O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS

TA’LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo‘lyozma huquqida

UDK:_____________

SHERBOYEVA DILDORA

POLINOMIAL HALQALAR IDEALLARINING GRYOBNER BAZISLARI VA ULARNING TATBIQLARI

70540101- -Matematika (Matematik mantiq, Algebra va sonlar nazariyasi) mutaxassisligi bo’yicha magistr akademik darajasini olish uchun

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

Ilmiy rahbar: **dots. X.X.Ro’zimurodov**

Termiz-2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2021-yil

3-martdagi №6-T/M sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti Algebra va geometriya kafedrasida bajarilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilan Termiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (_____ raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Barkamol avlod ko‘chasi 43-uy.)

Ilmiy rahbar: ___________ dots. X.X. Ro’zimuradov

Kafedra mudiri: ___________ dots. S. Choriyeva

Magistratura bo‘limi boshlig‘i: ___________ PhD. A.B. Narbayev

70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi magistranti Sherboyeva Dildora Xidirovnaning "Polinomial halqalar ideallarining Gryobner bazislari va ularning tatbiqlari" mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTASIYASI

Tayanch so‘zlar: to'plam, halqa, ideal, bazis, Gryobner bazisi, yuqori darajali tenglamalar.

Tadqiqot obektlari: Tadqiqot obyekti bo‘lib algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish masalasi hisoblanadi. Tadqiqot predmeti esa $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo'llanilishidan iborat.

Tadqiqot metodlari: Ishda chiziqli va nochiziqli algebra tushunchalaridan, nol o'lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechish algoritimi, asosiy geometrik tushunchalardan bo‘lgan affin ko‘pxilliklar nazariyasi, polinomial ideallar nazariyasi, polinomial tenglamalarni yechishda kompyuter algebrasi sistemalaridan foydalanilgan.

Olingan natijalar va ularning yangiligi:

Ishning asosiy yangiliklari quyidagilardan iborat:

- $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishga qo'llanilidi.
- Algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish masalasi o'rganilgan.
- Nol o'lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechish algoritimi keltirilgan.

Amaliy ahamiyati: Ishning amaliy ahamiyati shundaki, bir nechta polinomial tenglamalar sistemalarini yechimlari Gryobner bazislaridan foydalangan holda topilgan.

Qo‘llanilish sohasi: Disertatsiya ishining natijalaridan idealga tegishlilik masalalarida va turli nochiziqli tenglamalar sistemalarini yechishda foydalanish mumkin.

Master's thesis of the daughter of Sherboyeva Dildora Khidirovna, majoring in 70540101 -mathematics (by major) on the topic "Gröbner bases of ideals of polynomial rings and their applications"

ANNOTATION

Key words: set, ring, ideal, basis, Gröbner basis, higher order equations.

Research objects: The research object is the problem of constructing bases of ideals of rings over the field of algebraic numbers.

The subject of the study is the application of the Gröbner basis of the ring ideal to solving the system of higher order equations.

Research methods: The concept of linear and nonlinear algebra, the algorithm for solving the system of algebraic equations corresponding to a zero-dimensional ideal, the theory of affine polynomials from basic geometric concepts, the theory of polynomial ideals, computer algebra systems for solving polynomial equations were used in the work.

The obtained results and their novelty: The main innovations of the work are as follows:

• the ring ideal is used to solve the system of higher order equations of the Gröbner base.

• The problem of constructing bases of ideals of rings over the field of algebraic numbers is studied.

• An algorithm for solving a system of algebraic equations corresponding to a zero-dimensional ideal is given.

Practical significance: The practical significance of the work is that the solutions of several systems of polynomial equations were found using Gröbner bases.

Field of application: The results of the dissertation work can be used in problems of ideality and in solving systems of various nonlinear equations.

MUNDARIJA

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi: Yuqori malakali kadrlar tayyorlash, iqtisodiyot va jamiyat rivojida muhim ahamiyat kasb etadi. O‘rta va oliy ta'limda, yuqori malakali ilmiy kadrlar tayyorlash, axborot texnologiyalarini rivojlantirish masalasi davlatimizning doimiy diqqat etiboridaligini takidlash lozim. Ushbu dissertatsiya ishida algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish masalasi o‘rganilgan. Ishda Gryobner bazislari tushunchasi keng o‘rganilgan, uning yordamida polynomial ideallardagi bir nechta masalalarni algoritmik yechimlari berilgan. Bu ishda polinomial ideallar va affin ko‘pxilliklar bilan bog’liq bo‘lgan bir qator masalalar: $k[x_1, \dots \dots . x_n]$ halqada idealning tavsiflanish masalasi, idealga tegishlilik masalasi, polynomial tenglamalarni yechilish masalalari to‘liq yechimlari bilan birga berilgan.

Tadqiqotning ob’yekti va predmeti: Tadqiqot obyekti bo‘lib algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish masalasi hisoblanadi. Tadqiqot predmeti esa $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo’llanilishidan iborat.

Tadqiqotning maqsadi va vazifalari: Ushbu ishning maqsadi va vazifalari quyidagicha: $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideallarining Gryobner bazislarini qurish masalasi qarab chiqildi. Shu bazislarni hisoblash algoritmlari ishlab chiqildi. Algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish va ularni yechimlarini topishdan iborat.

Ilmiy yangiligi: Ishning asosiy yangiliklari quyidagilardan iborat:

- $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishga qo’llanilidi.

- Algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish va ularni yechimlarini topish masalasi o’rganilgan.
- Nol o’lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechish algoritimi keltirilgan.

1. **Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari:** Oxirgi yillarda algoritmlar bilan bog’liq bo‘lgan, komutativ algebra va algebrik geometriyaning bazaviy abstrakt-nazariy tushunchalarini konkret hisoblanadigan matematik sohalar keng rivojlanmoqda. Bu yerda nazariyaning kalit tasdiqlarida mavjudligi ko‘rsatilgan obyektlarning oshkor ko‘rinishida topish usullari to‘g’risida so‘z bormoqda. Oxirgi o‘n yilliklarda unitilayotgan klassik usullar va nisbatan yangi Gryobner bazislari nazariyasiga asoslangan zamonaviy g’oyalarning birlashmasi hisobidan paydo bo‘layotgan savollarga javoblarni topish mumkin.

Tadqiqot mavzusi bo‘yicha adabiyotlar sharhi(tahlili): Ushbu dissertatsiya ishida algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish masalasi o‘rganilgan. Gryobner bazisi tushunchasini birinchi bo‘lib, 1965-yilda B.Buxberger kiritdi. Uning bunday nom tanlashiga sabab o‘zining ilmiy rahbari B.Gryobner (1899-1980) ning qilgan ishlari tasirida bu yangi natijalarning paydo bo‘lganligidir. Darajali qatorlar halqasida Gryobner bazislariga turdosh bo‘lgan “*standart bazis*” tushunchasini B.Buxbergerga bog’liqsiz ravishda 1967-yilda X.Xironaki kiritdi. Keyinchalik Buxberger Gryobner bazislarini hisoblash algoritmini yaratdi. Gryobner bazislari haqida Бухбергер Б. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов// Компьютерная алгебра. Символика и алгебраические вычисления [5], Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений [4], Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы [12] monografiyalarda ma’lumotlar berilgan.

Tadqiqotda qo‘llanilgan metodikaning tavsifi: Ishda chiziqli va nochiziqli algebra tushunchalaridan, nol o’lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechish algoritimi, asosiy geometrik tushunchalardan bo‘lgan affin ko‘pxilliklar nazariyasi, polinomial ideallar nazariyasi, polinomial tenglamalarni yechishda kompyuter algebrasi sistemalaridan foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: Ishda algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish va ularni yechimlarini topish, uning yordamida polinomial ideallardagi bir nechta masalalarni algoritmik yechimlari berilgan.Bular: $k[x_1, \dots \dots . x_n]$ halqada idealning tavsiflanish masalasini, idealga tegishlilik masalasi, polinomial tenglamalarni yechish masalalaridir. Ishning amaliy ahamiyati shundaki, bir nechta polinomial tenglamalar sistemalarini yechimlari Gryobner bazislaridan foydalangan holda topilgan. Disertatsiya ishining natijalaridan idealga tegishlilik masalalarida va turli nochiziqli tenglamalar sistemalarini yechishda foydalanish mumkin.

Ish tuzilmasining tavsifi: Dissertatsiya ishi kirish qismi, uchta bob va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 70 betdan iborat.

Kirish qismida savollar tarixi qisqacha berilgan, dissertatsiya ishida qilingan ishlar to‘g’risida qisqacha ma’lumotlar berib o‘tilgan va asosiy olingan natijalar bayoni keltirilgan.

Birinchi bobda asosiy algebraik strukturalardan halqa va maydon tushunchalari, algebrik geometriyaning asosiy tushunchalari bo‘lgan “Ideallar va affin ko‘pxilliklar”lar tushunchalari berililgan. Bir o‘zgaruvchili polinomlar tushunchasi hamda $k[x]$ halqada bo‘linish algoritmi keltirilgan. $k[x]$ halqada idealga tegishlilik masalasi qarab chiqilgan. $k[x_1, \dots \dots . x_n]$ da monomlarni tartiblash tushunchasi berilgan.

Ikkinchi bobda ideallar va ularning bazislari, Gryobner bazislari, Gryobner bazislarining xossalari va $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo’llanilishi keltirilgan.

Uchinchi bobda nol o’lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini yechish algoritimi ishlab chiqildi. Bu algoritmdan foydalangan holda bir nechta idealga tegishlilik masalalari yechib ko‘rsatildi. Gryobner bazislarini topish texnikasidan foydalanilgan holatda bir nechta polinomial tenglamalar sistemalarining yechimlari topib koʻrsatildi. Amaliyot shuni koʻrsatadiki lex-tartiblash boʻyicha Gryobner bazislarini hisoblash tenglamalar sistemasining koʻrinishini ancha soddalashtiradi. Gryobner bazislarining eng samarali tomoni shundaki ularni chekli sondagi qadamlarda hisoblab topish mumkin.

Magistrlik dissertatsiyasining asosiy natijalari asosida quyidagi maqola va tezislarda chop qilingan:

1. **Polinomial halqalar ideallarining gryobner bazislarini kompuyter algebrasi tizimlarida hisoblash. -** “Umumta’lim fanlarini sinxron va asinxron bog’lab o’quvchi kreativ faoliyatini rivojlantirishda integrativ yondashuv” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari. Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti. 2022 yil 14 may.

2. **Idealga tegishlilik masalasi va uni reduksiyalash orqali yechish. –** АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ. 1-ҚИСМ 2022 йил 18-19 ноябрь, 48-49 betlar.

I BOB

HALQA VA MAYDONLAR, AFFIN KO‘PXILLIKLAR

1-§. Halqa va maydonlar

K to‘plamda ikkita $(K,+)$ va $(K,\cdot)$ binar algebraik amal aniqlangan bo‘lsin.

1.1- Ta’rif. Agar K da quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa:

1). $(K,+)$ – abel (additiv) gruppa;

2). $(K,\ \cdot)$ – gruppoid;

3). qo‘shish va ko‘paytirish amallari distributivlik qonunlari bilan bog’langan:

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)c=ac+bc$$

$\forall a,b,c\in K$.

U holda $(K,+,\cdot)$ –algebraik sistemaga halqa deyiladi.

Agar ko‘paytirish amali assosiativ, ya’ni $(K,\ \cdot)$ –polugruppa bo‘lsa, $(K,+,\ \cdot)$- *assosiativ* halqa deyiladi.

Ko‘paytirish amali kommutativ bo‘lganda esa $(K,+,\ \cdot)$ - *kommutativ* halqa deyiladi. Bu holda ikki distributivlik qonunlaridan bittasini tekshirish yetarli, chunki boshqasi undan kelib chiqadi.

Ko‘paytirishga nisbatan neytral 1 element mavjud bo‘lganda $(K,+,\cdot)$ halqa *birlik elementli halqa* deyiladi.

1.1-misol. $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)-$ birlik elementli assosiativ-kommutativ halqa. Bu yerda $\boldsymbol{Z}$ ni juft butun sonlar to‘plami $\boldsymbol{2Z}$ bilan almashtirib birlik elementsiz assosiativ-kommutativ halqa misolini hosil qilamiz.

1.2-misol. $(\boldsymbol{Q},+,\cdot),(\boldsymbol{R},+,\cdot),(\boldsymbol{C},+,\cdot)-$ lar birlik assosiativ-kommutativ halqalar.

1.1-tasdiq. Halqalarda qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan umumlashgan assosiativ qonuni o‘rinli.

Isbot. Qo‘shish va ko‘paytirish amallarining distributivlik qonunlaridan $n \in N$ bo‘yicha matematik induksiya yordamida har qanday $a, b_1, ..., b_n \in K$ elementlar uchun bevosita quyidagi tengliklar olinadi:

$$a\left(b_1+b_2+...+b_n\right)=ab_1+ab_2+...+ab_n$$
$$\left(b_1+b_2+...+b_n\right)a=b_1a+b_2a+...+b_na.$$

Bulardan esa har qanday $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m \in K$ elementlar uchun bevosita quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j\,.$$

Bu yig’indida qo‘shiluvchilarning qanday tartibda yozilishining ahamiyati yo‘q, ammo kommutativ bo‘lmagan halqada ko‘paytuvchilarning qanday tartibda yozilishi muhim.

Har qanday halqada ayirish va ko‘paytirish amallari distributivlik qonuni bilan bog’langan, ya’ni har qanday $a, b, c \in K$ elementlar uchun

$$\left(a-b\right)c=ac-bc,$$
$$a\left(b-c\right)=ab-ac$$

Bularning, masalan, ikkinchisini to‘g’riligini ko‘rsatamiz. Ushbu

$$a(b-c)+ac=a((b-c)+c)=ab$$

tenglikdan $\qquad (a(b-c)+ac)-ac=ab-ac,$

ya’ni $\qquad a(b-c)=ab-ac$

kelib chiqadi.

Bu distributivlik qonunidagi har qanday $a\in K$ element uchun quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Haqiqatan, $a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0$ va $0\cdot a=(b-b)a=ba-ba=0$.

1.3-misol. Uch o‘lchovli Yevklid fazosining hamma geometrik vektorlari to‘plamini $\vec{M}$ bilan, vektorlarni qo‘shishni “+”, vektorlarni vektorial ko‘paytirishni “$\times$ ” bilan belgilasak, $(\vec{M},+,\times)$ sistema halqa bo‘ladi. Ammo vektorlar algebrasining asosiy qonunlaridan ko‘ramizki, bu halqa assosiativ ham emas, kommutativ ham emas, shuningdek birlik elementga ham ega emas. Unda kommutativlik qonuni o‘rniga $\vec{x}\times\vec{y}=-(\vec{y}\times\vec{x})$ -antikommutativlik qonuni bajariladi. Shu qonun tufayli bu yerda distributivlik qonunlarining ikkalasi ham bir-biridan kelib chiqadi. Noassosiativ halqalarda assosiativlikning o‘rnini to‘ldiradigan qandaydir boshqa qonunlar mavjud bo‘lmasa ularda algebraik ifodalarning birini boshqalariga shakl almashtirishlar ma’nosida «deyarli hech narsa qilib bo‘lmaydi». Geometrik vektorlarga oid yuqoridagi misolda bunday «to‘ldiruvchi» sifatida: $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}+(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{z}+(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}=\vec{0}$ munosabat xizmat qiladi.

Agar $\forall x,y,z\in K$ $\; x\cdot x=0$ va $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$ bo‘lsa $(K,+,\cdot)$-halqa ***liyaviy halqa*** (Li halqasi) deyiladi. $x\cdot x=0$ munosibatdan antikommutativlikning kelib chiqishini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

1.4-misol. F **-** to‘plam haqiqiy sonlar o‘qida aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiladigan $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ funksiyalar to‘plami bo‘lib shu bilan birga ixtiyoriy $f_1, f_2 \in F$ funksiyalar uchun f_1+f_2 funksiya har bir $x\in\boldsymbol{R}$ ga $f_1(x)+f_2(x)$ qiymatni $f_1 f_2$ – funksiya esa $f_1(x)f_2(x)$ qiymatni mos qilib qo‘ysin. U holda $(F,+,\cdot)$ birli assosiativ-kommutativ halqa bo‘ladi. Bu yerda bir rolini hamma $x\in\boldsymbol{R}$ lar uchun faqat 1 qiymat qabul qiladigan $f(x)=1$ nol rolini esa $f(x)=0$ funksiya bajaradi. Bu yerda funksiyalarni qo‘shish va ko‘paytirish uchun kommutativlik, assosiativlik va distributivlik qonunlari haqiqiy sonlar uchun bajariladigan shunday qonunlardan bevosita kelib chiqadi.

Oxirgi ikki misol (vektorlar va funksiyalar misollari) sonli halqalar (elementlari sonlar, amallar oddiy ma’nodagi qo‘shish va ko‘paytirish) da mavjud bo‘lmagan shunday bir ajoyib bir imkoniyatni namoyish etadi: umumiy holda halqalarda shunday ikki element mavjud bo‘lishi mumkinki, ularning har biri noldan farqli bo‘lgani holda ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi.

1.5-misol. $(\vec{M},+,\times)-$halqada hatto $\vec{x}-$ nolmas vektor bo‘lganda ham $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$.

1.2-ta’rif. $x\neq 0, y\neq 0$, ammo $xy=0$ bo‘lsa $(K,+,\cdot)$ halqaning x va y elementlari nolning *bo‘luvchilari* deyiladi. Bu holda x – nolning *chap*, *u* – esa ***o‘ng*** bo‘luvchisi (kommutativ halqalarda bunday farqlash kerak emas) deyiladi.

1.6-misol. $(\boldsymbol{Q},+,\cdot),(\boldsymbol{R},+,\cdot),(\boldsymbol{C},+,\cdot)-$nolning bo‘luvchilarisiz halqalar, $(\vec{M},+,\times)$ va $(F,+,\cdot)$ lar esa nolning bo‘luvchilarili halqalardir. **1.7-misol.**Agar halqa nolning bo‘luvchilariga ega bo‘lmasa ixtiyoriy $z\neq 0$ uchun $xz=yz$ yoki $zx=zy$ dan $x=y$ kelib chiqadi, ya’ni tenglikning ixtiyoriy tomondan noldan farqli umumiy ko‘paytuvchiga qisqartirish mumkin. Shuni isbot qilamiz.

Yechish. $xz=yz$ bo‘lsin. U holda $xz-yz=0$, $(x-y)z=0$, ammo $z\neq 0$. Shu sababdan nolning bo‘luvchilari mavjud bo‘lmagani sababli: $x-y=0$, ya’ni $x=y$.

Xuddi shunday tartibda $zx = zy$ tenglikdan $x = y$ hosil qilinadi.

1.3-Ta'rif. K birlik halqa bo'lsin. Agar $a \in K$ uchun $a \cdot b = b \cdot a = 1$ tengliklarni qanoatlantiruvchi $b \in K$ element mavjud bo'lsa, a element teskarilanuvchi va b element esa a ga *teskari element* deyiladi. Halqaning teskari elementi a^{-1} shaklda va bu elementning o'zi ham teskarilanuvchi bo'lib, a unga teskaridir, ya'ni $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$,birlik halqadagi teskarilanuvchi elementlar *birning bo'luvchilari* ham deyiladi.

1.2-tasdiq. Birlik K halqaning hamma teskarilanuvchi elementlari K da kiritilgan ko'paytirish amaliga nisbatan gruppa tashkil etadi. Bu gruppa K^* shaklda yoziladi. K^* gruppaga K halqaning multiplikativ gruppasi deyiladi.

1.8-misol.$(\boldsymbol{Z},+,\cdot)-$halqada faqat 1 va -1 sonlar teskarilanuvchi va demak $Z^* = \{-1,1\} = F_2$, $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)-$ halqaning multiplikativ gruppasidan iborat.

1.9-misol.$C\left[a,b\right]$ halqada teskarilanuvchi elementlar $\left[a,b\right]$ da noldan farqli bo'lgan funksiyalardan iborat.

Yagona elementdan iborat halqa (bu yagona element halqaning ham biri ham noli bo'lib xizmat qiladi) *trivial* halqa deyiladi. Agar $(K,+,\cdot)$ halqada $1 = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu halqa trivial halqa bo'ladi; haqiqatan u holda ixtiyoriy $x \in K$ uchun $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ bo'ladi.

1.4-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan birlik $(1 \neq 0)$ notrivial assosiativ-kommutativ halqa *butunlik sohasi* (yoki *butunlik* halqasi) deyiladi. Masalan, $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ shunday halqadir.

1.5-ta'rif. Har bir noldan farqli elementi teskarilanadigan birlik assosiativ halqa *jism* deyiladi.

1.6-tarif. Agar:

1) $(K,+)-$ abel gruppa;

2) $(K,\cdot)-$ gruppoid, $(K\setminus\{0\},\cdot)-$ abel gruppa;

3) qo‘shish bilan ko‘paytirish amallari distributivlik qonuni bilan bog’langan (uni ikki formasining ixtiyoriy bittasi bilan ifodalash mumkin), bo‘lsa $(K,+,\ \cdot)$ algebraik sistema *maydon* deyiladi.

1.10-misol. Yuqorida keltirilgan halqalar ichida faqat $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$ va $(C,+,\cdot)$ halqalargina maydon tashkil etadi.

1.11-misol. Vektorlar halqasi $(\vec{M},+,\cdot)$ ning va funksiyalar halqasi $(F,+,\cdot)$ ning maydon, hatto jism ham bo‘laolmasligini ko‘rsating.

*Yechish.*1.7-misolga ko‘ra hech qanday maydon nolning bo‘luvchilariga ega emas. $(\vec{M},+,\cdot)$ va $(F,+,\cdot)$ halqalar esa nolning bo‘luvchilariga ega. Shundan ko‘rsatilishi kerak bo‘lgan tasdiq hosil bo‘ladi.

1.12-misol. $x,y,z,t-$lar $(P,+,\cdot)$ maydonning ixtiyoriy elementlari va $y\neq 0,\quad t\neq 0$ bo‘lsin. $\frac{x}{y}\pm\frac{z}{t}=\frac{xt\pm yz}{yt}$ni isbot qiling.

*Yechish.*Maydonda ko‘paytirish kommutativ bo‘lgani uchun ixtiyoriy $y\neq 0$ uchun $xy^{-1}=y^{-1}x$ va bu ifodalarning har birini $\frac{x}{y}$ kasr shaklida ifodalash hech qanday aniqmaslikka olib kelmaydi. Shuning uchun isbotlanayotgan tenglikning chap tomoni $xy^{-1}\pm zt^{-1}=xy^{-1}tt^{-1}\pm zt^{-1}yy^{-1}=xt(yt)^{-1}\pm yz(yt)^{-1}=(xt\pm yz)(yt)^{-1}$, ya’ni o‘ng tomoniga teng. Shu bilan birga nolning bo‘luvchilari mavjud emasligi sababidan $y\neq 0$ va $t\neq 0$ dan $yt\neq 0$ kelib chiqadi.

1.7-tarif. Agar $(K,+,\cdot)$ halqa elementlarining K' bo‘sh bo‘lmagan qismto‘plami halqada aniqlangan amallarga nisbatan halqa bo‘lsa $(K',+,\cdot)$ halqa $(K,+,\cdot)$ning qismhalqasi deyiladi. Bunda «halqa» so‘zini «maydon» so‘zi bilan almashtirilsa qism maydon tushunchasining ta'rifi hosil bo'ladi.

1.3-tasdiq.Agar K'– to'plam $(K,+,\cdot)$, halqa elementlaridan iborat bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lsa, $(K',+,\cdot)$ ning qism halqa bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi yetarli:

a) $(K',+)$ va $(K',\cdot)$ - gruppoidlar, ya'ni hamma vaqt $x, y \in K'$ dan $x+y \in K'$ va $xy \in K'$ kelib chiqadi;

b) agar $x \in K'$ bo'lsa, $-x \in K'$ bo'ladi.

$(K,+,\cdot)-$maydon bo'lgani holda $(K',+,\cdot)$ ning qismmaydon ekanligini tekshirish uchun *a*) va *b*) shartlardan tashqari yana

c) agar $x \in K'\backslash\{0\}$ bo'lsa, $x^{-1} \in K'\backslash\{0\}$ bo'lishini ko'rsatish yetarli.

1.8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in K$ lar uchun:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y).$$

bo'ladigan $f: K \to \widetilde{K}$ biyeksiya mavjud bo'lsa, $(K,+,\cdot)$ va $(\widetilde{K},+,\cdot)$ halqalar izomorf deyiladi.

Shuni ham ta'kidlaymizki, hatto $\widetilde{K} = K$ bo'lganda ham ikkala halqadagi "+" va "·" amallari bir xilda belgilansa hamki, albatta bir xil bo'lishi shart emas. $K \cap \widetilde{K} = \varnothing$ bo'lganda esa «bir xil amallar» deyishning o'zi ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Agar f – akslantirish K halqaning $\widetilde{K}$ halqaga izomorfizmi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a \in K$ uchun $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$. Shuningdek, agar $1 \in K$ bo'lsa, $f(1) = 1$ va ixtiyoriy $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ uchun $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. Halqaning o'ziga izomorfizmi shu halqaning avtomorfizmi deyiladi.

Agar K halqa butunlik sohasi yoki maydon bo'lsa uning izomorf obrazi ham butunlik sohasi yoki maydon bo'lishi shubhasiz.

Agar K halqa L halqaning biror qism halqasiga izomorf akslanishi mavjud bo'lsa, K halqa L halqada joylashadi deymiz.

1.13-misol. *a*) juft sonlarning *2**Z*** halqasi butun sonlar halqasi ***Z*** ga joylashadi; *b*) butun sonlar halqasi ***Z*** rasional sonlar halqasi *Q* ga joylashadi.

2-§. Affin ko‘pxilliklar

1.9-ta’rif. Ushbu $x_1, x_2, \dots, x_n$,o‘zgaruvchilarning monomi deb, ulardan tuzilgan

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

shakildagi ko‘paytmaga aytiladi ,bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Z_{\geq 0}$ lar manfiymas butun sonlar bo‘lib, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ - ga monomning to‘liq darajasi deyiladi.

1.14-misol. -5$x^8 y^1 z\, t^4$- bu monomning to‘liq darajasi 14 ga teng .

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ -monom bo‘lsin , ko‘p hollarda qulaylik uchun $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ni

x^α kabi belgilaymiz, bu yerda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, agar $\alpha = 0$ bo‘lsa $x^\alpha = 1$ bo‘ladi.

1.10-ta’rif. Koeffitsientlari k maydondan olingan x_1, x_2, …,x_n o‘zgaruvchilarning polinomi deb monomlarning chekli chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi va

$$f = \sum a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in k,$$

kabi yoziladi.

Koifitsientlari k maydondan olingan x_1, x_2, …,x_n ,o‘zgaruvchilarning barcha polinomlar to‘plamini $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ orqali belgilaymiz.

Ko‘p hollarda biz o‘zgaruvchilari bir nechta bo‘lgan polinomlar bilan ishlashimizga to‘g‘ri keladi bu hollarda bu to‘plamni oddiyroq ya’ni o‘zgaruvchilarni indekssiz yozib ishlatishimiz qulayroq bo‘ladi.

Polinom bir, ikki ,uch o‘zgaruvchilardan iborat bo‘lganda polinomlar to‘plamini $k[x]$, $k[x, y]$, $k[x, y, z]$ kabi belgilaymiz. Masalan:

1.14-misol. f=-5x^7y^5z+1/2y^4z^6-14xyz^9+$y^2+x^4y^7$∈ $Q[x,y,z]$ bo‘ladi.

Polinomlarni belgilashda lotin alifbosining *f,g,h,p,q,r…* kichik harflardan foydalanamiz.

1.11-ta’rif. $f = \sum a_\alpha x^\alpha,\ a_\alpha \in k$, $f \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ bo‘lsin:

1) a_α - x^α *monomning koifitsienti* deyiladi .

2) Agar $a_\alpha \neq 0,$ bo‘lsa $a_\alpha x^\alpha$ - f *polinomning hadi* deyiladi .

3) f polinomnig *to‘la darajasi* deb, $|\alpha|$ larning maksimaliga aytiladi va *deg(f)* =*max*$|\alpha|$ kabi belgilanadi.

Masalan, 1.14-misolda keltirilgan

$$f = -5x^7y^5z + 1/2y^4z^6 - 14xyz^9 + y^2 + x^4y^7,$$

polinom beshta haddan iborat va to‘la darajasi *deg*(*f*)=13 ga teng .

Ikki polinomning yig‘indisi va ko‘paytmasi yana polinom bo‘ladi.Agar *g,f,h*∈ $k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ lar uchun *g=f*h* tenglik bajarilsa *g* polinom *f* polinomga *bo‘linadi* deyiladi.

Biz 1-§ paragrafda halqa va maydon tushunchalari bilan atroflicha tanishdik , endi *n* ta nomalumli polinomlar to‘plami $k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$, bu to‘plam elementlarini ko‘paytirish va qo‘shish amalariga nisbatan halqa yoki maydon tashkil qilish yoki qilmasligini tekshirib ko‘ramiz. Oson ko‘rsatish mumkinki $k[x_1,\ x_2,\ \dots, x_n]$, to‘plam elementlari polinomlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan halqa shartlarini to‘liq qanoatlantiradi.Hattoki u komutativ, asotsiativ, birlik halqa bo‘ladi.Lekin ($k[x_1,\ x_2,\ \dots, x_n], +, \cdot$)-sistema maydon bo‘lmaydi chunki, ko‘paytirishga nisbatan teskari element har doim ham mavjud emas. Biz bundan keyin $k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ to‘plamini ko‘phadlar halqasi yoki polynomial halqa deb ataymiz.

1.12-ta’rif. *k* qandaydir maydon va *n* natural son bo‘lsin, quyidagi

$k^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a, \dots, a_n \in k\}$,

to‘plamga k maydon ustidagi *n-o‘lchamli affin fazo* deb ataladi.

Masalan, k=***R*** bo‘lsa k^n chiziqli algebra kursidan tanish bo‘lgan $\mathbf{R}^n$ chiziqli fazoga aylanadi .Shu kabi k^1 *–affin to‘g‘ri chiziq* , k^2 *– affin tekislik* deyiladi.

Polinomlar va Affin fazo orasidagi bog‘liqlik .

Polinomlar va Affin fazo orasidagi bog‘liqlikni qaraymiz bu yerda asosiy faktimiz

f=$\sum a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom k^n ni k ga o‘tkazuvchi *f*:$k^n \to k$ funksiyadan iborat bo‘lishidir.Ya’ni barcha $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in k^n$ lar uchun har bir x_i ni a_i bilan almashtirsak *f*$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in k$ bo‘lishi ravshan.

Polinomlarning ikki xil turli xususiyati kutilmagan natijalarga olib keladi.Masalan, quyidagicha savol qo‘yilgan bo‘lsin «qachon *f=0* bo‘ladi?» bunda ikkita holat bo‘lishi mumkin « f -nol polinom bo‘lsa» ya’ni hamma koifitsientlari nolga teng ,yoki « f – nol funksiya bo‘lsa» ya’ni *f*$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$=0, barcha $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in k^n$ larda.Ushbu ikki hol umuman ekvivalent emas. Buni aniq misol yordamida ko‘rsatamiz.

1.15-misol. Faqat 0 va 1, lardan iborat bo‘lgan to‘plamni olaylik.Agar 1+1=0 deb olsak u maydon shartlarini qanoatlantiradi.Biz uni $F_2 = \{0,1\}$ kabi belgilaymiz. Endi $x^2 - x = x(x-1) \in F_2$, polinomni olamiz bu polinom 0 va 1 nuqtalarda nolga aylanadi, ammo F_2 da nol polinom emas.Demak $f = x^2 - x$ polinom F_2 da nol funksiya bo‘ladi, lekin nol polinom bo‘lmaydi.

Agar k maydon cheksiz maydon bo‘lsa, unda hech qanday muammo paydo bo‘lmaydi.

1.4-tasdiq. $[15]$ k – cheksiz maydon va $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bo‘lsin u holda faqat va faqat $f \equiv 0$ (*nol polinom*) bo‘lsagina $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ da $f\colon k^n \to k$ nol fuksiyadan iborat bo‘ladi .

Isbot. Agar $f \equiv 0$ bo‘lsa u holda ravshanki $f\colon k^n \to k$ no‘l funksiyadan iborat bo‘ladi.Aksincha ,faraz qilaylik f no‘l funksiya bo‘lsin .Isbotni noma’lumlar soni n ga nisbatan induksiya metodini qo‘llash bo‘yicha olib boramiz , n=1 bo‘lsin ,u holda algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra f hech bo‘lmaganda m taildizga ega bo‘ladi bu yerda m f ko‘phadning darajasidan iborat .Demak , barcha $a \in k$ lar uchun $f=0$ bo‘ladi.Endi tasdiqni barcha $n-1$ lar uchun to‘g‘ri deb faraz qilamiz.Barcha $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in k^n$ larda $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ bo‘lib endi f quyidagicha ifodalab olamiz

$$f = \sum g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) x_n^i$$

bu yerda $g_i \in k[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ bo‘lib ixtiyoriy ravishda tanlangan $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$ nuqtani qaraymiz . U holda $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ bir nomalumli polinomdan iborat. $n = 1$ holga asosan $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ polinom $k[x_n]$ halqada nol polinomdan iborat,shuning uchun barcha $a_n \in k$ larda $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ bo‘ladi . Bu yerdan kelib chiqadiki, *i=1,2,…,q larda* $g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = 0$ bo‘ladi. $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ nuqtaning ixtiyoriy tanlanganligidan induksiya faraziga asosan $k[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ da g_i nol polinomdan iborat ekanligi kelib chiqadi.Demak, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ da f no‘l polinomdan iborat ekan.Tasdiq isbot bo‘ldi.

Demak , $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ da f - nol funksiya bo‘lishi uchun uning barcha koifitsientlari aynan nolga teng bo‘lishi kerak. Boshqacha aytganda “ 0 ” , *k* maydonning nol elementi va $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$,halqaning nol polinomi bo‘ladi.

1.1-natija. k – cheksiz va $f, g \in k[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$ bo‘lsin u holda faqat va faqat $f: k^n \to k, g: k^n \to k$ fuksiyalar bitta funksiyadan iborat bo‘lgandagina $k[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$ da $f = g$ bo‘ladi.

Isbot. Isbot 1.4-tasdiqni $f - g$ ayirmaga nisbatan qo‘llashdan kelib chiqadi .

1.1-teorema. [15] (*Algebaning asosiy teoremasi*). Har qanday $\in C[x]$, polinom C da kamida bitta ildizga ega bo‘ladi.

k maydon *algebreik yopiq* deyiladi ,agar istalgan doimiy bo‘lmagan $f \in k[x]$ polinom k da ildizga ega bo‘lsa.

1.13-ta’rif. k - qandaydir maydon va $f_1, f_2, \ldots f_s \in k[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$ polinomlar berilgan bo‘lsin.

$$V(f_1, f_2, \ldots f_s) =$$
$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in k^n: \text{barcha } 1 \le i \le s \ \ larda, \quad f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0\}$$

Ushbu V$(f_1, f_2, \ldots f_s)$ to‘plam $f_1, f_2, \ldots f_s$ lar bilan aniqlangan *affin ko‘pxillik* deb ataladi.

Boshqacha qilib aytadigan bo‘lsak , $V(f_1, f_2, \ldots f_s) \subset k^n$ - *affin ko‘pxillik* degandda biz $f_1(a_1,\ a_2, \ldots, a_n) = \cdots = f_s(a_1,\ a_2, \ldots, a_n) = 0$ tengliklar o‘rinli bo‘ladigan nuqtalarning geometrik o‘rnini tushunamiz.

1.16-misol. 1). V$(x^2 + (y-2)^2 - 16)$, ko‘pxillik R^2-tekislikdagi markazi O(0;2) nuqtada va radiusi 4 ga teng bolgan aylananing ustidagi nuqtalar to‘plamidan iborat , bu esa o‘z navbatida $x^2 + (y-2)^2 - 16 = 0$ tenglamaning yechimlari to‘plamidir.

2).Uch o‘lchovli R^3 fazoda $z = x^2 - y^2$, tenglama bilan berilgan paraboloid ham ushbu $V(z - x^2 - y^2)$, affin ko‘pxillikni beradi.

1.1-lemma. Agar *V*, *W*- affin ko‘pxilliklar bo‘lsa , u holda $V \cup W$ va $V \cap W$

to‘plam ham affin ko‘pxillik bo‘ladi.

Isbot. $V = \mathrm{V}(f_1, f_2, \dots f_s)$ va $W = \mathrm{V}(g_1, g_2, \dots g_t)$ qandaydir affin ko‘pxilliklar bo‘lsin.Biz quyidagi $V \cap W = \mathrm{V}\,(f_1, f_2, \dots f_s, g_1, g_2, \dots g_t)$, $V \cup W = \mathrm{V}(f_i g_j : 1 \le i \le s, 1 \le j \le t)$ to‘plamlarni algebrik ko‘pxillikni tashkil etishini davo qildik.

Birinchi davomizni ko‘rib chiqamiz:agar biror nuqta $V \cap W$ ga tegishli bo‘lsa u holda bacha $f_1, f_2, \dots, f_s,$ va $g_1, g_2, \dots, g_t$ funksiyalar bu nuqtada no‘lga aylanadi. Demak $\mathrm{V}\,(f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_t)$ affin ko‘pxillik ekan.

Ikkinchi davoni ko‘rib chiqamiz: agar $(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{V}$ bo‘lsin ,u holda barcha f_i lar shu nuqtada no‘lga aylanadi ; bundan chiqdi barcha $f_i g_j$ lar ham shu nuqtada no‘lga aylanadi , demak $V \subset V(f_i g_j)$ ekan, xuddi shunday $W \subset \mathrm{V}(f_i g_j)$ ni ham oson ko‘rsatish mumkin. Bundan $V \cup W \subset \mathrm{V}(f_i g_j)$ kelib chiqadi.Endi boshqa tomondan $(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in V(f_i g_j)$ bo‘lsin va qandaydir i_0 da $f_{i_0}(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \neq 0$ bo‘lsin,$(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in V(f_i g_j)$ ekanligidan g_j funksiyalar bu nuqtada no‘lga aylanishi kelib chiqadi.Demak $(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in W$ ekan.Endi faraz qilaylik barcha i larda f_i lar no‘lga teng bo‘lsin u holda albatta ko‘rinib turibdi $(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{V}$ .Shunday qilib $\mathrm{V}(f_i g_j) \subset V \cup W$ ekan.Lemma isbot bo‘ldi.

3-§. Ideal

1.14-ta’rif. $I \subset k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ *halqaning* qism to‘plami *ideal* deyiladi , agar unda quyidagi shartlar bajarilsa :

1) $f, g\ \in I, dan\ f + g\ \in I$;

2) $f \in I$ va $\forall\ h\ \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$, dan $hf \in I$.

1.15-ta’rif. $f_1, f_2, \dots, f_s\ \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ polinomlar berilgan bo‘lsin.Ushbu $< f_1, f_2, \dots, f_s >$ - to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz,

$$< f_1, f_2, \dots, f_s >= \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i : h_i, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

ma'lum bo'lishicha $< f_1, f_2, \dots, f_s >$ idealni tashkil qilar ekan.

1.2-lemma. $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bo'lsin,u holda $< f_1, f_2, \dots, f_s >$ to'plam $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi. Bu ideal $f_1, f_2, \dots, f_s$ lardan *hosil qilingan* ideal deyiladi, $f_1, f_2, \dots, f_s$ – polinomlar esa idealning *yasovchilari* , yoki *hosil qiluvchi elementlari* deyiladi.

$<f_1, f_2, \dots, f_s >$ ideal polinomli tenglamalar sinfining bir ko'rinishi bo'ladi. $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bo'lsin.Quyidagi tenglamalar sistemasini qarab chiqamiz.

$$f_1 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_s = 0$$

Bu tenglamalar sistemasini ko'rishini bir nechta algebrik amallarni bajargan holda bitta tenglamaga keltirishimiz mumkin. Misol uchun, agar biz birinchi tenglamani $h_1 \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ga, ikkinchisini $h_2 \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ga va h.k. ko'paytirib , barcha ko'paytmalarni qo'shib chiqsak yuqorida berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'lgan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz ,

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s = 0$$

natijada $<f_1, f_2, \dots, f_s >$ idealning elementiga ega bo'lamiz.

I ideal *chekli yasalgan* deyiladi:agar chekli sondagi $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomlar mavjud bo'lib $I=<f_1, f_2, \dots, f_s >$ bo'lsa va bunda $f_1, f_2, \dots, f_s$ lar I idealning *bazisi* deyiladi.

Eslatib o‘tish kerakki I idealing bir nechta bazislari bor bo‘lishi mumkin .Biz kelgusida shular ichida eng qulayini aniqlashni ko‘ramiz va uni Grobner bazisi deb ataymiz.

Idealning ta’rifi chiziqli algebradagi qism fazoning tarifiga o‘xshab ketadi.Bu holda idealning tarifidagi qo‘shish va ko‘paytirish amallarini saqlash shartlari qism fazoniki bilan bir xil, ammo qism fazo tarifda songa ko‘paytmani saqlash talab qilinar edi bu yerda esa sonlar o‘rnida polinomlar olinadi.

Ushbu tasdiq orqali idealning ko‘pxilliklarni aniqlashdagi muhim ro‘lini bilishimiz mumkin bo‘ladi.

1.5-tasdiq. $f_1, f_2, \dots, f_s$ va $g_1, g_2, \dots, g_t -$ $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dagi I idealning turli bazislari bo‘lsin, u holda $< f_1, f_2, \dots, f_s > = < g_1, g_2, \dots, g_t >$ bo‘ladi.Bundan $\mathrm{V}(f_1, f_2, \dots, f_s) = \mathrm{V}(g_1, g_2, \dots, g_t)$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, idealning bazislarini o‘zgartirish orqali, biz ko‘pxillikni osonroq topishimiz mumkin.

1.16-misol. Ushbu ko‘pxillikni qaraylik $V(3x^3 + y^2 - 60, 3x^3 - y^2 + 12)$,oson ko‘rsatish mumkinki $< 3x^3 + y^2 - 60, 3x^3 - y^2 + 12 > = < x^3 - 8, y^2 - 36 >$, bundan 1.5 - tasdiqning ahamiyati ko‘rinadi.

$V(3x^3 + y^2 - 60, 3x^3 - y^2 + 12) = V(x^3 - 8, y^2 - 36)$=$\{(2,6), (2,-6)\}$.

Endi biz affin ko‘pxilliklar bilan bog‘liq bo‘lgan ideallarning ajoyib bir sinfini ko‘rib chiqamiz.V=V$(f_1, f_2, \dots, f_s) \subset k^n$ −affin ko‘pxillik bo‘lsin, $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .Biz bilamiz $f_1, f_2, \dots, f_s$ lar V to‘plamda nolga teng bo‘ladi, endi shunday savolni qo‘yamiz.V to‘plamda no‘lga teng bo‘ladigan boshqa polinomlar ham bormi?. Agar bor bo‘lsa ular qanday xarakterga ega bo‘ladi ?.

1.16-ta’rif. $\mathrm{V} \subset k^n$-affin ko‘pxillik bo‘lsin. *I*(V) to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz: *I*(V)={*f*$\in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ barcha $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{V}$ da}. Ma’lum bo‘lishicha, *I*(V) – ideal ekan.

1.3-lemma. $V \subset k^n$-affin ko‘pxillik bo‘lsin. U holda $I(V)$ – ideal bo‘ladi, bu idealga V *ko‘pxillikning ideali* deymiz.

1.17-misol.Ushbu $\{(0,0)\}$, ko‘pxillikni qarab chiqamiz u faqat bitta nuqtadan, ya’ni k^2 affin tekisligining boshlag’ich nuqtasidan iborat.$I(\{(0,0)\})$ idealning elementlari esa shu (0,0), nuqtada nolga teng bo‘ladigan polinomlar.Biz $I(\{(0,0)\}) =< x, y >$ ekanligini ko‘rsatamiz .

Bir tomondan, $A(x,y)x + B(x,y)y \in < x, y >$ bo‘lsin u holda $A(0,0)0 + B(0,0)0 = 0$bo‘ladi,demak$A(x,y)x + B(x,y)y \in I(\{(0,0)\})$ ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in I(\{(0,0)\})$ bo‘lsin u holda $f(0,0) = 0$ bo‘ladi,

$f(0,0) = a_{00} + \sum_{i,j\neq 0} a_{ij}\, 0^i 0^j = 0$ekanligidan $a_{00} = 0$bo‘lishi kelib chiqadi demak $f(x,y) \in < x, y >$.

$f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ berilgan bo‘lsin.Polinomlar$f_1, f_2, \dots, f_s \rightarrow ko'pxillikni\ V(f_1, f_2, \dots, f_s) \rightarrow$ ko‘pxilliklar esa $I(V(f_1, f_2, \dots, f_s))$ idealni aniqlaydi.

Quyidagicha savol tug‘ilishi tabiiy:Ushbu $I(V(f_1, f_2, \dots, f_s))$ va $< f_1, f_2, \dots, f_s >$ ideallar tengmi?.

Bu savolni javobini biz quyidagi lemma orqali olishimiz mumkin:

1.4-lemma. $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ bo‘lsin. U holda ushbu $< f_1, f_2, \dots, f_s >$, $I(V(f_1, f_2, \dots, f_s))$ ikkita ideallar hech qachon teng bo‘lmaydi va har doim $< f_1, f_2, \dots, f_s > \subset I(V(f_1, f_2, \dots, f_s))$ bo‘ladi.

Isbot. $f \in < f_1, f_2, \dots, f_s >$ bo‘lsin. U holda shunday $h_1, h_2, \dots, h_s \in k[x_1,\ x_2, \dots, x_n]$ polinomlar topiladiki, $f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_s f_s$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan barcha $(a_1,\ a_2, \dots, a_n) \in V(f_1, f_2, \dots, f_s)$ lar uchun

$f(a_1,a_2,\dots,a_n) = h_1(a_1,a_2,\dots,a_n)f_1(a_1,a_2,\dots,a_n) +$
$h_2(a_1,a_2,\dots,a_n)f_2(a_1,a_2,\dots,a_n) + \dots + h_s(a_1,a_2,\dots,a_n)f_s(a_1,a_2,\dots,a_n) =$
$0 + 0 + \dots + 0 = 0$
, kelib chiqadi va bundan $f \in I(\mathrm{V}(f_1, f_2, \dots, f_s)$ bo‘ladi.

Shunday qilib, $<f_1, f_2, \dots, f_s> \subset I(\mathrm{V}(f_1, f_2, \dots, f_s))$ ekanligi kelib chiqdi.

1.6-tasdiq. V va W $- k^n$ dagi affin ko‘pxilliklar bo‘lsin . U holda

(i) V⊂W bo‘lsagina faqat va faqat shu holda, $I(\mathrm{V}) \supset I(\mathrm{W})$ bo‘ladi.

(ii)V=W bo‘lsagina faqat va faqat shu holda, $I(\mathrm{V}) = I(\mathrm{W})$ bo‘ladi.

Affin ko‘pxilliklar va ideallar o‘rtasidagi bog‘liqliklar va farqlarni bilish juda katta amaliy ahamiyatga ega bo‘ladi.

Biz kelgusida $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomlar halqasida quyidagi ikkita asosiy masalani qarab chiqamiz :

- (Idealning tafsiflanish masalasi). Har bir $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ideal chekli yasovchilarga ega bo‘ladimi, ya’ni shunday $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ topilib $I=<f_1, f_2, \dots, f_s>$ mi?.
- (Idealga tegishlilik masalasi). Ushbu $f_1, f_2, \dots, f_s \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomlar berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomning $<f_1, f_2, \dots, f_s>$ idealga tegishlilik masalasi?

4-§.$\boldsymbol{k[x_1, x_2, \dots, x_n]}$ da monomlarni tartiblash.

Bir o‘zgaruvchili polinomlarni bo‘linish algoritmi monomlarni quyidagicha tartiblash bilan bo‘liq:

$$\dots > x^{m+1} > x^m > \dots > x^2 > x > 1$$

Algoritmning natiyjaviyligiga biz ketma-ket f va$g$,polinomlarning bosh hadlari bilan ish ko‘ramiz,ya’ni $g$dagi ixtiyoriy hadlardan foydalanib$f$ ning hadlarini“ tasodifiy ravishda” yo‘qotamiz.Bo‘linish algaritimini$k[x_1, x_2, \dots, x_n]$halqada umumiylashtirish va$k[x_1, x_2, \dots, x_n]$dagi polinomlar uchun qo‘llashimiz uchun polinomlarning hadlarini tartiblashimiz juda muhim ro‘l o‘ynaydi.Chunki bu holat bir o‘zgaruvchili polinomlar bo‘lgan holdan tubdan farq qiladi.Shuni aytib o‘tish joizki bu holda polinomlarni tartiblashning ko‘plab holatlari bo‘lishi mumkin.

Shuni ta’kidlaymizki $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$monomlar va$\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in Z_{\geq 0}^{n}$ daraja ko‘rsatgichlari *n*-tanlanma (*n*-vektorli) orasida bir qiymatli moslik mavjud.

$Z_{\geq 0}^{n}$ da biz aniqlayotgan tartiblash,monomlar to‘plamida ham tartiblashni aniqlaydi: agar $Z_{\geq 0}^{n}$ da $\alpha > \beta$ bo‘lsa, uholda biz $x^{\alpha} > x^{\beta}$ deb aytamiz.

$Z_{\geq 0}^{n}$ dagi tartiblashlarni juda ko‘p usullar bilan berishimiz mumkin Polinom monomlar yig’indisidan iborat bo‘lgani uchun biz uning hadlarini kamayish yoki o‘sish tartibida joylashtirib olishimiz kerak bo‘ladi. Buning uchun monomlarni ixtiyoriy juftini taqqoslay olishimiz va ularni ichida qaysi biri katta ekanligini aniqlay olishimiz, ya’ni bizning tartiblash “*chiziqli”*tartiblash bo‘lishi lozim. Buning uchun ixtiyoriy x^{α}vax^{β}monomlar jufti uchun quyidagi munosabatlardan biri bajarilishi lozim:

$$x^{\alpha} > x^{\beta}, \quad x^{\alpha} = x^{\beta}, \quad x^{\alpha} < x^{\beta}.$$

Biz yana monomlarni tartiblash quyidagi qo‘shimcha xossalarga ega bo‘lishini talab qilamiz.Agar$x^{\alpha} > x^{\beta}$, bo‘libx^{γ} – ixtiyoriy monom bo‘lsa, $x^{\alpha} x^{\gamma} > x^{\beta} x^{\gamma}$bo‘lishi kerak.Vektor daraja ko‘rsatgichlar tilida bu agar $Z_{\geq 0}^{n}$da $\alpha > \beta$bo‘lsa , u holda ixtiyoriy $\gamma \epsilon Z_{\geq 0}^{n}$, uchun $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ bo‘lishi kerak.

Endi biz keying tariflarni berishimiz mumkin.

1.20-ta’rif. Istalgan>binar munosabat $Z_{\geq 0}^{n}$ uchun$k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ da *monomial tartiblash* deyiladi agar u quyidagi xususiyatlarga ega bo‘lsa:

(i) >munosabat $Z_{\geq 0}^{n}$chiziqli tartiblashdan iborat bo‘lsa;

(ii) agar$\alpha > \beta$ va $\gamma \epsilon Z_{\geq 0}^{n}$ dan, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ kelib chiqsa;

(iii) $>$munosabbat $Z^n_{\geq 0}$ to‘la tartiblash bo‘lib, $Z^n_{\geq 0}$ ning istalgan qism to‘plami uchun minimal (eng kichik) element mavjud bo‘lsa.

Keyingi lemma (iii) xossani tushunishga yordam beradi.

1.5-lemma.[15] $>$*tartiblash* $Z^n_{\geq 0}$*da to‘la tartiblash deyiladi faqat va faqat shu holatdaki,* $Z^n_{\geq 0}$ *dagi ixtiyoriy qa’tiy kamayuvchi ketma ketlik aniq quyi chegarasiga*

$$\alpha(1) > \alpha(2) > \alpha(3) > ...$$

ega bo‘lsa . Bizning tartiblashlarga birinchi misolimiz n-kordinatalarga nisbatan leksikografik tartiblash bo‘ladi .

1.21-ta’rif.(*leksikografik tartiblash*).

$Z^n_{\geq 0}$ da $>$ tartiblash *leksikografik tartiblash* deyiladi, agar ixtiyoriy $\alpha = (\alpha_1, ... \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ... \beta_n) \in Z^n_{\geq 0}$ lar uchun $\alpha - \beta \in Z^n_{\geq 0}$ ning eng chapdagi no‘lmas kordinatasi musbat bo‘lsa va uni $\alpha >_{lex} \beta$ kabi belgilaymiz.Biz $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ kabi yozishimiz mumkin , agar $\alpha >_{lex} \beta$ bo‘lsa.

Bir nechta misollar keltiramiz:

(a) (2,5,0)$>_{lex}$(1,3,4), bo‘ladi $\alpha - \beta = (1,2,-4)$ dan.

(b) (2,3,4) $>_{lex}$(2,2,1), bo‘ladi $\alpha - \beta = (0,1,3)$ dan.

(c) $x_1, x_2, ..., x_n$o‘zgaruvchilarni $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ kabi oddiy tartiblab yozib olsak, u lex- tartiblashni tashkil qiladi. (1,0,…,0)$>_{lex}$(0,1,…,0) $>_{lex}$…$>_{lex}$(0,0,…1), bo‘lib$x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} ... >_{lex} x_n$kabi yoziladi,bu holda o‘zgaruvchilarni o‘rinlarini almashtirib jami *n*! Ta lex tartiblashga ega bo‘lamiz.

Biz ikki yoki uch nomalumli polinomlar bilan ishlayotganimizda qulaylik uchun, x_1, x_2, x_3larnio‘rniga *x*,*y*,*z* kabi almashtirib ishlatamiz.

1.4-natija. [15] *Leksikografik tartiblash $Z^n_{\geq 0}$ da monomial tartiblashdan iborat bo'ladi.*

Juda ko'p leksikografik tartiblashlar mavjud: har bir o'zgaruvchilarni tartib bilan yozilishida o'zining laksikografik tartiblanishi mos keladi.Hozirgina biz $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ tartiblanish bilan aniqlangan laksikogarafik tartiblashni ko'rib o'tdik.Lekin $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni ixtiyoriy tartibda berib yana unga mos bo'lgan leksikografik tartiblashni olamiz.Masalan,o'zgaruvchilar ikkita *x*va*y*dan iborat bo'lsin. unda biz ikki xil leksikografik tartiblashni aniqlay olamiz:birinchi tartiblash $x > y$, boshqasi esa $y > x$ -tartiblash. O'zgaruvchilar soni *n* ta bo'lgan holda, *n*! ta sondagi leksikografik tartiblashlar mavjud.Keyinchalik biz "leksikografik tartiblash" deyilganda $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ tartib berilganini bildiradi. Leksikografik tartiblashda ,faqat kichik o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan ixtiyoriy monomdan uning darajasiga bog'liq bo'lmasdan katta bo'ladi. Masalan,$x > y > z$ tartiblashda,$x >_{lex} y^3z^4$ bo'ladi.Bazi hollarda bizga monomlarni darajalarini ham hisobga olishimizga to'g'ri keladi va bu holda biz darajalarni taqqoslashimiz kerak bo'ladi.Bunday tartiblashga misol qilib *graudirlangan leksikografik tartiblashni* olishimiz munkim.

1.22-ta'rif. (*graudirlangan leksikografik tartiblash* grlex). $Z^n_{\geq 0}$da $>$tartiblash *graudirlangan leksikografik tartiblash*ni , agar ixtiyoriy $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots \beta_n) \epsilon Z^n_{\geq 0} \alpha, \beta \epsilon Z^n_{\geq 0}$ lar uchun , $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ bo'lsa , yoki $|\alpha| = |\beta|$ bo'lib $\alpha >_{lex} \beta$ bo'lganda ,$\alpha >_{grlex} \beta$ kabi kiritamiz.Boshqacha aytganda , grlex to'la darajalar bo'yicha tartiblashdir, agar ular teng bo'lsa lex -tartiblashdan foydalanamiz.

Bir nechta misollar keltiramiz:

(a) $(2,3,1) >_{grlex} (1,2,0)$ bo'ladi chunki $|(2,3,1)| = 6 > |(1,2,0)| = 3$ ekanligi uchun.

(b) $(3,5,4) >_{grlex} (3,4,5)$, bo‘ladi chunki $|(3,5,4)| = |(3,4,5)|$teng lekin, $(3,5,4) >_{lex} (3,4,5)$ ekanligi uchun.

(c) $x_1, x_2, \ldots, x_n$o‘zgaruvchilarni $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ kabi oddiy tartibda yozib olsak $|(1,0,\ldots,0)| = |(0,1,\ldots,0)| = \cdots = |(0,0,\ldots 1)|$ teng va

$x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} \ldots >_{lex} x_n$ekanligi va grlex tartiblashning ta’rifidan $x_1 >_{glex} x_2 >_{glex} \ldots >_{glex} x_n$bo‘lishi kelib chiqadi.

1.23-ta’rif. (*graudirlangan teskar ileksikografik tartiblash* grevlex). $Z^n_{\geq 0}$ da $>$ tartiblash *graudirlangan teskari leksikografik tartiblash* deyiladi : agar ixtiyoriy$\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n) \epsilon Z^n_{\geq 0} \alpha, \beta \epsilon Z^n_{\geq 0}$lar uchun

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

bo‘lsa yoki$|\alpha| = |\beta|$bo‘lib$\alpha - \beta \epsilon Z^n_{\geq 0}$ning o‘ngdan eng chekli nol bo‘lmagan kordinatasi manfiy bo‘lsa. Biz uni $\alpha >_{grevlex} \beta$ kabi yozamiz.

grlex, grevlex tartiblashlarda darjalari teng bo‘lgan monomlarni tartiblash ko‘rsatildi. Misollar:

(a) $(2,3,5) >_{grevlex} (1,2,6)$, bo‘ladi$|(2,3,5)| = 10 > |(1,2,6)| = 9$dan.

(b) $(4,6,4) >_{grevlex} (3,6,5)$bo‘ladi$|(4,6,4)| = |(3,6,5)|$,va$\alpha - \beta = (1,0,-1)$ bo‘lgani uchun.

Biz endi monomial tartiblashlarning polinomlar bilan ishlashda qanday yordam berishini ko‘rib chiqamiz. Ushbu$f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom va $>$ monomial tartiblash berilgan bo‘lsin.U holda biz $>$ tartiblash yordamida f ni yagona ravishda tartiblab yoza olamiz.

1.19-misol. Biz $f = 3x^2y^4 + 5y^3z^4 - 4x^2y^5 + 3x^3yz^2 \epsilon k[x,y,z]$,berilgan bo‘lsin. U holda:

a) lex-tartiblashni qo‘llasak f ni quyidagicha tartiblanadi:

$$f = 3x^3yz^2 - 4x^2y^5 + 3x^2y^4 + 5y^3z^4$$

b)grlex –tartiblash bo‘yicha esa quyidagicha:

$$f = -4x^2y^5 + 5y^3z^4 + 3x^3yz^2 + 3x^2y^4$$

c)grevlex –tartiblash bo‘yicha esa ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$f = 5y^3z^4 - 4x^2y^5 + 3x^2y^4 + 3x^3yz^2$$

Endi biz quyidagi tushunchalarni berishimiz mumkin bo‘ladi.

1.24-ta’rif. $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ – $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$dagi no‘lmas polinom va $>$ - monomial tartiblashdan iborat bo‘lsin.

(a) f ning *multidarajasi* deb:

$multideg(f) = max(\alpha \in Z^n_{\geq 0} : a_\alpha \neq 0)$ ga aytiladi.

(bu yerda maksimum $>$tartiblashga nisbatan olinadi);

(b) f - polinomning *bosh koifitsienti* deb: $LC(f) = a_{multideg(f)} \epsilon k$ ga aytiladi;

(c) f - polinomning *bosh monomi* deb: $LM(f) = x^{multideg(f)}$ga aytiladi;

(d) f -polinomning *bosh hadi* deb $LT(f) = LC(f) * LM(f)$ ga aytiladi.

1.20-misol. 1.19-misolda $f = 3x^2y^4 + 5y^3z^4 - 4x^2y^5 + 3x^3yz^2$,polinom uchun $>$ lex-tartiblashni qo‘llasak. U holda biz quyidagi

$multideg(f) = (3,1,2)$,

$$LC(f) = 3,$$

$$LM(f) = x^3yz^2,$$

$$LT(f) = 3x^3yz^2,$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

1.5-lemma. *Nol bo'lmagan* $f,g \in k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ - *polinomlar berilgan bo'lsin. U holda quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi.*

(i) $multideg(fg) = multideg(f) + multideg(g)$.

(ii) *Agar* $f+g \neq 0$, *bo'lsa*

$$multideg(f+g) \leq \max\,(multideg(f), multideg(g)).$$

bu yerda tenglik , $multideg(f) \neq multideg(g)$, *bo'lganda o'rinli bo'ladi.*

1.2-teorema. [15]($[x_1,x_2,\dots,x_n]$ da bo'linish algoritmi). $Z^n_{\geq 0}$*dagi> munosabatni fiksirlaymiz,* $F = (f_1,\dots,f_s) \subset k[x_1,x_2,\dots,x_n]$,*ga qarashli tartiblangan s ta polinomlar qatori berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy* $\epsilon k[x_1,x_2,\dots,x_n]$, *polinom*

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_s f_s + r\,,$$

kabi ifodalanadi, bunda $a_i, r \epsilon k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ *va* $r = 0$, *yoki* *r polinom* LT(f_1),…,LT(f_s) *larning birortasiga ham bo'linmaydigan polinomlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi (koifitsientlari k maydondan olingan). Biz r ni f ni F ga bo'lgandagi qoldiq deb ataymiz.Agar* $a_i f_i \neq 0$, *bo'lsa* $multideg(f) \geq multideg(f_i)$ *bo'ladi.*

1.24-misol. Lex- tartiblangan $f_1 = xy + 1$, va $f_2 = y^2 - 1 \in k[x,y]$ berilgan bo'lsin. Agar biz $f = xy^2 - x$ ni $F = (f_1, f_2)$, ga berilgan tartibda bo'lsa quyidagi natijaga ega bo'lamiz

$$xy^2 - x = y(xy+1) + 0(y^2-1) + (-x-y)$$

Boshqa tomondan f ni $F = (f_2, f_1)$, ga shu tartibda bo'lsak

$xy^2 - x = x(xy+1) + 0(xy+1) + 0$.

Ikkinchi tenglikdan ko'rinadiki $f \in < f_1, f_2 >$.

Shunday qilib, 2.1-teorema bilan berilgan bo'linish algoritmi $k[x]$ dagi bo'linish algoritimining mukammal bo'lmagan umumlashmasi hisoblanadi.

Hosil bo‘lgan muammoni to‘g’irlash uchun 1-bobda bayon etilgan bitta davoni eslaymiz. Biz$f_1, f_2, \dots, f_s \epsilon k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, polinomlar bilan ish ko‘rganimizda ulardan tuzilgan *I*, idealni qarab chiqgandik. Boshqacha aytganda yuzaga kelgan muammoni hal qilish uchun, o‘sahaidealni xosil qiluvchi boshqa polinomlar jamlanmasini topish kerak.Tabiy ravishda quyidagi masala paydo bo‘ladi:ixtiyoriy *I* ideal uchun “*yaxshi*” hosil qiluvchi elamentlar to‘plamini ya’ni hisoblanadigan qoldiq bir qiymatli va *r=0* bo‘ladigan polinolar to‘plamini topa olamizmi. Kelgusida Gryobner bazislari bunday “*yaxshi*” xossalarga ega bo‘lishini ko‘ramiz.

5-§.Idealga tegishlilik masalasi

Birinchi bobda biz Ideallar va ko‘pxilliklar bilan bog’liq bo‘lgan asosiy uchta masalani keltirib o‘tgan edik. Birinchi masala idealning tafsiflanish masalasi,ikkinchi bobning § 2 da Gilbertning bazislar haqidagi teoremasi orqali hal qilindi.Endi biz ikkinchi masalani ya’ni idealga tegishlilik masalasini Gryobner bazisi yordamida yechish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Bo‘linish algoritimi va Gryobner bazisidan bir vaqtning o‘zida foydalanib, *idealga tegishlilik masalasini* yechishimiz mumkin:

Bizga qandaydir $I = < f_1, \dots, f_s >$ ideal va f polinom berilgan bo‘lsin, bizni qiziqtirayotgan asosiy masala f polinom I idealga tegishli yoki tegishli emasligini aniqlash.Buning uchun Buxbergar algoritmidan foydalanib I idealning $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ -Gryobner bazisini topamiz.Endi $f \epsilon I$, bo‘lishi uchun faqat va faqat $\bar{f}^G = 0$ bo‘lishi kerak.

3.1-misol. Bizga $I = < f_1, f_2 > = < x - y^2, x^3 - z^2 > \subset C[x, y, z]$,ideal va lex-tartiblash berilgan bo‘lsin.Ushbu $f = -xyz^2 - xy^7 + xy - y^3$, polinomni berilgan I idealga tegishli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz.

Berilgan $f_1 = x - y^2$ va $f_2 = x^3 - z^2$ polinomlar I idealning Gryobner bazisi bo‘lmaydi,chunki LT(S(f_1, f_2))=LT($-x^2y^2 + z^2) = x^2y^2$,monom

<LT(f_1),LT(f_2)> $=< x >$ idealga tegishli emas.Masalani yechishni I idealning G Gryobner bazisini topishdan boshlaymiz. S-polinomlardan foydalanib Gryobner bazislarini qo‘lda hisoblab topamiz:

$I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >\subset C[x, y, z]$, va lex-tartiblash,

$f_1 = x - y^2$, $f_2 = x^3 - z^2$, $f_1, f_2 \in C[x, y, z]$

$\alpha = (1,0,0), \beta = (3,0,0) \Rightarrow \gamma = (3,0,0)$

$S(f_1, f_2) = \frac{x^3}{x} \cdot f_1 - \frac{x^3}{x^3} \cdot f_2 = x^2(x - y^2) - 1(x^3 - z^2) = x^3 - x^2y^2 - x^3 + z^2 = -x^2y^2 + z^2$

$I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >$, $S(f_1, f_2) = -x^2y^2 + z^2 \in I$ va bo‘linish algaritimidan foydalanib oson tekshirish mumkin, $(-x^2y^2 + z^2)$ ni $F = \{f_1, f_2\}$ ga bo‘lgandagi qoldiq $-y^6 + z^2 \neq 0$,ga teng va noldan farqli chiqadi.

Demak uni $f_3 = -y^6 + z^2$ orqali belgilab F to‘plamga qo‘shib olamiz.Endi hosil bo‘lgan $= \{f_1, f_2, f_3\}$, to‘plam uchun yuqoridagi qilingan amallarni ketma ket bajaramiz.

$\overline{S(f_1, f_2)}^F = 0$, bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Endi $S(f_1, f_3)$ ni hisoblaymiz.

$\alpha = (1,0,0)$, $\beta = (0,6,0) \Rightarrow \gamma = (1,6,0)$.

$S(f_1, f_3) = \frac{xy^6}{x} \cdot f_1 - \frac{xy^6}{(-y^6)} \cdot f_3 = y^6(x - y^2) + x(-y^6 + z^2) = xy^6 - y^8 - xy^6 + xz^2 = xz^2 - y^8$

, bo‘linish algoritimini qo‘llasak $\overline{S(f_1, f_3)}^F = 0$, natijani olamiz.Endi $S(f_2, f_3)$ ni hisoblaymiz, $\alpha = (3,0,0)$, $\beta = (0,6,0) \Rightarrow \gamma = (3,6,0)$.

$S(f_2, f_3) = \frac{x^3y^6}{x^3} \cdot f_2 - \frac{x^3y^6}{(-y^6)} \cdot f_3 = y^6(x^3 - z^2) + x^3(-y^6 + z^2) = x^3y^6 - y^6z^2 - x^3y^6 + x^3z^2 = x^3z^2 - y^6z^2$

, yana bo‘linish algoritmini qo‘llab ushbu $\overline{S(f_2, f_3)}^F = 0$, natijani olamiz.

Demak olingan natijalar quyidagicha: $F = (f_1, f_2, f_3)$, uchun barcha

$1 \leq i \leq j \leq 3$, larda $\overline{S(f_i, f_j)}^F = 0$,ga teng bo‘ldi.

$\Rightarrow \{f_1, f_2, f_3\} = \{x - y^2, x^3 - z^2, -y^6 + z^2\}$ –polinomlar

$I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >$ idealning Gryobner bazisi ekanligi kelib chiqadi.Topilgan bazisni to‘g’ri hisoblanganini tekshirish uchun Meple 12 dasturidan foydalanishimiz mumkin.Buning uchun Meple 12 da Gryobner paketini ishga tushiramiz va quyidagi natijani olamiz.

$G = \{f_1, f_2, f_3\} = \{x - y^2, x^3 - z^2, y^6 - z^2\}$

Endi bo‘linish algoritmidan foydalanib f ni G ga bo‘lamiz.

$$f = x \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 - xy \cdot f_3 + 0.$$

Qoldiq nolga teng chiqganligidan $f \in I,$ ekanligi kelib chiqadi.

3.2-misol. $I =< f_1, f_2 >=< x^3 - xy^2,\ xy - z^2, x^4 - y^2 z > \subset C[x, y, z]$, va lex-tartiblash bo‘lsin.Ushbu $f = x^2 y^2 z + xy^3$ polinomni $f \in I?$, idealga tegishli yoki tegishli emasligini tekshib ko‘ramiz. Berilgan idealning yasovchilari Gryobner bazisini tashkil qilmaydi.Meple 12 dan foydalangan holda Gryobner bazisini topamiz.

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{xy - z^2, y^4 - y^2 z, -y^2 z + y^2 x^2,\ x^3 - xy^2\}.$$

Ushbu bazis keltirilgan Gryobner bazisini tashkil qiladi.

Bo‘linish algoritmidan foydalangan holda f ni G ga bo‘lamiz va quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

$$f = x \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + y \cdot f_4 + 2xy^3.$$

Qoldiq nolga teng chiqmadi, demak bundan kelib chiqadiki $f \overline{\in} I$ ekan.

3.3-misol. Ushbu $f = x^2 yz - 2xy^2 + 2x$,polinomni

$I =< f_1, f_2, f_3 >=< xz - y, xy + 2z^2, y - z > \subset C[x, y, z]$ idealga tegishli yoki tegishli emasligini tekshirib ko‘ramiz.

Berilgan to‘plam elementlari I idealning Gryobner bazisini tashkil qilmaydi.

Biz uning G Gryobner bazisini Meple 12 dan foydalangan holda topamiz va quyidagi natijaga ega bo‘lamiz

$$G = \{f_1, f_2, f_3\} = \{xz - z, y - z, 2z^2 + z\}.$$

Bu bazis I idealning keltirilgan Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi.

Endi f ni topilgan G ga bo‘lib berilgan savolni javobini izlaymiz:

$$f = \left(x^2y + xy - \frac{3}{2}\right) \cdot f_1 + (-2xy + 3xz) \cdot f_2 + \left(\frac{3}{2}x\right) \cdot f_3 + 2x + 1.5z.$$

Qoldiq $2x + 1.5z$ ga teng chiqdi demak bundan kelib chiqadiki $f \notin I$ bo‘lar ekan.

I-Bobning xulosasi

Birinchi bobda biz algebarik geometriyaning asosiy tushunchalari va mavzuga aloqador bo‘lgan bir nechta sodda tushunchalar bilan tanishdik. Affin ko‘pxillik tushunchasi orqali $k[x_1, \dots \dots . x_n]$, halqada ideal tushunchasi berildi.

I bobnig asosiy natijalari quyidagicha:

- Algebrik tushuncha bo‘lmish polynomial halqa va geometrik tushuncha bo‘lgan affin ko‘pxilliklar orasidagi bog’liqliklar o‘rganildi.
- Polynomial halqada ideal tushunchasi berildi vau bilan polynomial halqa orasidagi bog’liqliklar o‘rganildi.
- $k[x_1, \dots \dots . x_n]$,halqadagi ideallar bilan bog’liq bo‘lgan asosiy uchta masala yani,idealning tafsiflanish masalasi,idealga tegishlilik masalasi va berilgan polinomial tenglamalar sistemasini yechish masalalari yuzaga keldi.

II-BOB. IDEALLAR VA ULARNING BA’ZISLARI

1-§.Monomial ideallar va Dikson lemmasi.

Bu paragrafda biz idealning berilish masalasini monomial ideal bo‘lgan hol uchun ko‘rib chiqamiz.

2.1-ta’rif. $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{k}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}]$ ideal *monomial ideal* deyladi, agar $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{n}}_{\geq 0}$ mavjud bo‘lib , I ning har bir elementi chekli sondagi polinomlarning yig‘indisidan iborat bo‘lsa ya’ni $\sum_{\alpha \epsilon A} \boldsymbol{h_\alpha} \boldsymbol{x^\alpha}$ ko‘rinishda ifodalansa, bunda $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{k}[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}]$. Monomial idealni $< \boldsymbol{x^\alpha}: \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A} >$ kabi belgilaymiz.

Ushbu ideal $I =< x^3y^5, x^4y^2, x^5y^4 > \subset k[x, y]$ monomial idaelga misol bo‘la oladi.Endi biz monomial idealga tegishli bo‘lgan barcha monomlarni xarakterlaymiz.

2.1-lemma. $I =< x^\alpha: \alpha \in A >$-monomial ideal bo‘lsin.U holda x^β monom x^α , $\alpha \in A$ ga bo‘linsagina, faqat va faqat shu holda $x^\beta \in I$ bo‘ladi.

Eslatib o‘tamiz agar x^β monom x^α ga bo‘linsa, qandaydir $\gamma \epsilon Z^n_{\geq 0}$ lar uchun $x^\beta = x^\alpha x^\gamma$ bo‘ladi.Bundan chiqadiki , $\beta = \alpha + \gamma$ va $\alpha + Z^n_{\geq 0} = \{\alpha + \gamma: \gamma \epsilon Z^n_{\geq 0}\}$ to‘plam x^α ga bo‘linadigan monomlarning darajalari to‘plamidir.

2.1-misol. Agar $I =< x^3y^5, x^4y^2, x^5y^4 >$ bo‘lsa , biz I idealga tegishli bo‘lgan monomlarning darajalari to‘plamini quyidagicha ko‘rinishda yoza olamiz ((3,5)+ $Z^n_{\geq 0}$)∪ ((4,2)+$Z^n_{\geq 0}$)∪ ((5,4)+$Z^n_{\geq 0}$) .

2.2-lemma. *I – qandaydir monomial ideal va $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bo‘lsin. Unda quyidagi shartlar teng kuchli:*

(i) $f \epsilon I$;

(ii) f ning har bir hadi I ga qarashli;

(iii) Qandaydir $a_p \in k$, $x^\alpha \in I$ va $0 \leq p \leq s$ lar uchun $f = \sum_0^s a_p\, x^\alpha$ bo‘ladi.

2.1-teorema. [11](*Dikson lemmasi*) $I =< x^{\alpha}: \alpha \in A >\subset k[x_1,x_2,\dots,x_n]$ *Ixtiyoriy monomial ideal bo'lsin, u holda shunday* $\alpha(1),\dots,\alpha(s) \in A$ *sonlar mavjudki* I=$\langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$, *bo'ladi.*

Isbot. Isbotni n ta sonli nomalumlar uchun induksiya metodi yodamida olib boramiz . Agar n=1, u holda $I =< x_1^{\alpha} >$, bunda $\alpha \in A \subset Z_{\geq 0}^{n}$. Endi $\beta - A$ ning eng kichik elementi bo'lsin.U holda ,$\alpha \in A$ lar uchun $\beta \leq \alpha$ bo'ladi. Unda barcha x_1^{α} barcha x_1^{β} larga bo'linadi , bundan $I =< x_1^{\beta} >$.

Endi n>1 bo'lib teoremaning tasdiqi $k[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$ halqaning monomial ideallari uchun o'rinli bo'lsin. $k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$ halqani qaraymiz, bu halqaning monomiallari $x^{\alpha}y^{m}$ shakldа yoziladi, bunda $\alpha\epsilon Z_{\geq 0}^{n-1}$, va $m\epsilon Z_{\geq 0}$.

$I \subset k[x_1,\dots,x_{n-1},y]$ –monomial ideal bo'lsin. $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ da qandaydir $m \geq 0$ lar uchun quyidagi idealni qaraymiz $J =< x^{\alpha}|x^{\alpha}y^{m} \in I >$. Induksiya faraziga asosan J monomial ideal $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$,da chekli yasalgan bo'ladi ya'ni $J = \langle x^{\alpha(1)},\dots,x^{\alpha(s)}\rangle$. J ning aniqlanishiga asosan har bir $i, 1 \leq i \leq s$ va qandaydir $m_i \geq 0$, dan $x^{\alpha(i)}y^{m_i} \in I$ ligi kelib chiqadi.Endi m- m_i larning eng kattasi bo'lsin . Har bir $l, 0 \leq l \leq m-1$, lar uchun $J_l \subset k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ x^{β}, $x^{\beta}y^{l} \in I$ bo'ladi. Induksiya faraziga asosan $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ halqada shunday $x^{\alpha_2(1)},\dots,x^{\alpha_l(s_l)}$ lar mavjudki $J_l = \langle x^{\alpha_2(1)},\dots,x^{\alpha_l(s_l)}\rangle$ lar bilan chekli yasalgan bo'ladi.Bu yerda $x^{\alpha_l(s_l)} \in < x^{\beta}|x^{\beta}y^{m} \in I$ bo'ladi.

Endi I idealni quyidagi,

$$
\begin{array}{ll}
J & idealdan \;\; x^{\alpha(1)}y^{m},\dots,x^{\alpha(s)}y^{m}, \\
J_0 & idealdan \;\; x^{\alpha_0(1)},\dots,x^{\alpha_0(s_0)}, \\
J_1 & idealdan \;\; x^{\alpha_1(1)}y,\dots,x^{\alpha_1(s_1)}y\,, \\
\vdots & \\
J_{m-1} & idealdan \;\; x^{\alpha_{m-1}(1)}y^{m-1},\dots,x^{\alpha_{m-1}(s_{m-1})}y^{m-1},
\end{array}
$$

monomlar ketma ketligiga tortilganligini ko'rsatamiz.

Buning uchun $x^{\alpha}y^{p} \in I$ bo‘lsin. Agar $p \geq m$ bo‘lsa, u holda 2.1-lemmaga va J idealning tuzilishiga asosan $x^{\alpha}y^{p}$ monom $x^{\alpha(i)}y^{m}$ ga bo‘linadi. Boshqa tomondan $p \leq m-1$, bo‘lsa yana 2.1-lemmaga asosan va J_p idealning tuzilishiga asosan $x^{\alpha}y^{p}$, monom $x^{\alpha_p(j)}y^{p}$, monomga bo‘linadi. 2.2- lemmaga asosan yuqoridagi monomiallar ketma ketligi xuddi I idealning monomial idealini tashkil qiladi. 2.1-natijaga ko‘ra bu ideallar bir xil bo‘ladi.

Teorema isbotini yakunlash uchun I idealning chekli yasovchilarga ega ekanligini ko‘rsatish yetarli bo‘ladi.O‘zgaruvchilar $x_1, x_2, \dots, x_n$tartibda joylashgan bo‘lsin.U holda $I =< x^{\alpha}: \alpha \in A >\subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$,bo‘lishi aniq.Biz I chekli sondagi $x^{\alpha}: \alpha \in A$ lardan tuzilganligini ko‘rsatishimiz kerak bo‘ladi.Yuqorida biz $I = \langle x^{\beta(1)}, \dots, x^{\beta(s)} \rangle$, ekanligini isbotladik, bunda $x^{\beta(i)} \epsilon I$.Shunday qilib $I =< x^{\alpha}: \alpha \in A >$, 2.4-lemmaga ko‘ra har bir $x^{\beta(i)}$, monom qandaydir $x^{\alpha(i)}$,monomga bo‘linadi, bunda$\alpha(i) \in A$.Bundan $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.1-teorema monomial ideal bo‘lgan holat uchun uni tavsiflash masalasini hal qiladi,va unda chekli bazisga ega bo‘lishini isbotlandi.Bu o‘z navbatida monomial idealga tegishlilik masalasini yechishga imkon beradi. $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$ monomial ideal bo‘lsin.U holda oson ko‘rsatish mumkinki f polinom I idealga ytegishli bo‘lishi uchun, f ni $x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)}$ monomlarga bo‘lgandagi qoladigan qoldiq nolga teng bo‘lishi kerak.

2.2-natija. $>$, $Z^n_{\geq 0}$ *dagi qandaydir munosabat bo‘lib ,u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin :*

(i) $>$, *munosabat* $Z^n_{\geq 0}$ *dagi chiziqli tartiblash;*

(ii) *agar* $\alpha > \beta$ *va* $\gamma \epsilon Z^n_{\geq 0}$, *dan* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ *kelib chiqsa;*

U holda $>$ *munosabat* $Z^n_{\geq 0}$ *da faqat va faqat barcha* $\alpha \in Z^n_{\geq 0}$ *lar uchun* $\alpha \geq 0$ *bo‘lganda yaxshi tartiblashdan iborat bo‘ladi.*

2-§. Gilbertning bazislar haqidagi teoremasi

Bu paragrafda biz idealni tavsiflash masalasini to‘liq yechimini beramiz.Buning uchun bizga “*yaxshi*”(bo‘linish algoritmiga nisbatan) xossalarga ega bo‘lgan bazislarni aniqlashimiz kerak bo‘ladi. Bunda bizning asosiy g’oya shundan iboratki bizga qandaydir monomial tartiblash berilgan bo‘lsin, u holda $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dagi har bir polinomning bosh hadi bir qiymatli aniqlanadi. U holda biz har bir I ideal uchun uning *bosh hadlaridan tuzilgan* idealni quyidagicha aniqlashimiz mumkin.

2.2- ta’rif. $I \subset k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-no‘lmas ideal berilgan bo‘lsin.

1) LT(I) orqali I dagi polinomlarning bosh hadlari to‘plamini belgilaymiz,ya’ni $LT(I) = \{cx^\alpha : f \in I \text{ va } LT(f) = cx^\alpha\}$.

2) $< LT(I) >$,orqali esa $LT(I)$ lardan hosil qilingan idealni belgilaymiz.

Biz avvalroq bo‘linish algaritimida bosh hadning ahamiyatini ko‘rib o‘tgan edik.

Endi $< LT(I) >$ va $<$LT(f_1), ..., LT(f_s) $>$ ideallarning o‘zaro munosabatini qarab chiqamiz.I ideal $I =< f_1, f_2, \ldots, f_s >$, chekli yasalgan bo‘lsin. U holda $< LT(f_1), \ldots, LT(f_s) >$ va <LT(I)> lar har xil ideallar bo‘lishi mumkin. Qisqacha qilib aytganda $LT(f_i) \in LT(I) \subset < LT(I) >$; bundan esa $< LT(f_1), \ldots, LT(f\_s) > \subset < LT(I) >$ ekanligi kelib chiqadi. <LT(I)> katta bo‘lishiga quyidagi misol yordamida ishonch hosil qilishimiz mumkin bo‘ladi.

2.2-misol. Bizga $I =< f_1, f_2 >$ ideal berilgan bo‘lsin , bunda $f_1 = x^2y - yz + yz^2 + z^2$, $f_2 = x^2 - x + z^2$, $k[x, y]$ halqadagi polinomlar va grlex-tartiblash bo‘lsin. U holda

$1(x^2y - yz + yz^2 + z^2) - y(x^2 - x + z^2) = z^2$, bo‘ladi va bundan esa $z^2 \in I, z^2 = LT(z^2) \in < LT(I) >$ ekanligi kelib chiqadi.Boshqa tomondan, z^2 $LT(f_1) = x^2y$ va $LT(f_2) = x^2$ ga bo‘linmaydi. Bundan 2.1-lemmaga ko‘ra $z^2 \notin < LT(f_1), \ LT(f_2) >$, bo‘ladi.

Biz endi <LT(I)> -ning monomial ideal ekanligini isbotlaymiz. Bu xossa bizga yangi natijani beradi.

2.1- tasdiq. $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$- *halqaning qandaydir ideali bo'lsin. U holda*

(a) <LT(I)> - *monomial ideal;*

(b) *shunday* $g_1, \dots, g_s \in I$, *polinomlar mavjudki* $< LT(I) >=< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot.(a)$g_s \in I\setminus\{0\}$ $bo'lib$, $LT(g_s) = x^m$ bunda $m = mulideg(g) = \max\{\alpha \in Z^n_{\geq 0} | \alpha_0 \neq 0\}$,$g = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$, ekanligini va $LT(g) = a_\alpha LM(g)$ ekanligini esalatamiz. Bunda $LT(g)$ va $LM(g)$ lar noldan farqli o'zgarmasgagina farq qiladi.Bundan $< LM\{(g)| g_s \in I\setminus\{0\}\} >=< LT(I) >$,ekanligi kelib chiqadi . Demak, <LT(I)> monomial ideal ekan.

(b). I ,ideal $g_s \in I\setminus\{0\}$ bo'lganda ,$LM(g)$ monomlarga tortilgan bo'ladi va shuning uchun Dikson lemmasiga ko'ra shunday $g_1, \dots, g_s \in I$,lar mavjudki ular uchun ushbu $< LT(I) >=< LM(g_1), \dots, LM(g_s) >$ tenglik o'rinli bo'ladi. $LT(g_i)$ lar $LM(g_i)$ dan nolda farqli o'zgarmaslarga farq qilgani uchun, $< LT(I) >=< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Endi biz 2.1-tasdiqdan va bo'linish algoritmidan foydalanib ixtiyoriy polynomial ideallarning chekli yasalgan bo'lishini isbotini beramiz.Bu bizga idealning berilish masalasini ijobiy yechimi bo'la oladi. $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$- qandaydir ideal va <LT(I)> -uning bosh hadlaridan tuzilgan ideal bo'lsin.

2.2-teorema.(*Gilbertning bazislar haqidagi teoremasi)*$I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halqaning ideali bo'lsin u holda shunday $g_1, \dots, g_s \in I$ polinomlar mavjudki $I =< g_1, \dots, g_s >$, ideal shu polinomlar bilan chekli yasalgan bo'ladi .

Isbot. Agar $I = \{0\}$, bo‘lsa u holda $I =< 0 >$ bo‘ladi.Faraz qilaylik I ideal $g_1, \dots, g_s$ lardan tuzilgan nolmas ideal bo‘lsin,u holda 2.1- tasdiqqa ko‘ra <LT(I)>=<LT(g_1), …,LT(g_s)> tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Ravshanki, $< g_1, \dots, g_s > \subset I$ bo‘ladi. $f \epsilon k[x_1, x_2, \dots, x_n]$-halqaning qandaydir element. Birinchi bobning 6-§ paragrafdagi bo‘linish algoritmidan foydalanib ,f ni $g_1, \dots, g_s$ larga bo‘lib chiqamiz. Natijada f ni quyidagicha tasvirlashimiz mumkin

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_s g_s + r,$$

bunda r qoldiqning hech bir hadi LT(g_1), …,LT(g_s) larga bo‘linmaydi.Bundan esa

$$r = f - a_1 f_1 - a_2 f_2 - \dots - a_s f_s \epsilon I.$$

Agar $r \neq 0$, bo‘lsa $LT(r) \in < LT(I) >=< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >$ bo‘ladi va 2.1-lemmaga ko‘ra , LT(r) monom LT(g_i)larning hech bo‘lmaganda bittasiga bo‘linadi.Bu qarama-qarshilik esa $r \neq 0$ ni noto‘g’riligini inkor qiladi

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_s g_s + 0 \epsilon < g_1, \dots, g_s >$$

shunday qilib, $I \subset < g_1, \dots, g_s >$.Teorema isbot bo‘ldi .

3-§. Gryobner bazislari

2.2-teorema $\{g_1, \dots, g_s\}$, bazis faqat idealning tavsiflabgina qolmasdan ,yana bir mahsus $< LT(I) >=< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >$ xossaga ega bo’ladi.2.2-misoldagi idealning bazislar bu xossaga ega emasligini ko’rib o’tgandik.Bunday xossaga ega bo’lgan bazislar maxsus nom bilan ataladi.

2.3-ta’rif. Monomial tartiblash berilgan bo‘lsin. I idealning $G = \{g_1, \dots, g_s\} -$ chekli qism to‘plami uning *Gryobner bazisi(standart bazisi)* deyiladi, agar

$< LT(g_1), \dots, LT(g_s) >=< LT(I) >$bo‘lsa.

Bu ta'rifni yana boshqacha ham berishimiz mumkin: $\{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ to'plam I idealning Gryobner bazisi deyiladi faqat va faqat shu holdaki I ning ixtiyoriy elementining bosh hadi, $LT(g_i)$ ning hech bo'lmaganda bitta bosh hadiga bo'linsa. 2.2-teorema isbotidan quyidagi natija kelib chiqadi.

2.3-natija.Biror monomial tartiblash berilgan bo'lsin.U holda ixtiyoriy nol bo'lmagan $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, ideal Gryobner bazisiga ega bo'ladi va I ning har qanday Gryobner bazisi uning odatdagi bazisi ham bo'ladi.

Isbot. I – nol bo'lmagan ideal bo'lib, $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ - 2.3-teoremaga ko'ra tuzilgan to'plam.Bu to'plam ta'rifiga ko'ra Gryobner bazisi ham bo'ladi.Ikkinchi tasdiqqa kelsak , 2.3-teoremada isbotlanganligidek,agarda

$< LT(I) > = < LT(g_1) \quad , \dots, LT(g_s) >$ bo'lsin, u holda $I = < g_1, \dots, g_s >$, bo'lib $G = \{g_1, \dots, g_s\}$, I idealning odatdagi bazisi ham bo'ladi.

Keyingi paragrafda biz Gryobner bazislari xossalarini batafsil qarab chiqamiz.Ular yordamida idealga tegishlilik masalasini yechish munkimligini ko'rsatamiz.

Polinomial halqalarda Gryobner bazislari tushunchasi 1965-yilda B.Buxberger tomonidan fanga kiritildi.Uning bunday nom tanlashiga sabab lmiy rahbari B.Gryobner(1899-1980)ning qilgan ishlari tasirida bu yangi natiyjalarning paydo bo'lganligi edi. Darajali qatorlar halqasida unga turdosh "standart bazis" tushunchasini unga bog'liqsiz ravishda 1967-yilda X.Xironaki fanga kiritdi.Buxberger Gryobner bazislari bilan ishlashning asosiy algoritmlarini ishlab chiqdi. "Gryobner bazisi" atamasi inglizcha «Groebner base» yozuvidan kompyuter algebrasining bazi sistemalarida buyrug' sifatida foydalaniladi.

Bu paragaraf oxirida bazis haqidagi Gilbert teoremasining ikkita tadbig'ini qaraymiz.Birinchisi bu $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dagi ideallar haqidagi sof algebraik xossalardir

2.3-ta'rif. $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – qandaydir ideal bo'lsin. $V(I)$ to'plamni quyidagicha

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \;\; barcha \;\; f \in I\}.$$

ko'pinishda aniqlaymiz.

Nol bo'lmagan ideal cheksiz ko'p turli polinomlarni o'z ichiga olsada V(I) to'plam chekli sondagi polinomial tenglamalar bilan aniqlanadi.

2.2-tasdiq. V(I) affin ko'pxillikdan iborat.Xususan, agar $I = < f_1, \dots, f_n >$ bo'lsa, unda $V(I) = V(f_1, \dots, f_n)$,tenglik o'rinli bo'ladi.

4-§.Gryobner bazisinig xossasi

2.3-tasdiq. $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ qandaydir ideal bo'lsin,$G = \{g_1, \dots, g_s\}$ –I idealning Gryobner bazisi va $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bo'lsin.U holda shunday yagona $r \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ mavjudki, u quyidagi ikki shartlarni qanoatlantiradi:

1) r polinom LT(g_1),…,LT(g_s) larning birortasiga ham bo'linadigan hadga ega emas;
2) shunday *yagona* $g \in I$, mavjudki $f = g + r$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Boshqacha qilib aytadigan bo'lsak , f ni G, ga bo'lgandagi qoldiq bo'lishni G dagi polinomlarning qaysi biridan boshlanishiga bog'liq emas.

Bunda r qoldiqga, f polinomning *normal formasi* deyiladi.

2.4-natija. $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ qandaydir ideal,$G = \{g_1, \dots, g_s\}$ –I idealning Gryobner bazisi va $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bo'lsin.U holda f ni G bo'lgandagi qoldiq no'l bo'lgandagina faqat shu holda $f \in I$ bo'ladi.

Isbot. Agar qoldiq nolga teng bo'lsin,u holda I idealning tarifidan $f \in I$ ekanligi kelib chiqadi.Boshqa tomondan $f \in I$ bo'lsa,unda $f = f + 0$ deb yozishimiz mumkin va bu tenglik

2.3-tasdiqning ikala shartini ham qanoatlantiradi.Shunday qilib qoldiqning yaganaligidan uning nolga tengligi kelib chiqadi.

2.5-ta'rif. $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$– nolmas polinomlar.

a) multideg(f)=α ,multideg(g)=β va $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) =$max($\alpha_i, \beta_i$) $1 \leq i \leq n$ bo‘lsin.

U holda x^γ ga LM(f) va LM(g) larning *eng kichik umumiy karralisi* deyiladi va $x^\gamma =$LCM(LM(f), LM(g)) kabi belgilanadi. b) f va g larning *S- polinomi* deb $S(f, g)=\frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$ ga aytiladi.

2.4-misol. $f = x^4y^2z - x^2y^3 + xz$, $g = x^3yz^2 + y^2z + 3$, $f, g \in R[x, y, z]$, va grlex–tartiblashdan foydalanamiz.U holda

$\alpha = (4,2,1), \beta = (3,1,2)$ va $\gamma = (4,2,2)$ ekanligini olamiz.

$$S(f, g) = \frac{x^4y^2z^2}{x^4y^2z} \cdot f - \frac{x^4y^2z^2}{x^3yz^2} \cdot g =$$

$$= z \cdot f - xy \cdot g = z(x^4y^2z - x^2y^3 + xz) - xy(x^3yz^2 + y^2z + 3) =$$

$$= -x^3y^2z - xy^3z - 3xy + xz^2.$$

S-polinom S(f,g)-bosh hadlarni qisqartirish uchun maxsus ishlab chiqilgan. Quyidagi lemma polinomlar kombinadsiyalarida bosh hadlarni ixtiyoriy qisqartirish bir xil multidarajalarda S–polinomlarning qisqartirish bilan bog'liqligini tavsiflaydi.

2.4-теорема. I –qandaydir polynomial ideal bo‘lsin. U holda I idealning biror $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ bazisi $S(g_i, g_j)$ ni G ga (qandaydir tartiblash bo‘yicha) bo‘lganda hosil bo‘lgan qoldiq $\overline{S(g_i, g_j)}^G$ barcha $i \neq j$ lar uchun nol bo‘lgan holdagina Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi.

5-§. $K[x_1,\cdots,x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo'llanilishi

Gryobner bazislari matematikaning muammolarini, kompyuterga oid tadqiqotlarni, injenerlik hisob-kitoblarda va tabiiy fanlarda yuzaga keladigan masalalarni hal qilishda hisoblash algoritmlari bilan ta'minlaydi. Gryobner bazislarining haqiqiy ahamiyati shundan iboratki, ularni kompyuterda hisoblash mumkin.

$K[x_1,\cdots,x_n]$halqaning nol bo'lmagan har qanday ideali Gryobner bazisiga ega. Bu tasdiqning isboti faqat bazisning mavjudligini ko'rsatadi, ammo bazisni qurish algoritmini bermaydi [2].

I dealning Gryobner bazisini qurish algoritmini quyidagi misolda ko'rsatib beramiz.

Yuqori darajali quyidagi tenglamalar sistemasini echish uchun uning idealining Gryobner bazisini topamiz.

$$\begin{cases} yz^2+x^2+yz=0\,, f_1 \\ y^2+x-xz=0,\ \ f_2 \\ xy+z^2-1=0, f_3 \end{cases}$$

Bu sistemaning ideali quyidagidan iborat:

$$I=<yz^2+x^2+yz, y^2+x-xz, xy+z^2-1>.$$

Buf_1 ,f_2, f_3lar Gryobner bazisidan iborat. Lekin, bu bazis berilgan tenglamalar sistemasini echish imkoniyatini bermaydi.

Gryobner bazislarini qurish jarayonida$S$-polinomlar ixchamlashtirishlarni amalga oshirishda yordam beradi. Bu quyidagi teorema yordamida amalga oshiriladi.

Teorema[1,635bet].*I $K[x_1,\cdots,x_n]$halqaning nol bo'lmagan ideali bo'lsin .Uholda I idealning biror$G=\{g_1,\ldots,g_t\}$bazis i$S(g_i,g_j)G$ ga (biror tartiblash bo'yicha) bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq$S(g_i,g_j)^G$barchai,j $(i\neq j)$lar uchun nol bo'lganda va faqat shu holdagina I idealning Gryobner bazisidan iborat bo'ladi.*

Biz teorema yordamida $G = \{yz^2 + x^2 + yz, y^2 + x - xz, xy + z^2 - 1\}$ sistemaning $x > y > z$ lex-tartiblash bilan Gryobner bazisidan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $S(f_1, f_2)$ ko‘phadni hisoblaymiz.

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2z}{x^2}(yz^2 + x^2 + yz) + \frac{x^2z}{xz}(y^2 + x - xz) = yz^3 + yz^2 + xy^2 + x^2.$$

Shunday qilib, $S(f_1, f_2)$polinomni f_1, f_3yordami bilan ixchamlaymiz

Buerdan $S(f_1, f_2) = yz^3 + yz^2 + (1 - z)y - yz^2 - yz$

$S(f_1, f_2) = yz^3 + y - yz^2 - yz$

Kelib chiqadi. Endi $S(f_2, f_3)$ ni qaraymiz.

$$S(f_2, f_3) = -\frac{xyz}{xz}(y^2 + x - xz) - \frac{xyz}{xy}(xy + z^2 - 1) = -y^3 - xy - z^3 + z$$

$S(f_2, f_3) = -y^3 - xy - z^3 + z$, polinomni f_3 yordamida ixchamlaymiz

$S(f_2, f_3) = y^3 + z^3 - z^2 - z + 1.$

Endi $S(f_1, f_3)$ niqaraymiz.

$$S(f_1, f_3) = \frac{x^2y}{x^2}(y^2 + x - xz) - \frac{x^2y}{xy}(xy + z^2 - 1) = y^2z^2 + y^2z - xz^2 + x$$

$S(f_1, f_3) = y^2z^2 + y^2z - xz^2 + x$ polinomni $f_2$yordamida ixchamlaymiz

$S(f_1, f_3) = y^2z^2 + y^2z - (y^2 + x)z + x = y^2z^2 - xz + x,$
yana$f_2$yordamida ixchamlaymiz $S(f_1, f_3) = y^2z^2 - y^2.$

endi $S(f_1, f_3)$*ni* $S(f_2, f_3)$ *yordamida ixchamlaymiz* $y^2z^2 - y^2$=0, tenglikni ikkala qismini y ga ko‘paytirib, $y^3z^2 - y^3$=0 tenglikga egabo‘lamiz va uni$S(f_2, f_3)$ polinom yordamida ixchamlaymiz.

$(-z^3 + z^2 + z - 1)(z^2 - 1) = -z^5 + z^4 + 2z^3 - 2z^2 - z + 1$

$S(f_1, f_3) = z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1$

[
$z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1, yz^3 - yz^2 - yz + y, y^2z^2 - y^2, y^3 + z^3 - z^2 - z + 1, xz - y^2 - x, xy + z^2 - 1, yz^2 + x^2 + yz$
]

Bu bazis gradiurlangan leksikografik tartiblash yordamida hosil qilingan

[
$-xz + y^2 + x, xy + z^2 - 1, yz^2 + x^2 + yz, x^2z - 2x^2 - yz - y, z^4 - x^3 + z^3 - z^2 - z, xz^3 - xz^2 - xz + x, x^4 - 2xz^2 + 2x$
]

Shunda yqilib,berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi sistemaga keltiriladi

$$\begin{cases} z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0 \\ yz^3 - yz^2 - yz + y = 0 \\ y^2z^2 - y^2 = 0 \\ xz - y^2 - x = 0 \\ y^3 + z^3 - z^2 - z + 1 = 0 \\ xy + z^2 - 1 = 0 \\ yz^2 + x^2 + yz = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasi faqat bir o‘zgaruvchidan bog‘liq bo‘lganligi uchun uni echish mumkin va boshqa tenglamalardan barcha noma’lumlarning qiymatlarini topamiz

$z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0$

Tenglamani echish uchun ko‘phadni guruhlarga ajratamiz.

$z^4(z-1) - 2z^2(z-1) + (z-1) = 0$ va umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib,$(z-1)(z^4 - 2z^2 + 1) = 0$ tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamadan z ning qiymatlarini topamiz $z = 1, z = -1$. z ning qiymatlarini 5- tenglamaga qo‘yib,$y$ning qiymatlarini topamiz, y=0, z, y ning qiymatlari yordamida$x$ ning qiymatlarini topamiz,buerdan$x = 0$ va sistemaning echimlari to‘plami quyidagiga teng bo‘ladi.

$\{x = 0, y = 0, z = -1\}, \{x = 0, y = 0, z = 1\}$

Endi bu masalani Maple kompyuter algebrasi tizimida echish algoritmini keltiramiz.

```
>with(Groebner):
>F := [y*z^2+x^2+y*z, y^2+x-x*z, x*y+z^2-1];
```

$$F := [yz^2+x^2+yz, -xz+y^2+x, xy+z^2-1]$$

```
>Basis(F, plex(x,y,z));  # lexicographic order with x > y > z
```

$$[z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1, yz^3-yz^2-yz+y, y^2z^2-y^2, y^3+z^3-z^2-z+1, xz-y^2-x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz]$$

```
>Basis(F, tdeg(x,y,z));  # graded reverse lexicographic order
```

$$[-xz+y^2+x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz, x^2z-2x^2-yz-y, z^4-x^3+z^3-z^2-z, xz^3-xz^2-xz+x, x^4-2xz^2+2x]$$

```
>Basis(F, 'tord');     # choose a term order and assign it to tord
```

$$[z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1, yz^3-yz^2-yz+y, y^2z^2-y^2, y^3+z^3-z^2-z+1, xz-y^2-x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz]$$

$$plex(x, y, z)$$

```
>Basis(F, 'tord', order='grlex');  # choose a graded lex order
```

$$[xz-y^2-x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz, y^3+z^3-z^2-z+1, z^4-x^3+z^3-z^2-z, x^4-2y^2z-2y^2]$$

$$grlex(x, y, z)$$

```
>Basis(F, plex(x,y,z), characteristic=3);  # computation over Z[3]
```

$$[z^5+2z^4+z^3+2z^2+z+2, yz^3+2yz^2+2yz+y, y^2z^2+2y^2, y^3+z^3+2z^2+2z+1, xz+2y^2+2x, xy+z^2+2, yz^2+x^2+yz]$$

```
> G, C := Basis(F, plex(x,y,z), output=extended);  # compute a transformation matrix
```

$$G, C := [z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1, yz^3-yz^2-yz+y, y^2z^2-y^2, y^3+z^3-z^2-z+1, x\!:\, -y^2-x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz], [[-xz+x, -x^2, z^3+xy-z^2-z+1], [z-1, x, -y], [y, -z-1, -x], [0, y, z-1], [0, -1, 0], [0, 0, 1], [1, 0, 0]]$$

```
> [seq(expand(add(C[i][j]*F[j], j=1...nops(F))), i=1..nops(C))];
```

$$[z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1, yz^3-yz^2-yz+y, y^2z^2-y^2, y^3+z^3-z^2-z+1, xz-y^2-x, xy+z^2-1, yz^2+x^2+yz]$$

$$> solve(\{z^5-z^4-2z^3+2z^2+z-1=0, yz^3-yz^2-yz+y=0, y^2z^2-y^2=0, y^3+z^3-z^2-z+1=0, xz-y^2-x=0, xy+z^2-1=0, yz^2+x^2+yz=0\}, \{x, y, z\});$$

$$\{x=0, y=0, z=-1\}, \{x=0, y=0, z=1\}$$

I dealning Gryobner bazisini qurish algoritmini quyidagi misolda ko‘rsatib beramiz.

Yuqori darajali quyidagi tenglamalar sistemasini echish uchun uning idealining Gryobner bazisini topamiz.

$$\begin{cases} xy - xz + y^2 = 0 \\ x^2y - x^2 + yz = 0 \\ -xy + x + y = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning ideali quyidagidan iborat:

$$I =< xy - xz + y^2, x^2y - x^2 + yz, -xy + x + y >.$$

Bu f_1 , f_2, f_3 lar Gryobner bazisidan iborat. Lekin, bu bazis berilgan tenglamalar sistemasini echish imkoniyatini bermaydi.

Gryobner bazislarini qurish jarayonida S-polinomlar ixchamlashtirishlarni amalga oshirishda yordam beradi. Bu quyidagi teorema yordamida amalga oshiriladi.

Teorema[1,635bet].*I $K[x_1, \cdots, x_n]$ halqaning nol bo‘lmagan ideali bo‘lsin .Uholda I idealning biror $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ bazis i $S(g_i, g_j)G$ ga (biror tartiblash bo‘yicha) bo‘linganda hosil bo‘lgan qoldiq $S(g_i, g_j)^G$ barcha i, j $(i \neq j)$ lar uchun nol bo‘lganda va faqat shu holdagina I idealning Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi.*

Biz teorema yordamida $G = \{xy - xz + y^2, x^2y - x^2 + yz, -xy + x + y\}$ sistemaning $x > y > z$ lex-tartiblash bilan Gryobner bazisidan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $S(f_1, f_2)$ ko‘phadni hisoblaymiz.

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{xy}(xy - xz + y^2) - \frac{x^2y}{x^2y}(x^2y - x^2 + yz) = -x^2z + xy^2 + x^2 - yz.$$

Shunday qilib, $S(f_1, f_2)$ polinomni f_1, f_3 yordami bilan ixchamlaymiz

Bu yerdan $S(f_1, f_2) = -(xy + y^2)x + xy^2 + x^2 - yz$

$S(f_1, f_2) = -(x + y)x + x^2 - yz = -xy - yz = -(x + y) - yz$

$S(f_1, f_2) = x + y + yz$ Kelib chiqadi. Endi $S(f_2, f_3)$ ni qaraymiz.

$$S(f_2,f_3)=\frac{x^2y}{x^2y}(x^2y-x^2+yz)+\frac{x^2y}{xy}(-xy+x+y)=yz+xy$$

$S(f_2,f_3)$=$yz+xy$, polinomni f_1 yordamida ixchamlaymiz

$S(f_2,f_3)$=$yz+xz-y^2$ Endi $S(f_1,f_2)$ yordamida ixchamlaymiz

$$S(f_2,f_3)=z(x+y)-y^2=z(-yz)-y^2=0 \quad S(f_2,f_3)= \ yz^2+y^2$$

Endi $S(f_1,f_3)$ ni qaraymiz.

$$S(f_1,f_3)=\frac{xy}{xy}(xy-xz+y^2)-\frac{xy}{-xy}(-xy+x+y)=-xz+y^2+x+y$$

$S(f_1,f_3)=-xz+y^2+x+y$ polinomni $f_1 va f_3$ yordamida ixchamlaymiz

$S(f_1,f_3)=yz^2+yz^3+yz$ bo'ladi shunday qilib quydagi gryobher bazisiga ega bo'ladi $[yz^3+yz^2+yz, yz^2+y^2, yz+x+y]$

Bu bazis gradiurlangan leksikografik tartiblash yordamida hosil qilingan

$$[yz+x+y,-xz+y^2+x+y,xy-x-y,x^2+xz,xz^2+x+y]$$

Shunda yqilib,berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi sistemaga keltiriladi

$$\begin{cases} yz^3+yz^2+yz=0 \\ yz^2+y^2=0 \\ yz+x+y=0 \end{cases}$$

Bu sistemani echish mumkin va boshqa tenglamalardan barcha noma'lumlarning qiymatlarini topamiz

$\{x=0,y=0,z=z\}$,

$\{x=(z^2-z+1),y=-(z^2-z+1)+1,z=-(z^2-z+1)\}$,

(z^2-z+1=0, $z=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$).

Endi bu masalani Maple kompyuter algebrasi tizimida echish algoritmini keltiramiz.

```
> F := [x*y-x*z+y^2, x^2*y-x^2+y*z, -x*y+x+y];
```

$$F:=[xy-xz+y^2, x^2y-x^2+yz, -xy+x+y]$$

```
> Basis(F, plex(x,y,z));  # lexicographic order with x > y > z
```

$$[yz^3+yz^2+yz, yz^2+y^2, yz+x+y]$$

```
> Basis(F, tdeg(x,y,z));  # graded reverse lexicographic order
```

$$[yz+x+y, -xz+y^2+x+y, xy-x-y, x^2+xz, xz^2+x+y]$$

```
> Basis(F, 'tord');      # choose a term order and assign it to tord
```

$$[yz^3+yz^2+yz, yz^2+y^2, yz+x+y]$$

```
> tord;
```

$$plex(x, y, z)$$

```
> Basis(F, 'tord', order='grlex');  # choose a graded lex order
```

$$[xy-x-y, x^2+y^2+x+y, x^2+xz, yz+x+y, x^3+x+y]$$

```
> tord;
```

$$grlex(z, y, x)$$

```
> Basis(F, plex(x,y,z), characteristic=3);  # computation over Z[3]
```

$$[yz^3+yz^2+yz, yz^2+y^2, yz+x+y]$$

```
> G, C := Basis(F, plex(x,y,z), output=extended);  # compute a transformation matrix
```

$$G, C := [yz^3+yz^2+yz, yz^2+y^2, yz+x+y], [[z+1, z^2-y, xz^2-xy+z^2-y+z], [1, z-1, xz-x+z], [0, 1, x+1]]$$

Idealning Gryobner bazisini topishga doir misollar.

1-misol. Quyidagi idealning minimal Gryobner bazisini tuzing. Bunda $x > y > z$ leksik tartiblash o'rnatilgan.

$J = (x^2 - 1, (x-1)y, (x+1)z)$

Yechimi.

1) $f_1 = x^2 - 1,\ f_2 = xy - y,\ f_3 = xz + z$ belgilab olamiz. Bundan $f_{1_B} = x^2,\ f_{2_B} = xy, f_{3_B} = xz$ ekanligini topish mumkin.

Mumkin bo'lgan barcha ko'pxadlarni tuzamiz, ya'ni ikkita ko'phadning S ko'phadini topamiz:

$S(f_1, f_2) = (x^2-1)y - (xy-y)x = xy - y.$ Ushbu baziz berilgan bazizlar ichida bo'lgani sababli, uni tashlab yuboramiz;

$S(f_1, f_3) = (x^2-1)z - (xz+z)x = -z - xz.$Ushbu baziz ham berilgan bazislar ichida mavjud.$S(f_2, f_3) = (xy-y)z - (xz+z)y = 2yz.$ Ushbu topilgan baziz esa f_1, f_2, f_3 bazislar bilan boshqa ko'pxad tashkil qilmaydi. Uni yangi bazis sifatida kiritamiz: $f_4 = yz.$ Hosil bo'lgan (f_1, f_2, f_3, f_4) bazisda barcha ko'pxadlar yechiluvchi. Brilliant lemmaga asosan, ushbu basis Gryobner bazisini tashkil qiladi. Shuningdek, ushbu bazislarning birortasining bosh hadi boshqa birining bosh hadiga bo'linmaydi va ulardagi birhadlarning birortasi ham ushbu bazislar bosh hadlariga bo'linmaydi. Demak,

$(x^2-1, (x-1)y, (x+1)z, yz)$ basis berilgan J idealning minimal Gryobner bazisi.

2-misol. Quyidagi idealning minimal Gryobner bazisini tuzing. Bunda $x > y > z$ leksik tartiblash o'rnatilgan.

$J = (x^2-1, (x-1)y, (x-1)z)$

Yechimi. $f_1 = x^2-1, f_2 = xy-y, f_3 = xz-z.$ Mumkin bo'lgan barcha ko'pxadlarni yechamiz:

$S(f_1, f_2) = (x^2-1)y - (xy-y)x = -y + xy = f_2.$

$S(f_1, f_3) = (x^2-1)z - (xz-z)x = -z + xz = f_3.$

$S(f_2, f_3) = (xy-y)z - (xz-z)y = 0.$

Demak, ushbu (f_1, f_2, f_3) bazislar uchun barcha ko'xadlar yechiluvchi. Ya'ni ushbu basis Gryobner bazisi bo'ladi. Shuningdek, $(x^2-1, (x-1)y, (x-1)z)$ bazis J idealning minimal Gryobner bazisi ham bo'ladi.

3-misol. Quyidagi idealning minimal Gryobner bazisini tuzing. Bunda $x > y > z$ leksik tartiblash o'rnatilgan.

$J = (x^3yz - xz^2,\ xy^2z - xyz,\ x^2y^2 - z)$

Yechimi. $f_1 = x^3yz - xz^2,\ f_2 = xy^2z - xyz,\ f_3 = x^2y^2 - z.$

1) $f_1\ \ va\ \ f_2$ ko'phadlarning $S(f_1, f_2)$ ko'phadini topamiz:

$S(f_1, f_2) = (x^3yz - xz^2)y - (xy^2z - xyz)x^2 = x^3yz - xyz^2$

$S(f_1, f_2)$ ko'phadni f_1 ko'phad yordamida reduksiyalaymiz:

$S(f_1, f_2) \sim (x^3yz - xyz^2) - (x^3yz - xz^2) = -xyz^2 + xz^2 = f_4$

Boshqa reduksiya yo'q. Demak, f_4 ni bazislar qatoriga qo'shamiz. Ya'ni (f_1, f_2, f_3, f_4) bazislar sistemasi paydo bo'ladi. Ushbu sistemada oldin qaralmagan mumkin bo'lgan barcha ko'pxadlarni topamiz.

2) f_1 va f_3 ko'phadning S ko'phadini tuzamiz:

$S(f_1, f_3) = (x^3yz - xz^2)y - (x^2y^2 - z)xz = -xyz^2 + xz^2$

Bu ko'phad yuqoridagi f_4 ko'phad bilan bir xil.

3) f_1 va f_4 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$S(f_1, f_4) = (x^3yz - xz^2)(-z) - (-xyz^2 + xz^2)x^2 = -x^3z^2 + xz^3$

Ushbu ko'phad uchun soddalashganlar yo'q. Demak, $f_5 = -x^3z^2 + xz^3$ bazis sifatida olamiz.

Endi $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ sistemadagi oldin qaralmagan barcha ko'pxadlarni topamiz.

4) f_1 va f_5 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$S(f_1, f_5) = (x^3yz - xz^2)(-z) - (-x^3z^2 + xz^3)y = -xyz^3 + xz^3$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$S(f_1, f_5) \sim -xyz^3 + xz^3 - (-xyz^2 + xz^2)z = 0$

5) f_2 va f_3 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$S(f_2, f_3) = (xy^2z - xyz)x - (x^2y^2 - z)z = -x^2yz + z^2$

Ushbu ko'phad uchun soddalashgani mavjud emas. Demak, $f_6 = -x^2yz + z^2$ deb olamiz.

Natijada $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ bazislarni hosil qilamiz. Ushbu bazislarda oldin qaralmagan barcha zatsepeliniyalarni qaraymiz:

6) f_1 va f_6 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$S(f_1, f_6) = (x^3yz - xz^2) - (-x^2yz + z^2)(-x) = 0$

7) f_2 va f_4 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$S(f_2, f_4) = (xy^2z - xyz)z - (-xyz^2 + xz^2)(-y) = 0$

8) f_2 va f_5 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$S(f_2, f_5) = (xy^2z - xyz)x^2z - (-x^3z^2 + xz^3)(-y^2) = -x^3yz^2 + xy^2z^3$

f_1 yordamida reduksiyalaymiz:

$S(f_2, f_5) \sim -x^3yz^2 + xy^2z^3 - (x^3yz - xz^2)(-z) = xy^2z^3 - xz^3$

f_2 yordamida soddalashtiramiz:

$xy^2z^3 - xz^3 \sim (xy^2z^3 - xz^3) - (xy^2z - xyz)z^2 = xyz^3 - xz^3$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$xyz^3 - xz^3 \sim (xyz^3 - xz^3) - (-xyz^2 + xz^2)(-z) = 0$

9) f_2 va f_6 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$S(f_2, f_6) = (xy^2z - xyz)x - (-x^2yz + z^2)(-y) = -x^2yz + yz^2$

f_6 yordamida soddalashtiramiz:

$S(f_2, f_6) \sim -x^2yz + yz^2 - (-x^2yz + z^2) = yz^2 - z^2$

Boshqa ixchamlashtirishlar mavjud emas, demak, $f_7 = yz^2 - z^2$ ko'phadni bazislar qatoriga qo'shamiz.

10) f_1 va f_7 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$S(f_1, f_7) = (x^3yz - xz^2)z - (yz^2 - z^2)x^3 = x^3z^2 - xz^3$

Ushbu ko'phad f_5 bazisni ifodalaydi.

11) f_2 va f_7 ko'phadlar S ko'phadini topamiz:

$S(f_2, f_7) = (xy^2z - xyz)z - (yz^2 - z^2)xy = 0$

12) f_3 va f_4 ko'phadlar S ko'phadini topamiz:

$S(f_3, f_4) = (x^2y^2 - z)z^2 - (-xyz^2 + xz^2)(-xy) = x^2yz^2 - z^3$

f_4 yordamida ixchamlaymiz:

$S(f_3, f_4) = x^2yz^2 - z^3 - (-xyz^2 + xz^2)(-x) = x^2z^2 - z^3$

Boshqa soddalashganlari yo'q, $f_8 = x^2z^2 - z^3$ deb olamiz.

Hosil bo'lgan $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)$ bazislarda oldin qaralmagan barcha hollarni qaraymiz.

13) f_1 va f_8 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_1, f_8) = (x^3yz - xz^2)z - (x^2z^2 - z^3)xy = xyz^3 - xz^3$$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_1, f_8) \sim xyz^3 - xz^3 - (-xyz^2 + xz^2)(-z) = 0$$

14) f_2 va f_8 ko'phadlar S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_2, f_8) = (xy^2z - xyz)xz - (x^2z^2 - z^3)y^2 = -x^2yz^2 + y^2z^3$$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_2, f_8) \sim -x^2yz^2 + y^2z^3 - (-xyz^2 + xz^2)x = -x^2z^2 + y^2z^3$$

f_8 yordamida soddalashtiramiz:

$$-x^2z^2 + y^2z^3 \sim -x^2z^2 + y^2z^3 - (x^2z^2 - z^3)(-1) = y^2z^3 - z^3$$

f_7 yordamida soddalashtiramiz:

$$y^2z^3 - z^3 \sim y^2z^3 - z^3 - (yz^2 - z^2)yz = yz^3 - z^3$$

Yana f_7 yordamida soddalashtiramiz:

$$yz^3 - z^3 \sim yz^3 - z^3 - (yz^2 - z^2)z = 0$$

15) f_3 va f_5 ko'phadlar S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_3, f_5) = (x^2y^2 - z)xz^2 - (-x^3z^2 + xz^3)(-y^2) = xy^2z^3 - xz^3$$

f_2 yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_3, f_5) \sim xy^2z^3 - xz^3 - (xy^2z - xyz)z^2 = xyz^3 - xz^3$$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$$xyz^3 - xz^3 \sim xyz^3 - xz^3 - (-xyz^2 + xz^2)(-z) = 0$$

16) f_3 va f_6 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_3, f_6) = (x^2y^2 - z)z - (-x^2yz + z^2)(-y) = yz^2 - z^2$$

Bu ko'phad f_7 bazisni ifodalaydi.

17) f_3 va f_7 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_3, f_7) = (x^2y^2 - z)z^2 - (yz^2 - z^2)x^2y = x^2yz^2 - z^3$$

Bu ko'phad $S(f_3, f_4)$ ko'phad bilan aynan bir xil va bu ko'phadni soddalashtirish orqali 12) – bosqichda f_8 ko'phadga kelingan.

18) f_3 va f_8 ko'phadlar S ko'phadini topamiz:

$$S(f_3, f_8) = (x^2y^2 - z)z^2 - (x^2z^2 - z^3)y^2 = y^2z^3 - z^3$$

Ushbu ko'phad 14) – bosqichda soddalashtirish natijasida 0 ga olib kelingan.

19) f_4 va f_5 ko'phadlar S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_4, f_5) = (-xyz^2 + xz^2)x^2 - (-x^3z^2 + xz^3)(-y) = x^3z^2 + xyz^3$$

f_5 ko'phad yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_4, f_5) \sim x^3z^2 + xyz^3 - (-x^3z^2 + xz^3)(-1) = xyz^3 - xz^3$$

f_4 yordamida soddalashtiramiz:

$$xyz^3 - xz^3 \sim xyz^3 - xz^3 - (-xyz^2 + xz^2)(-z) = 0$$

20) f_4 va f_6 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_4, f_6) = (-xyz^2 + xz^2)x - (-x^2yz + z^2)z = x^2z^2 - z^3$$

Bu ko'phad f_8 ko'phadni ifodalaydi.

21) f_4 va f_7 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_4, f_7) = (-xyz^2 + xz^2) - (yz^2 - z^2)(-x) = 0$$

22) f_4 va f_8 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_4, f_8) = (-xyz^2 + xz^2)x - (x^2z^2 - z^3)(-y) = x^2z^2 - yz^3$$

f_8 yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_4, f_8) \sim x^2z^2 - yz^3 - (x^2z^2 - z^3) = -yz^3 + z^3$$

f_7 yordamida soddalashtiramiz:

$$S(f_4, f_8) \sim -yz^3 + z^3 - (yz^2 - z^2)(-z) = 0$$

23) f_5 va f_6 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_5, f_6) = (-x^3z^2 + xz^3)y - (-x^2yz + z^2)xz = xyz^3 - xz^3$$

Ushbu ko'phad $19)$ – bosqichda soddalashtirib 0 ko'phadga olib kelingan.

24) f_5 va f_7 ko'phadlarning S ko'phadini tuzamiz:

$$S(f_5, f_7) = (-x^3z^2 + xz^3)y - (yz^2 - z^2)(-x^3) = x^3z^2 + xyz^3$$

Ushbu ko'phad 19) – bosqichda soddalashtirib, 0 ko'phadga olib kelingan.

25) f_5 va f_8 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_5, f_8) = (-x^3z^2 + xz^3) - (x^2z^2 - z^3)(-x) = 0$$

26) f_6 va f_7 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_6, f_7) = (-x^2yz + z^2)z - (yz^2 - z^2)(-x^2) = -x^2z^2 + z^3$$

Bu ko'phad f_8 bazisni ifodalaydi.

27) f_6 va f_8 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_6, f_8) = (-x^2yz + z^2)z - (x^2z^2 - z^3)(-y) = -yz^3 + z^3$$

Ushbu ko'phad 22) – bosqichda soddalashtirib 0 ko'phadga olib kelingan.

28) f_7 va f_8 ko'phadlarning S ko'phadini topamiz:

$$S(f_7, f_8) = (yz^2 - z^2)x^2 - (x^2z^2 - z^3)y = -x^2z^2 + yz^3$$

Ushbu ko'phad 22) – bosqichda soddalashtirib 0 ko'phadga olib kelingan.

Barcha ko'pxadlarni ko'rib chiqildi. Demak, quyidagi bazisga keldik:

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) = (x^3yz - xz^2, xy^2z - xyz,$$

$$x^2y^2 - z, -xyz^2 + xz^2, -x^3z^2 + xz^3, -x^2yz + z^2, yz^2 - z^2, x^2z^2 - z^3)$$

Ushbu hosil qilingan bazislar sistemasidagi barcha ko'pxadlar yechiluvchi. Brilliant lemmaga asosan, ushbu bazis Gryobner bazisini tashkil qiladi.

II Bobning xulosasi

Ikkinchi bobda monomial ideallar tushinchasi,monomial ideallar haqida Dikson lemmasi,Gilbertning bazislar haqidagi teoremasi,Gryobner bazislari, Gryobner bazislarining xossalari va $K[x_1,\cdots,x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo'llanilishi va ulardan kelib chiquvchi natijalar ko'rsatildi.

II bobdan olingan asosiy natijalar:

- Monomial ideal tushunchasi berildi va monomial ideallar haqidagi Dikson lemmasi isbotlandi. Monomial ideal bo'lgan holat uchun idealning tafsiflanish va idealga tegishlilik masalalari o'z yechimini topdi.
- Gryobner bazislari, Gilbertning Gryobner bazislari haqidagi teoremasi, Gryobner bazisining xossalari berildi.
- $K[x_1,\cdots,x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishga qo'llanilishi ko'rsatildi.

III-BOB

NOL O‘LCHAMLI IDEALGA MOS KELUVCHI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISH ALGORITMI

1-§.Buxberger algoritmi

2.3-natijada $k[x_1, x_2, ..., x_n]$ dagi nol bo‘lmagan har qanday ideal Gryobner bazisiga ega ekanligi isbotlandi.Afsuski isbot Gryobner bazisini qurish mumkinligini ko‘rsatadi, ammo uni qurish algaritimini bermaydi.Bu paragrafda ushbu masala ochiladi:ya’ni $I \subset k[x_1, x_2, ..., x_n]$ idealning Gryobner bazisi qanday qilib quriladi degan savolga javob izlaymiz.

2.5-теорема. Bizga qandaydir no‘lmas polynomial $I =< f_1, ..., f_s >$ ideal berilgan bo‘lsin.U holda I ning Gryobner bazisini quyidagi algoritm yordamida chekli sondagi qadamlardan keyin qurish mumkin:

Quyidagi beriladigan algoritm Gryobner bazisini qurish algoritmidir.

Kiritish: $F = (f_1, ..., f_s)$

Chiqarish: $G = \{g_1, ..., g_s\}$ I idealning Gryobner bazisi $G = \{g_1, ..., g_s\}$ bo‘lsin, unda $f \subset G$ $G := F$

$REPEAT \quad G' = G \qquad FOR$ har bir $\{p, q\}$ juftlik , $G' \; DO \; S := \overline{S(p,q)}^{G'}$

$IF \; S \neq 0 \; THEN \; G := G \cup \{S\} \; UNTILG = G'$

2.5-teoremada berilgan algoritm yordamida qurilgan Gryobner bazisi juda ko‘p sondagi polinomlardan iborat bo‘lishi mumkin. Biz quyidagi mulohazalarni hisobga olib ,bazi bir bazislardan xalos bo‘lishimiz imkoniyati paydo bo‘ladi.

2.4-lemma. G $-I$ polinomial idealning Gryobner bazisi ,va $p \epsilon G,\; LT(p) \epsilon < LT(G - \{p\}) >$ bo‘lsin. U holda $G - \{p\}$ ham I idealning Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi.

Isbot. Malumki,$< LT(G) >= LT(I) >$ bo‘ladi.Faraz qilaylik $LT(G) \in < LT(G-\{p\}) >$ bo‘lsin.U holda $< LT(G-\{p\}) >$ $=< LT(G) >$ bo‘ladi. Bundan esa $(G) \in < LT(G-\{p\}) >$, I idealning Gryobner bazisi ekanligi kelib chiqadi.Lemma isbotlandi.

2.6-ta’rif. I polinomial idealning Gryobner bazisi G, uning *minimal Gryobner bazisi* deyiladi agar u quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa,

(i) LC(p)=1 barcha $p \epsilon G$;

(ii) $LT(p) \notin < LT(G-\{p\}) >$ barcha $p \epsilon G$.

Nol bo‘lmagan ideal uchun minimal Gryobner bazisini qurish 2.5-teoremadagi berilgan algoritm yordamida, hamda ortiqcha tashkil etuvchilarni yo‘qotish uchun 2.4-lemmani ishlatish yordamida qurish mumkin.

2.7-ta’rif. I polinomial idealning Gryobner bazisi G uning *keltirilgan Gryobner bazisi* deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

(a) barcha $p \epsilon G$ lar uchun LC(p)= 1 ;

(b) barcha $p \epsilon G$ lar uchun p ning bironta monomi $< LT(G-\{p\}) >$ ga tegishli bo‘lmasa.

2.4-tasdiq. Bizga qandaydir no‘lmas $I =< f_1, \dots, f_s > \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ideal berilgan bo‘lsin. U holda I berilgan tartiblash bo‘yicha yagaona *keltirilgan Gryobner bazisiga* ega .

Kompyuter algebrasining ko‘plab sistemalarida Gryobner bazislarini hisoblash uchun Buxberger algoritimidan foydalanilgan. Bu sistemalar odatda elementlari keltirilgan bazisdan faqat o‘zgarmas ko‘paytuvchilarbilan farq qiluvchi bazislarni hisoblab beradi.Turli sistemalar bilan hisoblanuvchi bu bazislar odatda usma ust tushadi.Shunday qilib ,olingan natijalarni bir sistemadan ikkinchisiga o‘tib oson tekshirishimiz mumkin.

2.4- tasdiqda isbotlangan yagonalikning boshqa natijasi bu *ideallar tengligini tekshirish* algoritmining borligidir.Bizga ikkita $\{f_1, \dots, f_s\}$ va $\{g_1, \dots, g_t\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin.Ulardan tuzilgan ideallar har xil ideallarmi yoki bir xil ekanligini qanday tekshirish mumkin?.Javob:berilgan monomial tartiblash bo‘yicha $< f_1, \ldots, f_s >$ va $< g_1, \ldots, g_t >$,larning keltirilgan Gryobner bazislarini hisoblaymiz. Bu ideallar faqat va faqat keltirilgan Gryobner bazislari usma ust tushgandagina usma ust tushadi.

2-§. Nol o’lchamli ideallar

k maydon, K esa uning algebraik yopig‘i bo‘lsin. k maydon ustida cheksiz ko‘p o‘zgaruvchilardan bog‘liq bo‘lgan ratsional funksiyalar halqasining algebraik yopig‘i K maydonning universal kengaytmasi deyiladi va uni Ω bilan belgilaymiz. Chekli $F \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ to‘plamga tortilgan idealni (F) bilan belgilaymiz. Gilbertning bazis haqidagi teoremasiga [12] asosan har qanday ideal chekli sondagi ko‘phadlar to‘plamiga tortilgan bo‘ladi.

K^n fazoda $I \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ idealning ko‘pxilligi deb quyidagi to‘plamga aytiladi [12]:

$$V(I) = \{\, \xi \in K^n \mid \forall p \in I : p(\xi) = 0\}.$$

$\xi \in \Omega^n$ element I sodda idealning umumiy ildizi deyiladi, agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa:

1) $\xi \in V(I)$;
2) $p \in I \Leftrightarrow p(\xi) = 0$.

Lemma 1. [12]. $I \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *idealning o‘lchovi faqat va faqat* $V(I)$ *ko‘pxillik chekli va bo‘sh bo‘lmagan holdagina nolga teng bo‘ladi.*

Agar nol o‘lchamli idealning leksikografik tartib bo‘yicha keltirilgan Gryobner bazisi berilgan bo‘lsa, uning hech bo‘lmaganda bitta ildizini topish masalasi quyidagicha hal qilinadi.

$I \subseteq k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ideal va G uning leksikografik tartib bo‘yicha keltirilgan Gryobner bazisi bo‘lsin. U holda $G \cap k[x_1]$ kesishma aniq bitta $f(x_1) \in k[x_1]$ ko‘phaddan iborat bo‘ladi va $k[x_1]$ halqaning $I_1 = I \cap k[x_1]$ idealining Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi. $\xi_1 \in K$ element $f(x_1) = 0$ tenglamaning echimi bo‘lsin. U holda I idealning har qanday $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ildizi uchun $f(x_1^0) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Endi faraz qilaylik, $I_i = I \cap k[x_1, x_2, \ldots, x_i]$ idealning $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ ildizi topilgan bo‘lsin. Bu ildizning davomi bo‘lgan $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \xi_{i+1})$ ildizni topish uchun $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halqada G Gryobner bazisining elementini hisoblaymiz. So‘ngra barcha $j = 1,2, \ldots, i$ lar uchun hosil qilingan Gryobner bazisining ko‘phadlarida $x_j = \xi_j$ almashtirishni bajaramiz. Natijada faqat x_{i+1} dan bog‘liq bo‘lgan ko‘phadlar majmuasini hosil qilamiz. Ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi $g(x_{i+1})$ ni hisoblaymiz. Hosil qilingan ko‘phad birdan kichik bo‘lmagan darajaga ega bo‘ladi va, demak, k maydonning algebraik yopig‘ida bo‘sh bo‘lmagan ildizlarga ega bo‘ladi. Quyida berilgan algoritm yordamida $g(x_{i+1}) = 0$ tenglamaning $\xi_{i+1} \in K$ ildizini topamiz. U holda $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \xi_{i+1})$ vektor $I_{i+1} = I \cap k[x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}]$ idealning ildizi bo‘ladi.

Ta’rif 1. Sistema idealining mos o‘lchoviga algebraik tenglamalar sistemasining o‘lchovi deyiladi. Algebraik tenglamalar sistemasining o‘lchovi nol deyishimiz mumkin.

Teorema 1. Ko‘phadlar halqasi idealining xosy Gryobner ba’zisi G bo‘lsin bu ideal o‘shanda va faqat nol o‘lchovli bo‘ladi, agar ixtiyoriy mumkin tartib uchun har bir $1 \leq i \leq n g_i \in$ G ko‘phad bo‘lsa, $x_i^{v_i}$ bu erda v_i manfiy bo‘lmagan butun son .

Teorema 2. Ixtiyoriy nol o‘lchovli ideal uchun algoritm A uning ba’zi bir echimlarini topadi.

Lemma 4. Agar G $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ idealning leksikografik tartiblashga nisbatan keltitrilgan Gryobner ba’zisi bo‘lsa, u holda leksikografik tartiblashga nisbatan $x_1, \ldots, x_i$ o‘zgaruvchilarning ko‘phadlari halqasida I_i idealning Gryobner ba’zisi bo’lsa.

Lemma 5. $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ oddiy ideal bo‘lsin. U holda ixtiyoriy 0< i <n ideal I_i oddiy bo‘ladi.

Lemma 6. $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ primar ideal bo‘lsin. U holda ixtiyoriy 0< i <n ideal I_i primar bo‘ladi.

Lemma 7. $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ primar ideal va J u bilan assotsirlashgan oddiy ideal. U holda I va J ideallarning ildizlari to‘plami bir xil bo‘ladi.

Lemma 8. $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ primar ideal va J u bilan assotsirlashgan oddiy ideal. U oddiy ideal J_i I_i ideal bilan assotsirlashgan.

Lemma 9. Agar $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ nol o‘lchovli ideal bo’lsa, u holda barcha $m = 1, \dots, n$ lar uchun $k[x_1, \dots, x_n]$ ko‘phadlar halqasida I_m nol o‘lchovli ideali deyiladi/

Lemma 10. $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ oddiy nol o‘lchovli ideal va $(\xi_1, \dots \xi_n) \in K^i I_i$ idealning ildizi bo’lsin. U holda 0< i < n-1 bo‘lganda shunday $\xi_{i+1} \in K$ *shunaqa* $(\xi_1, \dots \xi_{i+1}) \in K^{i+1}$ I_{i+1} idealning *ildizi* bo’ladi.

Lemma 11.$(\xi_1, \dots \xi_n) \in \Omega^n$ *oddiy* I idealning ildizi bo‘ladi. U holda $(\xi_1, \dots \xi_i) \in \Omega^i$ oddiy I_i idealning umumiy ildizi deyiladi.

Isboti. Oddiy idealni $J_i$belgilaymiz $k[x_1, \dots, x_i]$ ko‘pxadlar halqasidan tuzilgan $(\xi_1, \dots, \xi_i)$ nuqtada nolga aylanadi , u holda nuqta $(\xi_1, \dots \xi_i) J_i$idealning umumiy ildizi deyiladi. Shubxasiz $I_i \subseteq J_i$modomiki nuqta $(\xi_1, \dots \xi_n) \in \Omega^n$ I idealning ildizi deyiladi , u holda $J_i \subseteq$ I bo‘ladi shunday qilib $I_i \subseteq J_i$ bo‘ladi shuning uchun $I_i = J_i$va $(\xi_1, \dots \xi_i) \in \Omega^i$ esa I_i idealning umumiy ildizi bo‘ladi.

Lemma 12.$I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ primar ideal bo‘lsin va $(\xi_1, \dots \xi_i) \in \Omega^i I_i$ideal bilan oddiy assotsirlashgan idealning umumiy ildizi . $\xi_{i+1} \in \Omega$ shunaqa bo‘ladiki $(\xi_1, \dots \xi_i) \in \Omega^{i+1}$ bu esa I_{i+1} idealning umumiy ildizi bo‘ladi .

Lemma 13.$I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$nol o‘lchovli primar ideal va $(\xi_1, \dots \xi_n) \in K^i$esa $I_i$idealning ildizi bo‘lsin. U holda shunaaqa $\xi_{i+1} \in K$ *bo‘ladi.* $(\xi_1, \dots \xi_{i+1}) \in K^{i+1}$*bu esa* I_{i+1} idealning ildizi bo‘ladi.

Isboti. 12-lemmaning xususiy xolati deyiladi, modomiki nol o‘lchovli oddiy idealning xar bir ildizi uning umumiy ildizi deyiladi. Eslatib o‘tamiz $V(I)$ I idealning ko‘pxilligi deyiladi $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$

Lemma 14. Agar I ideal $q_j$ideallarning kesishmasi bo‘lsa $\boldsymbol{j}$ 1 dan m gacha o‘zgarsa, u holda $\boldsymbol{V(I)} = \cup_{j=1}^{m} \boldsymbol{V(q_j)}$ *bo‘ladi.*

Lemma 15.$I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$nol o‘lchovli ideal bo‘lsin va $(\xi_1, \dots \xi_n) \in K^iesaI_i$idealning ildizi bo‘lsin.U holda shunaqa $\xi_{i+1} \in K$ *bo‘ladi.*$(\xi_1, \dots \xi_{i+1}) \in K^{i+1}$ *bu esa* I_{i+1}idealning ildizi bo‘ladi.

Isbot:(sm.[12])Laskerning teoremasiga muvofiq primar ideallarning chekli kesishmasi ko‘rinishida I idealni tasvirlab bo‘ladi.

$$\boldsymbol{I} = \bigcap_{j=1}^{m} \boldsymbol{q_i}$$

Eslatib o‘tamiz oddiy ideallarning primar komponentalari bilan assotsirlashgan o‘lchovlaridan eng kattasi idealning o‘lchovi deyiladi.

Modomiki *I*-idealning o‘lchovi nol bo‘lsa, u holda q_j ideallarning xammasi shuningdek nol o‘lchovli bo‘ladi.

Shubxasiz bu tenglik bajariladi

$$I_i = \bigcap_{j=1}^{m} \boldsymbol{q_{j,i}} \qquad (1)$$

$\boldsymbol{q_{j,i}} = \boldsymbol{q_j} \cap k[x_1, \ldots, x_i] - primarniy\ ideallarni\ o‘lchovi\ nol.$

Shuning uchun 14- lemmaga muvofiq *i*=1,...,n ajratilgan joyiga ega bo‘ladi

$$\boldsymbol{V(I_i)} = \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{V(q_{j,i})} \qquad \mathbf{(2)}$$

Modomiki (ξ_1,...ξ_i)$\in K^i$ - I_i idealning ildizi, u holda (2) ifodadan kelib chiqadiki *j* ning bir nechta qiymatlarida (ξ_1,...ξ_n)$\in K^i$ bu element $q_{j,i}$ idealning ildizi deyiladi**.** Shuning uchun 13-lemma bo‘yicha shunaqa $\xi_{i+1} \in K$ *bo‘ladi,* (ξ_1,...ξ_{i+1})$\in K^{i+1}$ ifoda $q_{j,i+1}$ idealning ildizi bo‘ladi, shunday ekan (1) va (2) formulalarga muvofiq I_{i+1} idealning ildizi deyiladi.

Lemma 16 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$bir o‘zgaruvchili ratsional koeffitsientli ko‘pxad bo‘lsin. U holda $p(x) = 0$ tenglama ratsional sonlar maydonida oson xal bo‘ladi. Modomiki I idealning Gryobner bazisini topish masalasi ixtiyoriy tartiblashga nisbatan algoritmik yo‘l bilan echiladi deyiladi, 1 teorema bo‘yicha nol o‘lchovli ideal uchun xar bir x_i o‘zgaruvchi uchun $f_i\,(x_i)$ko‘pxadlarga ega bo‘ladi,faqat o‘zgaruvchining qiymatiga bogliq va I idealga bogliq bo‘lsa, u holda shunaqa ko‘pxadlar algebrasini qurish masalasi algoritmik yo‘l bilan osongina xal bo‘ladi. $f_i(x_i) = 0$tenglamaning ratsional echimlari to‘plami$X_i$bo‘lsin. U holda I idealning sistemaning barcha ratsional echimlari to‘plami$X_1 \times ... \times X_n$. Shuning uchun 16 lemmadan algoritmik yo‘l bilan oson kelib chiqadi $\mathbb{Q}$ maydon ustida algebraik tenglamalar sistemasining to‘liq o‘lchovi.

3-§. Tenglamalar sistemasini yechish algoritmi

Algoritm. Nol o‘lchamli $I \subseteq k[x_1, ..., x_n]$ idealning leksikografik tartiblashga nisbatan Gryobner bazisi G=(g_1,... g_n) berilgan bo‘lsin.

Chiqish: $(x_1^0, ..., x_1^0) \in \mathrm{K}^n$, bu erda K , k maydonning algebraik yopig‘idan iborat.

1. i:=1
2. Faqat bitta $g(x_1)$ ko‘phaddan iborat bo‘lgan $G_1 = G \cap k[x_1]$ kesishma topiladi.
3. $x_i^0 := A(g(x_i))$ deb olinadi, bu erda x_i^0 $g(x_i) = 0$ tenglamaning biror ilidizidan iborat.
4. i:= i+1.
5. Agar $i > n$ bo‘lsa, 10-qadamga o‘tiladi.
6. $G_i = G \cap k[x_1 ... x_i]$ kesishma topiladi.
7. $G_i(x_1^0, ..., x_{i-1}^0)$:={ $g(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i)$| $g \in G_i$}$\subseteq k[x_i]$ tekshiriladi.
8. $G_i(x_1^0, ..., x_{i-1}^0)$ to‘plam elementlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi $g(x_i)$ ni topiladi.
9. 3-qadamga qaytiladi.
10. Chiqish: $(x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathrm{K}^n$, I idealning echimi bo‘ladi.

Ushbu algoritmga misol sifatida quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2}^2 - x_{n-2} = 0 \\ x_{n-1}^2(n - 2 - x_1 - \cdots - x_{n-2}) + x_{n-1} + 1 = 0 \\ x_1 + \cdots x_n - n + 2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Bu tenglamalar sistemasi 1 ta aniq echimga ega bo‘ladi. Bu echimni faqat dastlabki $n - 2$ ta tenglamalar sistemasi uchun yagona echim sifatida olinsa,

$x_1, \dots, x_{n-2} = 0$yuqoridagi algoritm yordamida hosil qilish mumkin. Berilgan sistema echimlarining umumiy soni 2^{n-2} teng bo‘ladi.

(1) sistemaning $n = 5$ bo‘lganda echimlarini Maple tizimida topamiz.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 = 0 \\ x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_4^2(3 - x_1 - x_2 - x_3) + x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Maple yordamida quyidagi 8 ta echimni hosil qilamiz.

$$\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6} i\sqrt{11},\ x_5 = 3 + \frac{1}{6} \mp \frac{1}{6} i\sqrt{11}\}$$
$$\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0,\ x_4 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} i\sqrt{7},\ x_5 = 2 + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4} i\sqrt{7}\}$$
$$\{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} i\sqrt{7},\ x_5 = 2 + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4} i\sqrt{7}\}$$
$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0,\ x_4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3},\ x_5 = 1 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} i\sqrt{3}\}$$
$$\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,\ x_4 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} i\sqrt{7},\ x_5 = 2 + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4} i\sqrt{7}\}$$
$$\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1,\ x_4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3},\ x_5 = 1 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} i\sqrt{3}\}$$
$$\{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1,\ x_4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3},\ x_5 = 1 + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} i\sqrt{3}\}$$
$$\{x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1,\ x_4 = -1,\ x_5 = 1\}$$

Ma’lumki, Maple paketi ko’plab matematik masalalarni yechishda, yechimlarni grafik ko’rinishda tasvirlashda juda katta imkoniyatlar beradi. Xususan, Maple paketida Idealning Gryobner bazisini topishga doir buyruqlar ham mavjud.

Quyida ushbu buyruqlar Maple 7 paketi misolida keltiriladi, Maplening bundan keyingi versiyalari uchun buyruqlar farq qilishi mumkin.

Maple 7 dasturida Idealning Gryobner bazisini topish uchun maxsus ***>Groebner*** buyruqlar jamlanmasi mavjud.

Ushbu buyruqlar haqida to’liq ma’lumotni ***>?Groebner;*** buyrug’i orqali yoki Maple uskunalar panelidagi ***Help*** oynasida **Mathematics –> Algebra –> Polynomials –> Groebner Package** ketma-ketlik asosida olish mumkin.

Idealning Gryobner bazisini topishga oid buyruqlarni >***with (Groebner);*** buyrug'idan boshlash lozim.Maple 7 dasturida idealning Gryobner bazisini topishga oid quyidagi buyruqlar mavjud: ***leadcoeff(W,T)*** **–** W ko'phadning T – tartiblash bo'yicha bosh koeffitsiyentini aniqlaydi; ***leadmon(W,T)*** **–** W ko'phadning T – tartiblash bo'yicha bosh monomini aniqlaydi. ***leadterm(W,T)*** **–** W ko'phadning T – tartiblash bo'yicha bosh hadini aniqlaydi. T – tartiblash sifatida leksik tartiblsah tanlangan bo'lsa, ***plex(x,y,z,…)*** buyruqdan foydalaniladi.

```
> with(Groebner):
> W:=-6*x^2*y+3*x*z+12*y^2*z+144*x*z^2-65*y*z+4*x*y*z-8*y^2;
```

$$W := -6\,x^2\,y + 3\,x\,z + 12\,y^2\,z + 144\,x\,z^2 - 65\,y\,z + 4\,x\,y\,z - 8\,y^2$$

```
> leadcoeff(W,plex(x,y,z));
```

-6

```
> leadmon(W,plex(x,y,z));
```

-6, $x^2\,y$

```
> leadterm(W,plex(x,y,z));
```

$x^2\,y$

2. >***spoly(P,Q,T)*** **–** P va Q ko'phadlarning T – tartiblash bo'yicha S ko'phadini aniqlaydi.

```
> with(Groebner):
> P:=x^3*y*z-x*z^2;
```

$P := x^3\,y\,z - x\,z^2$

```
> Q:=x*y^2*z-x*y*z;
```

$Q := x\,y^2\,z - x\,y\,z$

3. >***gbasis(WL,T),*** WL-idealning T tartiblash bo'yicha Gryobner bazini

hisoblaydi.yuqorida yechib ko'rsatilgan 5 ,6– misollarni Mapleda yechib ko'ramiz:

5-misol.
```
> with(Groebner):
> WL:=[x^2-1,(x-1)*y,(x+1)*z];
```

$WL := [x^2 - 1, (x-1)\,y, (x+1)\,z]$

```
> gbasis(WL,plex(x,y,z));
```

$[y\,z, x\,z + z, y\,x - y, x^2 - 1]$

6-misol.
```
> with(Groebner):
> WL:=[x^2-1,(x-1)*y,(x-1)*z];
```

$WL := [x^2 - 1, (x-1)\,y, (x-1)\,z]$

```
> gbasis(WL,plex(x,y,z));
```

$[x\,z - z, y\,x - y, x^2 - 1]$

7-misol.

```
> with(Groebner):
> WL:=[x^3*y*z-x*z^2,x*y^2*z-x*y*z,x^2*y^2-z]:
gbasis(WL,plex(y,x,z));
>
```

$[-z^3 + x^2\,z^2, y\,z^2 - z^2, -z^2 + x^2\,y\,z, x\,y^2\,z - x\,y\,z, x^2\,y^2 - z]$

8-misol.

Quyidagi tenglamalar sistemasini Maple dasturida yechis algoritmini keltiramiz:

$$\begin{cases} xy+z-1 &= 0 \\ x-y-z^2 &= 0 \\ x^2-2y+1 &= 0 \end{cases}$$

```
> with(Groebner);
> Sys:={x*y+z-1, x-y-z^2, x^2-2*y+1};
```

$$Sys := \{x^2 - 2y + 1, -z^2 + x - y, xy + z - 1\}$$

```
> Gb:=Basis(Sys, plex(x, y, z));
```

$$Gb := [2z^6 + z^4 - 6z^3 + 9z^2, -2z^5 - 12z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 34y + 17z - 34, -2z^5 - 12z^4 - 5z^3 - 24z^2 + 34x + 17z - 34]$$

```
> IsZeroDimensional (Sys);
```

$$true$$

```
> SolutionZ:=fsolve(Gb[1], {z}, complex);
```

$$SolutionZ := \{z = -1. - 1.41421356237310\,I\}, \{z = -1. + 1.41421356237310\,I\}, \{z = 0.\}, \{z = 0.\}, \{z = 1. - 0.707106781186547\,I\}, \{z = 1. + 0.707106781186547\,I\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[1], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = -4.179663152\times 10^{-16} - 1.414213562\,I\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[2], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = -4.179663152\times 10^{-16} + 1.414213562\,I\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[3], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = 1.\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[4], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = 1.\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[5], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = -0.5000000000 - 2.089831576\times 10^{-16}\,I\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[6], Gb[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = -0.5000000000 + 2.089831576\times 10^{-16}\,I\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[1],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = -1.000000000 + 1.414213562\,I\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[2],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = -1.000000000 - 1.414213562\,I\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[3],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = 1.\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[4],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = 1.\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[5],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = 4.179663152\times 10^{-16} - 1.414213562\mathrm{I}\}$$

```
> SolutionX:=solve(subs(SolutionZ[6],Gb[3]),{x});
```

$$SolutionX := \{x = 4.179663152\times 10^{-16} + 1.414213562\mathrm{I}\}$$

```
> #Пример2
> Sys2:={x^2*y-z^3, 2*x*y-4*z-1, -y^2+z, x^3-4*y*z};
```

$$Sys2 := \{-y^2 + z, x^2\,y - z^3, x^3 - 4\,y\,z, 2\,x\,y - 4\,z - 1\}$$

```
> Gb1:=Basis(Sys2, plex(x, y, z));
```

$$Gb1 := [1]$$

```
> IsZeroDimensional (Sys2);
```

$$true$$

```
> #Пример3
> Sys3:={x^2+y^2+z^2-1, x^2+y^2+z^2-2*x, 2*x-3*y-z};
```

$$Sys3 := \{2\,x - 3\,y - z, x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x\}$$

```
> GB1:= Basis (Sys3, plex(x, y, z));
```

$$GB1 := [40\,z^2 - 8\,z - 23, 3\,y + z - 1, 2\,x - 1]$$

```
> IsZeroDimensional (Sys3);
```

$$true$$

```
> SolutionZ:=fsolve(GB1[1], {z}, complex);
```

$$SolutionZ := \{z = -0.6648529270\}, \{z = 0.8648529270\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[1], GB1[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = 0.5549509757\}$$

```
> SolutionY:=solve(subs(SolutionZ[2], GB1[2]), {y});
```

$$SolutionY := \{y = 0.04504902433\}$$

```
> #Пример4
> Sys4:={x*z-y-x+x*y, y*z-z+x^2+y*x^2, x-x^2+y};
```

$$Sys4 := \{-x^2 + x + y, x\,y + x\,z - x - y, x^2\,y + x^2 + y\,z - z\}$$

```
> GB2:= Basis (Sys4, plex(x, y, z));
```

$$GB2 := [z^3 + 2z^2 - 3z, 2yz + z^2 - z, 3y^2 - z^2 + z, -z^2 + 3x + 3y - 2z]$$

```
> SolutionZ:=fsolve(GB2[1], {z}, complex);
```

$$SolutionZ := \{z = -3.000000000\}, \{z = 0.\}, \{z = 1.000000000\}$$

```
> SolutionY2:=solve(subs(SolutionZ[2], GB2[2]), {y});
```

$$SolutionY2 := \{y = y\}$$

```
> SolutionX2:=solve(subs(SolutionZ[2], SolutionY2, GB2[4]),{x});
```

$$SolutionX2 := \{x = -y\}$$

```
> SolutionY1:=solve(subs(SolutionZ[1], GB2[2]), {y});
```

$$SolutionY1 := \{y = 2.\}$$

```
> SolutionX1:=solve(subs(SolutionZ[1], SolutionY1, GB2[4]),{x});
```

$$SolutionX1 := \{x = -1.\}$$

```
> SolutionY3:=solve(subs(SolutionZ[3], GB2[2]), {y});
```

$$SolutionY3 := \{y = 0.\}$$

```
> SolutionX3:=solve(subs(SolutionZ[3], SolutionY3, GB2[4]),{x});
```

$$SolutionX3 := \{x = 1.\}$$

```
>
```

III-bobning xulosasi

Uchinchi bobda nol o’lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini echish algoritimi masalalasi o’z yechimini topadi. Tenglamalar sistemasini echish algoritimi. bu algoritmdan foydalangan holda bir nechta idealga tegishlilik masalalari yechib ko‘rsatildi. Gryobner bazislarini topish texnikasidan foydalanilgan holatda bir nechta polinomial tenglamalar sistemalarini yechimlari topildi.Amaliyot shuni ko‘rsatadiki lex-tartiblash bo‘yicha Gryobner bazislarini hisoblash tenglamalar sistemasining ko‘rinishini ancha soddalashtiradi. Gryobner bazislarining eng samarali tomoni shundaki ularni chekli sondagi qadamlarda hisoblab topish mumkin. Nomalumlarni yo‘qotish va davom ettirish haqidagi teoremalar yordamida bu ishni bir muncha osonlashtirish munkinligi ko’rsatildi

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida biz $K[x_1,\cdots,x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo'llanilishi, algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish va ularni yechimlarini topish, nol o'lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini echish algoritimi masalalasi,affin ko'xillik,$k[x]$ halqadagi ideallar, $k[x_1,\ldots,x_n]$ halqada monomlarni tartiblash, Dikson lemmasi , Gilbertning bazislar haqidagi teoremasi,Gryobner bazislari,Gryobner bazisining xossalari va boshqa mavzuga aloqador bo'lgan bir nechta tushunchalar berigan bo'lib ularga doir amaliy masalalar yechish bilan mano jihatdan mustahkamlangan.

Dissertatsiya ishida asosan quyidagi masalalarning yechimlari ko'rsatilgan.

- Algebraik sonlar maydoni ustidagi halqalar ideallarining bazislarini qurish va ularni yechimlarini topish masalasi;
- $K[x_1,\cdots,x_n]$ halqa ideali Gryobner bazisining yuqori darajali tenglamalar sistemasini echishga qo'llanilishi;
- Nol o'lchamli idealga mos keluvchi algebraik tenglamalar sistemasini echish algoritimi masalalasi;

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

2. Adams W., Loustaunan P. (1994), AnIntoduction to Groebner Bases, Graduate Studias in Mathematics, 3 Amer. Soc. Providence.

3. Dube T.W. (1990) The structure of polynomial ideals and Groebner bases, SIAM J.Comput., 19. 750-755.

4. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений// М. Ж. МЦНМО, 2003.

5. Бухбергер Б. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов// Компьютерная алгебра. Символика и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986.

6. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.:Наука,1979.

7. Давенпорт Дж., Серр Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир,1991.

8. Кириенко Д.П. Система компьютерной алгебры Maple, Среднее общеобразовательная школа №179 МИОО, г.Москва.

9. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.

10. Sato Y., Inoue S., Suzuki A. et al. Boolean Gröbner bases//J.Symb. Comput. 2011.

11. Buchberger B. Groebner bases:an algorithmik method in polynomial ideal theory, - in:Multidimensional sytems Theory,ed.by Bose N.K.,D.Reidel Publishing Company, Dordrecht,184-232.

12. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы.

13. Ro'zimuradov X.X., Sherboyeva D.X. Polinomial halqalar ideallarining gryobner bazislarini kompuyter algebrasi tizimlarida hisoblash. - "Umumta'lim fanlarini sinxron va asinxron bog'lab o'quvchi kreativ faoliyatini rivojlantirishda integrativ yondashuv" mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari. Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti. 2022 yil 14 may.

14. Ro'zimuradov X.X., Sherboyeva D.X. Idealga tegishlilik masalasi va uni reduksiyalash orqali yechish. – АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ

АНЖУМАНИ МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ 1-ҚИСМ 2022 йил 18-19 ноябрь, 48-49 betlar.

15.www.ziyonet.uz.

16.www.math.ru.