KIRISH

Yer kurrasining odatdagi qiyofasi harorat (temperatura) larning juda torgina oralig’i (intervali) da bo'ladi. Agar harorat 100°c dan ortib ketsa, yerda odatdagi atmosfera bosimida daryo, dengiz va okeanlar bo'lmas, umuman suv bo'lmas edi. Butun suv bug’ga aylanib ketgan bo'lar edi. Harorat bir necha gradusga pasaysa, okeanlar katta-katta muzliklarga aylanib qolar edi.

Issiqlik hodisalari insonning diqqatini qadim zamonlardan beri o'ziga tortib kelgani ajablanarli emas. Inson olov chiqarishni va o'chirmay turishni o'rganib olgandan so'nggina tevarak atrofdagi haroratning o'zgarishiga tobelikdan qutuldi, desa bo'ladi. Bu esa insonning eng buyuk kashfiyotlaridan biri edi.

Yuqorida tilga olingan va boshqa ko'pgina issiqlik hodisalari ma'lum bir qonunlarga bo'ysunadi. Issiqlik hodisalari qonunlarining kashf etilishi bu hodisalardan amalda va texnikada samarali foydalanishga imkon beradi. hozirgi zamon issiqlik dvigatellari, gazlami suyuqlika aylantiradigan qurilmalar, sovitkich apparatlar va ko'pgina boshha qurilmalar ana shu qonunlarga asoslanib loyihalanadi.

Magistrlik dissertatsiyasining dolzarbligi: Issiqlik almashinish jarayonlarini o'rganish, issiqlik energiyasidan tejamli foydalanish masalalari bilan chambarchas bog’liq. Chunki hozirgi davrda butun dunyoda energiya tanqisligi ro'y berayotgan bir paytda issiqlik almashinish jarayonlarini o'rganish va uning boshqarish energiya manbalaridan tejamli foydalanish imkonini beradi.

Tadqiqot ob'ekti va predmeti: Tadqiqot ob'ekti bo'lib vertikal joylashgan biror issiqlik manbasiga ega bo'lgan sterjendan issiqlik tarqalayotgan muhit hisoblanadi. Sterjen temperaturasi muhit temperaturasidan katta deb hisoblanadi. Ana shu issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirish ushbu ishning mazmunidir.

Ishning maqsadi va vazifalari: Muhitda issiqlik tarqalish jarayonlarini aks ettiruvchi matematik modelni tanlash va uni biror usul yordamida yechib muhitning turli nuqtalarida issiqlikning qay darajada tarqalayotganini aniqlash. Bunda muhit fizik holati, sterjendagi temperaturaning qiymati shu muhitda issiqlik tarqalishiga qay darajada ta'sir etishini aniqlash.

Tadqiqot usuli va uslubiyoti: Tanlangan chegaraviy qatlam nazariyasiga asoslangan xususiy hosilali differentsial tenglamalami sonli usullar yordamida yechish.

Olingan asosiy natijalar: Matematik model va uni echish algoritmi asosida yozilgan dastur yordamida sterjen temperaturasining turli qiymatlarida muhitdagi temperatura, zichlik, tezlik parametrlari aniqlandi. Bunda sterjenning temperaturasining oshishi qatlam oshishiga unchalik ta'sir qilmaydi, lekin sterjen yonida yuqoriga yo'naltirilgan tezlikni oshishiga olib keladi. Muhitning holati esa qatlam chegaralariga ta'sir qiladi, ya'ni muhit gaz xolati bo'lganda suyuqlik bo'lgandagiga qaraganda issiqlik tezroq tarqaladi. Bu holat Prandtl sonining turli qiymatlarida olingan natijalar bo'yicha aniqlandi.

Natijalarning ilmiy yangiligi va samaradorligi: Ushbu ishda muhit zichligi o'zgaruvchan deb haralgan holda unda issiqlik tarqalish masalasi o'rganildi. Shuningdek, ikki parallel sterjen orasida ham issiqlik tarqalish masalasi ko'rildi. Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi: Tuzilgan dastur va natijalardan issiqxona kabi ob'ektlarda issiqlik tarqalish masalasini o'rganishda qo'llash mumkin. Shuningdek olingan matematik modeldan tadbiqiy masalalarni modellashtirish fanlarida nazariy va amaliy mashg’ulotlari o'tishda foydalanish mumkin.

Dissertatsiya kirish, 3 ta bob, xotima, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Kirishda mavzuning dolzarbligi, uning maqsad va vazifalari, tadqiqot usuli va uslubiyoti, olingan natijalar hamda natijalarning ilmiyligi va samaradorligi keltirilgan. 1 bobda konfektsiya hodisasini hisobga olgan holda issiqlik tarqalish masalalarida qo'llaniladigan matematik modellar haqidagi ma'lumotlar keltirilgan. Bunda asosan chegaraviy qatlam tushunchasi, uning qalinligini baholash va chegaraviy qatlam nazariyasiga asoslangan diffirentsial tenglamalar bayon qilinadi.

2 bobda dissertatsiyada qo'yilgan masala uchun matematik model tanlanib differensial tenglamalar keltirilgan. Bunda og'irlik kuchi e'tiborga olingan, chegaraviy shartlar qo'yilib masalaning yechish usuli tanlangan.

3 bobda Issiqlik almashinish jarayonlari issiqlik energiyasidan tejamli foydalanish masalalari bilan chambarchas bog'liq. Ilmiy-texnik progress, ishlab chiqarishni intensifikatsiyalash kabilar energetika holati bilan aniqlanadi. Energiyasiz harakat ham, ishlab chiqarish ham, hayotning o'zi ham yo'q deganidir. Hozirgi davrda neft, gaz, ko'mir kabi energiya resurslarining kamayib borayotgani bu sohaga e'tiborni talab qiladi. Umuman, energiya masalalarini o'rganish insoniyatni barcha rivojlanish davrlarida bo'lgan.

Issiqlik texnikasi bilan bog'liq birinchi fundamental ishlardan biri 1824 yili fransuz injeneri Sadi Kamo tomonidan chop etilgan. U termodinamika asoslarini izohlab berdi. Uning ishlarini Klapeyron matematik tilga ko'chirib, issiqlik mashinalarida - takrorlanish masalalarini yoritdi [3].

1855-1865 yillarda qaytariluvchi va qaytarilmas jarayonlar va entropiya tushunchalari kiritildi. Entropiya bu issiqlik ko'rinishida tarqaluvchi energiyadir. Ishqalanish, issiqlik almashish jarayonlari qaytmas bo'lgani uchun izolyatsiyalangan sistemalar entropiyasi doimo ortadi. Termodinamikaning ikkinchi bu qoidasini Klazius butun olamga tadbiq etib, "issiqlik o'limi" degan tushunchani kiritdi. Bu tushunchaga binoan qachondir butun olamdagi energiya issiqlikka o'tadi va temperatura barcha joyda bir xil bo'lib qoladi. Bunda Klazius dunyoning cheksizligini e'tiborga olmagan.

Issiqlik va massa almashinish nazariyasi tarixi Nyutonga borib taqaladi. 1701 yilda Nyuton konvektiv issiqlik almashinish qonunini ochdi [2]. 1822 yilda J.B.Fur'e issiqlik almashinish nazariyasini e'lon qildi.

Termodinamika so'zi grekchadan terme - issiqlik, dinamikos - harakat degan ma'nolarini anglatadi. Birinchilardan bo'lib bu so'zni S.Kamo qo'llagan. Termodinamikada bir qancha tushunchalar ishlatiladi, bular sistema ochiq va yopiq sistemalar, energiya, ish, issiqlik, issiqlik energiyasi, entropiya, absolyut temperatura kabilardir.

Sistema bu materiyaning biz izlanish olib borayotgan qismidir. Ochiq sistemalar yopiq sistemalardan farqli ravishda tashqi muhit bilan issiqlik va hokazo almasha oladi.

Agar parametrlari vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, bunday sistema statsionar deyiladi. Energiya bu materiya harakatining o'lchovi bo'lib, u sistemaning ish bajarish qobiliyatini aniqlaydi. Ish - sistema energiyasining bir holatdan ikkinchi holatga o'tishidagi o'zaro munosabatidir. Issiqlik molekulalar harakati natijasida hosil bo'luvchi energiyadir.

Ko'pgina energetik jarayonlar issiqlik o'tkazish masalalari bilan bog’liqdir. Issiqlik o'tkazish Fur'e qonuniga bo'ysunadi, unga asosan o'tayotgan issiqlik temperatura gradientiga proportsionaldir [3].

Issiqlik almashinish ko'rinishlari. Issiqlik almashinuvi murakkab jarayon bo'lib, uni o'rganishda issiqlik o'tkazish, konvektsiya, nurlanish orqali (izluchenie) issiqlik almashinishga bo'lishadi.

Issiqlik o'tkazishda issiqlik almashinuvi molekulalar o'zaro to'qnashuvi va diffuziya natijasida sodir bo'ladi. Bunday hodisa qattiq jismlarda va suyuqliklarning kichik harakatsiz qatlamlarida bo'ladi.

Konvektsiyada issiqlik o'tkazish modda molekulalari yoki uning barcha massasining natijasida sodir bo'ladi. Shuning uchun ham konvektsiya faqat suyuqlik va gazlarda bo'ladi. Erkin harakat suyuqliklar sovuq va issiq qismlaridagi har xil zichliklar natijasida sodir bo'ladi, majburiy harakat esa tashqi kuchlar natijasida sodir bo'ladi qattiq jism (masalan, quvur devori) va suyuqlik o'rtasida issiqlik almashinuvi chegaraviy qatlam orqali bo'ladi. Temperatura o'zgarishi bilan o'tkazilgan issiqlik miqdori o'rtasida aniq bog’lanish hosil qilish mumkin. Suyuqliklarning isishi va sovushida esa konvektsiya sodir bo'lib, temperatura bir xil bo'lishiga harakat qilinadi. Shuning uchun ham nostatsionar rejimlar ko'pincha issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari, ya'ni qattiq jism, hamda qattiq jism bilan chegaraviy qatlam o'rtasida bo'lishi mumkin. Bunda hajmiy issiqlik sig’imi massali issiqlik sihimiga

$c_\rho = c_v / \rho$ o'tadi va $a = \lambda / (\rho c_\rho)$ temperatura o'tkazish koeffitsienti deyiladi. λ – esa issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti.

Massa almashinuvida ham uning ikki xili ajratiladi: birinchisi-molekulalar diffuziyasi natijasidagi massa o'tkazish, ikkinchisi suyuqliklarda vixrli diffuziya natijasida hosil bo'ladigan konvektiv massa almashinuv.

Ixtiyoriy termodinamik jarayon yo mexanik, yo termik buzilishi natijasida bo'lishi mumkin, ya'ni bu hollarda gaz yo qisiladi, yoki kengayadi.
qanchalik ana shu tenglik buzilishiga qarab gaz holati tinchligi buziladi.

Gazda bosim o'zgarishiga qarab konvektsion toklar hosil bo'ladi. Agar sistemaning biror qismida gaz bir holatdan chiqib, so'ng yana shu holatga qaytsa, bunday jarayon qaytariluvchi jarayon deyiladi, qaytari1uvchi jarayonlar nazariy jarayonlar deyish mumkin, chunki hayotdagi jarayonlar qandaydir darajada qaytmasdir, ularga majburiy ta'sir qilinmasa, bir yo'nalishda sodir bo'ladi. Jarayonning teskari sodir bo'lishi uchun imga tashqaridan qanchadir energiya sarf qilish kerak.

Agar yopiq sohadagi gaz bosimi ochiq sohadagidan kata bo'lsa,
gazning tashqariga chiqishi sodir bo'ladi.

Gazni yopiq sohaga qayta kiritish uchun compressor ishlatish kerak.
Issiqlik ham temperaturasi yuqori gazdan sovuqroq tomonga qarab harakatlanadi.Sovuq gazni issiq tomonga haydash uchun sovutgichlar ishlatish kerak.

Yuqoridagi keltirilganlardan shunday xulosa qilish mumkinki, tabiatdagi jarayonlar sistemada tenglikni vujudga keltirish uchun sodir bo'ladi, ya'ni bosim yoki tumperaturani tenglashtirish uchun harakat qilinadi.

Termodinamikaning birinchi qonuni energiyaning saqlanishi va bir turdan ikkinchisiga o'tishini matematik ifodasini beradi.
Termodinamikaning ikkinchi qonuni uchin bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagicha formulirovkalar mavjud: Issiqlik o'z-o'zidan sovuqroq joydan issiqroq joyga o'tmaydi (R.Klazius);
Issiqlikni to'laligicha ishga o'tkazuvchi jarayon bo'lishi mumkin emas

(U.Tomson). Ana shu ikkinchi qonun asosida harakat differentsial tenglamalari keltirib chiqariladi.

Material sirti bilan biror muhit o'rtasida issiqlik almashishi material va muhit xossalariga bog’liq. Umuman material sirti bilan muhit orasidagi issiqlik almashishi bilan kechadigan jarayonni chegaraviy qatlam nazariyasiga asoslanib o'rganish mumkin. [2]

Issiqlik va massa almashinuvi masalalarini matematik modellashtirish bo'yicha ko'pgina ishlar qilingan. Ayniqsa, [1] davertikal sterjen yaqinida temperatura tarqalish masalasi ko'rilgan. Lekin unda muhit zichligi o'zgarmas deb qaralgan va tenglamalardan chiqarib tashlangan. Aslida esa temperaturasi o'zgaruvchan muhitda holat tenglamasiga asosan zichlik ham o'zgaradi.

Umuman olganda konvektsiya va issiqlik almashinuviga bag’ishlangan ilmiy ishlar ko'lami kengaymoqda, bu narsa issiqlik energiyasini tejash masalasi bilan chambarchas bog’liq.

[11] da vertikal devorlari adiabatik bo'lgan yopiq soha pastdan qizdirilganda muhitda issiqlik almashinish masalasi ko'rilgan. [12] da vertikal joylashgan doiraviy quvurda qovushqoqlikka ega suyuqlik harakati og’irlik kuchlarini hisobga olgan holda o'rganilgan. Masala ikki qatlamli oshkormas chekli ayirmalar yordamida yechilgan. [3] da termodinamika va issiqlik o'tkazish masalalari, asosiy termodinamika qonunlari, termodinamik jarayonlar kabi masalalar qaralgan bo'lib, o'quv muassasalarida talabalar tomonidan o'rganilishi mumkin.[4] da amerikalik mutaxassislar Anderson D va boshqalar o'z oldilariga gidro va gazodinamik masalalar uchun chekli ayirmalar qurishga o'quvchilami o'rgatishni o'z oldilariga maqsad qilib qo'yishgan. Kitobda ko'pgina misollar keltirilgan, undan amaliy matematikada, suyuqliklar mexanikasi masalalarini o'rganishda foydalanish mumkin.

Yuqorida keltirilgan adabiyotlar sharhidan xulosa qilish mumkinki, [2] da vertical sterjen yaqinida temperature tarqalish masalasi faqat zichlik ρ o'zgarmas holda qaralgan, temperatura o'zgarishi uchun katta emas deb hisoblangan. Ammo shulami e'tiborga olib, ushbu ishda vertikal masalasi qaraldi va muhitda zichlik ham o'zgaruvchi deb qaraldi.

Agar material sirti vertikal joylashgan bo'lsa, qatlam chegarasi pastdan yuqoriga qarab o'sib boradi. Muhit holati (qovushqoqligi, temperaturasi) ham qatlam chegarasining kattaligiga ta'sir qiladi. Agar qovushqoqlik katta bo'lsa, qatlam ham katta bo'ladi. Lekin katta qovushqoqlik issiqlik tarqalishiga teskari ta'sir qilishi mumkin. Muhitning zichligi ham chegaraviy qatlam o'tkazuvchanligiga ta'sir qiladi. Zichlikning kamayishi kinematik qovushqoqlik koeffitsientini oshishiga va qatlamning ham kattalashishiga olib keladi. Lekin temperatura oshishi evaziga zichlikning kamayishi issiqlik o'tkazuvchanligiga qanday ta'sir qilishi nazariy hisob-kitoblar bilan aniqlanadi.

Agar material sirtida o'zgarmas temperatura saqlab turilsa va muhit chegaralanmagan bo'lsa, bo'layotgani jarayonni statsionar deb qarash mumkin. Ana shu yuqoridagi mulohazalar ushbu ishning mazmunini tashkil etadi. Ya'ni sirt yaqinida muhit tinch bo'lsa va u gaz bo'lsa, issiqlik almashinuv jarayoni qanday kechadi: chegaraviy qatlamda gaz harakati hosil bo'lishi sabablari qanday?

Ana shunday savollarga javob topish uchun biz chegaraviy qatlam nazariyasi tenglamalaridan foydalandik [7] .

Magistrlik dissertatsiyasining himoyasiga quyidagilar chiqariladi:

Vertikal sterjen yaqinida issiqlik tarqalishi jarayonining matematik modeli;

Tanlangan matematik modelni yechish usuli;

Masalaning yechish algoritmi va dasturi;

Vertikal joylashgan sterjen yaqinida ochiq sohaga temperatura tarqalishi masalasi;

Vertikal joylashgan ikki sterjen orasiga temperatura tarqalishi masalasi.

I-BOB. ISSIQLIK TARQALISHI MASALALARIDA QO'LLANILADIGAN MATEMATIK MODELLAR

1.1. §- Matematik model -jarayonlarni nazariy o'rganishning asosi.

Ilmiy va amaliy tadqiqotlarda real mavjud sistemalami modellashtirish katta rol o'ynaydi. Modellashtirish mohiyati shundan iboratki, har biri real mavjud yoki abstrakt bo'lgan ikki sistemalar orasida o'xshashlik munosabati o'rnatiladi. Agar bu sistemalardan birinchisi tadqiq qilish uchun ikkinchisiga nisbatan soddaroq bo'lsa, ikkinchi sistemaning xossalari haqida birinchi sistema xulqini kuzatib hukm chiqarish mumkin. Bu holda tadqiqot uchun foydalanilgan sistemani model deyiladi [l].

"Model" so'zi lotincha modulus, so'zidan olingan bo'lib, o'lchov, me'yor, obraz, namuna, analog, "o'rinbosar" degan ma'nolami bildiradi. Model tushunchasini ta'riflash juda qiyin. Bir manbada uning 31 ta ta'rifi sanab o'tilgan. Shunday bo'lsada bu tushuncha har birimizga tanish: o'yinchoq samolyot-samolyotning modeli, globus-Eming modeli, planetariy ekrani-osmon va undagi yulduzlar modeli, $s = vt$ formula- jism harakati modeli. Bu bayon qilingan predmetlar grafik tasvirlar, formulalar bir "model" so'zi bilanbirlashadilar. Model ta'riflaridan birini yuqorida bayon qilgan edik. Yana turli shaklda berilgan ta'riflardan ba'zilarini keltiramiz. Keng ma'noda model biror ob'ekt yoki ob'ektlar sistemasining obrazi yoki namunasidir. N. N.

Moiseev ta'rifi bo'yicha «Model deganda biz predmet (hodisa) haqidauning u yoki bu ayrim xossalarini aks ettiruvchi ma'lum bir chegaralangan ma'lumotni beruvchi soddalashtirilgan bilimni tushunamiz. Modelni ma'lumotni kodlashning maxsus shakli sifatida qarash mumkin. Oddiy kodlashda bizga barcha dastlabki ma'lumotlar ma'lum bo'ladi va ulami biz faqat boshqa tilga o'tkazamiz, model esa, gaysi tildan foydalansa ham, kishilar ilgari bilmagan ma'lumotni ham kodlaydi». Endi modellashtirish tushunchasi haqida gapiramiz. Modellashtirishning ham turli shakllardagi bayonini keltiramiz. Modellarni yasash kishilar faoliyatida juda katta ahamiyatga ega. Modelni ko'rish jarayonni modellashtirish deyiladi. Modellashtirish deganda ob'ekt (sistema) ning modeli yordamida shu ob'ektning xossalarini tadqiq qilish jarayoni tushuniladi. Modellashtirish bilish obe'ktlarini ulaming modellari yordamida tadqiq etish, kuzatilayotgan predmet va hodisalaming modellarini yasash va o’rganishdir. Ob'ektni uning modeli yordamida bilish modellashtirishdir. Har qanday bilish modellashtirishdan iborat, chunki bunda tegishli ob'ekt bosh miyada nerv xujayralari majmui yordamida ideal ko’rinishda aks etadi, ya'ni biz ob'ektning modeli bilan ish ko’ramiz. Modellashtirish-turli jarayon va hodisalami o’rganishning eng keng tarqalgan metodlaridan biri. Model tushunchasi biologiya, meditcina, ximiya, fizika, iqtisodiyot, sotciologiya, demografiya va boshqa fanlarda ham qo’llaniladi. Matematik model, fizik model, biologik model, iqtisodiy model va boshqa modellar turlari mavjud. Matematik model tushunchasiga ham turli ta'riflar berilgan. Ulardan ba'zilarini keltiramiz. Jarayonning matematik tavsifini, ya'ni jarayonni matematik tilda bayonlashni matematik model deb yuritamiz. Matematik model olamning ma'lum hodisalari sinfming matematik belgilar bilan ifodalangan taqribiy ifodasidir. Real sistemaning (aniqrog’i sistema ishlashi jarayonining) matematik modeli deganda biz sistema parametrlariga, kirish signallariga, boshlang’ich shartlar va vaqtga bog’liq sistema holatlari xarakteristikalarini (bular orqali chiqish signallarini) aniqlovchi munosabatlar (masalan, formulalar, tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy shartlar, operatorlar va boshqalar) to’plamini tushunamiz. O’rganilayotgan jarayon yo hodisani matematik simvollar yordamida bayon qiluvchi matematik munosabatlar sistemasini matematik model deyiladi. Ob'ektning xarakteristikalarini bayon qiluvchi matematik ifodalami matematik model deyiladi. Formulalar ko’rinishida yozilgan faqat miqdoriy xarakteristikalami o’z ichiga olgan modellami matematik model deyiladi. Hodisalar sinfining soddalashtirilgan matematik belgilar bilan ifodalangan bayonini matematik model deyiladi. Tashqi dunyoning biror hodisalar sinfining matematik belgilar yordamida taqribiy bayoni matematik model deyiladi.Bizga tarixdan ma'lumki turli Xo’jalik masalalarini echishda matematikadan keng foydalanib kelingan. Matematikadan oldingi vaqtlarda sodda hisoblashlarda va turli xil o’lchashlarda keng foydalanilib kelingan. Turli fanlaming rivojlanishida matematika muhim rol o’ynab kelgan. Texnik, texnologik, iqtisodiy va boshqajarayonlarga oid tadqiqotlarda matematik usullami qo’llash ushbu jarayonlaming qonuniyatlarini o’rganishda muhim nazariy va amaliy natijalarga erishish imkoniyatini berdi. Modellashtirishda o’rganilayotgan jarayonning barcha xossalarini hisobga olish mumkin emas, albatta. Bunday jarayonlar uchun qo’yiladigan asosiy talablar mezon vazafisini bajaradi. Tanlangan tizimlaming turli faoliyat yo’nalishlarini o’rganish uchun har xil matematik usullardan foydalaniladi. Bulardan eng muhimlaridan biri optimallash nazariyasi va matematik dasturlashdir. Chizikli dasturlashda determinant tushunehasi muhimahamiyatga ega. Chizikli algebra matematikaning mustaqilsohasi sifatida XVIII asrda nemis matematigi Leybnitshamda shveytsariyalik matematik G.Kramer tomonidan n ta noma'lumli n ta tenglamani echishning umumiy formulasi berilgandan keyin yuzaga keldi. XIX asr o’rtalarida ingliz matematiklari Keni va Silvestr ishlarida matritsa tushunehasi kiritilib, matritsa hisobining asoslari berildi. Bu sohada dastlab nemis olimi F. Gauss va frantsuz matematigi K. Jardonlar katta ishlami amalga oshirdilar. Hisoblash usullariga bo’lgan ehtiyoj electron hisoblash mashinalarining yaratilshi bilan yana ham o’sib bormoqda. Yuk tashishning optimal rejasini tuzish masalasi chiziqli dasturlash masalasi tariqasida birinchi marta iqtisodchi A.N.Tolstov tomonidan 1930 yil qo’yilgan. 1931 yili venger matematigi B.Egervari chiziqli dasturlashning xususiy hollaridan birining matematik qo’yilishini tekshirib, bu masala keyinchalik "Tanlash problemasi" nomi bilan yuritila boshlandi. Bu masala amerikalik matematik G.U.Kun tomonidan rivojlantirilib, uning usuli venger usuli deb atala boshlandi. Chiziqli dasturlash masalalarini tekshirishning sistematik taraqqiyoti 1939 yili akademik L.V.Kontorovich ishlari asosida boshlandi. Keyinchalik u M.K.Gavurin bilan birgalikda transport masalasini echadigan potentciallar usulini (1949y) yaratdi. Amerika adabiyotlarida transport masalasi 1941 yili F.L.Xichkok tomonidan qo’yildi. Chiziqli dasturlash masalasini echishning asosiy usuli simpleks usulini 1949 yili D.Dantsig yaratdi.

Chiziqli hamda chiziqsiz dasturlashning bundan keyingi rivojlanishi Ford, Fulkerson, Kun, Lenke, Gass, Chemes, Bil va Radnar ishlarida o’z asosini topdi/www.qmii.uz/e-lib/. Matematik modellashtirish sohasida uzbek olimlaridan akademiklar S.X.Sirojiddinov. T.A.Sarimsokov, M.Salohiddinov, V.Q. Qobulov, A.N.Pirmuhammedov, M.I.Irmatov, N.S.Ziyadullaev kabilar ham munosib hissa qo’shganlar. Bizga ma'lumki, Kibemetika fani « Tirik mavjudodlar va mashinalar aloqasi hamda ulami boshqarish» haqidagi fan sifatida N.Viner tomonidan kashf etildi. Kibemetika fanining tez rivojlanishi bir qator unga yaqin bo’lgan fanlami paydo bo’lishiga va jadal rivojlanishiga olib keldi. Bunda matematik modellashtirish hisoblash mashinalari va tarmoqlami optimal loyihalash kabi xilma - xil kibemetik masalalami echishda biriktiruvchi bo’g’inga aylandi. Matematik model - ob'ekt eki jarayonlaming tenglama, tengsizlik, formula, jadval yoki grafik ko’rinishidagi ifodasidir. Kibemetika esa murakkab ob'ektlar aloqalarini va ulami boshqarishni modellashtirish haqidagi umumiy, yagona fandir. Agar bitta faktoming qiymatini o’zgaruvchi deb qarab, qolganlarini shartli ravishda o’zgarmas deb qarasak, bir faktorli matematik model qurishimiz mumkin. Agar hamma faktorlami o’zgaruvchiqarasak, ko’p faktorli matematik modelga ega bo’lamiz. Agar matematik modelning faktorlari ham o’zi ham tasodifiy bo’lmasa, bunday model regression model deyilib, bunday modelni qurish jarayoni regression tahlil deyiladi. Agar matematik modelning faktorlari xam o’zi ham tasodifiy bo’lsa, bunday model korrelyatsion model deyilib, bunday modelni qurish jarayoni korrelyatsion tahlil deyiladi. Matematik model deganda, o’rganilayotgan ob'ekt yoki jarayonni belgilovchi faktorlaming o’zaro bog’liqligini ifodalovchi matematik munosabatlar majmuasi tushuniladi. Ob'ektning modelini topish va uni tahlil etish asosida tegishli xulosalar chiqarish jarayoni matematik modellashtirish deb ataladi. Turli sohalardi matematika va matematik modellashtirish usullarini qo’llalinishi, asosan, quyidagimaqsadlami o’z oldiga qo’yadi:

-ob'ekt yoki jarayonlami belgilovchi asosiy faktorlar orasidagi muhimbog’lanishlarni aks ettirish;

- berilgan aniq ma'lumotlar va munosabatlar asosida deduktsiya uslubi orqali o’rganilayotgan ob'ekt yoki jarayonlar uchun adekvat xulosalar olish;

- o’rganilayotgan ob'ektning amaldagi kuzatilishiga uni boglovchi faktorlaming matematik statistika usullari yordamida shaklini hamdabog’liqligini o’rganish jarayonida ob'ekt haqida yangi bilimlarga ega bo’lish;

- o’rganilayotgan ob'ekt yoki jarayonholatini matematika tili orqali aniq va ravshan ifodalash. Matematik modellarining tadqiqot ishlarida qo’llanilishi XVI asrdayoq boshlangan bo’lib, XIX asrlarda differentsial va integral hisobning rivojlanishi uni turli soha masalalarini echishga tadbiq qilishga keng imkoniyat yaratdi. XX asr turli sohalarda matematik usullaming modellashtirishdagi keng ko’lamda qo’llanishi bilan xarakterlanadi. Tadbiqiy matematika sohasining o’yinlar nazariyasi, matematik dasturlash, matematik statistika va boshqa bulimlarining rivojlanishi turli tarmoqlarining jadal rivojlanishiga muhim turtki bo’lib xizmat qildi.

Ma'lumki, har qanday tadqiqot doimo nazariya(model) va amaliyotni (statistik ma'lumotlar) birgalikda qarashni taqozoqiladi. Agar matematik modellar kuzatilayotgan jarayonlami izohlash va tushuntirishdan iborat bo’lsa, statistik ma'lumotlar ularni empirik qurishda va asoslashda muhim vosita hisoblanadi. Moddiy modellar asosan o’rganilayotgan ob'ekt va jarayonni geometrik, fizik, dinamik yoki funktsional xarakteristikalarini ifodalaydi. Masalan, ob'ektning kichiklashtirilgan maketi (masalan, litsey, kollej, universitet) va turli xil fizik, ximik va boshqa xildagi maketlar bunga misol bo’la oladi. Bu modellar yordamida turli xil texnologik jarayonlami optimal boshqarish, ulami joylashtirish va foydalanish yo’llari o’rganiladi. Umuman olganda, moddiy modellar tajribaviy xarakterga ega bo’lib, texnik fanlarida keng qo’llaniladi.

Ammo moddiy modellashtirishdan iqtisodiy masalalami echish uchun foydalanishda ma'lum chegaralanishlar mavjud. Masalan, xalq xo’jaligini biror sohasini o’rganish bilan butun iqtisodiy ob'ekt haqida xulosa chiqarib bo'lmaydi. Ko'pgina iqtisodiy masalalar uchun esa moddiy modellar yaratish qiyin bo'ladi va ko'p xarajat talab etadi. Abstrakt (ideal) modellar inson tafakurining mahsuli bo'lib, ular tushunchalar, gipotezalar va turli xil qarashlar sistemasidan iborat. Iqtisodiy tadqiqotlarda, boshqarish sohalarida, asosan, abstrakt modellashtirishdan foydalaniladi. Ilmiy bilishda abstrakt modellar ma'lum tillarga asoslangan belgilar majmuidan iborat. O'z navbatida, belgili abstrakt modellar matematik logik tillar shaklidagi matematik logik modelami ifodalaydi. Matematik modellashtirish turli xil tabiatli, ammo bir xil matematik bog'lanishlami ifodalaydigan voqea va jarayonlarga asoslangan tadqiqot usulidir. Hozirgi paytda matematik modellashtirish iqtisodiy tadqiqotlarda, amaliy rejalashtirishda va boshqarishda etakchi o'rin egallab, kompyuterlashtirish bilan chambarchas bog'langan. Matematika, kompyuterlashtirish sohalari, umumuslubiy va predmet fanlarining rivojolanishi natijasida matematik modellashtirish uzluksiz rivojlanib, yangi-yangi matematik modellashtirish shakllari vujudga kelmoqda. Ob'ekt (jarayon, voqea)ning matematik modeli kamida ikkita guruh elementlarini o'z ichiga olgan matematik masaladan iborat bo'ladi. Ulardan birinchisi - ob'ektning anqilanishi kerak bo'lgan elementi ($u = (y_i)$ vektorining koordinatalari)

vektorining koordinatalari), ikkinchisi esa ma' lum shartlar asosida o'zgaradigan elementlar ($x = (x_i)$ vektor elementlari). Matematik modellar o'zining tashqi shartlari, ichki va topilishi zarur bo'lgan elementlari bo'yicha funktsional va strukturali qismlarga bo'linadi. Funktsional model - X ga qiymat berib U ning qiymatini olish bo'yicha ob'ektning o'zgarishini ifodalaydi. Bunda Y=D(X) bog'lanish mavjud bo'ladi. Strukturali modellar ob'ektning ichki tuzilishini, uning tuzilish qismlarini, ichki parametrlarini, ular orasidagi bog'lanishlami ifodalaydi. Strukturali modelaming eng ko'p tarqalgani quyidagilardan iborat:

-hamma noma'lumlar ob'ektning tashqi shartlari va ichki parametrlari funksiyalari shaklida ifodalangan hol:

$$y_i = f_i(A, X) \qquad (1.1)$$

- noma'lumlar i - tartibli (tenglamalar, tengsizliklar va hokazo) bo’lgan hol

$$f_i(A, X) = 0 \qquad (1.2)$$

Bu yerda A - parametrlar to’plami. Har doim ham (1.2) ko’rinishdagi masalalar (1.1) ko’rinishga keltirilavermaydi. Masalan, 5-chi yoki undan ortiq tartibli algebraik tenglamalaming umumiy echimini (1.1) ko’rinishda ifodalab bo’lmaydi. Funktsional va strukturali modellar bir - birini to’ldiradi. Funktsional modellami o’rganishda o’rganilayotgan ob'ektning strukturasi haqida gipotezalar paydo bo’ladi va shu bilan strukturali modelga yo’l ochiladi. Ikkinchi tomondan esa, strukturali modellami tahlil qilish ob'ektning tashqio’zgarish shartlarini takomillashtiradi. Immitatsion modellar EXMning vujudga kelishi bilan modellashtirishning yangi yo’nalishi paydo bo’ladi. Model yaratish va unda tajribalar o’tkazishda EHM katta rol o’ynaydi. Bunday modellami immitatsion modellar deyiladi.

Quyida modellashtirish bosqichlarining mazmuni va uning ketma-ketligini bayon qilamiz. Bosqichlar quyidagilardan iborat:

-muammoni qo’yilishi;

-muammoni tahlil qilish.

Maqsadning qo’yilishi modellashtirishda muhim o’rin egallaydi. Aniq qo’yilgan maqsad asosiy elementlar va ular orasidagi bog’lanish tarkibi va miqdoriy xarakteristikasini aniqlaydi. Modellashtirishning dastlabki bosqichida ma'lumotlar to’planadi va tahlil qilinadi. Tahlil uchun tanlangan ma'lumotlarning to’g’riligi va modellashtirishning so’ngi natijalariga bog’liq. To’plangan ma'lumotlar absolyut miqdorlarda va yagona o’lchov birliklariga ifodalanishi kerak. Bu bosqichda modellashtiriladigan ob'ekt va uni abstraktsiyalashning muhim tomonlari belgilanadi. Ob'ektning strukturasi va elementlari orasidagi asosiy bog’lanishlar, uning o’zgarishi va rivojlanishi bo’yicha gipotezalami shakllantirish masalalari o’rganiladi. Matematik modellar qurish uchun o’rganilayotgan muammolar konkret matematik bog’lanishlar va munosabatlar (funksiya, tengsizlik va hokazo) shaklida ifodalanadi.

Matematik modellar qurish jarayoni matematika va tanlangan soha bo'yicha ilmiy bilimlarining o'zaro uyg'unlashuvidan iborat.

Matematik model hech qachon qaralayotgan ob'ektning xususiyatlarini aynan, to'la o'zida mujassam qilmaydi. U har xil faraz va cheklanishlar asosida tuzilgani uchun taqribiy harakterga ega demak, uning asosida olinayotgan natijalar ham taqribiy bo'ladi.

Modelning aniqligi, natijalaming ishonchlilik darajasini baholash masalasi matematik modellashtirishning asosiy masalalaridan biridir.

Matematik model har xil vositalar yordamida berilishi mumkin. Bu vositalar funktsional analiz elementlarini ishlatib differensial va integral tenglamalar tuzishdan to hisoblash algoritmi va EHM dasturlarini yozishgacha bo'lgan bosqichlarni o'z ichiga oladi. Har bir bosqich yakuniy natijaga o'ziga xos ta'sir ko'rsatadi va ulardagi yo'l qo'yiladigan xatoliklar oldingi bosqichlardagi xatoliklar bilan ham belgilanadi.

Ob'ektning matematik modelini tuzish, uni EHM da bajariladigan hisoblashlar asosida tahlil qilish "hisoblash tajribasi" deyiladi.

Birinchi bosqichda masalaning aniq qo'yilishi, berilgan va izlanuvchi miqdorlar, ob'ektning matematik model tuzish uchun ishlatish lozim bo'lgan boshqa xususiyatlari tasvirlanadi.

1.1 -chizma. Hisoblash tajribasining umumiy sxemasi.

Ikkinchi bosqichda fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlar asosida matematik model tuziladi. U asosan algebraik chiziqsiz, differensial, integral va boshqa turdagi tenglamalardan iborat bo'ladi. Ulami tizimda

o'rganilayotgan jarayonga ta'sir ko'rsatuvchi omillarning barchasini bir vaqtning o’zida hisobga olib bo’lmaydi, chunki matematik model juda murakkablashib ketadi. Shuning uchun, model tuzishda eng kuchli ta'sir etuvchi asosiy omillargina hisobga olinadi.

Uchinchi bosqichda masalaning matematik modeli tuzilgach, mos tenglamalar yechilishi va kerakli ko’rsatkichlar aniqlanishi lozim. Masalan, matematik model differensial tenglama bilan tasvirlangan bo’lsa, sonli usullar yordamida u chekli sondagi nuqtalarda aniqlangan chekli-ayirmali tenglamalar bilan almashtiriladi.

To’rtinchi bosqichda sonli usullar yordamida aniqlangan algoritm asosida biror - bir algoritmik tilda EHM da ishlatish uchun dastur tuziladi. Masalan, u umumiy xususiyatga ega bo’lishi kerak, ya'ni matematik modelda ifodalangan masala parametrlarining etarlicha katta sohada o’zgaruvchi qiymatlarida dastur yaxshi natija berishi kerak. Oxirgi bosqichda dastur EHMga qo’yiladi va olingan sonli natijalar chuqur tahlil qilinib baholanadi.

Natijalarga qarab mutaxassis tahlil qilinayotgan jarayon to’g’risida xulosalar chiqaradi, uning amalga oshishiga ma'lum maqsad asosida ta'sir ko’rsatadi, boshqarish vositalarini ishlab chiqadi, tavsiyalar beradi. Ko’plab variantlar asosida bajariluvchi hisoblash tajribalari yordamida loyihachi u yoki bu belgiga ko’ra barcha variantlar ichidan eng ma'qulini tanlashi mumkin.

Muxandislik masalalarining EHMda echilish jarayoni uziga xos bir qator qiyinchiliklarni bartaraf etish bilan bog’liq. Insonning tafakkuri uchun xarakterli bo’lgan mantikiy jarayonning aspektlari EHMda ancha qiyinchilik bilan amalga oshiriladi. Bu qiyinchilik, birinchi galda, EHMga taqdim etiladigan jarayonning dastavval formallashtirilishi hamda bir qiymatli natijalarga olib keladigan amallarning muayyan ketma-ketligi shaklida ifodalangan bo’lishligi kerakligi bilan bog’liqdir.

1.2. Energetik jarayonlar va va ularga oid adabiyotlar tahlili.

Energiyasiz harakat ham, ishlab chiqarish ham, hayotning o'zi ham yo'q deganidir. Hozirgi davrda neft, gaz, ko'mir kabi energiya resurslarining kamayib borayotgani bu sohaga e'tiborni talab qiladi.

Umuman, energiya masalalarini o'rganish insoniyatni barcha rivojlanish davrlarida bo'lgan.

Issiqlik texnikasi bilan bog’liq birinchi fundamental ishlardan biri 1824 yili frantsuz injenerii Sadi Kamo tomonidan chop etilgan. U termodinamika asoslarini izohlab berdi. Uning ishlarini Klapeyron matematik tilga ko'chirib, issiqlik mashinalarida - takrorlanish masalalarini yoritdi [3].

1855-1865 yillarda qaytariluvchi va qaytarilmas jarayonlar va entropiya tushunchalari kiritildi. Entropiya bu issiqlik ko'rinishida tarqaluvchi energiyadir. Ishqalanish, issiqlik almashish jarayonlari qaytmas bo'lgani uchun izolyatsiyalangan sistemalar entropiyasi doimo ortadi. Termodinamikaning ikkinchi bu qoidasini Klazius butun olamga tadbiq etib, "issiqlik o'limi" degan tushunchani kiritdi. Bu tushunchaga binoan qachondir butun olamdagi energiya issiqlika o'tadi va temperatura barcha joyda bir xil bo'lib qoladi. Bunda Klazius dunyoning cheksizligini e'tiborga olmagan.

Issiqlik va massa almashinish nazariyasi tarixi Nyutonga borib taqaladi. 1701 yilda Nyuton konvektiv issiqlik almashinish qonunini ochdi [2]. 1822 yilda J.B.Fur’e issiqlik almashinish nazariyasini e'lon qildi.

Termodinamika so'zi grekchadan terme- issiqlik, dinamikos - harakat degan ma'nolarini anglatadi. Birinchilardan bo'lib bu so'zni S.Kamo qo'llagan. Termodinamikada bir qancha tushunchalar ishlatiladi, bular sistema ochiq va yopiq sistemalar, energiya, ish, issiqlik, issiqlik energiyasi, entropiya, absolyut temperatura kabilardir.

Sistema bu materiyaning biz izlanish olib borayotgan qismidir. Ochiq sistemalar yopiq sistemalardan farqli ravishda tashqi muhit bilan issiqlik va hokazo almasha oladi.

Agar parametrlari vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, bunday sistema statsionar deyiladi. Energiya bu materiya harakatining o'lchovi bo'lib, u sistemaning ish bajarish qobiliyatini aniqlaydi. Ish - sistema energiyasining bir holatdan ikkinchi holatga o'tishidagi o'zaro munosabatidir. Issiqlik molekulalar harakati natijasida hosil bo'luvchi energiyadir.

Ko'pgina energetik jarayonlar issiqlik o'tkazish masalalari bilan bog’liqdir. Issiqlik o'tkazish Fur'e qonuniga bo'ysunadi, unga asosan o'tayotgan issiqlik temperatura gradientiga proportsionaldir [3].

Issiqlik almashinish ko'rinishlari. Issiqlik almashinuvi murakkab jarayon bo'lib, uni o'rganishda issiqlik o'tkazish, konvektsiya, nurlanish orqali (izluchenie) issiqlik almashinishga bo'lishadi.

Issiqlik o'tkazishda issiqlik almashinuvi molekulalar o'zaro to'qnashuvi va diffuziya natijasida sodir bo'ladi. Bunday hodisa qattiq jismlarda va suyuqliklaming kichik harakatsiz qatlamlarida bo'ladi.

Konvektsiyada issiqlik o'tkazish modda molekulalari yoki uning barcha massasining natijasida sodir bo'ladi. Shuning uchun ham konvektsiya faqat suyuqlik va gazlarda bo'ladi. Erkin harakat suyuqliklar sovuq va issiq qismlaridagi har xil zichliklar natijasida sodir bo'ladi, majburiy harakat esa tashqi kuchlar natijasida sodir bo'ladi.

Qattiq jism (masalan, quvur devori) va suyuqlik o'rtasida issiqlik almashinuvi chegaraviy qatlam orqali bo'ladi.

Temperatura o'zgarishi bilan o'tkazilgan issiqlik miqdori o'rtasida aniq bog’lanish hosil qilish mumkin. Suyuqliklarning isishi va sovushida esa konvektsiya sodir bo'lib, temperatura bir xil bo'lishiga harakat qilinadi. Shuning uchun ham nostatsionar rejimlar ko'pincha issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari, ya'ni qattiq jism, hamda qattiq jism bilan chegaraviy qatlam o'rtasida bo'lishi

mumkin. Bunda hajmiy issiqlik sig’imi massali issiqlik sig’imiga $(c_P = c_V/\rho)$ o'tadi.

Ushbu $a = \boldsymbol{\lambda}/(\rho \cdot c_P)$ koeffisient temperatura o'tkazish koeffitsienti deyiladi. $\boldsymbol{\lambda}$ – esa issiqlik o' tkazuvchanlik koeffitsienti.

Massa almashinuvida ham uning ikki xili ajratiladi: birinchisi-molekulalar diffuziyasi natijasidagi massa o'tkazish, ikkinchisi-suyuqliklarda vixrli diffuziya natijasida hosil bo'ladigan konvektiv massa almashinuvi.

Issiqlikning temperaturasi yuqori bo’lgan jism sirtidan temperaturasi pastroq bo’lgan jismga o’tish hodisasi issiqlikning uzatilishi deyiladi. Termodinamikaning ikkinchi qonuniga muvofiq bu hodisa o’z-o’zidan sodir bo’ladi, ya’ni issiqlik issiqroq jismdan sovuqroq jismga o’tadi. Bunda issiqlik oqimining vektori T2 dan Tl ga yo’nalgan bo’ladi, chunki T2 > Tl. Issiqlik hamma turdagi muhitda (suyuq, qattiqgaz, vakuum) tarqaladi. Natijada issiq jism soviydi, sovuq jism isiydi. Bunday hodisa issiqlik almashinuvi deyiladi. Demak hamma jismlarda issiqlik energiya shaklida,

Jismni tashkil etgan zarrachalarning harakati hisobiga uzatiladi. Bunday hodisa issiqlik o’tkazuvchanlik deyiladi. Issiqlik o’tkazuvchanlik jismlar o’rtasida temperaturalar farqi bo’lganda muhitda uzatiladi. Bunday issiqlik o’tkazuvchanlikda issiqlikni zarralar va molekulalar tashiydi, deb qaraladi. Issiqlik tashuvchi agent jism ichida, uning qismlari orasida,
o’zaro tegib turgan issiq va sovuq jismlar orasida harakatlanadi deb faraz qilinadi.

Uzatilgan issiqlik miqdori tegib turgan sirt kattaligiga va issiqlikning o’tish vaqtiga bog’liq bo’ladi.

Bu kattalik issiqlik oqimining quvvati deyiladi va u SI o’lchov birligi

sistemasida j/s, ya’ni Vt da o’lchanadi.

Hamma nuqtalarda temperaturasi bir xil (T=const) bo’lgan sirt izotermik sirt deyiladi. Temperatura maydonining vektori izotermik sirtga tik yo’nalgan bo’ladi. Temperaturaning eng katta o’zgarishi normal(tik) yo’nalishda kuzatiladi. Izotermik sirtga tik tushirilgan normal bo’yicha temperatura o’zgarishining Δn masofaga nisbati temperatura gradienti deyiladi, ya’ni

$$\lim \frac{\Delta T}{\Delta n} - \frac{dT}{aT} gradT$$

Fransuz olimi Fur’e qonuniga muvofiq issiqlik o’tkazuvchanlik bo’yicha uzatilgan issiqlik oqimi zichligining vektori temperatura gradiyentiga mutanosib :

$$q = -\lambda \cdot gradT$$

Bunda λ -jismning issiqlik o’tkazuvchanlik koyeffisiyenti(Vt/lk);

λ - koyeffisiyent moddalarning issiqlik o’tkazuvchanlik xossasini ifodalaydi, tenglamadagi « minus» ishorasi esa issiqlik oqimi bilan temperatura gradiyenti vektorlarining yo’nalishlari qarama-qarshi ekanligini bildiradi, ya’ni temperaturaning eng katta pasayishi tomonga yo’nalganligini anglatadi. Issiqlik oqimining zichligi q_n istalgan biror yo’nalishdagi q_n vektori bilan normal o’rtasidagi burchak ko’paytmasiga teng :

$$\mathrm{q_n} = q \cdot \cos\varphi = -\lambda \cdot gradT \cdot cos\varphi$$

Ma’lumki, $gradT$ $\cos\varphi = \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dn}} gradT$, uning asosida yozamiz:

$$q_n = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right)$$

Elementar dS yuzadan o'ta perpendikulyar yo'nalishda o'tadigan issiqlik oqimi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta q_n = q_n \cdot \Delta S = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right) dS$$

Bu ifodani integrallab istalgan S yuzasidan o'tayotgan to'liq issiqlik oqimini aniqlash mumkin:

$$q = \int_S \Delta q_n - \int_S \lambda(\frac{dT}{dn}) dS$$

Moddalaming issiqlik o'tkazuvchanligi turlicha va o'z navbatida,

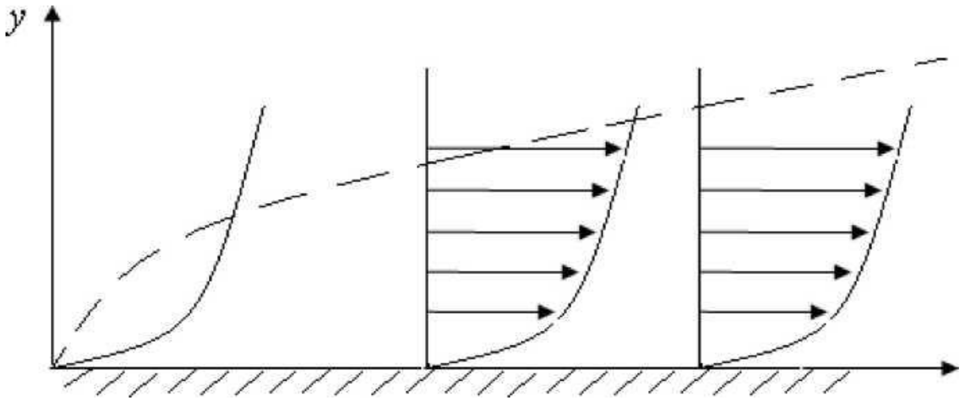
ulaming issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsenti λ keng oraliqidagi kattaliklami qabul qiladi.

$$(6 \cdot 10^{-3} \infty 410 \frac{Vt}{\mu K}$$

maydoni bir o'lchamli, temperatura gradienti esa K/M ga teng.

1.3. Ikki o’lchovli sohada issiqlik tarqalish modeli.

Real suyuqlik va gazlar harakati paytida hamma vaqt devorga yopishish holati ro'y beradi, bu hodisa esa tok chiziqlari kartinasiga ideal suyuqlik va gazlarga qaraganda o'zgarish yuz berishiga olib keladi. Devorlarga suyuqlik molekulalari yopishishi qovushqoqlik natijasida devorda tezlikning nolga teng bo'lishidan uning maksimum qiymatigacha o'sib borishiga olib keladi(l.l-chizma).



1.3.1-chizma. Chegaraviy qatlamning paydo bo’lishi.

1.3.1-chizmadagi punktir bilan chegaralangan devor yaqinidagi sohada

suyuqlik tezligi u_∞ (suyuqlikning devordan uzoqdagi tezligi) dan farq qiladi, bu devorga suyuqlikning yopishishi ta'siridir. Qanchalik suyuqlik qovushqoqligi kichik bo'Isa, suyuqlik shunchalik devorga kamroq yopishadi va punktir bilan

belgilangan soha shunchalik kichik bo'ladi. Urinma kuchlanish $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ esa

$\frac{\partial u}{\partial y}$ - punktir bilan belgilangan soha ichida katta bo'lgani uchun μ kichik bo'lgan hol uchun ham katta bo'lib turadi. Ana shu punktir devor bilan chegaralangan sohani Prandtl ataganidek chegaraviy qatlam (pogranichniy sloy) deb ataymiz.

Punktir chiziqdan yuqori sohada urinma kuchlanish kichik, chunki $\frac{\partial u}{\partial y}$ kichik bo'ladi.

Shunday qilib, biror devor yaqinida oqayotgan suyuqlik harakati sohani ikki bo'limga ajratishimiz mumkin: devor yaqinidagi urinma kuchlanish katta bo'lgan soha va ideal suyuqlik harakati kartinasiga yaqin urinma kuchlanish kichik bo'lgan soha. Bu sohaga ideal suyuqlik nazariyasi qonunlarini qo'llash mumkin.

Suyuqlikning devorlarga yopishishi hamma vaqt ham kichik chegaraviy qatlam hosil bo'lishi bilai kechavermaydi. Shunday hollar bo'ladiki, chegaraviy qatlam tez o'sib ketadi, bunda devorga yopishgai suyuqlik devordan ajraladi, uyurma paydo bo'lib, uning orqasida tezlik susayishi sodir bo'ladi.

Real hayotda ana shunday uzilishlar sodir bo'lmasligi uchun harakat qilinadi va turli usullardan foydalaniladi [1].

Endi chegaraviy qatlam qalinligini baholashga o’tamiz.

Suyuqlikning biror plastinka yuzasini uzilishlarsiz oqib o'tishi holini qaraymiz. Chegaraviy qatlam tashqarisida inertsiya kuchlari qovushqoqlik kuchlaridan ancha katta bo'ladi. Chegaraviy qatlam sohasida esa buni albatta hisobga olish kerak.

Bir birlik qajmdagi inertsiya kuchi $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ ga teng. *l* uzunlikdagi plastinka uchun $\frac{\partial u}{\partial x}$ - kattalik U - chegaraviy qatlam tashqarisidagi tezlikka

proportsional. Inertsiya kuchi esa $\frac{\rho U^2}{l}$ kattalikka proportsional bo'ladi.

Devorga perpendikulyar yo'nalishdagi tezlik gradient, ya'ni $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{U}{\delta}$ ga

proporsional. Bu yerda δ – chegaraviy qatlam qalinligi. Bir birlik hajmdagi

qovushqoqlik kuchi $\frac{\partial \tau}{\partial y}$. Agar laminar harakatdagi $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$ qiymatni $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ ga

qo'ysak, $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}$ ga ega bo'lamiz. Bu kattalik esa

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \mu\frac{U}{\delta^2} \qquad (1.1)$$

ga proporsional.Endi bir birlik hajm uchun inertsiya va qovushqoqlik kuchlari munosabatlarini ifodalasak,

$$\mu\frac{U}{\delta^2} \approx \frac{\rho U^2}{l} \qquad (1.2)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu munosabatni chegaraviy qatlam qalinligi δ ga nisbatan olsak

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \qquad (1.3)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu munosabatdagi $\approx$ belgisini tenglikka (=) aylanishi noma'lum bo'lib turibdi. [1] da keltirilishicha, Blazius tomonidan quyidagicha munosabat tajriba ishlaridan keyin taklif etilgan:

$$\delta = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \qquad (1.4)$$

bu erda $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - kinematik qovushqoqlik koeffitsienti. Agar bu tenglik ikki tomonini plastinka uzunligi l ga bo'lsak, chegaraviy qatlamning o'lchovsiz qalinligiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\delta}{l} = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} = \frac{5}{\sqrt{Re_l}} \qquad (1.5)$$

bu yerda

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} \qquad (1.6)$$

plastinka uzunligi uchun Reynolds soni.

(1.4) dan ko'rinadiki, chegaraviy qatlam qalinligi $\sqrt{\nu}$ va $\sqrt{l}$ ga to'g'ri proporsional . l ni plastinka boshlanishidan hisoblanadigan x o'zgaruvchi qiymat bilan almashtiramiz. Ko'ramizki chegaraviy qatlam qalinligi $\sqrt{x}$ ga proporsional ravishda oshadi.

Shuning bilan birga (1.5) dan ko'rinadiki, chegaraviy qatlamning nisbiy qalinligi $\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$ ga proporsional , ya'ni chegaraviy qatlam Re - soning oshishi bilan kamayib boradi, $Re \to \infty$ da esa *0* ga (nolga) intiladi.

Chegaraviy qatlam nazariyasiga asoslangan differentsial tenglamalar.

Nave-Stoks tenglamasini zichlik o'zgarmas $(\rho = const)$ va barqaror (statsionar) hol uchun yozib olamiz[5]:

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Bu erda (1.7) tenglamaning birinchi ikkita tenglamasi harakat differentsial tenglamasini ifodalaydi, uchinchisi esa uzluksizlik tenglamasini ifodalaydi.

(1.7) sistema hadlarini baholashga o'tamiz. Buning uchun masshtab birliklari kiritamiz: u_0 bo'ylama tezlik uchun bo'ylama uzunlik L_0 , ko'ndalang uzunlik δ_0. Endi ko'ndalang tezlik ϑ ning masshtab birligini aniqlaymiz.

Buning uchun (1.7) sistemani uchinchini tenglamasidan ko'ndalang tezlikni topamiz:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \partial v = -\frac{\partial u}{\partial x}\partial y$$

$$v = -\int_0^y \frac{\partial y}{\partial x} dy\ , \qquad \text{yoki} \qquad v_0 = \frac{u_0 \cdot \delta_0}{L_0}\ ,$$

bundan
$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{\delta_0}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{1.8}$$

(1.8) dan ko’rinadiki, ko’ndalang tezlik chegaraviy qatlam qalinligi δ_0 bilan proporsional ekan. Bu chegaraviy qatlamning asosiy xususiyatlaridan biri. Bundan foydalanib (1.7) ning ikkinchi tenglamasi hadlarini baholaymiz:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} = \left(\dfrac{u_0 \cdot v_0}{L_0}\right) = \dfrac{u_0^2/L_0}{\sqrt{Re}} \\ v\dfrac{\partial v}{\partial y} = u_0 \cdot \dfrac{\delta_0}{L_0} \cdot u_0 \cdot \dfrac{\delta_0}{L_0} \cdot \dfrac{1}{\delta_0} = \dfrac{u_0^2/L_0}{\sqrt{Re}} \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \vartheta\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \vartheta\dfrac{u_0\delta_0}{L_0} \cdot \dfrac{1}{L_0^2} = \dfrac{u_0^2/L_0}{Re_0 \cdot \sqrt{Re_0}} \\ \vartheta\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \vartheta\dfrac{u_0\delta_0}{L_0} \cdot \dfrac{1}{L_0^2} = \dfrac{u_0^2/L_0}{Re_0 \cdot \sqrt{Re_0}} \end{cases} \tag{1.10}$$

Endi (1.8), (1.9), (1.10) ni (1.7) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo’ysak $Re \to \infty$ da $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ qoladi.

Bundan chegaraviy qatlam ichida ko’ndalang kesim bo’yicha bosim o’zgarmas ekani kelib chiqadi.

(1.7) sistemaning birinchi tenglamasini hadlarini baholashga o’tamiz.

Bernulli tenglamasiga asosan, ya’ni

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{u_0^2}{L_0}\,; \\ v\dfrac{\partial u}{\partial y} = v_0 \cdot \dfrac{u_0}{\delta_0} = \dfrac{u_0^2}{\delta_0}\dfrac{\delta_0}{L_0} = \dfrac{u_0^2}{L_0}\,; \\ \vartheta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \vartheta\dfrac{u_0}{L_0^2} = \dfrac{u_0^2/L_0}{Re_0} \\ \vartheta\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \vartheta\dfrac{u_0}{\delta_0^2} = \dfrac{u_0^2}{L_0} \end{cases} \qquad (1.11)$$

Ushbu hadlarni tenglamaga qo'yib kerakli qisqartirishlarni bajarsak, $Re \to \infty$ da

$$\boldsymbol{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{v}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \boldsymbol{\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, chegaraviy qatlamtenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{v}\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \boldsymbol{\vartheta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,; \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (1.12)$$

yoki

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{du}{dx} + \vartheta\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{(1.13)}$$

Ushbu sistemani birinchi bo'lib L.Prandtl 1904-yilda ko'rsatib bergan.

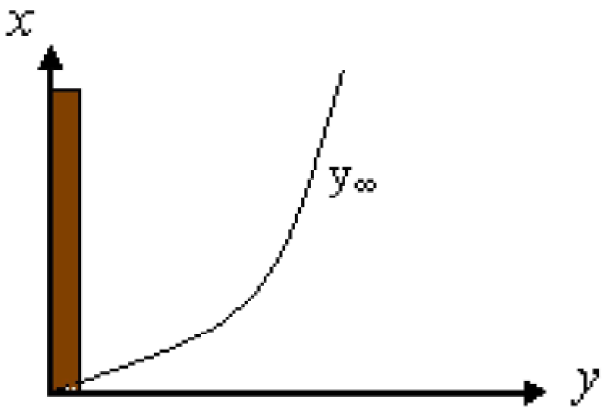
I-bob bo’yicha xulosa

I-bob bo’yicha xulosa qilib shuni aytish mumkinki, hozirgi paytda (1.13) tenglamalardan ko'pgina jarayonlami modellashtirishda foydalanib kelinmoqda. Ular to'g’risida adabiyotlar sharhida bir nechta misol keltirilgan. Xuddi shunday tenglamalardan [2] da zichlikni hisobga olmasdan vertikal sterjen yaqinida temperatura tarqalish masalasi ko'rilgan. Umuman olganda bunday muhit temperaturasi o’zgaruvchan bo’lgan hollarda zichlik ta'sirini ham hisobga olgan maqsadga muvofiq. Biz ushbu ishda muhitdagi zichlik o’zgarishini ham hisobga olib sterjen yaqinida issiqlik tarqalish masalasini o’rgandik.

2 BOB. VERTIKAL STERJEN' YONIDA TARQALISH JARAYONI UCHUN MATEMATIK MODELNI TANLASH.

2.1. Masalaning qo'yilishi. Asosiy tenglamalar

Bizga ikki o'lchovli soha berilgan bo'lsin. Issiqlik manbasi koordinata o'qlarining birida yoki ikkalasida ham qo'yilgan bo'lishi mumkin (2.1.1-chizma).



2.1.1-chizma. x o'qida sterjen qo'yilgan hol.

Sirt bilan soha yaqinida dinamik va issiqlik chegaraviy qatlamlari hosil bo'ladi. Dinamik chegaraviy qatlam qovushqoqlik va gaz harakatini aniqlash uchun kiritiladi, issiqlik chegaraviy qatlam esa temperatura o'zgarishini aniqlash uchun kiritiladi. Dinamik chegaraviy qatlam chegarasi sohadagi tezlik o'zgarmay qolgan nuqta bilan, issiqlik chegaraviy qatlam chegarasi esa sohadagi temperatura o'zgarmas bo'lib qolgan nuqta bilan

aniqlanadi. Agar dinamik chegaraviy qatlam qalinligini δ_v, issiqlik chegaraviy

qatlam qalinligini δ_T bilan belgilasak, laminar chegaraviy qatlamda

$$\frac{\delta_v}{\delta} = \sqrt{Pr}$$

bu erda Pr - Prandtl soni.

Agar Pr = l bo'lsa, dinamik va chegaraviy qatlamlar qalinligi teng, Pr < 1 bo'lsa, chegaraviy qatlam qalinligi issiqlik chegaraviy qatlam qalinligidan kichik. Pr < 1 holi muhiti gaz bo'lgan sohalar uchun o'rinli [2].

Dinamik chegaraviy qatlam tenglamalari harakat va tutash muhit differentsial te

Nglamalari asosida keltirib chiqariladi.Issiqlik chegaraviy qatlam tenglamalari energiya tenglamalari yordamida keltirib chiqariladi. Temperatura muhitning issiqlik balansini o'lchovi bo'libgina qolmay, issiqlik yo'nalishini belgilovchi kattalik ham bo'lib hisoblanadi.

Temperaturaning son jihatdan aniqlanishi muhitning issiqlik darajasi bilan aniqlanadi. Temperaturani o'lchash uchun suyuqliklarning issiqlikdan kengayish xossasidan foydalaniladi. Temperaturaning amaliy shkalasi

$t = 0^{\circ}C$ (Tsel'siy shkalasi) uchun muzning normal bosimda erish nuqtasi

qabul qilingan. Anashu normal bosimda suvning qaynash nuqtasi $t = 100^{\circ}C$ deb qabul qilingan. Termometrning ana shu oraliqning 100 ga bo'lingan har bir sohasi hisoblanadi. Kelvin shkalasidagi temperatura $(T\ )$ bilan Tsel'siy

shkalasidagi temperatura (t) orasidagi bog’lanish $T = 273{,}15 + t$ kabi aniqlanadi.

Absolyut temperaturaning $T = 0$ qiymatiga molekulalar harakati

to'xtash holati to'g'ri keladi. Bunda $= -273{,}15^{\circ}C$. Absolyut temperaturadan muhitdagi jarayonlami o'rganganda foydalanmiz.

Biror issiqlik tarqatuvchi manba oldida konvektiv issiqlik tarqalish jarayoni uchun muhitdagi gaz molekulalariga quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: zichliklar farqi hisobiga hosil bo'ladigan tezliklar gradienti hisobiga qovushqoqlik kuchlari, o'g'irlik kuchlari.

Issiqlik tarqalishida zichliklar farqi hisobiga o'g'irlik kuchi ta'sirida harakat paydo bo'ladi va u yuqoriga yo'nalgan bo'ladi.

Hisoblash ishlarida qatlamlami ketma-ketligini yuqoriga qarab hisoblab boramiz, shuning uchun *x* o'qini vertikal, *y* o'qini esa gorizontal joylashtiramiz.

Koordinata o'qlarida joylashgan manbadan muhitga issiqlik tarqalishini chegaraviy qatlam nazariyasi tenglamalaridan foydalanib o'rganamiz [1] .

Asosiy differentsial tenglamalar quyidagicha: uzluksizlik tenglamasi:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (2.1)$$

harakat differentsial tenglamasi:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \rho g \qquad (2.2)$$

energiya tenglamasi:

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (2.3)$$

Ushbu (2.1) – (2.3) differentsial tenglamalarda noma’lumlar to’rtta:

$, v, \rho, T$. Qovushqoqlik koeffisenti μ ni Saterlend formulasi orqali aniqlaymiz [1]:

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \quad (2.4)$$

$20°C$ - havo uchun $C_1 = 1{,}458 \cdot 10^{-8}$ va $C_2 = 100$.

Noma'lumlar soni 4 ta, tenglamalar soni esa 3 ta bo'lgani va tenglamalar sonini noma'lumlar soniga tenglashtirish uchun gazlardagi holat tenglmasidan foydalanamiz:

$$P = \rho \cdot R \cdot T \quad (2.5)$$

Bu yerda P - bosim o'zgarmas va atmosfera bosimiga deb olinadi.

Shunday qilib (2.1) - (2.4) tenglamalar sistemasi yopiq holga keladi.

Chegaraviy shartlarni qo'yish.

Chegaraviy shartlarni qo'yish uchun 2.2.1-chizmaga murojaat qilamiz. Koordinatalar sistemasida *x* o'qi bo'ylab yuqoridan chegaralanmagan sterjen joylashtirilgan. Sterjen o'zgarmas temperaturaga ega. Temperatura tarqalishi natijasida sterjen yaqinida dinamik va temperaturaviy chegaraviy qatlam hosil bo'ladi. Qatlam qalinligi yuqoriga qarab *y* o'qi bo'ylab kengayib boradi. Hisoblashni $x = 0$ nuqtadan yuqoriga qarab qatlamma-qatlam olib boramiz.

Chegaraviy qatlamlami ham ana shu mulohazalardan kelib chiqib shakllantiramiz:

$$x = 0: \begin{cases} \mu = 0, H = H_0, v = 0 & y = 0\ da \\ u = 0, H = H, v = 0 & y > 0\ da \end{cases}$$

$$x > 0: \begin{cases} \mu = 0, H = H_0, v = 0 & y = 0\ da \\ u \to 0, H \to H, v \to 0 & y \to y\ da \end{cases}$$

(2.6)

(2.6) da *x* = *0* deganda koordinata boshidan yo'naltirilgan *y* o'qini tushunamiz. *0* - indeksi bilan sterjendagi parametrlar qiymatini, *1* -indeksi bilan

esa tashqi muhit parametrlari qiymatini tushunamiz. (2.6) da y_∞ bilan qiymati aniqlanib boradigan chegaraviy qatlam kengligi tushuniladi. Umuman aytganda 1-shakldagi o'ng tomon ochiq bo'lishi ham, yopiq bo'lishi ham mumkin.

Tenglamalarni o'lchovsiz holga keltirish

(2.1)-(2.4) tenglamalar sitemasini (2.6) chegaraviy shartlar asosida echish uchun o'lchovsiz holga keltiramiz. Bunda quyidagi o'lchov kattaliklarini kiritamiz [7]:

$$u_m = u_1, \quad T = T_1, \quad \rho_m = \rho_1, \quad v_m = u_1, \quad x_m = a, \quad y_m = a$$

Agar $\overline{\theta}$ – ustiga chiziqcha bilan o’lchovsiz kattaliklarni belgilasak, yuqoridagilardan foydalanib yozamiz: *m* – indeks masshtab kattalik ekanini bildiradi.

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_1}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{a}$$

yoki

$$u = \bar{u} \cdot u_1, \;\; v = \bar{v} \cdot v_1, \;\; T = \bar{T} \cdot T_1, \;\; \rho = \bar{\rho} \cdot \rho_1, \;\; x = \bar{x} \cdot a, \;\; y = \bar{y} \cdot a \qquad (2.7)$$

(2.7) dan foydalanib (2.1-2.4) tenglamalar sistemasini o'lchovsiz holga keltiramiz.

(2.7) dagi qiymatlami (2.1) uzluksizlik tenglamasiga qo'yamiz:

$$\frac{\partial}{\partial(\bar{x} \cdot a)}(\bar{\rho} \cdot \rho_1 \cdot \bar{u} \cdot u_1) + \frac{\partial}{\partial(\bar{y} \cdot a)}(\bar{\rho} \cdot \rho_1 \cdot \bar{v} \cdot v_1) = 0 \qquad (2.8)$$

(2.8) da o'zgarmaslami differentsial ostidan chiqarsak

$$\frac{\rho_1 \cdot u_1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{u}) + \frac{\rho_1 \cdot u_1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{v}) = 0 \qquad (2.9)$$

(2.9) tenglama ikki tomonini $\frac{\rho_1 \cdot u_1}{a}$ ga bo'lib yuborsak,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{v}) = 0$$

(2.10)

ko'rinishga ega bo'lamiz. Demak, o'lchovsiz holga keltirilganda uzluksizlik tenglamasida qo'shimcha hadlar paydo bo'lmas ekan.

Endi (2.7) dan foydalanib (2.2) harakat differentsial tenglamasini o'lchovsiz holga keltiramiz. Buning uchun (2.7) dagi mos qiymatlami (2.2) sha qo'yamiz:

$$\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot\bar{u}\cdot u_1\cdot\frac{\partial(\bar{u}\cdot u_1)}{\partial(\bar{x}\cdot a)}+\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot\bar{v}\cdot u_1\cdot\frac{\partial(\bar{u}\cdot u_1)}{\partial(\bar{y}\cdot a)}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial(\bar{y}\cdot a)}\cdot\left(\mu\frac{\partial(\bar{u}\cdot u_1)}{\partial(\bar{y}\cdot a)}\right)-\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot g \qquad (2.11)$$

(2.11) da o’zgarmaslarni differensial ostidan chiqaramiz:

$$\frac{\rho_1\cdot u_1^2}{a}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{u}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{x}}+\frac{\rho_1\cdot u_1^2}{a}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{y}}=$$

$$=\frac{u_1}{a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\cdot\left(\mu\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{y}}\right)-\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot g \qquad (2.12)$$

(2.12) da tenglamani ikki tomonini $\frac{\rho_1\cdot u_1^2}{a}$ ga bo’lib yuboramiz.

$$\bar{u}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{x}}+\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{y}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\cdot\left(\frac{\mu}{\rho_1\cdot u_1\cdot a}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{u}}{\partial\cdot\bar{y}}\right)-\bar{\rho}\cdot\frac{a\cdot g}{u_1^2}$$

(2.13)

(2.13) da $\frac{\rho_1\cdot u_1\cdot a}{\mu}=Re$ – Reyno’ds soni, $\frac{u_1^2}{a\cdot g}=Fr$ – Frud soni ekanini hisobga olsak,

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)-\frac{\bar{\rho}}{Fr} \qquad (2.14)$$

tenglamaga ega bo’lamiz.

Xuddi shuningdek (2.7) dan foydalanib (2.3) energiya tenglamasini o'lchovsiz holga keltiramiz. (2.7) dagi mos parametrlami (2.3) ga qo'yib ega bo'lamiz:

$$\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot\bar{u}\cdot u_1\cdot\frac{\partial(\bar{T}\cdot T_1)}{\partial(\bar{x}\cdot a)}+\bar{\rho}\cdot\rho_1\cdot\bar{v}\cdot u_1\cdot\frac{\partial(\bar{T}\cdot T_1)}{\partial(\bar{y}\cdot a)}=$$

$$=\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial}{\partial(\bar{y}\cdot a)}\cdot\left(\mu\frac{\partial(\bar{T}\cdot T_1)}{\partial(\bar{y}\cdot a)}\right)$$

(2.15)

(2.15) da o'zgarmaslami differentsial ostidan chiqaramiz:

$$\frac{\rho_1\cdot u_1\cdot T_1}{a}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{u}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{x}}+\frac{\rho_1\cdot u_1\cdot T_1}{a}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{y}}=$$

$$=\frac{1}{Pr}\cdot\frac{T_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\left(\mu\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}\right)$$

(2.16)

(2.16) da tenglama ikki tomonini $\frac{\rho_1\cdot u_1\cdot T_1}{a}$ ga bo’lib yuboramiz:

$$\bar{\rho}\cdot\bar{u}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{x}}+\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{y}}=\frac{1}{Pr}\cdot\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\left(\frac{\mu}{\rho_1\cdot u_1\cdot a}\cdot\frac{\partial\cdot\bar{T}}{\partial\cdot\bar{y}}\right)$$

(2.17)

(2.17) da μ ni ham $\bar{u} = u/u_1$ kabi o'lchovsiz holga keltiritb, barcha o'zgarmaslami

differentsial ostidan chiqarsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\bar{\rho}\cdot\bar{u}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{x}}+\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{y}}=\frac{1}{Pr}\cdot\frac{\mu}{\rho_1\cdot u_1\cdot a}\cdot\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\left(\mu\cdot\frac{\partial\cdot\bar{T}}{\partial\cdot\bar{y}}\right)$$
(2.18)

(2.18) da $\frac{\rho_1\cdot u_1\cdot a}{\mu}=Re$ ekanini nazarga olsak,

$$\bar{\rho}\cdot\bar{u}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{x}}+\bar{\rho}\cdot\bar{v}\cdot\frac{\partial(\bar{T})}{\partial\cdot\bar{y}}=\frac{1}{Pr}\cdot\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial}{\partial\cdot\bar{y}}\left(\mu\cdot\frac{\partial\cdot\bar{T}}{\partial\cdot\bar{y}}\right)$$
(2.19)

(2.19) da Pr -Pranndtlva Re - Reynol'ds sonlari.

Gazlar uchun holat tenglamasi umumiy holga quyidagicha yoziladi:

$$P=\rho\cdot R\cdot T\cdot\sum\frac{c_i}{m_i}$$
(2.20)

bu yerda c_i -bir birlik havo massasidagi moddalar hissalari (kontsentratsiya), ular o'lchovsiz, barcha c_i lar uchun $\sum c_i = 1$. m_i - esa shu moddalar molyar massalari, $\frac{kg}{mol}$.

(2.20) dagi qadlaming birliklarini sanab o'tamiz:

P uchun birlik - $\frac{kg}{m \cdot s^2}$ *(bosim),*

ρ uchun birlik - $\frac{kg}{m^3}$ *(zichlik),*

R uchun birlik - $\frac{J}{mol \cdot K} = \frac{\frac{kg \cdot m^2}{c^2}}{mol \cdot K} = \frac{kg \cdot m^2}{mol \cdot K \cdot s^2}$ *(universal doimiysi),*

T uchun birlik - K *(temperatura).*

Barcha birliklarni (2.20) ga qo’yamiz:

$$\frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{kg}{m^2} \cdot \frac{kg \cdot m^3}{mol \cdot K \cdot s^2} \cdot K \cdot 1/(\frac{kg}{mol}) \quad (2.21)$$

(2.21) da qisqarishlardan so’ng

$$\frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

ga ega bo’lamiz, yani agar (2.20) ni o’lchovsiz holda yozsak bo’ladi:

$$\bar{P} \cdot P_1 = \bar{\rho} \cdot \rho_1 \cdot R \cdot \bar{T} \cdot T_1$$

(2.22)

(2.22) dan $\bar{P} = \frac{\bar{\rho} \cdot \rho_1 \cdot R \cdot \bar{T} \cdot T_1}{P_1}$ va $\frac{\rho_1 \cdot R \cdot T_1}{P_1} = c$

deb olsak, $\bar{P} = c \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}$ ga ega bo'lamiz. Biz P ni o'zgarmas, atmosfera

bosimiga teng, deb olganimiz uchun $P_1 = P_a$ va $\bar{P} = 1$, demak, $1 = c \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}$, yoki

$$\bar{\rho} = \frac{c}{\bar{T}}$$

(2.23)

ga ega bo'lamiz, bu yerda $c_i = \frac{1}{c}$

Endi o'lchovsiz holga o'tkazilgan barcha tenglamalami bir joyda sistemada yozamiz, oson bo'lsin uchun ustiga chiziqchalami olib tashlaymiz: (2.6) chegaraviy shartlami qam o'lchovsiz qolga o'zsak, quyidagi ko'rinishga keladi:

2.2. Issiqlik tarqalish masalalarini yechishda chekli ayirmalar usuli

Ma' lumki tabiatdagi ko'plab jarayonlar, xususan suyuqlik va gazlarning turli muhitlardagi harakati, diffuziya, turli tebranishlar va h.k.lar matematika tiliga o'tkazilganda differensial tenglama yoki tenglamalar sistemasi gakeladi.

O'rganilayotgan jarayon xarakteriga qarab u yoki bu chegaraviy(boshlang'ich) shartlar qo'yiladi.

Differensial tenglama yoki tenglamalar qo'yilgan chegaraviy (boshlang'ich) shartlar bilan birgalikda differensial masala deyiladi.

Masalan:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Masalaga birinchi tartibl ioddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi deyiladi.

Tabiiyki ma'lum bir jarayonni matematika yordamida o'rganish uchun o'sha jarayonni ifodalovchi differensial tenglama yoki tenglamalar sistemasini echishni bilish kerak.

Aniq yechiladigan differensial tenglamalar juda kichik sinfni tashkil etganligi uchun amalda ko'pchilik hollarda taqribiy hisoblash metodlari yordamida differensial tenglamalar yechiladi. U yoki bu taqribiy metodni qo'llash uchun albatta qaralayotgan differensial masala echimi mavjud va yagona bo'lishi kerak.

Differensial tenglamalami taqribiy echishning eng keng tarqalgan umumiy metodlaridan biri chekli ayirmali metoddir. Xususiy hosilali differensial tenglamaga nisbatan ishlatilganda bu metod to'r metodi ham deb yuritiladi.

Chekli ayirmali metodni qo'llash quyidagicha bajariladi. Differensial masala echimi izlanayotgan soha bo'laklarga bo'linadi (to'r bilan qoplanadi).

Differensial tenglama va chegaraviy shartlarga kiruvchi funksiya hosilalari funksiyaning nuqtalardagi qiymatlari bilan almashtiriladi (approksimasiya qilinadi.)

Differensial masala o'rniga funksiyaning nuqtalardagi qiyrnatlariga nisbatan hosil qilingan algebraik tenglamalar sistemasi biror metod yordamida echiladi. Har qanday taqribiy metod ni qo'llagandagidek, chekli ayirmali metodni qo'llaganda ham quyidagi savollarga javob berish kerak bo'ladi: Quyidagicha savollar tugiladi:

Differensial masalaga kiruvchi hosilalar qanday aniqlik bilan approksimasiya qilinadi hosil qilingan diskret masala echimi bo'laklash parametri h->0 da qo'yilgan differensial masala echimini beradimi? Agar echim olinsa qanday aniqlik bilan olinadi? Bu savollarga oddiy misollar yordamida javob beramiz.

Sohani bo'laklashni bir necha usulini ko'rib o'tamiz.

f(x) ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasini topish talab qilingan bo'lsin.

$f'(x) = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ ni hisoblash masalasini

$f'(x) \sim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ yoki $f'(x) \sim \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

formulalar yordamida hisoblash masalasiga almashtirish mumkin. $f``(x)$ hosilani topish uchun

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Bu formulalaming barchasi h kichrayib borgan sari aniqroq bo'laveradilar. Har bir tanlab olingan h uchun bu formulalarda funksiyaning chekli sondagi qiymatlari va chekli sondagi arifmetik amallar qatnashadilar.

Bu formulalar hosilani hisoblash masalasini diskretlashtirishga misol bo'la oladilar. [0,1] kesmani nta teng bo'laklarga bo'lamiz. Qo'shni Nuqtalar orasidagi masofa $X_t - X_{t-1} = h = l/N$ ni to'rning qadami deb ataymiz. Barcha nuqtalaming

$$\omega_m = \{X_1 = th\,,\ \ t = 1,2,3,\dots,\ \ N-1\}$$

to'plami kesmadagi to'rni tashkil etadi.

Bu to`plamga $X_0=0$, $X_N=1$ chegaraviy nuqtalarni ham qo'yish mumkin.

U holda to`r

$$\omega_m = \{X_1 = th\,,\ \ t = 0,1,2,3,\dots,\ \ N-1, N\}$$

kabi belgilanadi. [0,1] kesmada uzluksiz U(x) funksiya o'rniga $y_n(x_t)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning qiymatlari turining x_t nuqtalarida hisoblanadi. Funksiyaning o'zi esa to'rning qadami h parametrdan bog'liq bo'ladi.

Aniqlanish sohasi sifatida D=(0<x<1,0 < t < T) to'g'ri to'rtburchakni olamiz X o`qining [0,1], T o`qining [0,T] kesmalarini mos ravishda

N_1 va N_2 teng bo`laklarga bo`lamiz. h=l/N, $I = T\ /\ N_2$ belgilashlami kiritamiz.

Bo`linish nuqtalari orqali x va t o`qlariga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. Bu to`g`ri chiziqlarning kesishuvi natijasida to`r hosil qiluvchi nuqtalar to`plamini hosil qilamiz(2.2.1-chizma).

Δx		$i+1\,,j$	
Δy	$i\,,j-1$	$i\,,j$	$i\,,j+1$

$i-1,j$

Bu to’r x o’qi bo’yicha h(rasmda Δx) , t

o’qi bo’yicha/ (rasmda Δy) qadamga ega. Bitta gorizontal yoki vertical chiziqda yotuvchi yonma-

yon nuqtalarga qo’shni nuqtalar deyiladi. Ular orasidagi masofa mos ravishda h yoki ḷ gateng. Yana oldingi misoldek $0< x < 1$ kesmani qaraymiz. Ixtiyoriy nuqtalar $0 \lhd x_1 \lhd x_2 \ldots \ldots \lhd x_{N-1}$

Olib uni N ta bo’lakka bo’lamiz.

Nuqtalaming

$\{x_t , t = 0,1,2,3, \ldots, \quad N - 1,\} x_0 = 0 , x_N = 1 \}$

to’plami [0,1] kesmada teng bo’lmagan qadamli $\tilde{\omega}_m$ to’rni tashkil etadi

Qo’shni tugunlar orasidagi masofa $h_t = x_t - x_{t-1}$ to’r qadamli , y I Dan bog ’ liq yangi to’r funksiyasi hisoblanadi.

Bu misolda to’r qadamlari $\sum_{t=1}^{\Pi} h_t = 1$ shartni qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik $x = (x_1, x_2)$ tekislikda F chegarali murakkab ko’rinishdagi soha berilgan G bo’lsin

$$x_1^{t1} = t_1 * h_1, \qquad t_1 = 0 , 1 , \quad 2, \ldots \ldots, h_1 \rhd 0$$

$$x_1^{t2} = t_2 * h_2, \qquad t_2 = 0 , 1 , \quad 2, \ldots \ldots, h_2 \rhd 0$$

to’g’ri chiziqlami o’tkazamiz , natijada $(x,, x_2)$ tekislikda $(t_l h_l \ , t_{22})$ $t_x , t_2 = 0, 1, 2,$ nuqtalari bo’lgan to’rni olamiz. Bu to’r OX_1 vaOX_2 yo’nalishlarining harbiri bo’yicha teng qadamlidir. Bizni G=G+P sohaga tegishli bo’lgan nuqtalar qiziqtiradi (chegaradagi nuqtalar ham kiradi). G sohaning ichki qismiga tegishli bo’lgan ($t_1 \ h_1,\ t_2 h_2$) nuqtalarga ichki nuqtalar deb aytiladi, ulaming to’plamini $\tilde{\omega}_m$ bilanbelgilaymiz. Uzluksiz argumentli U(x) $x G$ funksiyalar o’miga $y(x_t)$ to’r funksiyalarni qaraymiz. Bu funksiya $\tilde{\omega}_m =$ (x,) to’rning x_1 nuqtasining funksiyasidir. Agar barcha nuqtalami biror tartibda nomerlasak:

$x\ x_1, x_2, \ldots \ldots \ldots .., x_n$

u holda to'r funksiyasi ẙ ning bu nuqtadagi qiymatlarini

$\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots \ldots \ldots .., \gamma_n$

vektorning komponentlari deb qarash mumkin.Agar to'r qurilgan G soha chekli bo'lsa ,U vektorning o'lchovi ham chekli bo'ladi.

Har qanday differensial operatori taqribiy chekli ayirmali operator bilan almashtirish ga differensial operatorni approksimasiyalash (yoki chekli ayirmali approksimasiyalash) deb ataladi. Chekli ayirmali approksimasiyalashni dastlab ayrim olingan ixtiyoriy x nuqtada bajaramiz. Agar v(x) uzluksiz funksiya bo'lsa v_n (x) = v(x) deb olinadi. Ixtiyoriy L - Differensial operatorni approksimasiyalashdan oldin shablon tanlash kerak. Shablon bu shunday qo'shni nuqtalarki ,ular x nuqta bilan yonma-yon joylashgan bo'lib, x nuqtada L Operatorni approksimasiyalash uchun ishlatiladi. Endi aniq misollarda eng oddiy differensial operatorlarni approksimasiyalashni qarab chiqamiz.

1-Misol.$L_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ Ox o'qida ixtiyoriy x nuqtani tanlab x-h va x+h (h>0) nuqtalarni olamiz.

Operatorni approksimasiyalash uchun quyidagi ifodalardan ixtiyoriy birini ishlatish mumkin:

$$L_n^+ v = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v_x$$

(1.14)

$$L_n^- v = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v_x$$

(1.15)

(1.14Ifodaga o'ng chekli ayirmali hosilada esa chap chekli ayirmali hosila deyiladi. Shu sababli bu formulalar 2 nuqtali shablonga ega deymiz. Xuddi shuningdek $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ approksimasiyalashda (1.14) va

(1.15)

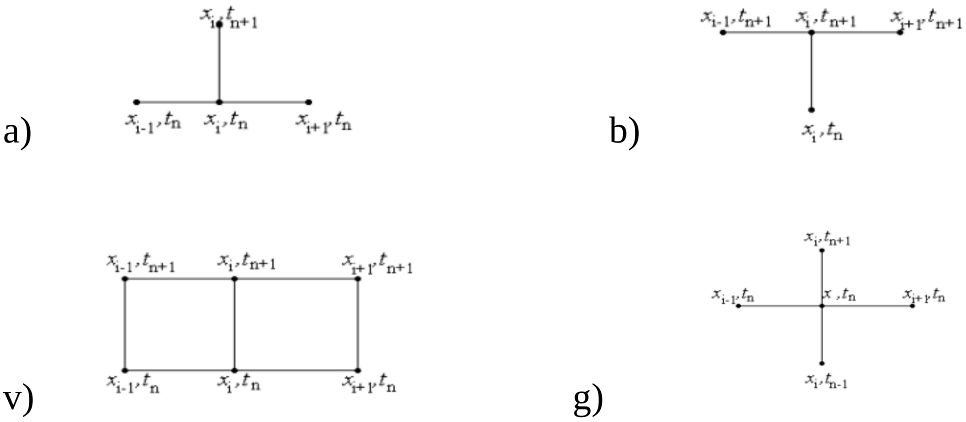
Ifodalaring chiziqli kombinatsiyasini olish ham mumkin.

Masalan: $$L_h^{(e)} v = \sigma v_x + (1 - \sigma) v_x$$

(1.16)

Bu yerda σ – ixtiyoriy haqiqiy son. Agar σ = 0.05 bo’lsa markaziy chekli ayirmasi hosilani olamiz.

Yuqorida keltirilgan chekli ayirmalami yechishda quyidagi shablonlardan foydalanildi (2.2.2-chizma):



2.2.2-chizma.

Differensial tenglamalardagi xadlami approksimasiya shablonlari. Differensial tenglamalar chekli ayirmali ko’rinishda approksimasiya qilinib, algebraik tenglamaga olib kelingandan keyin tenglamalar biror usul bilan echiladi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar approksimasiyalari uch yoki besh diognalli tenglamalar sistemasiga keladi. Qo’yilgan ana shu uch va besh diognalli tenglamalar sistemasini progonka usulida echish metodini keltiramiz.

Ma'lumki chizikli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari sonli usullar orasida muhim o’rin tutadi. Chunki juda ko’p amaliy masalalar bunday sistemallami echish bilan bog’liq. Agar tenglamalar sistemasini matritca holida ifodalasak, u quyidagi ko’rinishda bo’ladi

$$A \bullet x = \mathbf{B} \qquad (1.17)$$

Ma'lum hadlardan iborat matritca turli ko’rinishlarda, masalan: simmetrik, uchburchak, diagonal holida bo’lishi mumkin. Agar matritcada diagonal va unga parallel bo’lgan ikkita qo’shni bo’lgan elementlari noldan farqli, boshqa elementlar barchasi nolga teng bo’lsa bunday matritca uch diagonalli deb ataladi. Masalan quyi tartibli, uch diagonalli matritcaga quyidagi misolni keltirishimiz mumkin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Besh diagonalli matritsalar uchun ham xuddi shunday ta'rifni berishimiz mumkin. Bunday maxsus tenglamalar sistemasini yechish uchun ChATS ni yechishga mo’ljallangan to’g’ri usullar , masalan Gaus usulini qo’llash mumkin Biroq diagonalli sistemalarning tartibi juda yuqori bo’lishligi va n^2 ta koeffisientlardan faqat 3n+1 tasigina 0 dan farqliligi an'anaviy usullarni qo’llashga imkoniyat bermaydi. Odatda Sistema tartibii 1000, 10000 larga teng bo’lishi mumkin.Biroq bu nollar ustida ma'nosiz amallarning bajarilishiga va kompyuterning hisoblash vaqtini samarasiz sarflanishiga sabab bo’ladi. Shuning uchun bunday tenglamalar sistemasini echishning alohida usullari ishlab chiqilgan.Shunday usullardan biri eng sodda va dasturlashga qulay, xatoliklar yig’ilmasi hosil qilmaydigani: haydash usulidir[5,6,9].

Usulning mohiyati quyidagicha.Uch diagonally tenglamalar sistemasi umumiy holda quyidacha berilgan bo ’ lsin:

$$\begin{cases} B_0 y_0 + C_0 y_1 = F_0 \\ A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i \\ A_n y_{n-1} + B_n y_n = f_n \end{cases} \qquad i = \overline{1, \dots\dots, n-1}$$

(1.18)

Yoki

$$\begin{bmatrix} B_0 & B_0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \cdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Sistema $y_0, y_1, \ldots . y_n$ dan iborat n+1 noma`lumli n+1 ta tenglamadan iborat. Maxsus diagonalli sistemalarni echishga mo’ljallangan «haydash»

Usuli ikki bosqichdan iborat:

- noma'lumli koeffisientlarni aniqlash (to’g’ri bosqich);
- sistemaning echimlarini aniqlash (teskari bosqich).

Birinchi bosqichda (1.7) sistemaning echimi quyidagi ko’rinishda qidiriladi:

$$Y_i = \propto_{i+1} \gamma_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (1.19)$$

bu erda $\propto_{i+1}$ va β_{i+1} lar hozircha noma'lum koeffisientlar.

Ularni topish uchun (1.19) tenglikdan hosilqilingan $y_i = \propto_{i+1} \gamma_{i+1} + \beta_{i+1}$ *va* $y_{i-1} = \propto_i \gamma_i + \beta_i$ ifodalami (1.7) sistemadagi tenglamalardan biriga qo’yamiz:

$$A_i \propto_i (\propto_{i+1} \gamma_{i+1} + \beta_{i+1}) + A_i \beta_i + B_i \alpha_{i+1} \gamma_{i+1} + B_i \beta_{i+1} + C_i \gamma_{i+1} = F_i$$

Yoki

$$(A_i \propto_i \propto_{i+1} + B_i \propto_{i+1} + C_i) \gamma_{i+1} + (A_i \propto_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - F_i) = 0$$

Bu chiziqli ifoda aynan 0 ga teng bo ’ lishi uchun γ_i lar noldan farqli ekanligini hisobga olib, koeffisientlar aynan nolga teng bo’lishi kerak deya olamiz:

$$\begin{cases} A_i + B_i \propto_{i+1} + C_i \propto_i \propto_{i+1} = 0 \\ B_i\beta_{i+1} + C_i \propto_i \beta_{i+1} + C_i\beta_i - F_i = 0 \end{cases}$$

β_{i+1}*noma`lum koeffitsientlarni toppish unchalik qiyin emas*

$$\propto_{i+1} = \frac{-C_i}{B_i + C_i \propto_i}, \quad \propto_{i+1} = \frac{F - A_i\beta_i}{B_i + A_i \propto_i}, \qquad i = \overline{1, \ldots, n-1}$$

(1.20)

Mazkur rekurent formuladagi barcha $\propto_{i+1}$ va β_{i+1}larni aniqlash uchun

yoki boshqacha aytgandek rekurent formulani «yurishi» uchun dastlabki $\propto_{i+1}$

va β_i qiymatlami topishimiz kerak. Bu qiymatlami topishimiz uchun (1.18) tenglamalar sistemasidagi birinchi tenglamani har ikkala tomonini B_0 Koeffisientga bo’lamiz va y_0 ni topamiz:

$y_0 = -\frac{C_0}{B_0} y_1 + \frac{F_0}{B_0}$ boshqa tomondan $y_0 = \propto_1 y_1 + \beta_1$ ifodani hisobga olsak,

$\propto_1 = -\frac{C_0}{B_0}$, $\beta_1 = -\frac{F_0}{B_0}$ ekanligi kelib chiqadi. $\propto_1$, β_1 qiymatlar ma' lum bo ’ lgach, barcha keyingi $\propto_i$, β_i lar

(1.20) formulalar yordamida topiladi. Bu jarayon haydash usulining to'g'ri

bosqichini tashkil etadi. Ikkinchi bosqichda $\propto$ va β laming qiymatlari yordamida (1.19) formula yordamida y_i echimlar topiladi.

Lekin dastlab rekkurent formula uchun dastlabki y_n qiymat topib

olinadi.Buning uchun (1.18) tenglamalar sistemasidagi $A_n y_{n-1} + B_n y_n = F_n$ tenglamadan va (1.19) tenglikning y_n uchun yozib olingan

$$y_{n-1} = \propto_n y_n + \beta_n$$

Ifodalaridan foydalanamiz, ya'ni ularni sistema deb qarab,

Bu sistemadan y_n aniqlaymiz: $y_n = \frac{F_n - A_n\beta_n}{A_n \propto_n + \beta_n}$

y_n ni hisoblagach, $y_n = \propto_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ rekkurent formula yordamida $i =$

$\overline{n-1,0}$ qiymatlarga mos barcha qidirilayotgan y_i lar hisoblanadi.

Bu jarayon i ga nisbatan teskari tartibda bo'lgani uchun uni haydashning teskari bosqichi deb ataladi.

2.3.Masalani yechish usuli va algoritmi

(2.1-2.4) tenglamalar sistemasini yechish uchun hozirgi vaqtda keng qo'llanilayotgan chekli ayirmalar usulidan foydalanamiz[2, 4, 8]. Differentsial tenglamalardan ulaming algebraik analoglariga o'tish uchun harakat va energiya tenglamalarini quyidagi ko'rinishda o'zib olamiz:

$$\rho u\frac{\partial z}{\partial x}+\rho v\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\theta \qquad (2.26)$$

Bu yerda k=Re, $\theta=-\frac{\rho}{Fr}$ - harakat differensial tenglamasi uchun.

k=Pr, $\theta=0$ - energiya-temperatura tarqalish tenglamasi uchun. z uchun umumiy holda chegaraviy shartlar quyidagicha yozilishi mumkin:

$z=z_0$-y=0 - o`qida(sterjenda),

$z=z_1$ - qatlam chegarasida.

Ko'rilayotgan sohani quyidagicha to'r bilan qoplaymiz.

$$x = i x\Delta x\ ,\ y = j y\Delta y\ ,\ i=\overline{o,n-1},\ j = \overline{0,m-1}$$

Bu erda Δx, Δy -gorizontal va vertikal yo'nalishdagi qo'shni tugun nuqtalar orasidagi masofa, n - abtsissa yo'nalishidagi m - ordinata yo'nalishidagi tugun nuqtalar soni

Harakat differentsial tenglamasidagi chiziqsiz hadlar qiymatlari yo chegaraviy shartdan, yo oldingi va keyingi qatlam o'rtasidan olinadi.

Ichki nuqtalar uchun quyidagi chekli ayirmalardan foydalanamiz:

$$g\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g_{i,j}^{S}\left(z_{i,j} - z_{i-1,j}\right)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$g\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g_{i,j}^{S}\left(z_{i,j} - z_{i-1,j}\right)}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\left[g_{i,j+\frac{1}{2}}^{S}\left(z_{i,j-1} - z_{i,j}\right) - g_{i,j-\frac{1}{2}}^{S}\left(z_{i,j} - z_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Bu yerda $g_{i,j+1}^{S} = \frac{g_{i,j\pm 1}+g_{i,j}}{2}$

S- indeks parametr chiziqsiz ekanini ko'rsatadi. (2.27) dan foydalanganda (2.26)

ning chekli ayirmali ko' rinishi quyidagicha bo' ladi:

$$(pu)_{i,j}^{S}\frac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{\Delta x} + (pv)_{i,j}^{S}\frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2\Delta y} = \frac{1}{k*j*h}\left[\frac{(\rho*\mu*y)_{i,j+\frac{1}{2}}^{S}*(z_{i,j+1} - z_{i,j}) - (\rho*\mu*y)_{i,j-\frac{1}{2}}^{S}*(z_{i,j} - z_{i,j-1})}{\Delta y^2}\right] + \theta_{i,j}$$

Yuqoridagilardan ko`rinib turibdiki, chekli ayirmalarga o`tishdagi approksimatsiya xatoligi $0(\Delta x + \Delta y^2)$. (2.28) tenglamni yechish uchun progonka(qaydash) usulidan foydalanamiz [8]. Buning uchun chegaraviy shartlarni birlashtirgan holda (2.28) ni quyidagi tenglamalar sistemasi shaklida yozib olamiz [10]:

$$\begin{cases} -C_{i\,0} * u_{i\,0} + B_{i\,0} * u_{i\,1} = -E_{i\,0} & (j = 0) \\ A_{y\,0} * u_{y-1} - C_y u_y + B_y u_{y+1} = -E_y & (1 \le j \le n-1) \\ A_{in} * u_{in-1} - C_{in} u_n = -E_n & (j = n) \end{cases}$$

(2.28) da $j = 0$ da $C_{i\,0} = 1$, $B_{i\,0} = 0$, $E_{i\,0} = 0$ deb qabul qilamiz, chunki bu holda (2.25) chegaraviy shartlarga asosan $u_{j\,0} = 0$ bo'ladi. Bu narsa tezlik uchun, chunki sterjenda tezlik nolga teng.

Temperatura uchun esa (2.25) shartlarga asosan $j = 0$ da $C_{i0} = 1$,

$B_{i0} = 0$, $E_{0\,i} = {}^{T_0}/_{T_*}$ deb qabul qilamiz, chunki sterjenda chegaraviy shartlarga

asosan temperatura bir xil saqlanadi. Sterjendan keyingi ichki nuqtalarda quyidagildarga esa bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} A_y &= -(pv)_{i,j} - \frac{2}{h}\left((pv)_{i,j} + (pv)_{i,j-1}\right) \\ C_\theta &= \frac{2h}{l}((pz)^s_{i,j} + \frac{2}{h}\left((pv)_{i,j-1} + 2(pv)_{i,j} + \frac{2h}{l} + (pz)_{i,j-1}\right) \\ C_\gamma &= (pv)^s_{i,j} + \frac{2}{h}((pv)_{i,j} + (pv)_{i,j+1}) \\ E_\sigma &= \frac{2h}{l}(pz)_{i-1,j} + S \end{aligned}\right|$$

(2.30) da S ning qiymati $z = u$ tezlik qoli uchun

$S = \frac{\rho_{i,j}}{Fr}$ z=T temperatura holi uchun S=0 yordamida (2.29) dagi $A_{i,j}$,$B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $E_{i,j}$. lar $(1 < j < n - 1)$ oraliqda topiladi.

Tashqi temperatura (2.25) shartlarga asosan z ning qiymati aniq, ya'ni $z = u$ da z = u va z = T da z = 1. SHuning uchun (2.29) ning $j = n$ holi uchun

$$A_{i,n}=0,\ C_{i,n}=1,\ E_{i,n}=z_n$$

(2.31)

Bu erda tezlik uchun $z_n = 0$ va temperatura uchun $z_{i,n} = T_1$.

Noma'lum $z_{t\ j}$ ni quyidagi ko'rinishda izlaymiz: $z_{i,j}=a_{i,j}\, z_{i,j+1}+b_{i,j}$

(2.32) da $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ lar progonka koeffitsientlari deyiladi.

(2.32) da $j = j - 1$ deb qabul qilib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$z_{i,j-1}=a_{i,j-1}\, z_{i,j}+b_{i,j-1} \qquad (2.32)$$

(2.32)dagi larning qiymatlarini (2.29) ga qo'yib, ega bo'lamiz:

$$A_{i,j}\left(a_{i,j-1}z_{i,j}+b_{i,j-1}\right)-C_{i,j}z_{i,j}+B_{i,j}z_{i,j+1}=-E_{i,j}$$

bu yerda qavsni ochib turib, $z_{i,j}$ larni guruhlaymiz.

$$A_{i,j}a_{i,j-1}z_{i,j}+A_{i,j}b_{i,j-1}-C_{i,j}z_{i,j}+B_{i,j}z_{i,j+1}=-E_{i,j} \qquad (2.33)$$

$$\left(A_{i,j}a_{i,j-1}-C_{i,j}\right)z_{i,j}=-B_{i,j}z_{i,j+1}-\left(E_{i,j}+A_{i,j}b_{i,j-1}\right)$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini -1 ga ko'raytirib, ega bo'lamiz:

$$\left(C_{i,j}-A_{i,j}a_{i,j-1}\right)z_{i,j}=B_{i,j}z_{i,j+1}+\left(E_{i,j}+A_{i,j}b_{i,j-1}\right)$$

Bu yerdan $z_{i,j}$ ni topamiz:

$$z_{i,j} = \frac{B_{i\,j}}{C_{i,j} - A_{ij} * a_{i,j-1}} * z_{i\,j+1} + \frac{E_{i\,j} + A_{i,j} * b_{i,j-1}}{C_{i,j} - A_{ij} * a_{i,j-1}} \qquad (2.34)$$

(2.34)ni (2.33) bilan solishtirsak $a_{i,j}$ va $b_{i,j}$. lar uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$a_{i,j} = \frac{B_{i\,j}}{C_{i,j} - A_{ij} * a_{i,j-1}}, \quad b_{i,j} = \frac{E_{i\,j} + A_{i,j} * b_{i,j-1}}{C_{i,j} - A_{ij} * a_{i,j-1}} \qquad (2.35)$$

$(1 < j < n-1)$ oraliqda $A_{i,j}$,$B_{i,j}$, $C_{i,j}$, $E_{i,j}$ lar (2.30) yordamida, $a_{i,j}$ va $b_{i,j}$ lar esa (2.35) yordamida topiladi.

$j = n$ da, ya'ni tashqi chegarada z ning qiymati ma'lum, endi j ni

$n - 1$ dan 1 gacha o'zgartirib (2.34) yoki (2.32) orqali $z_{i,j}$lar topib olinadi.

Topilgan $z_{i,j}$ lar oldingi qatlam qiymatlari, ya'ni $z_{i-1,j}$ lar bilan

solishtiriladi barcha $j = \overline{1, n-1}$oraliqdagi qiymatlari uchun. Agar barcha $j =$

$\overline{1, n-1}$ dagi nuqtalar uchun $|z_{i,j} - z_{i-1,j}| \prec \varepsilon$ bo`lsa, tashqi chegarani aniqlashga o'tiladi, bordiyu, biror nuqtada bu shart bajarilmasa

$$z_{i,j}^S = \frac{z_{i,j}+z_{i,j-1}}{2}$$

deb qabul qilinib, qatlamni qayta hisoblashga kirishiladi.

Progonka usulining turqunligi [10] dagi teoremadan foydalanib

tekshiriladi. Ko'ndalang tezlik ϑ chegaraviy qatlam nazariyasiga asosan u dan

ko'p kichik deb hisoblanadi, ya'ni $\vartheta \prec\prec u$.

ϑ ni oshkor sxema orqali uzluksizlik tenglamasidan foydalanib topamiz. (2.24) ga asosan uzluksizlik tenglamasi ko'rinishga quyidagi ega:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (2.36)$$

(2.36) ni chekli ayirmalarda ifodalaymiz:

$$\frac{(\rho u)_{ij}-(\rho u)_{i-1,j}}{l} + \frac{(\rho v)_{i,j+1}-(\rho v)_{ij}}{h} = 0 \qquad (2.37)$$

(2.37)da tenglama ikki tomonini $h \neq 0$ qiymatga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{h}{l}\left((\rho u)_{i,j}-(\rho u)_{i-1,j}\right)+(\rho v)_{i,j+1}-(\rho v)_{i,j}=0 \qquad (2.38)$$

(2.38)dan $v_{i,j+1}$ni topib olamiz. Buning uchun qolgan qadlami o'ng tomonga o'tkazamiz

$$(\rho v)_{i,j+1}=(\rho v)_{i,j}+\frac{h}{l}\left((\rho u)_{i,j}-(\rho u)_{i-1,j}\right)$$

(2.39)

(2.39)da tenglama ikki tomonining $\rho_{I,j+1}$ ga bo'lib va ayrim shakl almashtirishlar bajarib topamiz:

$$v_{i,j+1}=\frac{\left[(\rho v)_{i,j}+\frac{h}{l}(\rho u)_{i-1,j}-(\rho u)_{i,j}\right]}{\rho_{i,j+1}}$$

(2.40)

(2.40) da j = 0 da ega bo'lamiz:

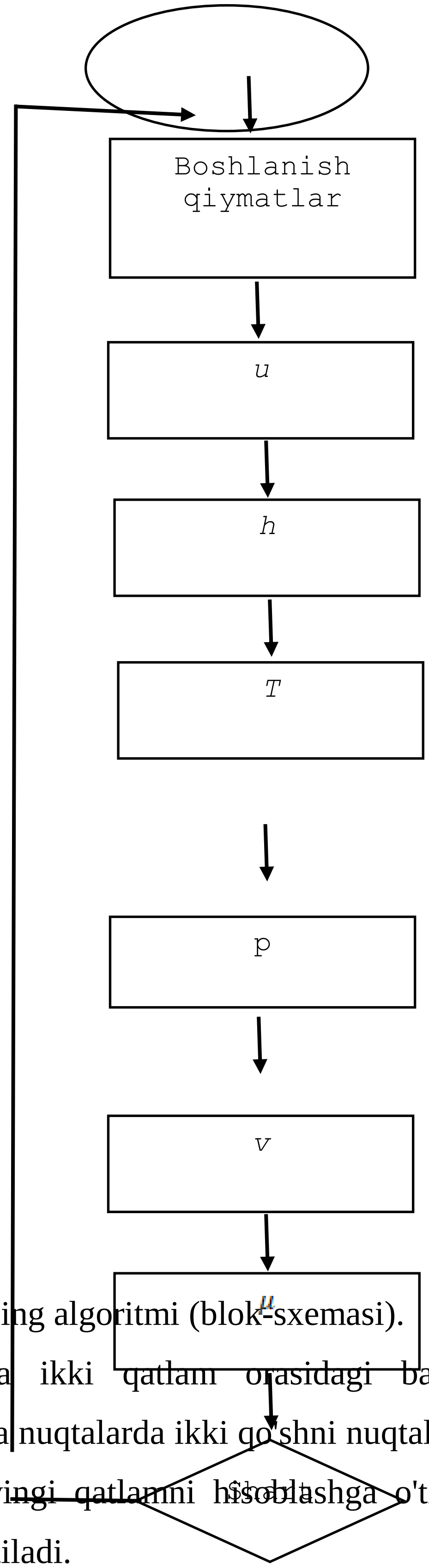
$$v_{i,0}=\frac{\left[(\rho v)_{i,0}+\frac{h}{l}(\rho u)_{i-1,0}-(\rho u)_{i,0}\right]}{\rho_{i,t}}$$

(2.41)

(2.41)dagi chegaraviy shartlardan ma'lum, u va ρ lar esa oldin hisoblab

qo'yilgan. j ni oldin 0 dan n - 1 gacha o'zgartirib, 1 < j < n - 1 da barcha v_{ij} larni topib olamiz. Endi bo'ylama yo'nalishda bir kesim yoiymatlarini hisoblash algoritmini quyidagicha yozish mumkin:

Boshlanish



3-chizma. Masala echimining algoritmi (blok-sxemasi).

Bu yerda shart sifatida ikki qatlam orasidagi barcha qiymatlar farqi tushunilyapti. Agar barcha nuqtalarda ikki qo'shni nuqtalardagi ayirma berilgan s dan kichik bo'Isa, keyingi qatlamni hisoblashga o'tiladi, aks qolda qayta qatlamni hisoblashga qaytiladi.

Agar keyingi qatlamga o'tish sodir bo'Isa, endi chegaralar aniqligi qam tekshiriladi. Agar n - l chi element qiymati topilgan bo'Isa, endi

$$|z_{i,j} - z_{i-1,j}| \prec \varepsilon$$

shart tekshiriladi. Bu yerda $z_{i,n}$-tashqi muhit qiymati, $\boldsymbol{z}$ sifatida $\boldsymbol{U, T}$ qatnashadi, ya'ni dinamik va temperaturaviy chegaraviy qatlamlar qiymatlari.

$\varepsilon_1$esa biror kichik son, chegaradagi ikki qiymat orasidagi afirmani ifodalaydi.

Bizning misolda ε_1= 0,005 olingan. Agar ε_1 kichikroq olinsa, chegara tez o'sadi, kattaroq olinsa, chegara sekin o'sadi. Masalan, agar $u_{i,n-1}$=0.002 , $u_n = 0$ bo'lsa

$$|u_{i,j} - u_{i-1,j}| \prec \varepsilon$$

bajarilmaydi, u holda n=n+ l deb olinadi, ya'ni qatlam hisobga bitta nuqta qo'shib olinadi. U qolda endi $u_{i,n-1} = 0$ va $u_{i,n} = 0$ bo'lib qoladi, chunki qatlam tashqarisidagi barcha nuqtalarda tezlik qiymatlari 0 ga teng.

N bittaga oshirilgandan keyin keyingi qatlamni hisoblash sodir bo'lmaydi, balki avval hisoblangan qatlam qiymati qayta hisoblanadi, bunda u ning oldingi qiymatlari 0 dan kattaligi evaziga u_{n-1} va u_n nuqtalardagi qiymatlar osha boshlaydi.

Qatlam qayta hisoblaganda avvalo qatlamlar orasidagi ayirma, u bajarilgandan keyin esa qatlam chegarasi aniqligi tekshiriladi. Ikkala shart bajarilgandan keyin esa qatlam chegarasi aniqligi tekshiriladi. Ikkala shart bajarilgandan keyingina qatlamni topishga o'tiladi.

II- bob yuzasidan xulosalar

II- bob bo‘yicha xulosa qilib shuni aytish mumkinki, model va modellashtirish tushunchalari kishilik hayotida muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu bobda qo'yilgan masala uchun matematik model tanlanib differensial tenglamalar keltirilgan. Bunda og’irlik kuchi e'tiborga olingan, chegaraviy shartlar qo'yilib masalaning yechish usuli tanlangan.

III-BOB. ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI.

3.1§ Asosiy boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi.

Tekislikda, Ox o‘qi bo‘yicha uchlari mahkamlangan uzunligi l ga teng bo‘lgan torni (ingichka, elastik ipni) qaraylik.

Ingichka-bu torning ko‘ndalang kesimi uning uzunligiga nisbatan cheksiz kichik miqdor, *egiluvchan* deganda tor uzunligining o‘zarishiga bog‘liq bo‘lmagan holda shaklini o‘zgarishiga torning hech qanday qarshilik qilmasligi tushuniladi. Bu tushunchalarning matematik oniy uzunligiga o‘tkazilgan normal bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi.

Faraz qilaylik, Ox o‘q bo‘yicha torning uchlariga qarama-qarshi tomonlarga yo‘nalgan T_0 taranglik kuchi qo‘yilgan bo‘lsin. agar tor tashqi kuchlar ta’sirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u holda tor tebranma harakat qiladi. Bunda torning muvozanat holatidagi $N(x)$ nuqtasi t vaqtda M holatga o‘tadi (1-shakl).

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish uchun quyidagilarni talab qilamiz:

1. Torning barcha nuqtalari bir tekislikda Ox o‘qiga perpendikulyar tebransin, ya’ni tor ko‘nadalang tebransin;
2. Torning kichik tebranishlari hisobga olinsin;
3. Og‘irlik kuchning ta’siri inobatga olinmasin, ya’ni taranglik kuchi shunchalik kattaki, buning natijasida og‘irlik kuchining ta’siri sezilmaydi.

Torning tebranishi bir tekislikda sodir bo‘layotgani uchun torning tebranish qonuni, ya’ni muvozanat holatidan og‘ishi NM ikki o‘zgaruvchili bitta $u(x,t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Bunda u-torning t vaqtdagi absissasi x bo‘lgan N nuqtasining M nuqtasigacha muvozanat holatidan NM og‘ishi.

Agar torning kichik tebranishini inobatga olsak, u holda $u(x,t)$ fnuksiya ham kichik va yetarlicha silliq torning x nuqtasiga t vaqtda o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $u_x(x,t)$ ham kichik bo‘ladi.

Torning tebranishi shunchalik kichik-ki, bunda

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \ll 1,$$

bo‘lsin. bu torning kichik tebranishlarida uning uzunligini o‘zgarmasligini bildiradi.

Haqiqatdang ham, t vaqtda torning MK yoyining uzunligi

$$l_{MK} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \Delta x$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak, torning kichik tebranishlarida uning uzunligi o‘zgarmaydi. U holda Guk qonuniga ko‘ra taranglik koeffitsienti T vaqtga ham x ga ham bog‘liq emas va u torning barcha nuqtalarida bir xil T_0 ga teng.

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun torning MK bo‘lakchasini ajratib olamiz va bunga ta’sir qilayotgan kuchlarni koordinata o‘qlariga proeksiyasini tushiramiz. Dalamber prinsipiga asosan, barcha kuchlar proeksiyalarining yig‘indisi, inersiya kuchini hisobga olganda nolga teng bo‘ladi. Taranglik kuchining gorizontal o‘qdagi proeksiyalarining yig‘indisi

$$\begin{aligned} F_{gor} &= -T(x)\cos\alpha(x) + T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x) = \\ &= -T_0\cos(x) + T_0\cos\alpha(x+\Delta x) \equiv 0 \end{aligned},$$

bu yerda

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \cong 1$$

Endi taranglik kuchini vertikal o‘qqa proeksiyasini qaraylik:

$$\begin{aligned} F_{ver} &= T_0 sin\alpha(x) - T_0\sin\alpha(x+\Delta x) = \\ &= T_0\left(\frac{tg\alpha(x+\Delta x)}{1+tg^2\alpha(x+\Delta x)} - \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}\right) = \\ &= T_0\left(\frac{u_x(x+\Delta x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta x,t)}} - \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right) = \\ &\cong T_0\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] \end{aligned}$$

Oxirgi formuladan Lagranj teoremasiga asosan

$$F_{ver} \cong T_0 u_{xx}\left(x^{'},t\right), \quad x^{'} \in \left(x, x+\Delta x\right)$$

kelib chiqadi. Torning ko‘ndalang tebranishlari qaralayotgani uchun inersiya kuchi va tashqi kuchlar Ou o‘qiga parallel yo‘nalgan. Shuning uchun ularning Ou o‘qidagi proeksiyasini topamiz. Faraz qilaylik, $p\left(x,t\right)$-torning MK bo‘lagiga ta’sir qilayotgan uzluksiz tashqi kuch, $p\left(x\right)$ esa torning uzluksiz chiziqli zichligi bo‘lsin. u holda tashqi kuchlarning Ou o‘qiga proeksiyasi

$$F_{tashqi} \cong p\left(x,t\right)\Delta x$$

bo‘ladi. torning zichligi $p\left(x\right)$ bo‘lgani uchun uning MK bo‘lagining massasi

$$m \cong \rho\left(x\right)\Delta x$$

ga teng. Nyuton qonuniga ko‘ra inersiya kuchi

$$F_{in} = ma \cong \rho\left(x\right)\Delta x u_{tt}\left(x^{''},t\right),\ x^{''} \in \left[x, x+\Delta x\right]$$

formula bilan aniqlanadi. U holda barcha kuchlarning Ou o‘qdagi proeksiyasi

$$T_0 u_{xx}\left(x^{'},t\right)\Delta x - \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x^{''},t\right)\Delta x + p\left(x,t\right)\Delta x = 0$$

formula bilan ifodalanadi.

Bu tenglikni $\Delta x \neq 0$ ga qisqartirib, so‘ngra $\Delta \to 0$ limitga o‘tsak,

$$T_0 u_{xx}\left(x,t\right) - \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right) + p\left(x,t\right) = 0 \qquad (3.1)$$

torning majburiy tebranish tenglamasiga ega bo‘lamiz.

Agar tor bir jinsli bo‘lsa, ya’ni $\rho\left(x\right) = const$, u holda (3.1) tenglama quyidagi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f\left(x,t\right) \qquad (3.2)$$

ko‘rinishga keladi. Bu yerda $a^2 = T_0 / \rho,\ f\left(x,t\right) = p\left(x,t\right)/\rho$.

Agar (3.1) yoki (3.2) tenglamada tashqi kuchlar qatnashmasa, ya’ni $p\left(x,t\right) \equiv 0$, bo‘lsa, u holda (3.2) tenglama ushbu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (3.3)$$

ko‘rinishda keladi.

Oxirgi (3.3) tenglama bir jinsli *torning erkin tebranish tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama *bir o'lchovli tarqalish tenglamasi* deyu ham yuritiladi.

Sterjenning bo'ylama tebranishlari, trubkadagi gazning tebranishlari va boshqa tebranma harakatlar (3.1) ko'rinishdagi tenglama orqali ifodalanadi.

Xususiy hosilali (3.1) tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadiga qo'yilgan ma'lum shartlarga ko'ra cheksiz ko'p xususiy yechimlarga ega bo'ladi. shuning uchun (3.1) tenglamaning o'zi qaralayotgan tor tebranishini to'liq aniqlash uchun yetarli emas. Masalaning fizik mohiyatidan kelib chiqqan holda qo'shimcha shartlarning bajarishi talab qilinadi. fizikadan ma'lumki, nuqtaning harakatini aniqlash uchun uning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligini bilish kifoya. Shuning uchun ham, tor harakatini aniqlash uchun $t=0$ da uning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligini bilish yetarli bo'ladi, ya'ni

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\ 0\le x\le l \tag{3.4}$$

Bu *boshlang'ich shartlar* yoki *Koshi shartlari* deyiladi.

Torning uchlari mahkamlangan yoki mahkamlanmagan bo'lishi mumkin. uchlari mahkamlangan tor uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'ladi:

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\ \ u(x,t)\big|_{x=l}=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{3.5}$$

bu yerda $T>0,\ l$-torning uzunligi.

Bu (3.5) ko'rinishdagi shartlar *chegaraviy shartlar* deb yuritiladi.

Shunday qilib, uchlari mahkamlangan torning harakatini aniqlash to'g'risidagi fizikaviy masala quyidagi matematik masalaga keltirildi: *xususiy hosilali (3.1) differensial tenglamaning (3.4) boshlang'ich va (3.5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi* $u(x,t)$ *yechimi topilsin.*

Bu masala tor tebranish tenglamasi uchun *birinchi aralash masala* deyiladi.

Agar torning uchlari mahkamlanmagan bo'lsa, ya'ni bu uchlar biror qoida asosida harakatlansa, u holda (3.5) chegaraviy shartlar quyidagi

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\mu_1(t),\ u(x,t)\big|_{x=l}=\mu_2(t),0\le t\le T,$$

shartlarga almashadi.

Boshqa turdagi chegaraviy shartlarni ham olish mumkin. chegaraviy shartlar uch xil turga bo‘linadi:

1. <u>Birinchi tur chegaraviy shartlar:</u>

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t),\ 0\le t\le T\ , \tag{3.6}$$

bu shart torning uchlari Ox o‘qiga vertikal holda $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalar bilan berilgan qoida asosida harakatlanishini bildiradi.

2. <u>Ikkinchi turdagi chegaraviy shartlar:</u> bunday chegaraviy shartlar quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\nu_1(t),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}=\nu_2(t),\ 0\le t\le T \tag{3.7}$$

Bu (3.7) shartlar torning uchlariga $\nu_1(t)$ va $\nu_2(t)$ ma’lum kuchlar qo‘yilganini anglatadi.

3. <u>Uchinchi turdagi chegaraviy shartlar:</u>

$$\alpha_1(t)u_x(0,\,t)+\beta_1(t)u(0,t)=\sigma_1(t),\,0\le t\le T \tag{3.8a}$$

$$\alpha_2(t)u_x(l,t)+\beta_2(t)u(l,t)=\sigma_2(t),\ 0\le t\le T \tag{3.8b}$$

bu yerda $\alpha_i(t),\beta_i(t)$ va $\sigma_i(t)\ (i=1,\,2)$- berilgan funksiyalar, ixtiyoriy $t\in[0,T]$ da yetarlicha uzluksiz va

$$\alpha_i^2(t)+\beta_i^2(t)\ne 0$$

(3.8) chegaraviy shartlar torning uchlari elastik mahkamlanganligini ifodalaydi. Agar (3.6)-(3.8) chegaraviy shartlarda $\mu_i(t),\nu_i(t)$ va $\sigma_i(t),(i=1,2)$ berilgan funksiyalar nolga teng bo‘lsa, u holda bunday chegaraviy shartlar *bir jinsli chegaraviy shartlar* deyiladi.

Endi ikkinchi va uchinchi tur chegaraviy shartlarni sharxlashga harakat qilaylik. Buning uchun bir uchi shiftga mahkamlangan, ikkinchi uchi erkin harakatlanuvchi sterjenning bo‘ylama tebranishi haqidagi masalani qaraylik. Sterjenning erkin uchining harakat qonuni berilmagan bo‘lsin. agar sterjenning mahkamlangan uchi $x=0$ da uning og‘ishi $u(0,t)=0$, erkin uchi $x=l$ da esa uning tarangligi nolga teng, ya’ni

$$T(l,t)=k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$$

Sterjenga tashqi kuchlarning ta'siri yo'qligi sababli, uning erkin harakat qiluvchi uchida chegaraviy shart quyidagi

$$u_x(x,t)\big|_{x=l}=0$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar prujinaning $x=0$ uchi ma'xlum $h(t)$ qonun asosida harakatlansa, $x=l$ uchiga esa $\nu(t)$ kuch osilgan bo'lsa, u holda chegaraviy shartlar

$$u(x,t)\big|_{x=0}=h(t),\ u_x(x,t)\big|_{x=l}=\nu(t),\ 0\le t\le T,$$

ko'rinishda beriladi.

agar prujinaning $x=l$ uchi elastik mahkamlangan bo'lsa, u holda prujinaning erkin harakatlanuvchi uchida chegaraviy shart ushbu ko'rinishda beriladi:

$$ku_x(l,t)=-\alpha u(l,t) \text{ yoki } u_x(l,t)=-hu(l,t),\ 0\le t\le T,$$

bu yerda $h=\alpha/k,\ k,\ \alpha>0$. Bu holda prujinaning $x=l$ uchi ko'chishi mumkin, lekin mahkamlangan nuqtadagi elastiklik kuchi shu uchida ko'chgan uchining boshlang'ich holatga qaytarishga intiluvchi taranglik kuchini yuzaga keltiradi. Guk qonuniga ko'ra, berilgan kuch $u(l,t)$ ko'chishga proporsional, bunda proporsionallik koeffitsienti mahkamlangan nuqtadagi *birlik koeffitsienti* deyiladi. Agar elastik mahkamlangan $x=l$ uchi ko'chsa va uni boshlang'ich holatidan chetlanishi $\theta(t)$ fnuksiya bilan aniqlansa, u holda chegaraviy shart quyidagi

$$u_x(l,t)=-h\left[u(l,t)-\theta(t)\right],\ 0\le t\le T \tag{3.9}$$

ko'rinishda bo'ladi. taranglik kuchi $T(0,t)=-ru_x(0,t)$ ni e'tiborga olsak, $x=0$, ya'ni chap tomonda elastik mahkamlanganlik sharti

$$u_x(0,t)=-h\left[u(0,t)-\theta(t)\right],\ 0\le t\le T,$$

bo'ladi.

ta'kidlash mumkinki, qattiq mahkamlangan holda (α yetarlicha katta), ya'ni uchlarning katta bo'lmagan ko'chishlarda katta taranglik vujudga keladi, u holda

(3.9) chegaraviy shart

$$u(l,t)=\theta(t),\ 0\le t\le T\ ,$$

birinchi tur chegaraviy shartga o‘tadi. Elastik mahkamlangan holda (α kichik), ya’ni uchlarning katta ko‘chishlarda kichik taranglik vujudga keladi. Bu holda (3.9) chegaraviy shart $u_x(l,t)=\theta(t), 0\le t\le T$ ikkinchi tur chegaraviy shartga ko‘ra o‘tadi (tor erkin uchining sharti). Agar torning ikkala uchida ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy shartlar olinsa, u holda bunday masalalar giperbolik tipdagi tenglama uchun *ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy masala* deb yuritiladi.

Agar torning $x=0$ va $x=l$ uchlarida turli tipdagi chegaraviy shartlar bilan birga $t=0$ boshlang‘ich berilsa bunday masalalar *aralash masalalar* deyiladi.

1.2-§. Issiqlik tarqalish tenglamasini keltiribchiqarish. Asosiy boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi.

Qattiq jism (x,y,z) nuqtasining t vaqtdagi harorati $u=u(x,y,z,t)$ bo‘lsin. agar qattiq jismning turli qismlarining harorati turlicha bo‘lsa, u holda qaralayotgan qattiq jismning ko‘proq isigan qismidan kamroq isigan qismi tomon issiqlik harakati sodir bo‘ladi. issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish Fure qonuniga asoslanadli. Bunga ko‘ra ΔS sirtdan Δt vaqtda o‘tuvchi ΔQ issiqlik miqdori quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial N}\Delta S\Delta t, \qquad (3.10)$$

bu yerda k -issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti, $\frac{\partial u}{\partial N}$ esa ΔS sirtga o‘tkazilgan N formula bo‘yicha olingan hosila, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial N}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(N,z)=(grad\,u,N)$$

ya’ni normal bo‘yicha olingan hosila ikkita

$$N=i\cos\alpha+j\cos\beta+k\cos\gamma$$

$$grad\,u=\nabla u=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}$$

vektorlarning skalyar ko‘paytmasiga teng.

Bu yerda i, j, k -koordinata o‘qlarining yo‘naltiruvchi birlik vektorlari, α, β, γ esa N normal bilan mos ravishda Ox, Oy, Oz o‘qlar orasidagi burchak.

Yuqorida keltirilgan (3.10) formuladagi minus ishora issiqlikning jismning ko‘proq isigan nuqtasidan kamroq isigan qismiga issiqlik harakatini bildiradi.

Endi faraz qilaylik, qaralayotgan jism izotrop jism bo‘lsin, ya’ni jismning issiqlik o‘tkao‘uvchanlik koeffitsienti k faqat (x, y, z) nuqtaga bog‘liq, u ga $\frac{\partial u}{\partial N}$ ga bog‘liq emas. Agar qattiq jism anizatrop bo‘lsa, u holda

$$k = k\left(x, y, z, N, u, \frac{\partial u}{\partial N}\right)$$

bo‘ladi. Issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish uchun qattiq jismdan (z, y, z) nuqtani o‘z ichiga olgan yetarlicha kichik ixtiyoriy V parallelepiped ajratib olamiz, ya’ni $V = \left\{(x, y, z) :< \xi < x + \Delta x,\ y < \eta < y + \Delta y,\ z < \zeta < z + \Delta z\right\}$

Eni d V parallelepiped uchun issiqlik balansi tuzaylik. Parallelepipedning $\xi = z$ yuzasi orqali Δt vaqtda o‘tgan issiqlik miqdori (3.10) formulaga ko‘ra

$$Q_x = -k(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta t$$

Parallelepipedning $\xi = x + \Delta x$ yuzasidan o‘tayotgan issiqlik miqdori esa

$$Q_{x+\Delta x} = -k(x + \Delta x, y, z)\frac{\partial u(x + \Delta x, y, z, t)}{\partial x}\Delta y \Delta z \Delta t$$

ga teng. U holda V hajmda Ox o‘qi bo‘yicha qolgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_x = Q_x + Q_{x+\Delta x} = \Delta y \Delta z \Delta t \times$$
$$\times\left(k(x + \Delta x, y, z)\frac{\partial u(x + \Delta x, y, z, t)}{\partial x} - k(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x', y, z)\frac{\partial u(x', y, z, t)}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t,\ x' \in (x, x + \Delta x)$$

bo‘ladi.

Xuddi shu kabi V parallelepipedning qolgan yoqlari bo‘yicha issiqlik miqdori

$$\Delta Q_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x, y', z\right)\frac{\partial u\left(x, y', z, t\right)}{\partial y}\right)\Delta y\Delta x\Delta z\Delta t,\ y' \in \left(y, y+\Delta y\right);$$

$$\Delta Q_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\left(x, y, z'\right)\frac{\partial u\left(x, y, z', t\right)}{\partial z}\right)\Delta z\Delta y\Delta x\Delta t,\ z' \in \left(z, z+\Delta z\right);$$

ga teng bo‘ladi. U holda V hajmda Δt vaqtda oqayotgan umumiy issiqlik miqdori

$$Q_1 = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x', y, z\right)\frac{\partial u\left(x', y, z, t\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x, y', z\right)\frac{\partial u\left(x, y', z, t\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\left(x, y, z'\right)\frac{\partial u\left(x, y, z', t\right)}{\partial z}\right)\right\}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

(3.11) formula bilan aniqlanadi.

Faraz qilaylik, qaralayotgan V paralelepipedning ichida issiqlik manbalari bo‘lsin. parallelepipeddagi issiqlik manbalarining zichligi $F\left(x, y, z, t\right)$ bo‘lsin, ya’ni $F\left(x, y, z, t\right)$ funksiya Δt vaqt ichida ΔV hajmdan ajralib chiqqan yoki unga singib ketgan issiqlik miqdori bo‘lsin. u holda tashqi manbalar ta’sirida V hajmdan Δt vaqt oralig‘ida ajralib chiqqan issiqlik miqdori

$$Q_2 = F\left(x, y, z, t\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \qquad (3.12)$$

bo‘ladi. Qaralayotigan qattiq jismning Δt vaqtdagi haroratini o‘lchash uchun $\Delta_t u$ sarflangan issiqlik miqdori

$$Q_3 = \Delta_t u c\left(x, y, z\right)\rho\left(x, y, z\right)\Delta x\Delta y\Delta z =$$
$$= \left[u\left(x, y, z, t+\Delta t\right) - u\left(x, y, z, t\right)\right]c\left(x, y, z\right)\rho\left(x, y, z\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Bu yerda $\rho\left(x, y, z\right)$ qattiq jismning zichligi, $c\left(x, y, z\right)$ esa uning solishtirma issiqlik sig‘imi bo‘lib, ularni argumentlarining uzluksiz funksiyasi deb hisoblaymiz.

Lagranj teoremasiga asosan sarf qilingan issiqlik miqdori uchun quyidagi

$$Q_3 = \frac{\partial u\left(x, y, z, t'\right)}{\partial t}\Delta t\, c\left(x, y, z\right)\rho\left(x, y, z\right)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (3.13)$$

ifodani olamiz. Bu yerda $t' \in \left(t, t+\Delta t\right)$.

Endi V hajm uchun issiqlik balansi tenglamasini tuzamiz. Ma'lumki, $Q_3 = Q_1 + Q_2$, u holda (3.11)- (3.13) ifodalardan

$$\frac{\partial u\left(x,y,z,t'\right)}{\partial t}c\left(x,y,z\right)\rho\left(x,y,z\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t =$$
$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x',y,z\right)\frac{\partial u\left(x',y,z,t\right)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x,y',z\right)\frac{\partial u\left(x,y',z,t\right)}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\left(x,y,z'\right)\frac{\partial u\left(x,y,z',t\right)}{\partial z}\right)\right\}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t + F\left(x,y,z,t\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

kelib chiqadi. oxirgi ifodani $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \neq 0$ ga qisqartirib, so'ngra $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to,\ \Delta z \to 0$ va $\Delta t \to 0$ limitga o'tsak, ushbu

$$c\left(x,y,z\right)\rho\left(x,y,z\right)\frac{\partial u\left(x,y,z,t'\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x,y,z\right)\frac{\partial u\left(x,y,z,t\right)}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\left(x,y,z\right)\frac{\partial u\left(x,y,z,t\right)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\left(x,y,z\right)\frac{\partial u\left(x,y,z,t\right)}{\partial z}\right)+ \qquad (3.14)$$
$$+F\left(x,y,z,t\right) = div\left(k\,grad\,u\right)+F\left(x,y,z,t\right)$$

tenglama hosil bo'ladi. bunda vektor-funksiyaning divergensiyasi quyidagicha tushuniladi:

Agar $a\left(x,y,z\right)=\left(P\left(x,y,z\right),Q\left(x,y,z\right),R\left(x,y,z\right)\right)$ bo'lsa, u holda

$$div\,a\left(x,y,z\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial x}$$

bo'ladi.

oxirgi (3.14) tenglama bir jinsli bo'lmagan izotop qattiq jismning *issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi* deyiladi.

Agar qattiq jism bir jinsli, ya'ni

$$c\left(x,y,z\right)=const,\ \rho\left(x,y,z\right)=const,\ k\left(x,y,z\right)=const,$$

bo'lsa, u holda

$$div(k\,grad\,u) = k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= k\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = k\Delta u$$

bo‘ladi. demak, (3.14) tenglama quyidagi

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f\left(x, y, z, t\right)$$

ko‘rinishga keladi, bu yerda $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f\left(x, y, z, t\right) = \frac{F\left(x, y, z, t\right)}{c\rho}$.

Agar qaralayotgan bir jinsli qattiq jismda tashqi issiqlik manbalari bo‘lmasa, ya’ni $F\left(x, y, z, t\right) \equiv 0$ bo‘lsa, u holda (3.14) tenglamadan ushbu

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasini olamiz.

Agar u harorat faqat x, y, t koordinatalarga bog‘liq bo‘lsa, u holda bir jinsli yupqa plastinkada issiqlik tarqalish tenglamasiga ega bo‘lamiz. (3.14) tenglama quyidagi

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right),\ u = u\left(x, y, t\right)$$

ko‘rinishga keladi. O‘lchamlari chiziqli bo‘lgan jismlar uchun, masalan sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasi

$$u_t = a^2 u_x + f\left(x, t\right),\ u = u\left(x, t\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Asosiy boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi

Qattiq jismning ixtiyoriy vaqtdagi haroratni aniqlash uchun (3.14) xususiy hosilali differensial tenglamaning o‘zi yetarli bo‘lmaydi. Buning uchun masalaning fizik xossasiga asosan jism ichida boshlang‘ich vaqtdagi haroratning taqsimlanishi (boshlang‘ich shart)ni va jismning sirtida issiqlik rejimi (chegaraviy shartlar)ni bilish zarur.

Chegaraviy shartlar qattiq jism sirtidagi haroratga qarab turlicha berilishi mumkin.

1. Agar qattiq jism sirtining har bir nuqtasida bir xil harorat saqlanayotgan bo‘lsa, u holda chegaraviy shart

$$u(x,y,z,t)\big|_S = \mu_1(x,y,z,t),\ (x,y,z,t)\in S, \qquad (3.15)$$

ko‘rinishda beriladi.

bu yerda S qattiq jismning sirti, $\mu_1(x,y,z,t)$ esa S sirtda berilgan funksiya.

2. Qattiq jismning S sirtida issiqlik oqimi berilgan bo‘lsin, ya’ni Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirti yuzasidan o‘tuvchi issiqlik miqdori berilsa, u holda Fure qonuniga ko‘ra (3.10)formulaga asosan quyidagi

$$q = \frac{Q}{\Delta S \Delta t} = -k\frac{\partial u}{\partial N}$$

ifoda o‘rinli bo‘ladi. Bundan ushbu chegaraviy shart

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \mu_2(x,y,z,t) = -\frac{q(x,y,z,t)}{k(x,y,z)},\ (x,y,z)\in S, \qquad (3.16)$$

kelib chiqadi. $\mu_2(x,y,z,t)$-berilgan funksiya.

3. Qattiq jism sirtida atrof muhit bilan issiqlik almashinishi sodir bo‘layotgan bo‘lsa, Nyuton fonuniga asosan Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirtidan atrof muhitga chiqayotgan issiqlik miqdori qattiq jism sirtining haroratidan atrof muhit haroratining ayirmasiga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$q = H(u - u\ \ )$,

bu yerda H issiqlik almashish koeffitsienti bo‘lib, u $u - u_0$ ayirmaga bog‘liq. Energiyaning saqlanish qonuniga ko‘ra, bu issiqlik miqdori Fure qonuni bilan aniqlangan issiqlik miqdoriga $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial N}$ teng bo‘ladi. U holda S sirtda ushbu chegaraviy shartni

$k\dfrac{\partial u}{\partial N} = H(u - u_0)$, olamiz, yoki $h = H / k$ deb almashtirib, S da quyidagi

$\dfrac{\partial u}{\partial N} + hu = hu_0$ chegaraviy shartga ega bo‘lamiz. Bundan izotop qattiq jism uchun chegaraviy shartni quyidagi ko‘rinishda

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}+h(x,y,z,t)u\right)\Big|_S=\psi_3(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in S, \tag{3.17}$$

yozishimiz mumkin. Shunday qilib, izotop qattiq jismda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar quyidagicha qo‘yiladi:

Birinchi chegaraviy masala. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining ushbu

$$G=D\times(,T)=\left\{(x,y,z,t)\Big|(x,y,z)\in D\subset R^3,\ t\in(0,T)\right\}$$

silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in D$$

va

$$u(x,y,z,t)\Big|_S=\mu_1(x,y,z,t),\ (x,y,z,t)\in S,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

Ikkinchi chegaraviy masala. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining $G=D\times(0,T)$ silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang‘ich $u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in D$, va

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_S=\mu_2(x,y,z,t)=-\frac{q(x,y,z,t)}{k(x,y,z)},\ (x,y,z)\in S,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

Uchinchi chegaraviy masala. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining

$$G=D\times(,T)=\left\{(x,y,z,t)\Big|(x,y,z)\in D\subset R^3,\ t\in(0,T)\right\}$$

silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in D,$$

va

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}+h(x,y,z,t)u\right)\Big|_S=\psi_3(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in S,\ tg'eq0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

Yuqorida keltirilgan masalalar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, ya’ni parabolik tipdagi tenglamalar uchun *asosiy boshlang‘ich-chegaraviy masalalar* deyiladi.

1.3-§. Puasson va Laplas tenglamalariga keladigan masalalar.

Asosiy chegaraviy masalalarning qo'yilishi

Faraz qilaylik, biror S sirt bilan chegaralangan D jism ichida bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik ma'lum $\upsilon(x,y,z)$ tezlik bilan statsionar harakatda bo'lsin. agar suyuqlik bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik, ya'ni $\rho(x,y,z)=const$ bo'lsa, u holda $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,\ grad\,\rho=0$ bo'ladi.

Agar suyuqlikning harakati uyurmali harakat bo'lmasa, u holda $\upsilon(x,y,z)$ tezlikning vektor maydoni potensial maydon bo'ladi, ya'ni biror skalyar maydonning gradienti

$$\upsilon = grad\varphi(x,y,z), \qquad (3.18)$$

bu yerda $\varphi(x,y,z)$ *tezlik potensiali* deyiladi. Agar D jism ichida suyuqlikning harakatga keltiruvchi manba bo'lmasa, u holda

$$div\upsilon(x,y,z)=0,\ \ \forall(x,y,z)\in D, \qquad (3.19)$$

bo'ladi.

Endi (3.18) formulani (3.19) ifodaga qo'ysak, quyidagi

$$div(grad\varphi)\equiv\varphi=0,\ \ \forall(x,y,z)\in D$$

Laplas tenglamasiga ega bo'lamiz. Demak, bir jinsli siqilmaydigan suyuqlikning uyurmali bo'lmagan harakatining tezlik potensiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan. D hajmli elektr o'tkazuvchan muhitda zichligi $j(x,y,z)$ bo'lgan statsionar elektr tok bo'lsin. agar D muhit ichida tok manbai bo'lmasa, u holda

$$div\, j(x,y,z)=0,\ \ \forall(x,y,z)\in D, \qquad (3.20)$$

bo'ladi. Om qonuniga asosan elektr maydoni E tok zichligi orqali

$$E=\frac{j}{\lambda}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda λ muhitning elektr o'tkazuvchanligi.

Qaralayotgan D muhitda tok oqimi statsionar bo‘lgani uchun undagi elektr maydoni potensial (uyurmasiz) maydon bo‘ladi, ya’ni D jismda $\varphi(x, y, z)$ skalyar maydon mavjud va u

$$E = -grad\,\varphi(x, y, z) \qquad (3.21)$$

formula bilan aniqlanadi. Xuddi yuqoridagi kabi (3.20) va (3.21) formulalardan

$$\Delta\varphi(x, y, z) = 0,$$

kelib chiqadi.

Demak, qaralayotgan muhitda elektr manbai bo‘lmasa, u holda statsionar tokning elektr maydoni potensiali Laplas tenglamasini qanoatlantirar ekan.

Agar massani hisobga olmaganda tortishish maydoni potensiali ham Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko‘rish mumkin. Oldingi paragrafda bir jinsli izotop qattiq jismda ushbu

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f\left(x, y, z, t\right), \qquad (3.22)$$

issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqargan edik.

Faraz qilaylik, qattiq jismning har bir nuqtasida bir xil $uf\left(x, y, z, t\right)$ harorat o‘rnatilgan bo‘lsin va bu harorat ixtiyoriy t vaqtda o‘zgarmas bo‘lib qolsin.

U holda $uf\left(x, y, z, t\right) = uf\left(x, y, z\right)$ va $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ bo‘ladi va (3.18) tenglama quyidagi

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{f\left(x, y, z\right)}{a^2}, \qquad (3.23)$$

ko‘rinishga keladi. Bu (3.23) tenglama *Puasson tenglamasi* deyiladi.

Agar qattiq jism ichida tashqi issiqlik manbalari bo‘lmasa, u holda (3.23) tenglamada $f\left(x, y, z\right) = 0$ bo‘ladi va u ushbu

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (3.24)$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglama *Laplas tenglamasi* deb ataladi.

Shunday qilib, bir jinsli izotop qattiq jismda issiqlikning statsionar holati (3.24) *Laplas tenglamasi* orqali ifodalanar ekan. Noma’lum $u(x, y, z)$ funksiyani aniqlash uchun boshlang‘ich shartni emas, balki vaqtga bog‘liq bo‘lmagan holda biror chegaraviy shart berish kifoya.

Asosiy chegaraviy masalalarning qo‘yilishi

1. *Dirixle masalasi yoki birinchi chegaraviy masala.* R^3 fazoda S bo‘lakli silliq sirt chegaralangan sohani D deb belgilaylik. Xususiy hosilasi (3.24) tenglamaning D sohada aniqlangan va S sirtda berilgan qiymati orqali $u(x,y,z)$ yechimini topish masalasi *Dirixle masalasi* deyiladi, ya’ni (3.24) tenglamaning $D \cup S$ sohada uzluksiz va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

$$u(x,y,z)\big|_S = \varphi_1(x,y,z),\ (x,y,z)\in S$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\varphi_1(x,y,z)$-berilgan funksiya.

2. *Neyman masalasi yoki ikkinchi chegaraviy masala.* (3.24) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o‘zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial N}\Big|_S = \varphi_2(x,y,z),\ (x,y,z)\in S$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\varphi_2(x,y,z)$-berilgan funksiya, N esa S sirtga o‘tkazilgan normal.

3. *Puankare masalasi yoki uchinchi chegaraviy masala.* (3.24) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o‘zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial N} + \alpha(x,y,z)u(x,y,z)\right)\Bigg|_S = \varphi_3(x,y,z),\ (x,y,z)\in S,$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\alpha(x,y,z)$ va $\varphi_3(x,y,z)$-berilgan funksiyalar, N esa S sirtga o‘tkazilgan normal.

Agar yuqorida keltrilgan masalalarning $u(x,y,z)$ yechimi S sirtga nisbatan D sohaning ichida (yoki tashqarisida) qidirilayotgan bo‘lsa, u holda bunday masalaga mos ravishda *ichki (yoki tashqi) masala* deyiladi.

Shuni ta’kidlash muhimki, (3.19) va (3.20) tenglamalar bilan bir jinsli qattiq jismda sodir bo‘ladigan issiqlik jarayonlarigina emas, balki boshqa statsionar jarayonlar ham ifodalanadi. Bunga misol sifatida siqilmaydigan suyuqliklarning potensial oqimini keltirishimiz mumkin.