Mavjudligi birinchi chegaraviy masala singari Grin funksiyasidan foydalanib ko’rsatilgan.

III BOB. TABIIY JARAYONLARNING MATEMATIK MODELLARI.

Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun lokal masalalar juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko'plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun nolokal masalalami o'rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar noklassik masalalar jumlasiga kirib, noklassik masalalar bilan hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlarida juda ko'plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda [16; 329-346, 18; 402-408, 21; 86-100, 23; 1233-1257, 28; 38-46].

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida ham tabiiy jarayonlar uchun parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki nolokal chegaraviy shartli masala va masala yechimining yagonaligi hamda mavjudligi qaraladi.

3.1-§. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki chegaraviy nolokal masala

Ushbu paragrafda parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun bitta noklassik masala, ya'ni ichki nolokal masala o'rganiladi. Masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib ko'rsatildi,

1. Masalaning qo'yilishi. $D = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ sohada

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D \tag{3.1}$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3.2}$$

boshlang'ích va chegaraviy

$$u(0,t) = \alpha u(x_1,t), \ \ 0 \le t \le T, \tag{3.3}$$

$$u(l,t) = \beta u(x_2,t), \quad 0 \le t \le T \tag{3.4}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

Shu bilan birgalikda (3.1)-(3.4) masalada quyidagilar berilgan dcb qilamiz:

1. $\varphi(x)$ - uzluksiz funksiya;

2. $\alpha,\ \beta,\ x_1\ va\ x_2$ - musbat o'zgarmaslar bo'lib, quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirsin

$$0 < \alpha, \le 1, \qquad 0 < \beta \le 1, \qquad 0 < x_1 < 1 \qquad 0 < x_2 < 1;$$

3. Quyidagi kelushuvlik shartlari bajarilsin:

$$\varphi(0) = \alpha u(x_1,0) = \beta u(x_2,0), \quad \varphi\,(l) = \beta u(x_2 0).$$

(3.2) va (3.3) ko'rinishdagi ichki nolokal shartli masalalar populyatsiyaning ko'payish strukturasining yozilishidan kelib chiqqan [14]. Ichki nolokal shartli masalalar turli ko'rinishdagi parabolik tipdagi tenglamalar uchun juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan, bunga doir umumiy ma'lumotlarni [26] dan olish mumkin.

Aprior baholar.

Lemma 3.1. Agar 1.2 -shartlar bajarilsa, u holda (3.1)-(3.4) masalaning echimi uchun

$$|u(x,t)| \le M, (x,t) \in D \tag{*}$$

baho o'rinli bo'ladi, bu erda $M = \max\left\{ \max_{x\in[0,t]} |\varphi(x)| \ \max_{t\epsilon[0,t]} |\varphi(x)| \right\}.$

Isbot. Lemma 3.1 ning isboti bevosita (3.1)-(3.4) masalaning shartidan 1.2.3. shartlardan va dissertatsiyaning ikkinchi bobi ikkinchi paragrafidagi parabolik tipdagi tenglamalar uchun keltirilgan ekstremum prinsipi va uning ikkinchi xossasidan ya’ni: Agar $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining echimi bo’lsa, u holda $\forall(x,t) \in Q$ *uchun* quyidagi munosabat $\left|u(x,t)\right| \leq \max_{\Gamma}\left|u(x,t)\right|$ o’rinli ekanligidan $(x,t) \in D$ sohada (3.1)-(3.4) masala echimi uchun

$$|u(x,t)| \leq \max\left\{\max_{x\in[0,t]}|\varphi(x)| \max_{t\epsilon[0,t]}|\varphi(x)|\right\} = M.$$

baho o’rinli bo’ladi.

Lemma 3.1. isbot bo’ldi.

3. Masala yechimining yagonaligi.

Teorema 3.1. Agar (3.1)-(3.4) masalaning yechimi mavjud bo’lib, (1)-(2) shartlar bajarilsa. u holda (3.1)-(3.4) masalaning echimi yagonadir.

Bu teoremaning isbotlashda ekstremum prinsipidan foydalanamiz.

Ekstremum prinsipi. Yopik $\overline{Q}$ sohada uzluksiz bo’lgan va Q soha ichida bir jinsli (3.1) tenglamani qanoatlantiradigan $u(x,t)$ funksiya o’zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziq ustida erishadi.

Isbot. Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiyaning Q to’rtburchak $\{0< x< l,\ 0< t \leq T\}$ dagi eng katta qiymati M, Γ chiziq ustidagi eng katta qiymati esa m bo’lsin va ekstremum prinsipida aytilgan tasdiq o’rinli bo’lmasin. Bu degani Shunday $(\bar{x},\bar{t})$ ichki nuqta topilsinki, bu nuqtada $M > m$ bo’lsin deganidir. Quyidagi yordamchi

$$u(x,t) = u(x,t) + \frac{M - m}{2T}(\bar{t} - t)$$

funksiyani qaraylik. Q to’rtburchakning Γ chegarasida (ya’ni $t = 0$, $x = 0$ va $x = l$ da)

$$u(x,t) \le m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M$$

bo’lishini ko’rish qiyin emas. Shu bilan birga

$$u(\bar{x},\bar{t}) = u(\bar{x},\bar{t}) = M.$$

Demak, yordamchi $u(x,t)$ funksiya ham, $u(x,t)$ kabi o’zining eng katta qiymatiga Γ da erishmaydi.

Shunday ekan, faraz qilaylik $u(x,t)$ funksiya o’zining eng katta qiymatiga birorta ichki (x_1,t_1) $(0 < x_1 < l, 0 < t_1 < T)$ nuqtada erishsin. U holda, matematik analiz kursidan ma’lumki, Shu nuqtada

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1^2} \le 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}_1} \ge 0$$

$(\mathrm{t}_1 < T)$ bo’lsa, $\frac{\partial v}{\partial t_1} = 0;$ $\mathrm{t}_1 = \mathrm{T}$ bo’lsa, $\frac{\partial u}{\partial t_1} \ge 0$

munosabatlar o’rinli buladi. Demak, (x_1,t_1) nuqtada

$$u_t - a^2 u_{xx} \ge 0 \tag{1.15}$$

tengsizlik bajariladi. Ikkinchi tomondan

$$u_t - a^2 u_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - \frac{M - m}{2T} = -\frac{M - m}{2T} < 0$$

bo’lishi kerak. Bu esa (1.15) ga zid. Demak, $M > m$ bo’ladigan nuqta topiladi deb qilgan farazimiz noto’g’ri va eng katta qiymat uchun prinsip isbotlandi. Eng kichik qiymat uchun ham xuddi Shunday isbotlanadi.

Endi 3.1 teoremani isbotlaymiz.

Isbot. Faraz qilaylik, D sohada (3.1)-(3.4) masala ikkita yechimga bo’lsin, ya’ni $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ bo’lsin.

$$u_1(x,0) = \varphi(x), \qquad u_2(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_1(0,t) = \alpha u(x_1,t), \qquad u_2(0,t) = \alpha u(x_1,t)$$

$$u_1(l,t) = \beta u(x_2,t), \qquad u_2(l,t) = \beta u(x_2,t)$$

U holda ularning ayirmasi ham yechim bo'ladi

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

Bundan $v(x,t)$ funksiya uchun D sohada quyidagi masalani olamiz:

$$v_l(x,t) = v_{xx}(x,t), \qquad (x,t)\epsilon\, D \qquad (3.5)$$

tenglamaning

$$v(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le l \qquad (3.6)$$

boshlang'ich va chegaraviy

$$v(0,t) = \alpha v(x_1,t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (3.7)$$

$$v(l,t) = \beta v(x_2,t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (3.8)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

(3.5)-(3.8) masaladan ko'rinadiki, parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipiga ko'ra, $v(x,t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga sohaning chegarasida erishadi. (3.6) shartga ko`ra $v(x,t)$

funksiya nolga teng. Ammo (3.7) va (3.8) nolokal shartlarga ko'ra o'ng va chap chegaralarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishi ham mumkin.

Faraz qilaylik, $v(x,t)$ funksiya chap chegaradagi P_1 nuqtada o'zining musbat maksimumiga erishsin. U holda (3.7) nolokal shartdan va masala shartidagi ikkinchi shartning birinchisiga ko'ra, ya'ni $0 < \alpha \leq 1$ ekanligidan quyidagi tengsizlik hosil bo`ladi.

$$v(0,t) = \alpha v(x_1,t),\ 0 < \alpha \leq 1 \ \rightarrow\ v(0,t) \leq v(x_1,t)$$

Bunga ko`ra sohaning ichida undan ham kattaroq musbat maksimumga erishar ekan. Bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $v(x,t)$ funksiya chap chegarada musbat maksimumga erishmas ekan. Xuddi shunday mulohazalar bilan chap chegarada manfiy minimumga erishmasligi ham ko'rsatiladi.

Endi o'ng chegarani qaraymiz. Faraz qilaylik, $v(x,t)$ funksiya o'ng chegaradagi P_2 nuqtada o'zining musbat maksimumiga erishsin. U holda (3.8) nolokal shartdan va masala shartidagi ikkinchi shartning ikkinchi qismiga ko'ra, ya'ni $0 < \beta \leq 1$ ekanligidan quyidagilar hosil bo`ladi.

$$v(l,t) = \beta v(x_2,t),\ \ 0 < \beta \leq 1 \ \rightarrow\ v(l,t) \leq v(x_2,t)$$

Bunga ko`ra sohaning ichida undan ham kattaroq musbat maksimumga erishar ekan. Bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $v(x,t)$ funksiya o'ng chegarada ham musbat maksimumga erishmas ekan. Xuddi shunday o'ng chegarada ham shunday mulohazalar bilan manfiy minimumga erishmasligi ham ko'rsatiladi.

Demak, (3.5)-(3.8) masalaning echimi D sohada nolga teng bo'lar ekan, ya'ni $v(x,t) = 0$ ekanligini olamiz. Bundan $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ga ko'ra $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ ekanligini olamiz.

Teorema 3.3. isbot bo'ldi.

3.2-§. Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki chegaraviy nolokal masala

Ushbu paragrafda parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo’lgan issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun bitta noklassik masalaning, ya’ni ichki nolokal masala yechimining mavjudligi o’rganiladi. Masala yechimining mavjudligi issiqlik qatlami potensiallari yordamida ko’rsatiladi.

Buning uchun (3.7) va (3.8) shartlarni

$$v(0,t) = \alpha v(x_1,t) = \chi_1(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3. 9}$$

$$v(l,t) = \beta v(x_2,t) = \chi_2(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3.10}$$

kabi belgilab olamiz. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiallarining quyidagi xossalini keltiramiz.

Quyidagi funksiyalar:

$$V = a^2 \int_{AP} G\nu(\tau)d\tau = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)d\tau, \tag{3.11}$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G}{\partial \xi} \mu(\tau)d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)d\tau, \tag{3.12}$$

Sohaning ichki nuqtalari (x,t) da issiqlik tarqalishi tenglamasi (3.11) tenglamani qanoatlantiradi va mos ravishda oddiy va ikkilangan qatlam issiqlik potensiallar deb ataladi.

V va W funksiyalarning (x,t) bo’yicha ixtiyoriy uzluksiz $\nu(\tau)$, $\mu(\tau)$ lar uchun (2.2.1) tenglamani qanoatlantirishi o’z-o’zidan ravshan, chunki tenglamani G va $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ funksiyalar qanoatlantiradi. Bu yerda G- funsiya (3.1) tenglamaning fundamental yechimi bo’lib, u quyidagi ko’rinishga ega

$$G(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\xi]^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Bunda Shuni hisobga olish lozimki, integral chegarasidagi t bo’yicha olingan hosila $x \neq c_1(t)$ bo’lganda har doim nolga teng.

Endi $V(x,t)$ va $W(x,t)$-issiqlik potensiallarining sohaning $x=c_1(t)$ chegarasi ustidagi $\left(x=c_2(t)\right)$ chiziq ustida ham Shunga o’xshash bo’ladi) xususiyatini o’rganamiz. Qulaylik uchun e^x ni $\exp(x)$ ko’rinishida yozib olamiz.

Ko’rinib turibdiki, $V(x,t)$ integral $x=c_1(t)$ chegarada

$$V\left(c_1(t),t\right)=\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{v(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{c_1(t)-c_1(\tau)}{4a^2(t-\tau)}\right)$$

ko’rinishda bo’lib, integral ostidagi ifoda ko’pi bilan $\frac{1}{2}$ darajali integrallanuvchi maxsuslikka ega bo’lishi mumkin. Demak $V(x,t)$ integral $x=c_1(t)$ chegarada uzluksiz (albatta $v(\tau)$ zichlik funksiya uzluksiz deb faraz qilinadi).

$W(x,t)$ integral esa $x=c_1(t)$ chegarada uzilishga ega bo’lib, bu uzilish uchun ixtiyoriy $c_1(t),\ \mu(t)\in C^1$ bo’lganda, quyidagi munosabatlar o’rinlidir:

$$W(x,t)\Big|_{x=c_1(t)\pm 0}=W(x,t)\Big|_{x=c_1(t)}\pm \mu(t). \qquad (3.13)$$

Bu munosabatlardagi $x=c_1(t)\pm 0$ ichki (x,t) nuqta AP egri chiziqda yotgan nuqtaga o’ng tomondan $\left(x>c_1(t)\right)$ yoki chap tomondan $x<c_1(t)$ intilayotganini bildiradi.

(3.11) munosabatlarni isbotlash uchun zichlik funksiyasi o’zgarmas deb faraz qilamiz, ya’ni $\mu(t)=\mu_0$ bo’lsin:

$$W_0(x,t)=\int_0^t \frac{\mu_0}{2a\sqrt{\pi}}\frac{\left(x-c_1(\tau)\right)^2}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}\exp\left[\frac{\left(x-c_1(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau .$$

Shu bilan bir qatorda AP chiziq ustida uzluksiz bo’lgan ushbu yordamchi

$$V_0(x,t)=\frac{\mu_0}{2a\pi}\int_0^t \frac{\left(x-c_1(\tau)\right)^2}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[\frac{\left(x-c_1(\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau$$

funksiyani qaraylik. Quyidagi ayirmani hisoblaymiz:

$$W_0(x,t)-V_0(x,t)=\frac{\mu_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{(x-c_1(\tau))^2}{(t-\tau)^{3/2}}-\frac{c_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right]$$

$$\times\exp\left[\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau=\frac{\mu_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\exp(-\alpha^2)d\alpha .$$

Bu yerda

$$\alpha=\frac{x-c_1(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}},\qquad \alpha_0=\frac{x-c_1(t_0)}{2a\sqrt{t-t_0}},$$

$$\alpha=\begin{cases}+\infty\ , & agar\ \ x>c_1(t)\ \ bo`lsa;\\ 0, & agar\ \ x=c_1(t)\ \ bo`lsa;\\ -\infty\ , & agar\ \ x<c_1(t)\ \ bo`lsa.\end{cases}$$

Agar $x\to x_0\pm 0$ (bunda $x_0=c_1(t_0)$) da limitga o'tsak,

$$[W_0(x_0\pm 0,t)-W_0(x_0,t)]-[V_0(x_0\pm 0,t)-V_0(x_0,t)]=$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu_0\int_0^{\pm\infty}\exp(-\alpha^2)d\alpha=\pm\mu_0$$

tenglikka ega bo'lamiz. $V_0(x,t)$ funksiyaning uzluksizligidan $V_0(x_0\pm 0,t)=V_0(x_0,t)$ bo'ladi va bundan

$$W_0(x_0\pm 0,t)=W_0(x_0,t)\pm\mu_0$$

munosabatni olamiz.

Endi faraz qilaylik, $\mu(t)\neq const$ bo'lsin. U holda $W(x,t)$ ni quyidagicha yozamiz:

$$W(x,t)=W_0(x,t)-\psi(x,t), \qquad (3.14)$$

bu yerda

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right][\mu(\tau)-\mu(t)]d\tau .$$

Yuqoridagi kabi bu yerda ham $\mu(\tau)\in C^1$ dan $\tau = t$ da bu integral $V(x,t)$ integral kabi kuchsiz (integrallanuvchi) maxsuslikka ega va u yaqinlaShuvchi bo'lib, $x = c_1(t)$ chiziq ustida uzluksiz bo'ladi.

Tushunarli bo'lishi uchun $W_0(x,t)$

$$W_0(x,t) = W(x,t) + \psi(x,t)$$

ko'rinishda yozib olib, $W(x,t)$ va $\psi(x,t)$ larning o'rniga ularni ifodalovchi integrallarni qo'yib topamiz:

$$W_0(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\mu(\tau)d\tau \; +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\left[\mu(t)-\mu(\tau)\right]d\tau \; =$$

$$=\frac{\mu(t)}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau .$$

Oxirgi integral yuqorida biz o'rgangan $\mu_0 = const$ bo'lgan holdagi integralning o'zi, faqat bu yerda $\mu_0 \equiv 1$, demak

$$W_0(x_0 \pm 0,t) = W_0(x_0,t) \pm \mu(t)$$

ekani kelib chiqadi, yoki

$$W(x_0 \pm 0,t) = W_0(x_0 \pm 0,t) - \psi(x_0 \pm 0,t) = W_0(x_0,t) \pm \mu(t). \qquad (3.15)$$

Aynan Shuni isbot qilish kerak edi.

Endi yana oddiy qatlam potensialini qaraylik. Uning hosilasi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1}\frac{x-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\nu(\tau)d\tau$$

zichlik funksiyasi $\mu(t) = \frac{1}{2}\nu(t)$ bo'lgan va teskari ishora bilan olingan ikkilangan qatlam potensialiga teng. Unda yuqoridagi hisob-kitoblarga asosan

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0\pm 0}=\frac{\partial V(x_0,t)}{\partial x}\pm\frac{\nu(t)}{2}$$

tenglikka ega bo’lamiz. Bu yerda

$$\frac{\partial V(x_0,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_0\pm 0}+\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_0-0}\right]=$$

$$=\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{x_0-c_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[\frac{(x-c_1(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\nu(\tau)d\tau .$$

Ta’kidlash lozimki, $V(x,t)$ funksiya x_0 nuqtaning o’zida hosilaga ega emas.

Shunday qilib, biz issiqlik potensiallarining AP $(x=c_1(t))$ chegara ustidagi xossalarini o’rgandik. BQ $(x=c_2(t))$ chegara ustida issiqlik potensiallarining xossalarini tekshirish mumkin ular Yuqoridagiday bo’ladi [7; 161-168, 8; 158-170, 9; 305-357, 10; 297-327].

Masala yechimining mavjudligi.

Endi (3.1)-(3.4) masala yechimining mavjudligini ko’rsatamiz.

Teorema 3.4. (3.1)-(3.4) masalaning yechimi mavjuddir.

Isbot. (3.1)-(3.4) masalaning yechimini quyidagi ikkilangan qatlam issiqlik potensialllari yig’indisi shaklida izlaymiz:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(W_1+W_2)=\frac{1}{2}W_1+\frac{1}{2}W_2$$

Bundan

$$u(x,t)=\int_0^t G_\xi(x,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta+\int_0^t G_\xi(x,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^t G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.16)$$

ega bo’lamiz. Bu yerda

$$G(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\eta)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}, \qquad (3.17)$$

bo’lib, (3.1) tenglamaning fundamental echimidir. Ikkilangan qatlam potensialining quyidagi sakrashdagi xossasidan foydalanamiz:

$$W(x,t)|_{x=x_0\pm 0}=W(x,t)|_{x=x_0}\pm\mu(t).$$

(3.2) chegaraviy shartlardan (3.9) dan $x\to 0+0$ da limitga o’tsak, quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\frac{1}{2}\mu_1(\mathrm{t})+\int_0^t G_\xi(0,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta+\int_0^t G_\xi(0,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^t G(0,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi=\tau(t),$$

Endi $u(0,t)=\alpha u(x_0,t),\ 0\le t\le T,$ (3.2) chegaraviy shartdan va (3.1) dan quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\alpha\int_0^t G_\xi(x_0,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta+\beta\int_0^t G_\xi(x_0,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta=\int_0^t G(x_0,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi$$

Hosil bo’lgan bu tengliklarni tenglashtirib, quyidagi munosabatni olamiz:

$$\frac{1}{2}\mu_1(\mathrm{t})+\int_0^t G_\xi(0,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta+0\int_0^t G_\xi(0,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^t G(0,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi=-\frac{1}{2}\mu_2(\mathrm{t})+\int_0^t G_\xi(l,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^t G_\xi(l,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta+\int_0^t G(l,t;l,0)\varphi(\xi)d\xi$$

Bundan esa,

$$\frac{1}{2}\mu_1(\mathrm{t}) + \int_0^t [G_\xi(0,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta - \alpha G_\xi(x_0,t;0,\eta)]\mu_1(\eta)d\eta +$$

$$+\int_0^t [G_\xi(0,t;l,\eta) - \beta G_\xi(x_0,t;l,\eta)]\mu_2(\eta)d\eta + \int_0^t [G(0,t;\xi,0) -$$

$$-G(x_0,t;\xi,0)]\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.18)$$

Volterraning 2-tur integral tenglamasiga kelamiz.

Endi (3.4) shartdan foydalanib, (3.1) tenglamadan $x \to l - 0$ da limitga o'tib, quyidagi Volterraning 2-tur integral tenglamasiga ega bo'lamiz.

$$-\frac{1}{2}\mu_2(t) + \int_0^t G_\xi(l,t;0,\eta)\mu_1(\eta)d\eta + \int_0^t G_\xi(l,t;l,\eta)\mu_2(\eta)d\eta +$$

$$+\int_0^t G(l,t;l,0)\varphi(\xi)d\xi = \psi(t). \qquad (3.19)$$

Shunday qilib, biz (3.1)-(3.4) masalani ikkinchi tur (3.11), (3.12) Volterra integral tenglamalar sistemasini yechishga olib keldik. Volterra integral tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega [7; 161-168, 8; 158-170, 9; 305-357, 10; 297-327].

3.4-teorema isbotlandi.

III bob bo'yicha hulosalalar.

Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun lokal juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko'plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun nolokal (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati berilmasdan, balki sohaning u yoki qismi orasidagi bog'lanishlar beriladi) masalalami o'rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar noklassik masalalar jumlasiga kirib, noklassik masalalar bilan hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlarida juda ko'plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida ham parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki nolokal chegaraviy shartli masala va nolokal chegaraviy shartli masalalar ko'rildi.

Ushbu bobda parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun bitta nolokal masala o'rganiladi. Masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib ko'rsatildi, yechimning mavjudligi esa issiqlik potensiallari usuli yordamida ko'rsatiladi.

XULOSALAR.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro`yhatidan iborat. 1-bob 3 ta paragrafdan, 2-bob 3 ta paragrafdan, 3-bob 2 ta paragrafdan iborat. 1-bob issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamalari va masalaning qo`yilishi haqida, 2-bob issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamalari uchun Grin funksiyasi va noklassik masalalar haqida bo`lsa, 3-bobda esa issiqlik o’tkazuvchanlik jarayonlarning nolokal va ichki nolokal chegaraviy masalalari o`rganildi.

Dissertatsiyaning birinchi bobda boshlang`ich tushunchalar va masalaning qo`yilishiga bag`ishlangan bo`lib, unda boshlang’ich va birinchi chegaraviy masalaning qo`yilishi, ekstremum prinsipi, birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi keltirilgan.

Ikkinchi bobda esa parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo‘lgan issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun Grin funksiyasi birinchi va ikkinchi chegaraviy shartli masalalar hamda aralash masalalar qaraladi. Masalalar yechimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib ko’rsatilgan, yechimning mavjudligi esa issiqlik potensiallari usuli yordamida ko’rsatilgan.

Magistrlik dissertatsiyasining uchinchi bobida issiqli o’tkazuvchanlik jarayonlarning noklassik modellarini o`rganishga bag`ishlangan. Unda issiqlik o’tkazish tenglamalari uchun nolokal va ichki nolokal masalalar o`rganilgan. Qaralayotgan masalalar qo`yilgan va masalalarning yechimlari uchun aprior baholar olingan, issiqlik tarqalish tenglmalarini keltirib chiqarish, ekstremum prinspi va chegaraviy masalalarni yechishda ko’p qo’llaniladigan ba’zi bir xossalar, teoremalar ularning mavjudlik va yagonaligi isbotlari, qattiq jism va izotrop jismda iisiqlikning tarqalish tenglamasi, parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o’rganishda eng ko’p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo’lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi keltirilgan.

Magistirlik dissertatsiya ishining II-bobida issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan birinchi chegaraviy masalaning Grin funksiyasi va xossalari o‘rganilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

Normativ – huquqiy hujjatlar va matadologik ahamiyatga molik nashrlar

1. Mirziyoyev Sh.M .“Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz.” Toshkent, “O’zbekiston” , 2017.
2. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining Oliy Majlisga murojatnomasi. LEX.UZ.
3. Mirziyoyev yanvarda yosh tadqiqotchilar, ilmiy tadqiqot muassasalari rahbarlari va ishlab chiqarish sektori vakillar bilan uchrashuvda so’zlagan nutqi. LEX.UZ.
4. O’zbekiston Respublikasining “ Ta’lim to’g’risida” gi Qonuni.// O’zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 y.,225-modda
5. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi.// O’zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 y.,295-modda
6. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining Oliyta’lim tizimi 2030 yilgacha rivojlantirish kontsepsiyasi. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining ПФ5847-son 08.10.2019 farmoniga ilova. LEX.UZ.
7. Жураев Т. Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари. Тошкент, Университет, 2013. 332 бет.
8. Зикиров О. С. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Тошкент, Университет, 2012. 260 бет.
9. Салоҳиддинов М. С. Математик физика тенгламалари.Тошкент. “Ўқитувчи”. 2002. 445 б.
10. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, с.736.
11. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.428 с.
12. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232. С

13. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередачаю М.: Едиториал УРСС, 2003.-784 с.
14. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры., М.: Ноука. Физматлит, 1997, 320 с.
15. Visintin A. Models of phase transitions. Progress Nonlinear Differential Equations, vol.28, Birkhauser, Baston, MA, 1996.

Monografiya, ilmiy maqola, patent, ilmiy to'plamlar.

16. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнение с двумя независимыми переменными // Труы Моск. Матем. Общ.ва. т.16 (1967). 329-346.
17. Douglas, Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. // Proc. Amer.Math.Soc. 1957.Vol.8, No.4. P.402-408.
18. Ильин А.М, Калашников А.С, Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.// УМН, 1962, Т. 17, вып. 3, с.3-141.
19. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе. // Украинский математический журнал (2012), т.64, №1, стр.71-80.
20. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.мат.Науки".2012. №26. С.99-106.
21. Takhirov J.O., Turaev R.N. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences, (New York), Vol.187, No.1, (2012). pp. 86-100.
22. Turaev R.N. Nonlocal Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection. Bulletin of University of Karaganda. 2020. No 4. P.1221.

23. Ren-Hu Wang a,b, Lei Wang a, Zhi-Cheng Wang.Free boundary problem of a reaction–diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018). 1233-1257.
24. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. Пер. с англ. / Г. Готтштайн. - Москва : БИНОМ; Лаборатория знаний, 2011. - 400 с.
25. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. A one-phase Stefan problem for a nonclassical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. //App.Math.and Com. 2016. No.182, № 5. P. 809-818.
26. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face.// El.Jour.Differ.Eq. 2016. No.206, № 21. P.1-16.
27. Zh. O. Takhirov. Florin-Type problem for the Parabolik Equation with power Nonlinearity.// Journal .Mat.Scians.2020. vol.246,p.429-444.
28. Тахиров Ж. О., Тўраев Р. Н. Задача с нелокальным условнием на свободной границе.// Укр.Мат.Журнал, 2012,том.64. No1.с.38-46.
29. Т. Д. Вентцель. Об одной задаче со свободной границей для уравнение теплопроводиости. // Докл. АН СССР, 1960, том 131, номер 5, 1000-1003.
30. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнение. // Вестник МГУ. Сер 1. Мат.№2. 1966.с.40-54.
31. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнение. // Вестник МГУ. №5ю1966. с. 51-62.

Foydalanilgan boshqa adabiyotlar.

32. Internet saytlari.
   - http:// mathserfer. com.uz.
   - http:// gufo.me.
   - http:// xn- b1 agsdjmeufge. xn- p1 ai.
   - http:// easymath. Com. Uz.
   - http:// www. mathforyou. net.

– http:// www. skoltech.uz.
– http:// comp – science. narod. uz.