O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO‘LIMI

Qo‘lyozma huquqida
UDK: 517.958:536.2

URALOVA HILOLA ALISHER QIZI

FILTIRATSIYA JARAYONLARINING NOMA’LUM CHEGARALI FLORIN TIPIDAGI MATEMATIK MODELI

70540101 – Matematika (Algebra vafunksionalanaliz) mutaxassisligibo‘yicha
Magistrakademikdarajasiniolishuchunyozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar: f-m.f.n.,dots. R.N.To‘rayev

TERMIZ-2023

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusi Termiz davlat universiteti rektorining 2021-yil 3-dekabrdagi № 54-T/M sonli buyrug‘i asosida tasdiqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasi Termiz davlat universiteti “Algebra va geometriya” kafedrasida bajarilgan.

Magistrlik dissertatsiyasi elektron nusxasi Termiz davlat universitetining rasmiy veb sahifasiga joylashtirilgan.

Dissertatsiya manzilining QR-kodi:

Magistrlik dissertatsiyasi bilanTermiz davlat universitetining axborot-resurs markazida tanishish mumkin (6 raqam bilan ro‘yxatga olingan. Manzil: Termiz shahri Alisher Navoiy ko‘chasi 42-uy.)

Ilmiy rahbar:	dots. R.N.To‘rayev
Kafedra mudiri:	dots. S.T.Choriyeva
Magistratura bo‘limi boshlig‘i:	PhD. A.B. Narbayev

70540101 – Matematika (Algebra va funksional analiz) mutaxassisligi magistranti Uralova Hilola Alisher qizining **“Filtratsiya jarayonlarining noma’lum chegarali Florin tipidagi matematik modeli”** mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

ANNOTATSIYA

Tayanch so‘zlar: Parabolik tipdagi tenglamalar, filtratsiya tenglamalari, boshlang‘ich- chegaraviy masala, ekstremum prinsipi, yagonalik teoremasi, Stefan tipidagi masala, Florin tipidagi masala.

Tadqiqot obyektlari: Filtratsiya jarayonlari, filtiratsiya tenglamasi uchun Florin masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligini ko‘rsatishga qaratilgan.

Ishning maqsadi: Filtiratsiya jarayonlarining noklassik modeli va boshqa sohalarda sodir bo’ladigan filtrlash jarayonlarining matematik modellarining o‘rni va rolini ko‘rsatib berish.

Tadqiqot metodlari: Tadqiqot ishida integral tenglamalar nazariyasining metodlaridan, shuningdek ketma-ket yaqinlashish, ekstremum prinsipidan foydalanilgan.

Olingan natijalar va ularning yangiligi:

Shu vaqtga qadar

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in D$$

masala ko’rilgan. Ushbu tadqiqot ishida yangi a(u) funksiya kiritilib

$$u_t(t,x) = a(u)u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D$$

masala yechimining mavjudlik va yagonaligi ko’rsatilgan

Amaliy ahamiyati: Olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo‘lib, ulardan tabiatda uchraydigan turli sohalarning, filtiratsiya jarayonlarining matematik modellarini qurishda tadbiq etish mumkin. Shu bilan birga dissertatsiya ishini differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari sohasida maxsus kurslarni o‘qitishda foydalanish mumkin, filtiratsiya jarayonlarining noklassik modelini mukammal o‘rganish turli masalalarni yechish va umumiyroq bo‘lgan xususiy hosilali differentsial tenglamalar nazariyasini yaratishga imkoniyat beradi, o‘quv materiallarini o‘zlashtirish samaradorligini oshiradi.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi: Tadqiqot jarayonida ishlab chiqilgan xulosa va takliflar to’liq nazariy ahamiyatga ega. Dissertatsiyaning materiallari Matematika mutaxasisligi o‘qiyotgan magistr talabalarga o‘quv dasturini takomillashtirishda foydalanilmoqda. Filtratsiya jarayonlarining noklassik modelini qurish va uni tadqiq etish, sodda tajribalarni ko‘rsatish va ularning mohiyatini ochib berishga undaydi.

Qo‘llanilish sohasi: Erkin chegara bilan bog‘liq masalalar moddaning agregatsiya holatining o‘zgarishi, suyuqlikning g‘ovakli muhitda harakatlanishi bilan bog‘liq issiqlik jarayonlarini matematik tavsiflashda paydo bo‘ladi.Shu sababli ular metallurgiyada, payvandlash jarayonlarini o‘rganishda, materiallarni elektron va plazma bilan qayta ishlashda, elektr kontaktlari nazariyasida, geotermiya, abadiy muzlik, filtratsiya nazariyasi va boshqalarda keng qo‘llaniladi..

MUNDARIJA

KIRISH

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. Hozirgi kunda matematikaga Prezidentimiz tomonidan alohida e’tibor berilmoqda [1]. Ayniqsa, 2019 yil 9-iyul kuni Prezidentimiz tomonidan “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash” to‘g‘risidagi qarorini imzolashi hamda matematika, kimyo, biologiya va geologiya fanlarini rivojlantirishga alohida e’tibor berilishi [2] biz yosh matematiklarni ilm-fan bilan shug‘ullanishga ilhomlantirib yubordi.

O‘zbekistonda ta’lim tizimining isloh qilishning dasturiy hujjatlarida [2-5] ta’kidlanganidek, mamlakatimiz ta’lim tizimi xodimlari oldida raqobatbardosh kadrlar tayyorlash, ta’lim tarbiya jarayonini jahon andozalar darajasiga etkazishni ta’minlash asosiy vazifa qilib qo‘yilgan.

Dissertatsiyada filtratsiya jarayonlarining noklassik modellari hamda, parabolik tipdagi tenglamalari, filtratsiya tenglamalari uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalar, ekstremum prinsipi va yagonalik teoremasi, Stefan masalasi, unga olingan aprior baholar, Florin masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi o‘rganildi. Matematik fizikaning asosiy juda ko‘p masalalarini funksionallarning ekstrimumi masalasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Bunday tavsiflashda unga mos bo‘lgan chegaraviy masalalar yechimini tabiiy aniqlash imkoniyati mavjud va shu bilan birga, ularni yechishga ma`lum usullarni qo‘llash mumkin. XI- asrga kelib ularni amaliy masalalarga tadbig‘iga talab ortganligi tufayli izlanishlar kuchaydi va masalalarning qo‘yilishiga aniqlik kiritilib mutaxassislar oldiga butunlay yangi tipdagi masalalar qo‘yildi.

Mazkur dissertatsiya ishi orqali tabiatda uchraydigan turli sohalarning, filtiratsiya jarayonlarining matematik modellarini qurishda foydalanish mumkin.Mazkur dissertatsiyada filtratsiya jarayonlarining noklassik modeliga oid yangi natijalar olish ko‘zda tutilgan.

Tadqiqot obyekti va predmeti. Ushbu magistrlik dissertatsiyasining obyekti filtratsiya jarayonlari, filtiratsiya tenglamasi uchun Florin masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligini koʻrsatishga qaratilgan. Tadqiqotning predmeti boʻlib nomaʼlum chegarali parabolik tipdagi masalalar va unga qoʻyilgan Florin masalasi tahlili hisoblanadi.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari.Ushbu magistrlik dissertatsiyasining maqsadi filtiratsiya jarayonlarining noklassik modeli va boshqa sohalarda sodir boʼladigan filtrlash jarayonlarining matematik modellarining oʻrni va rolini koʻrsatib berish hisoblanadi.

Dissertatsiya maqsadidan kelib chiqib, unda quyidagi vazifalar belgilangan.

- Parabolik tipdagi tenglamalar uchun qoʻyilgan chegaraviy masalalarni chuqurroq oʻrganish;
- Nomaʼlum chegarali masala uchun Stefan masalasini oʻrganish;
- Florin masalasini ketma ket yaqinlashish usuli yordamida Stefan masalasiga kelitirish;
- Florin masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligini koʻrsatish.

Ilmiy yangiligi. Shu vaqtga qadar

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in D$$

masala ko’rilgan. Ushbu tadqiqot ishida yangi a(u) funksiya kiritilib

$$u_t(t,x) = a(u)u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D$$

masala yechimining mavjudlik va yagonaligi ko’rsatilgan.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Ushbu magistrlik dissertatsiyasining filtratsiya jarayonlarning ba`zi noklassik modellari haqidagi masalalarga, ya`ni Stefan va Florin masalalariga bagʻishlangan. Magistrlik ishida filtratsiya tenglamasi uchun nomaʼlum chegarali sohada Florin masalasi oʻrganilgan boʻlib, Shauder qoʻzgʻalmas nuqta usuli yordamida yechimning aprior bahosi olingan. Olingan tengsizliklardan qaralayotgan masala yechimining yagonaligi, mavjudligi va berilganlarga uzluksiz bog'liqligi kelib chiqadi.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi (tahlili). Magistrlik tadqiqot ishini o'rganish davomida quyidagi adabiyotlardan foydalanildi. Зикиров О. С. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Тошкент, Университет, 2012. 260 бет; Салоҳиддинов М. С. Математик физика тенгламалари.Тошкент. "Ўқитувчи". 2002. 445 б;Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.428 с;Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры., М.: Ноука. Физматлит, 1997, 320 с; Кружков С.Н. Априорная оценка для производной решения параболиче ского уравнения // Вестник МГУ. Сер.1.62,(1967).0.41-48; Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск. Наука, 1986, 239 с;Рубенштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайзгие, 1967. 468 г;Данилюк И.И. О задаче Стефана. УМН, 1985, Т.40, вып.5(245), с. 133-185;Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014, 240 с;Тураев Р.Н. Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения. UzMJ., 2017, Xo3. c.8-16;Douglas, Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. // Proc. Amer.Math.Soc. 1957.Vol.8, No.4. P.402-408;Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе. // Украинский математический журнал (2012), т.64, №1, стр.71-80;Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.мат.Науки".2012. №26. С.99-106;Takhirov J.O., Turaev R.N. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences, (New York), Vol.187, No.1, (2012). pp. 86-100;Turaev R.N. Nonlocal Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection. Bulletin of University of Karaganda. 2020. No 4. P.1221.Uralova H. "Bir jinsli bo'lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi" Science and education jurnali 2022-yil iyun soni 39-bet Uralova H. “Parabolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich shartlar va chegaraviy shartlar” Science and education jurnali 2023-yil 37-soni 10 –bet.

Tadqiqotda qo‘llanilgan metodikaning tavsifi. Tadqiqot ishida integral tenglamalar nazariyasining metodlaridan, shuningdek ketma-ket yaqinlashish, ekstremumum prinsipi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo‘lib, ulardan tabiatda uchraydigan turli sohalarning, filtiratsiya jarayonlarining matematik modellarini qurishda tadbiq etish mumkin. Shu bilan birga dissertatsiya ishini differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari sohasida maxsus kurslarni o‘qitishda foydalanish mumkin, filtiratsiya jarayonlarining noklassik modelini mukammal o‘rganish turli masalalarni yechish va umumiyroq bo‘lgan xususiy hosilali differentsial tenglamalar nazariyasini yaratishga imkoniyat beradi, o‘quv materiallarini o‘zlashtirish samaradorligini oshiradi.

Ish tuzilmasining tavsifi. Mazkur magistrlik dissertatsiyasi kirish, 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yhatidan iborat. 1-bob 3 ta paragrafdan, 2-bob 3 ta paragrafdan, 3-bob 2 ta paragrafdan iborat. 1-bob filtratsiya tenglamalariva asosiy chegaraviy masalalarning qo‘yilishi haqida, 2-bob filtratsiya tenglamasi uchun noma’lum chegarali masalalar va ularni yechish usullari haqida bo`lsa, 3-bobda esa filtratsiya jarayonlarining noma’lum chegarali florin tipidagi masala tahlili o‘rganiladi. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 83 betdan iborat.

I BOB. FILTRATSIYA TENGLAMALARI VA ASOSIY CHEGARAVIY MASALALARNING QO‘YILISHI

Dissertasiyaning birinchi bobida ikkinchi tartibli xususiy hosilali parabolik tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalar va ularni yechishga bag‘ishlandi. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipi va undan kelib chiqadigan bir qator xossalari o‘rganildi.

Parabolik tipdagi tenglamalaridan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi va bir qator fizik jarayonlarning matematik modellari issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga keltiriladi. Jumladan masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipidan foydalanib ko‘rsatish muimkin bo‘ladi. Masala echimining mavjudligi esa o‘zgaruvchilarni ajratish Fure usuli va boshqa usullar yordamidan ko‘rsatish mumkin.

1.1-§. Filtratsiya tenglamalari hamda boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning qo‘yilishi.

Filtratsiya nazariyasi, yaxlit muhit mexanikasining bo‘limi bo‘lib, gidrotexnika, gidromelioratsiya, gidrogeologiya, tog‘ ishi, neft va gaz qazib olish, kimyo texnologiya sohalariga bo‘lgan talab natijasida rivojlanmoqda. Neftgazsuvli qatlamlarni ishlatishda nazariy asos bo‘lib, yer osti neft-gaz mexanikasi hisoblanadi. Tog‘ jinslari cho‘kindilari qalinliklaridan ortadigan flyuidlar harakati boshqa gidrodinamika (suyuqliklarning ochiq o‘zandagi harakati) va filtratsiya tadqiqot usullaridan (masalan, kimyoviy texnologiya va gidrotexnika) o‘ziga xos xususiyatlari bilan ajralib turadi.

Bu kabi masalalar xususiy xosilali differensial tenglamalarga keladi. Bundan tashqari mexanika, fizika va texnikaning ko‘plab masalalari ikkinchi tartibli (x.h.t.)ni o‘rganishga olib keladi. [7; 152-160, 8; 143-152, 9; 400-407, 10; 208-213]

Masalan:

1) tovush, elektromagnit to‘lqinlarini tarqalishini yoki har qanday tebranish hodisalarini o‘rganishda biz to‘lqin tenglamasi

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{1.1}$$

ga duch kelamiz, c -qaralayotgan muhitda to‘lqin tarqalishi tezligi;

2) bir jinsli izotrop jismlarda issiqlik tarqalishi jarayonlari va diffuziya hodisalari issiqlik o‘tkazish tenglamasi

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{1.2}$$

bilan ifodalanadi;

3) bir jinsli izotrop jismda tarqalib bo‘lgan va turg‘un holatga kelgan (ya’ni vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydigan) issiqlikni o‘rganishda Puasson tenglamasi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y) \tag{1.3}$$

ga kelamiz.

Qaralayotgan jism ichida issiqlik manbai ($f(x, y)$) bo‘lmasa (1.3) tenglama o‘rniga Laplas tenglamasi

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{1.4}$$

ni olamiz.

(1.1) - (1.4) tenglamalar matematik fizikaning asosiy tenglamalari deb ataladi. Ularni chuqur o‘rganish bir qator fizik hodisalar nazariyasini yaratish va o‘ta muhim texnik masalalarni hal qilish imkonini beradi.

O‘z-o‘zidan ravshanki (1.1)-(1.4) tenglamalarning har biri cheksiz ko‘p yechimga ega. Aniq fizik masalani hal qilishda esa ana shu cheksiz ko‘p yechimlar ichidan masalaning fizik mohiyatidan kelib chiqadigan qo‘shimcha shartlarni qanoatlantiradigan yagona (konkret protsessni ifodalovchi) yechimni topish kerak bo‘ladi. Odatda bu qo‘shimcha shartlar chegaraviy (o‘rganilayotgan muhitning chegarasida berilgan) va boshlang‘ich (vaqtning kuzatish boshlanayotgan aniq qiymatida berilgan) shartlardan iborat bo‘ladi.

Tenglamaning koeffitsientlari, o‘ng tomoni hamda chegaraviy va boshlang‘ich shartlar sifatida berilgan funksiyalar (qiymatlar) matematik fizika masalasining berilganlari deyiladi.

Matematik fizika masalalarini yechish, quyidagi uch talabga javob berishi kerak:

1) masalaning yechimi mavjud bo‘lishi kerak;

2) yechim yagona bo‘lishi kerak;

3) yechim turg‘un bo‘lishi kerak.

Keltirilgan uchta shartni qanoatlantiruvchi matematik fizika masalalari va (x.h.t.) uchun qo‘yilgan har qanday masalalar korrekt (to‘g‘ri ma’nosida) qo‘yilgan masala deyiladi.

Endi ikki o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni klassifikatsiyasini keltiramiz.

Bizga yuqori tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lgan

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1.5}$$

tenglama berilgan bo‘lsin, bu yerda A, B va C koeffitsientlar (x, y) larning berilgan funksiyalari bo‘lib, ikkinchi tartibli hosilalarigacha uzluksiz bo‘lsin. Shu bilan birga A, B, C lar bir vaqtda nolga teng emas deb faraz qilamiz. A, B, C koeffitsientlardan ixtiyoriy ikkitasi aynan nol bo‘lsa (1.5) tenglama o‘z-o‘zidan kanonik ko‘rinishga kelgan bo‘ladi.

Berilgan (1.1) tenglamada erkli o‘zgaruvchilarni quyidagi formulalar

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{1.6}$$

orqali almashtiramiz. Bunda $\xi(x,y)$ va $\eta(x,y)$ funksiyalar birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz va yakobian

$$J=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.7}$$

bo‘lsin deb, faraz qilamiz. Shu (1.7) shart bajarilsa, (1.6) almashtirish teskari almashtirishga ega bo‘ladi, ya’ni $x=x(\xi,\eta),\ \ y=y(\xi,\eta)$.

(1.5) tenglamaga kirgan hosilalarni yangi o‘zgaruvchilar (ξ,η) larga nisbatan hisoblaymiz:

$$\left.\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\\
&u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\\
&u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Hisoblangan hosilalar qiymatlarini (1.8) dan (1.5) tenglamaga qo‘yib quyidagini topamiz:

$$A_1u_{\xi\xi}+2B_1u_{\xi\eta}+C_1u_{\eta\eta}+F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0, \tag{1.9}$$

bunda

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,\\
&B_1=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+C\xi_y\eta_y,\\
&C_1=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

bo‘lib, F_1 funksiya ikkinchi tartibli hosilalarga bog‘liq bo‘lmaydi. Agar F argumentlariga nisbatan chiziqli funksiya bo‘lsa (1.9) tenglamadagi F_1 ham chiziqli funksiya bo‘ladi, ya’ni (1.5) tenglama chiziqli bo‘lsa (1.6) almashtirishdan so‘ng ham chiziqliligicha qolaveradi.

Bizning ixtiyorimizdagi $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ funksiyalar ixtiyoriy funksiyalar bo‘lib, faqatgina (1.7) shartga bo‘ysunadilar xolos. Endi ularni shunday tanlaylikki, (1.9) tenglama eng sodda holga kelsin.

Shu maqsadda, ushbu

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0 \qquad (1.11)$$

birinchi tartibli tenglamani qaraylik. Agar $\varphi(x,y)$ funksiya (1.11) tenglamaning yechimi bo‘lsa va $\xi = \varphi(x,y)$ desak (1.10) dan ko‘rinib turibdiki, $A_1 = 0$ bo‘ladi, xuddi Shunday $\psi(x,y)$ ham (1.11) tenglamaning boshqa yechimi bo‘lsa, (bunday yechim ham borligini keyinroq ko‘rsatamiz) va $\eta = \psi(x,y)$ desak (1.10) dan $C_1 = 0$ bo‘lishi ko‘rinadi.

Demak, hamma gap (1.11) tenglamada ekan. Bu tenglama haqida quyidagi ikkita lemmani isbotsiz keltiramiz.

Lemma 1.1. Agar $\varphi(x,y)$ funksiya (1.11) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, u holda $\varphi(x,y) = const$

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0 \qquad (1.12)$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Lemma 1.2. Agar $\varphi(x,y) = C$ (1.12) tenglamaning umumiy yechimi bo‘lsa, u holda $\varphi(x,y)$ funksiya (1.11) tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, (1.12) oddiy differensial tenglamaning yechimlarini topsak, (1.11) tenglamaning ham yechimlarini topgan bo‘lar ekanmiz.

Yuqoridagi (1.12) tenglama (1.5) tenglamaning xarakteristik tenglamasi, uning yechimlari esa (1.5) tenglamaning xarakteristikalari deyiladi.

(1.12) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0.$$

Bu tenglikdan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \tag{1.13}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}, \tag{1.14}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan (1.5) tenglamada, umumiyatlikka zarar etkazmasdan, har doim $A>0$ deb olishimiz mumkin.

Xaqiqatdan ham, buning uchun: agar $A<0$ bo‘lsa (1.5) tenglamaning ikkala tomonini (-1) ga ko‘paytirsak kifoya. Agar $A\equiv 0$ va $C\neq 0$ bo‘lsa, u holda x va y larining o‘rinlarini almashtirish etarli, agar $A\equiv C\equiv 0$ (lekin $B\neq 0$) bo‘lsa, u holda tenglamada

$$x=\xi+\eta, \quad y=\xi-\eta$$

almashtirish bajarilsa olingan tenglamada yana $A\neq 0$ koeffitsient paydo bo‘ladi.

Qaralayotgan (1.5) tenglamaning tiplarga bo‘linishi (1.13), (1.14) tenglamalardagi B^2-AC ifoda (diskriminant) ning ishorasiga bog‘liq. $\Delta\equiv B^2-AC$ deb belgilaylik.

Berilgan sohaning biror M nuqtasida (1.5) tenglamaning tipi:

giperbolik deyiladi, agar M nuqtada $\Delta>0$ bo‘lsa,

elliptik deyiladi, agar M nuqtada $\Delta<0$ bo‘lsa,

parabolik deyiladi, agar M nuqtada $\Delta=0$ bo‘lsa.

Agar sohaning barcha nuqtalarida $\Delta>0$ bo‘lsa, (1.5) tenglama butun sohada giperbolik, $\Delta<0$ bo‘lsa, butun sohada elliptik, $\Delta=0$ bo‘lsa, butun sohada parabolik deyiladi. Tenglamalarning bunday nomlanishlari ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1.15)$$

ni o‘rganishdan kelib chiqqan bo‘lib, uning sababi (1.15) tenglama $B^2 - AC > 0$ bo‘lsa giperbolani, $B^2 - AC < 0$ bo‘lsa ellipsni, $B^2 - AC = 0$ bo‘lsa parabolani ifoda etadi.

Agar (1.9) tenglama uchun $\Delta_1 = B_1^2 - A_1C_1$ ni (1.10) formulalardan foydalanib hisoblasak,

$$B_1^2 - A_1C_1 = (B^2 - AC)\,J^2 \qquad (1.16)$$

tenglikni olamiz, bu yerda $J = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y$ ya’ni (1.12) yakobian.

Demak, $\Delta_1 = J^2\Delta$ bo‘lib Δ_1 ning ishorasi Δ ning ishorasi bilan bir xil bo‘lar ekan, bu degani (1.6) almashtirishdan so‘ng (1.5) tenglamaning tipi o‘zgarmaydi.

Biz ushbu magistrlik dissertatsiyamizda faqat parabolik tenglamalar bilan ish ko‘rganimiz uchun kanonik ko‘rinishning parabolik tenglama bo‘lgan holini keltiramiz.

Aytaylik, ushbu

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F = 0\,(1.5)$$

tenglama uchun biror M nuqtada

$$B^2 - AC = 0$$

bo‘lsin. U holda qaralayotgan tenglama parabolik tipdagi tenglama bo‘lib, u bitta karrali haqiqiy xarakteristika

$$\varphi(x, y) = const$$

ga ega bo‘ladi.

Yangi o‘zgaruvchi ξ va η lar sifatida

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y)$$

larni olamiz, bunda $\eta=\eta(x,y)$ funksiya $\varphi(x,y)$ ga bog‘liq bo‘lmagan ixtiyoriy funksiya.

Bu holda $\xi=\varphi(x,y)$ funksiya (1.11) tenglamani qanoatlantirib, (1.10) munosabatga ko‘ra

$$A_1=0$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan, $B=\sqrt{A}\cdot\sqrt{C}$ bo‘lishini e’tiborga olib

$$A_1=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_\eta^2=(\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y)^2,$$

va

$$\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y=0 \tag{1.17}$$

bo‘lishini topamiz.

Ravshanki,

$$B_1=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+C\xi_y\eta_y=$$
$$=(\sqrt{A}\xi_x+\sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x+\sqrt{C}\eta_y).$$

(1.17) tenglikka ko‘ra

$$B_1=0$$

bo‘ladi. Natijada (1.9) tenglama, quyidagi

$$C_1u_{\eta\eta}+F=0$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \tag{1.18}$$

bunda

$$F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=-\frac{1}{C_1}F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

bo‘ladi.

(1.18) tenglama parabolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishini ifodalaydi.

Tabiatda issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o‘rganishda eng ko‘p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo‘lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.19}$$

Issiqlik tarqalishi tenglamasi bilan ifodalanadigan ba’zi bir fizikaning masalalarini qaraymiz.

Sterjenda issiqlik tarqalish masalasi ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.20}$$

tenglamaga keladi

Issiqlik tarqalish jarayonining matematik modeli

$$u_t\left(x,t\right) = a^2 u_{xx}\left(x,t\right) + f\left(x,t\right) \tag{1.21}$$

bir jinsli bo‘lmagan tenglama bilan ifodalanadi. (1.20) va (1.21) tenglamalar uchun boshlang‘ich shart

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{1.22}$$

bo‘ladi, bu yerda $\varphi(x)$ berilgan funksiya. Uchlari $x=0$ va $x=l$ nuqtalarda yotgan chegaralangan sterjen uchun chegaraviy shartlarning eng soddasi

$$u\Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\Big|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{1.23}$$

ko‘rinishda bo‘ladi: $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ berilgan funksiyalar bo‘lib, ular sterjen uchlari qanday haroratda ushlab turilganini bildiradi.

E’tibor qiling, sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi (1.20) yoki (1.21) uchun bitta boshlang‘ich shart (1.22) berilayapti, vaholanki tor tebranish tenglamasi (u ham ikkinchi tartibli) uchun ikkita boshlang‘ich shartlar berilar edi.

Bu farqni sababi shundaki, agar (1.20) yoki (1.21) tenglama uchun

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

shartni bersak, u holda shu tenglamalarga asosan $t=0$ da u_{xx} ham berilgan bo‘lib qoladi, ya’ni $u_{xx}(0,x) = \psi$ va natijada $\psi(x) = \varphi''(x)$ tenglikka kelib qolamiz. Demak, bu holda alohida berilgan $\psi(x)$ funksiya avval berilgan $\varphi(x)$ funksiyaga bog‘liq bo‘lib qolayapti. Shuning uchun ham (1.20), (1.21) tenglamalar uchun bitta boshlang‘ich shart qo‘yiladi.

Chegaraviy shartlar esa masalaning fizik mohiyatiga qarab turlicha va ancha murakkab bo‘lish mumkin.

1.2-§. Ekstremum prinsipi va yagonalik teoremasi.

Qattiq jismning ixtiyoriy vaqtdagi haroratni aniqlash uchun xususiy hosilali differensial tenglamaning o‘zi yetarli bo‘lmaydi. Buning uchun masalaning fizik xossasiga asosan jism ichida boshlang‘ich vaqtdagi haroratning taqsimlanishi (boshlang‘ich shart)ni va jismning sirtida issiqlik rejimi (chegaraviy shartlar)ni bilish zarur.

Chegaraviy shartlar qattiq jism sirtidagi haroratga qarab turlicha berilishi mumkin.

1) Agar qattiq jism sirtining har bir nuqtasida bir xil harorat saqlanayotgan bo‘lsa, u holda chegaraviy shart

$$u(x,y,z,t)|_s = \mu_1(x,y,z,t), \quad (x,y,z,t) \in S, t \geq 0, \tag{1.24}$$

ko‘rinishda beriladi.

Bu yerda S qattiq jismning sirti $\mu_1(x,y,z,t)$, esa S sirtda berilgan funktsiya.

2) Qattiq jismning S sirtida issiqlik berilgan bo‘lsin, ya’ni Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirti yuzasidan o‘tuvchi issiqlik miqdori berilsa, u holda Fure qonuniga asosan (1) formuladan quyidagi

$$q = \frac{\mathrm{q}}{\Delta S\, \Delta t} = -k\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}.$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bunda ushbu chegaraviy shart

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} = \mu_2(x,y,z,t) = -\frac{q(x,y,z,t)\partial u}{k(x,y,z,t)\partial u},\ (x,y,z,) \in S,\ t \geq 0 \qquad (1.25)$$

kelib chiqadi. $\mu_2(x,y,z,t\,) -$ berilgan funktsiya.

3) Qattiq jism sirtida atrof muhit bilan issiqlik almashinishi sodir bo‘layotgan bo‘lsa, Nyuton qonuniga asosan Δt vaqtda qattiq jismning ΔS sirtidan atrof muhitga chiqayotgan issiqlik miqdori qattiq jism sirtining haroratidan atrof muhit haroratining ayrimasiga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$q = H(u - u_0),$$

Bu yerda H issiqlik almashish koeffisienti bo‘lib, $u - u_0$ ayirmaga bog‘liq. Energiyani saqlanish qonuniga ko‘ra bu issiqlik miqdori Fur’e qonuni bilan aniqlangan issiqlik miqdoriga

$$q = -k\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}$$

teng bo‘ladi.

U holda S sirtda ushbu chegaraviy shartni

$$k\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} = H(u - u_0)\,,$$

Olamiz, yoki $h = H/k$ deb almashtirib, S da quyidagi

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N} + hu = hu_0$$

chegaraviy shartni olamiz.

Bundan izotrop qattiq jism uchun chegaraviy shartni quyidagi ko‘rinishda

$$(\frac{\partial u}{\partial N} + h(x,y,z,t)u)|_S = \mu_3(x,y,z,t)\,, \qquad (x,y,z) \in S\,,\ t \geq 0. \qquad (1.26)$$

yozishimiz mumkin.

Shunday qilib, izotrop qattiq jismda issiqlik tarqalish tenglamasi ushun boshlang‘ich chegaraviy masalalar quyidagicha qo‘yiladi:

BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini ushbu

$$G = D \times (0,T) = \{(x,y,z,t) | (x,y,z) \in D \subset R^3,\ \ t \in (0,T)\}$$

Silindrik sohada aniqlangan , uzluksiz quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D,$$

va

$$u(x,y,z,t)|_S = \mu_1(x,y,z,t), \quad (x,y,z,t) \in S, \ \ t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

IKKINCHI CHEGARAVIY MASALA.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining $G = D \times (0,T)$ silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D,$$

va

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial N}|_{\mathrm{S}} = \mu_2(x,y,z,t) = -\frac{q(x,y,z,t)}{k(x,y,z)}, \qquad (x,y,z,) \in S, \qquad t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

UCHINCHI CHEGARAVIY MASALA.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining

$$G = D \times (0,T) = \{(x,y,z,t) | (x,y,z) \in D \subset R^3,\ \ t \in (0,T)\}$$

silindrik sohada aniqlangan, uzluksiz quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in D,$$

va

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + h(x,y,z,t)u\right)|_S = \psi_3(x,y,z,t)\,, \qquad (x,y,z) \in S\,, \qquad t \geq 0,$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z,t)$ yechimi topilsin.

Yuqoridagi keltirilgan masalalar issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, ya’ni parabolik tipdagi tenglamalar uchun $boshlang\text{‘}ich - chegaraviy\ masalalar$ deyiladi.

Endi parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o‘rganishda eng ko‘p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo‘lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1.27}$$

misolida parabolik tipdagi tenglamalar uchun quyiladigan masalalar va ulardan birinchi chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligini keltiramiz. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar va ularni echish usullarini [7; 152-160, 8; 143-152, 9; 400-407, 10; 208-213, 18; 3-141, 16; 329-346] adabiyotlardan ko‘rish mumkin.

Birinchi chegaraviy masalaning qo‘yilishi.

Berilgan $Q\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$sohada (1.27) tenglamaning

$$u|_{t=0} = j(x) \qquad (0 \leq x \leq l) \tag{1.28}$$

boshlang‘ich va

$$u|_{x=0} = m_1(t), \quad u|_{x=l} = m_2(t), \qquad (0 \leq t \leq T\,) \tag{1.29}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimi topilsin. Bu yerda l uchi koordinata boshida bo‘lgan sterjenining uzunligini, T esa shu fizik jarayonni o‘rganish qancha vaqt davom etishini bildiradi, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ lar ko‘rsatilgan sohalarda berilgan funksiyalar.

Biz izlanayotgan $u(x,t)$ yechimni $\overline{Q}$ yopiq sohada uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz va shuning uchun berilgan $f(x,t)$, $\varphi(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiyalarni uzluksizligini va demak, $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(l)=\mu_2(0)$ bo‘lishini talab qilamiz.

Agar (1.27)-(1.29) masalada (1.29) chegaraviy shart o‘rniga

$$u_x|_{x=0}=\mu_1(t), \qquad u_x|_{x=l}=\mu_2(t) \tag{1.30}$$

shartlar berilgan bo‘lsa, masala ikkinchi chegaraviy masala, yoki (1.3) shartlar o‘rniga

$$(au+bu_x)|_{x=0}=m_1(t), \qquad (gu+du_x)|_{x=l}=m_1(t) \tag{1.31}$$

chegaraviy shartlar berilgan bo‘lsa, masala uchinchi chegaraviy masala deyiladi. Umuman $x=0$ va $x=l$ da beriladigan shartlarni turli kombinatsiyalarini olish hisobiga chegaraviy masalalar sonini ancha ko‘paytirish mumkin.

Qaralayotgan Q to‘rtburchakning $t=0$, $x=0$ va $x=l$ chiziqlar ustida yotgan chegaralari yig‘indisini Γ deb belgilaymiz.

Endi birinchi chegaraviy masalaning yagonaligi va mavjudligi masalasi bilan shug‘ullanamiz. Buning uchun parabolik tenglamalar uchun ekstremum prinsipi va undan kelib chiqadigan ba’zi bir xossalarni qaraymiz.

Teorema 1.1. (Ekstremum prinsipi). Yopiq $\overline{Q}$ sohada uzluksiz bo‘lgan va Q soha ichida bir jinsli

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{1.32}$$

tenglamani qanoatlantiradigan $u(x,t)$ funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziq ustida erishadi.

Isbot.Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiyaning Q to‘rtburchak $\{0<x<l, 0<t\le T\}$dagi eng katta qiymati M, Γ chiziq ustidagi eng katta qiymati esa m bo‘lsin va ekstremum prinsipida aytilgan tasdiq o‘rinli bo‘lmasin. Bu degani shunday $(\bar{x},\bar{t})$ ichki nuqta topilsinki, bu nuqtada $M>m$ bo‘lsin deganidir. Quyidagi yordamchi

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)+\frac{M-m}{2T}(\bar{t}-t)$$

funksiyani qaraylik. Q to‘rtburchakning Γ chegarasida (ya’ni $t=0,\, x=0$ va $x=l$ da)

$$u(x,t) \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$$

bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Shu bilan birga

$$\upsilon(\bar{x},\bar{t}) = u(\bar{x},\bar{t}) = M.$$

Demak, yordamchi $\upsilon(x,t)$ funksiya ham, $u(x,t)$ kabi o‘zining eng katta qiymatiga Γ da erishmaydi.

Shunday ekan, faraz qilaylik $\upsilon(x,t)$ funksiya o‘zining eng katta qiymatiga birorta ichki x_1,t_1 $0<x_1<l,\, 0<t_1<T$ nuqtada erishsin. U holda, matematik analiz kursidan ma’lumki, shu nuqtada

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_1^2} \le 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}_1} \ge 0$$

$$(\mathrm{t}_1 < T) \text{ bo‘lsa, } \frac{\partial v}{\partial t_1} = 0; \mathrm{t}_1 = \mathrm{T} \text{ bo‘lsa, } \frac{\partial u}{\partial t_1} \ge 0$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Demak, (x_1,t_1) nuqtada

$$u_t - a^2 u_{x\jmath} \qquad (1.33)$$

tengsizlik bajariladi. Ikkinchi tomondan

$$\upsilon_t - a^2\upsilon_{xx} = u_t - a^2 u_{xx} - \frac{M-m}{2T} = -\frac{M-m}{2T} < 0$$

bo‘lishi kerak. Bu esa (1.32) ga zid. Demak, $M>m$ bo‘ladigan nuqta topiladi deb qilgan farazimiz noto‘g‘ri va eng katta qiymat uchun prinsip isbotlandi. Eng kichik qiymat uchun ham xuddi shunday isbotlanadi.

Teorema 1.1. isbotlandi.

Endi ekstremum prinsipidan kelib chiqadigan va chegaraviy masalalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladiga ba’zi bir xossalarni isbotsiz keltiramiz [9; 408-415, 16; 329-346, 23; 1233-1257].

1-xossa. Agar $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo‘lib, yopiq $\overline{Q}$ sohada eng katta (eng kichik) qiymatiga ega bo‘lsa, u holda bu funksiya $\overline{Q}$ sohada o‘zgarmasdir.

2-xossa. Agar $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo‘lsa, u holda $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinli:

1) $\min\limits_{\Gamma} u(x,t) \le u(x,t) \le \max\limits_{\Gamma} u(x,t)$;

2) $|u(x,t)| \le \max\limits_{\Gamma} |u(x,t)|$.

3-xossa. Faraz qilaylik $u(x,t)$ funksiya issiqlik tarqalish tenglamasining yechimi bo‘lsin. Agar $\forall (x,t) \in \Gamma$ uchun $u(x,t) \ge 0 (\le 0)$ bo‘lsa, u holda $\forall (x,t) \in \overline{Q}$ uchun $u(x,t) \ge 0 (\le 0)$ o‘rinli bo‘ladi.

Isbotlangan ekstremum prinsipidan foydalanib (1.27)-(1.29) birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligini isbotlaymiz.

Teorema 1.2. Agar (1.27)-(1.29) masalaning yechimi mavjud bo‘lsa u yagonadir.

Isbot. Haqiqatan ham, agar yechim ikkita u_1 va u_2 desak, ularning ayirmasi $u = u_1 - u_2$ bir jinsli (1.32) tenglamani qanoatlantiradi va biz quyidagi masalaga kelamiz.

Berilgan $Q\{0 < x < l, 0 < t \le T\}$ sohada (1.32) tenglamaning

$$u|_{t=0} = 0 \qquad (0 \le x \le l) \tag{1.34}$$

boshlang‘ich va

$$u|_{x=0} = m_1(t), \quad u|_{x=l} = m_2(t), \qquad (0 \le t \le T) \tag{1.35}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

U holda ekstremum prinsipiga binoan $u(x,t)$ funksiyaning Q sohadagi eng katta qiymati ham, eng kichik qiymati ham nolga teng, demak $u \in 0$ yoki $u_1 = u_2$.

Teorema 1.2. isbotlandi.

Endi isbotlangan ekstremum prinsipidan foydalanib (1.27)-(1.29) birinchi chegaraviy masala yechimining turg'unligini olamiz.

Teorema 1.3. Agar (1.27)-(1.29) masalaning yechimi $f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalarga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $u_1(x,t)$ funksiya (1.27)-(1.29) masalaning $f(x,t), \varphi(x), \mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan yechimi, $u_2(x,t)$ funksiya (1.27)-(1.29) masalaning $f^*(x,t), \varphi^*(x), \mu_1^*(t)$ va ${\mu^*}_2(t)$ funksiyalarga bog'liq bo'lgan yechimi bo'lsin. Berilgan funksiyalar uchun

$$|f(x,t) - f^*(x,t)| < \varepsilon; \ \forall (x,t) \in Q;$$

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| < \varepsilon; \ 0 \le x \le l;$$

$$|\mu_i(t) - \mu_i^*(t)| < \varepsilon; \ i = 1,2, \ 0 \le t \le T.$$

tengsizliklar bajarilsin. U holda $\forall (x,t) \in Q$ uchun ekstremum prinsipidan kelib chiqqan 2-xossaga ko'ra

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \max_{\Gamma} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \max \left\{ \max_{\bar{Q}} |f(x,t) - f^*(x,t)|, \right.$$

$$\left. \max_{x \in [0,l]} |\varphi(x) - \varphi^*(x)|, \max_{t \in [0,T]} |\mu_i(t) - {\mu^*}_i(t)| \right\}.$$

bo'ladi. Bundan Q sohada $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik (1.27)-(1.29) masalaning turg'un ekanligini isbotlaydi.

Teorema 1.3. isbotlandi.

Matematik fizika tenglamalari deyilganda, albatta, o'z-o'zidan integral tenglamalar ham tushuniladi. Integral tenglamalar matematikaning turli sohalarida muhim rol o'ynaydi, ayniqsa nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega bo'lgan fizika, mexanika, texnika va boshqa sohalar masalalari integral tenglamalar bilan echiladi. Shu bilan birgalikda integral tenglamalar nazariyasi oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganishda ham keng qo'llaniladi.

1.3-§. Integral tenglamalar.

Matematik fizikaning juda ko'pgina chegaraviy masalalari integral tenglamalarga keltiriladi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida ham qaralayotgan parabolik tipdagi nolokol chegaraviy shartli masalalar issiqlik potensiallari usuli yordamida integral tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun ham ushbu magistrlik dissertatsiyada integral tenglamalarga oid ma'lumotlarni va ularni echish usullaridan ba'zilarini keltirib o'tamiz. Integral tenglamalarga oid ma'lumotlarni va asosiy tushunchalarni [9,13,15,18] adabiyotlarda ko'rish mumkin.

Ta'rif. Noma'lum funksiya integral ishorasi ostida qatnashgan har qanday tenglama integral tenglama deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $a \le x \le b$oraliqda, $K(x, y)$ funksiya esa $Q\{a \le x, y \le b\}$soha (kvadrat) da aniqlangan bo'lsin. U holda

$$j(x) - l\int_a^b K(x,y)j(y)dy = f(\mathrm{x}) \qquad (1.36)$$

tenglama $\varphi(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan chiziqli integral tenglama deb ataladi, bu yerda λ-sonli parametr. Izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiyaning argumenti x ham $[a,b]$ oraliqda o'zgaradi deb hisoblanadi.

$K(x, y)$ funksiya (1.36) tenglamaning yadrosi, $f(x)$ funksiya esa (1.36) tenglamaning ozod hadi deyiladi. Ozod had $f(x)$ aynan nolga teng yoki teng emasligiga qarab, (1.36) tenglama bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan tenglama deb ataladi.

Agar integral tenglama

$$\int_a^b K(x,y)j(y)dy = 0 \qquad (1.37)$$

ko'rinishda bo'lsa, u birinchi turdagi integral tenglama deb yuritiladi. Bundan kelib chiqqan holda, (1.36) tenglama ikkinchi turdagi integral tenglama deb ataladi.

Integrallash chegaralari a va b lar chekli ham cheksiz ham bo'lishi mumkin.

Agar (1.36) tenglamada $K(x,y)$ yadro $Q\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda ikkala argumenti bo‘yicha ham uzluksiz va $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa yoki umumiyroq bo‘lgan

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < +\infty \tag{1.38}$$

$$|f(x)|^2 dx < +\infty \tag{1.39}$$

shartlarni qanoatlantirsa (1.36) tenglama 2-tur Fredgolm tenglamasi deb ataladi. Yuqoridagi shartlarning bajarilishiga doir ba’zi bir misollarni keltiramiz.

Misollar. 1) Quyidagi

$$j(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x + y^2) j(y) dy + \sin x$$

tenglama 2-turdagi Fredgolm tenglamasidir, chunki $K(x,y) = x + y^2$ yadro va $f(x) = \sin x$ ozod had mos ravishda $Q\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda va [0,1] kesmada uzluksiz funksiyalardir.

2)

$$j(x) = \int_0^\infty e^{-xy} j(y) dy + e^{-\frac{x^2}{2}}$$

tenglama ham Fredgolm tenglamasidir, chunki

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} K^2(x,y) dxdy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} e^{-2xy} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx < +\infty$$

3) $j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} j(y) dy + f(x)$

tenglama Fredgolm tenglamasi emas.

Chunki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x,y)|^2dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|x-y|}dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}e^{-2|x-y|}dy + \int_{x}^{+\infty}e^{-2|x-y|}dy = \int_{-\infty}^{+}$$

ohirgi integral esa mavjud emas.

Fredgolm tipidagi tenglamalarni oʻrganish bilan birga Volterra tipidagi tenglamalar haqida ham qisqacha maʼlumotlar keltirib oʻtamiz.

Quyidagi

$$J(x) - l\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{1.40}$$

tenglama 2-turdagi chiziqli Volterra integral tenglamasi deb ataladi.

(1.40) Volterra integral tenglamasining (1.36) Fredgolm tenglamasidan asosiy farqi Shundan iboratki, integral chegarasining biri oʻzgaruvchi ekanligidadir. Umumiy tushunchalarni (1.36) Fredgolm tenglamasiga nisbatan keltiramiz, bu tushuncha va taʼriflar esa (1.40) Volterratenglamasi uchun ham oʻrinli boʻladi.

Volterra tenglamalarini Fredgolm tenglamalarining xususiy holi deb qarash mumkin. Volterra tenglamasining yadrosi $K(x,y)$ $a \le x \le b$kesmada aniqlangan. Agar uni $y > x$ lar uchun

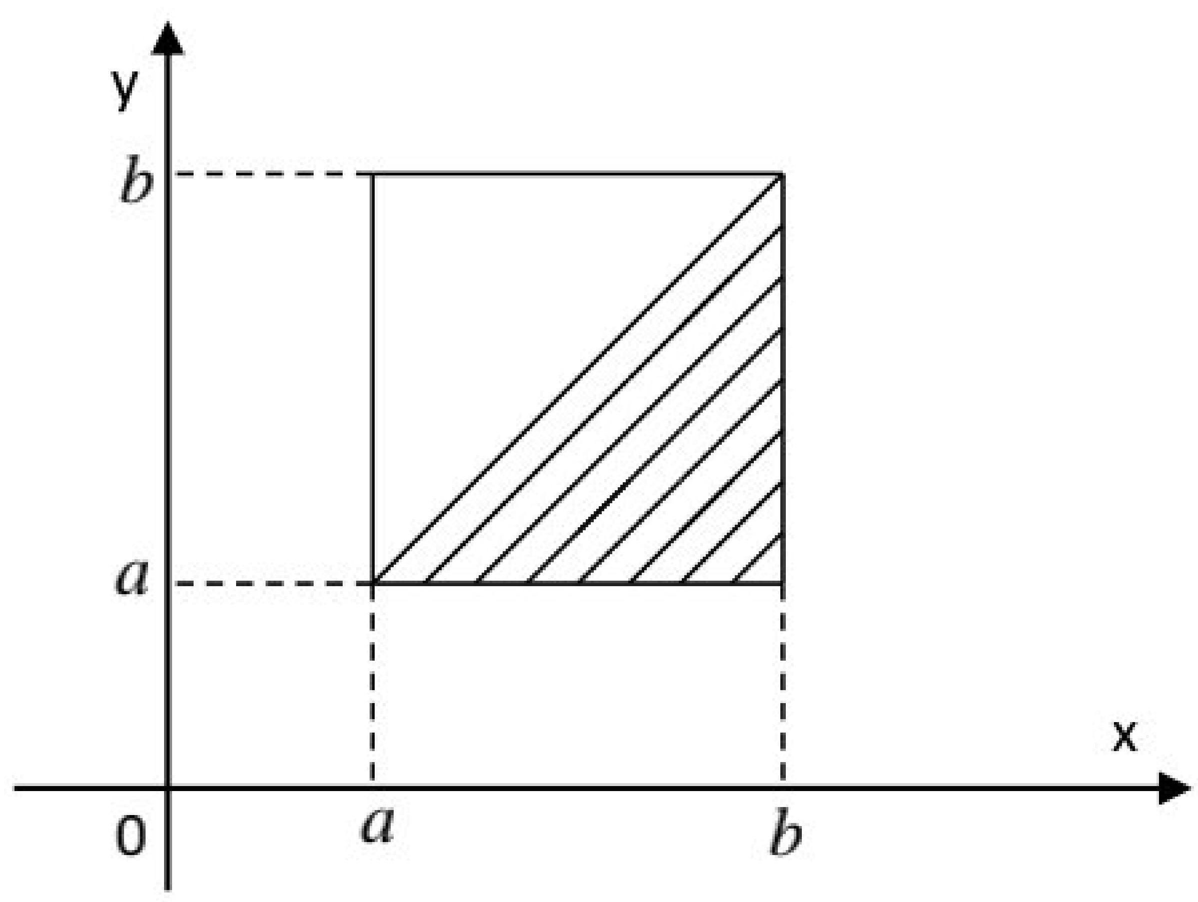
$$K(x,y)\epsilon 0 \quad x < y \le b$$

deb aniqlasak, hosil boʻlgan yangi

$$\overline{K}(x,y) = \begin{cases} K(x,y), \\ 0\,, \end{cases}$$

yadroni Fredgolm yadrosi deb qarash mumkin.

Bu $\overline{K}(x,y)$ yadro kvadratning (1-chizma) shtrixlangan qismida $K(x,y)$ yadro bilan ustma-ust tushadi, qolgan



1-chizma

qismida esa aynan nolga teng. Shunday aniqlangan $\overline{K}(x,y)$ yadro uchun

$$j(x) - l\int_a^b \overline{K}(x,y)j(y)dy = f(x)$$

tenglama Fredgolm tenglamasi bo‘lib, u Volterra tenglamasining aynan o‘zidir.

Demak, Fredgolm tenglamasi uchun olingan barcha natijalar, uning xususiy holi bo‘lgan Volterra tenglamalari uchun ham o‘rinli bo‘lishi shubhasiz ekan.

Ammo Volterra tenglamalarining faqat o‘zlarigagina hos xususiyatlari ham borki, ular faqat bu tenglamalarni yechishda alohida ahamiyat kasb etadi.

Endi esa integral tenglamalarni yechish usullaridan ketma-ket yaqinlashish va rezolventa usullarini keltirib o‘tamiz [5,6,9,13,15,18].

Quyidagi Fredgolm tipidagi tenglamani qaraylik,

$$j(x) = f(x) + l\int_a^b K(x,y)j(y)dy \tag{1.41}$$

$K(x,y)$ yadro Q kvadratda, $f(x)$ esa $[a,b]$ da uzluksiz funksiyalar bo‘lsin. Shu shartlar bajarilganda (1.41) tenglamani echish uchun kema-ket yaqinlashish usulini qo‘llaymiz. Buning uchun yechim $\varphi(x)$ ni parametr λ ning butun va musbat darajalari bo‘yicha yoyilgan qator ko‘rinishida qidiramiz, ya’ni

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\lambda + \varphi_2(x)\lambda^2 + \cdots \tag{1.42}$$

Agar (1.42) qator x bo‘yicha $[a,b]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, uni (1.41) tenglamaga qo‘yib, hadma-had integrallab, so‘ngra λ ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni o‘zaro tenglab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$j_0(x) = f(x), \quad j_1(x) = \int_a^b K(x,y)j_0(y)dy$$

$$j_2(x) = \int_a^b K(x,y)j_1(y)dy$$

va umuman

$$j_n(x) = \int_a^b K(x,y)j_{n-1} \text{ (n=1,2,…)} \tag{1.43}$$

Barcha $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,... funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Agar λ parametr yetarli darajada kichik bo'lsa, (1.43) ketma-ketlikdan tuzilgan qator absolyut va tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz. U holda (1.43) qatorning yig'indisi $\varphi(x)$ ham uzluksiz funksiya bo'ladi va (1.41) tenglamani qanoatlantiradi.

$f(x)$ va $K(x,y)$ larning yopiq sohalarda uzluksiz ekanligidan $|f(x)| \leq m, \qquad |K(x,y)| \leq M$

deb yoza olamiz, bu yerda m, M -lar musbat o'zgarmas sonlar.

Shunga asoslanib, (1.43) formulalardan $\varphi_n(x)$ funksiyalar uchun quyidagi baholarni olamiz:

$$j_0(x) \leq m, \qquad |j_1(x)| \leq \int_a^b |K(x,y)||j_0(y)$$

$$\leq mM \int_a^b dy = mM(b-a),$$

$$|j_2(x)| \leq \int_a^b |K(x,y)||j_1(y)|dy \leq mM(b-a)\int_a^b dy = mM^2(b-a)^2$$

va umuman

$$|j_n(x)| \leq m[M(b-a)]^n$$

Demak (1.42) qatorning umumiy hadi uchun

$|j_n(x)l^n| \leq m[|l|M(b-a)]^n$

bahoni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, (1.42) qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, agarda

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{1.44}$$

shart bajarilsa. Shunday qilib, (1.41) tenglama uchun (1.44) shart o'rinli bo'lsa, u holda bu tenglama yechimga ega va bu yechim yagonadir. Endi esa yechimning yagonaligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, (1.41) tenglamaning ikkita yechimi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ mavjud bo‘lsin. U holda $u(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ (1.32) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning yechimi bo‘ladi, ya’ni

$$u(x) = l\int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

Bundan$u_0 = \max_{a\le x\le b}|u(x)|$ deb, $u_0 \le |l|M(b-a)u_0$ ekanligini topamiz. Bu tengsizlik esa (1.44) ga ziddir. Demak, $u_0 = 0$ yoki$u(x) \in 0$, ya’ni $\varphi(x)=\psi(x)$.

Demak, yagonaligi isbotlandi.

Biz Yuqorida Fredgolm tenglamasini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechishni keltirib o‘tdik. Endi esa Volterra tenglamasini ham ketma-ket yaqinlashish usuli bilan echishni ko‘rib o‘tamiz.

Aytaylik bizga, quyidagi Volterra tenglamasi berilgan bo‘lsin

$$j(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)j(y)dy \tag{1.45}$$

Bu yerda ham $f(x)$ va $K(x,y)$ lar uluksiz funksiyalar bo‘lsin. Avvalgidek yechimni (1.42) qator ko‘rinishda izlaymiz va $\varphi_n(x)$ funksiyalar uchun ushbu formulalarni hosil qilamiz:

$$j_0(x) = f(x),\ \ j_n(x) = \int_a^b K(x,y)j_{n-1}(y)dy,\ \ (n = 1,2,\dots)$$

Yuqoridagidek $|f(x)| \le m,\ \ |K(x,y)| \le M$ ekanligidan quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$|j_0(x)| \le m, \qquad |j_1(x)| \le \int_a^x |K(x,y)||j_0(x)|dy \le mM(x-a)$$

$$|j_2(x)| \le \int_a^x |K(x,y)||j_1(x)|dy \le mM^2\int_a^x (y-a)dy = mM^2\frac{(x-a)^2}{2}$$

Vaumuman

$$|j_n(x)| \le m\frac{[M(x-a)]^n}{n!}.$$

Bu tengsizliklardan ko‘rinadiki, $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x) l^n$qatorning hadlari mos ravishda $m\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|l| M(x-a)]^n}{n!}$qatorning hadlaridan katta emas. Keyingi qator esa λ ning ixtiyoriy chekli qiymatlari uchun tekis yaqinlashadi va

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|l| M(x-a)]^n}{n!} = me^{|l| M(x-a)}$$

Demak, $\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x) l^n$ qator absolyut va tekis yaqinlashadi, uning yig‘indisi $\varphi(x)$ (1.42) tenglamani qanoatlantiradi. Endi esa topilgan yechimning yagonaligini ko‘rsatamiz. Bu yechim esa ixtiyoriy fiksirlangan λ uchun yagonadir.

Haqiqatan ham, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ (1.40) tenglamaning ikkita uzluksiz yechimlari desak, u holda $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ funksiya bir jinsli

$$u(x) = l \int_a^x K(x, y) u(y) dy \tag{1.46}$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi. (1.45) dan quyidagi olamiz

$$|u(x)| \leq |l|^2 m_* M_* (x-a) \tag{1.47}$$

bunda $m_* = \max |u(x)|$, $M_* = \max |K(x, y)|$, (1.47) bahoni (1.46) tenglikning o‘ng tomoniga qo‘yib

$$|u(x)| \leq |l|^2 m_* M_*{}^2 \frac{(x-a)^2}{2}$$

ga ega bo‘lamiz va shu protsessni davom ettirib

$$|u(x)| \leq |l|^n m_* M_*{}^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik ixtiyoriy n uchun o‘rinli bo‘lganligidan, $n \to \infty$ desak $u(x) = 0$ bo‘lishini hosil qilamiz yoki $\varphi(x) = \psi(x)$.

Shunday qilib, biz xulosa qilamizki, Volterra tipidagi (1.45) tenglamada ozod had $f(x)$ va yadro $K(x, y)$ uzluksiz bo‘lsa, u holda bu tenglama λ ning har qanday chekli qiymati uchun birdan bir yechimga ega bo‘lar ekan.

Ikkinchi turdagi Fredgolm tenglamalari uchun esa bunday emas, ya'ni, ular λ ning har qanday qiymati uchun ham yechimga ega bo'lavermaydi, ba'zi λ lar uchun esa bir nechta yechimlarga ega bo'lishi mumkin.

Endi esarezolventa tushunchasini ko'rib chiqamiz [5,6,9,13,15,18].

Biz yuqorida (1.41) Fredgolm tenglamasi uchun (1.44) shart bajarilganda birdan-bir yechimga ega ekanligini ko'rdik. Endi shu yechimni boshqacha ko'rinishda yozamiz. Buning uchun esa takroriy yadrolar tushunchasini kiritamiz. Takroriy $K_n(x,y)$ yadrolar berilgan $K(x,y)$ yadro orqali quyidagicha ifodalanadi

$$K_1(x,y) = K(x,y), \quad K_n(x,y) = \int_a^b K_{n-1}(x,y_1)K(y_1,y)dy_1 \qquad (1.48)$$

$K(x,y)$ yadroning Q kvadratda uzluksizligidan har bir takroriy yadroning ham Q da uzluksizligi kelib chiqishi shubhasizdir.

Takroriy yadrolarni (1.48) dagidek birini ikkinchisi orqali emas, hammasini berilgan $K(x,y)$ yadro orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham

$$K_1(x,y) = K(x,y)$$

$$K_2(x,y) = \int_a^b K_1(x,y_1)K(y_1,y)dy_1 = \int_a^b K(x,y_1)K(y_1,$$

$$K_3(x,y) = \int_a^b K_2(x,y_1)K(y_1,y)dy_1 =$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y_2)K(y_2,y_1)dy_2 = \int_a^b K(y_1,y)dy_1$$

Yoki

$$K_3(x,y) = \int_a^b \int_a^b K(x,y_2)K(y_2,y_1)\,K(y_1,y)dy_1dy_2$$

va umumiy holda

$$K_n(x,y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x,y_{n-1})K(y_{n-1},y_{n-2}) \dots K(y_2,y_1)K(y_1,y)dy_1dy_2 \dots . dy_{n-1} \qquad (1.49)$$

Bu formulada integrallash tartibi ixtiyoriy bo‘lishi mumkin. Yadro $K(x,y)$ uchun$|K(x,y)| \leq M$ ekanligini nazarda tutib, (1.49) formuladan quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$|K_n(x,y)| \leq M_n(b-a)^{n-1} \tag{1.50}$$

Endi takroriy yadrolardan tuzilgan quyidagi qatorni olaylik

$$K_1(x,y) + K_2(x,y)l + K_3(x,y)l^2 + L = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,y)l^n \tag{1.51}$$

Bu qator λ uchun shart bajarilganda Q kvadratda absolyut va tekis yaqinlashadi, chunki (1.50) ga asosan (1.51) qatorning umumiy hadi uchun

$$|K_{n+1}(x,y)l^n| \leq M^{n+1}(b-a)^n|l|^n = M[|l|M(b-a)]^n$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (1.51) qatorning yig‘indisini $R(x,y;\lambda)$ deb belgilaylik, ya’ni

$$R(x,y,l) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,y)l^n \tag{1.52}$$

Yuqorida biz (1.41) Fredgolm tenglamasining yechimini (1.44) shart bajarilganda (1.42) qator ko‘rinishda topgan edik. Endi shu$\sum_{n=0}^{\infty} j_n(x)l^n$ qatordagi har bir $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,...)$ funksiyani berilgan $f(x)$ funksiya orqali ifodalashga urinib ko‘raylik:

(1.43) formulalardan quyidagilarni olamiz:

$$j_0(x) = f(x), \qquad j_1(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

$$j_2(x) = \int_a^b K(x,y)j_1(x)dy = \int_a^b \int_a^b K(x,y)K(y,y_1)f(y_1)dy$$

$$= \int_a^b K_2(x,y_1)\, f(y_1)dy_1$$

davom etsak,

$$j_n(x) = \int_a^b K_n(x,y)f(y)dy,$$

hosil bo‘ladi.

$\varphi_n(x)$ uchun topilgan formulalarni (1.42) qatorga qo‘yib topamiz:

$$j(x) = f(x) + l\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b K_{n+1}(x,y)l^n f(y)dy$$

yoki Q kvadratda (1.17) qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligini nazarda tutib quyidagini yoza olamiz

$$j(x) = f(x) + l\int_a^b R(x,y;l)f \qquad (1.53)$$

Eslatib o‘tamizki, (1.53) formula (1.9) shart bajarilgandagina o‘rinli bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, (1.52) formula bilan aniqlangan $R(x,y;\lambda)$ funksiya ozod had $f(x)$ ga bog‘liq emas. Bu funksiya $K(x,y)$ yadroning yoki (1.41) tenglamaning rezolventasi deb ataladi.

Endi integral tenglamalar nazariyasida muhim o‘rin tutadigan Fredgolm teoremalarini keltirib o‘tamiz [6,15,17,18].

Buning uchun avvalo, o‘zgaruvchilari ajraladigan yadroli Fredgolm tenglamalarini qaraymiz.

Ta’rif. Agar

$$j(x) - l\int_a^b K(x,y)j(y)dy = f(x) \qquad (1.54)$$

Fredgolm tenglamasining yadrosi

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x \qquad (1.55)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, bu yadro o‘zgaruvchilari ajraladigan (aynigan) yadro deb ataladi.Bu yerda $p_i(x)$ va $q_i(y)$, $a \le x \le b,\ a \le y \le b$berilgan haqiqiy uzluksiz funksiyalar. $p_i(x)$ va $q_i(y)$ funksiyalar sistemasining har biri chiziqli bog‘liq emas deb hisoblaymiz, aks holda (1.55) dagi qo‘shiluvchilar soni n kamaytirilgan bo‘lar edi. (1.55) ni (1.54) ga qo‘ysak

$$j(x) - l\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)j(y)dy = f(x) \qquad (1.56)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olish mumkin:

$$j(x) = f(x) + l\sum_{i=1}^{n} c_i \qquad (1.57)$$

bunda

$$c_i = \int_a^b q_i(y)j(y)dy, \qquad i = 1,2 \tag{1.58}$$

noma'lum o'zgarmas sonlar, chunki $\varphi(y)$ noma'lum.

Shu o'zgarmas c_i larni shunday tanlab olaylikki, (1.57) bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya (1.56) tenglamani qanoatlantirsin. Shu maqsadda, (1.57) ni (1.56) ga qo'yamiz va natijada hosil bo'lgan tenglikni ushbu ko'rinishga keltiramiz.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)[c_i - \int_a^b q_i(y)f(y)dy - l\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b q_i(y)p_j(y)dy] = 0$$

Bundan $p_i(x)$ funksiyalarning chiziqli bog'liq emasligidan (boshidan shunday deb hisoblab kelinayotgan edi)

$$c_i - \int_a^b q_i(y)f(y)dy - l\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b q_i(y)p_j(y)dy = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikni esa yana boshqacha yozib olish mumkin.

$$c_i - l\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = g_i, \qquad i = 1, \tag{1.59}$$

buyerda

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(y)p_j(y)dy, \qquad g_i = \int_a^b f(y)q_i($$

Shunday qilib, (1.56) tenglamaning $\varphi(x)$ yechimini topishni (1.59) algebraik tenglamalar sistemasini echishga keltirildi.

Shu bilan birga (1.56) tenglamaning bir jinsli holi, ya'ni

$$j(x) - l\sum_{j=1}^{n} \int_a^b p_i(x)q_i(y)j(y)dy = 0 \tag{1.60}$$

tenglama ham , xuddi yuqoridagi kabi

$$c_i - l\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.61}$$

bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Bizga algebra kursidan ma'lumki, (1.59) tenglamalar sistemasi har doim (ixtiyoriy o'ng tomon γ_i lar uchun) birdan-bir yechimga ega bo'ladi, agarda

$$det D(l) \neq 0 \tag{1.62}$$

o'rinli bo'lsa. Bu yerda

$$D(\lambda)=\begin{Vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \cdots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \cdots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

Ko'rinib turibdiki, $\det D(\lambda)$ λ parametr ga nisbatan n-chi darajali ko'phad (polinom)dir. Demak (1.28) shart λ $\det D(\lambda)=0$ tenglamaning ildizlari bo'lgandagina buziladi. Bunday ildizlarni $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ desak, bilamizki $m \leq n$ bo'ladi. Mana shu λ_k $(k=1,2,...,m)$ ildizlar $K(x,y)$ yadroning maxsus sonlari (qiymatlari) deyiladi.

Demak, λ parametr ning $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ sonlardan farqli har qanday qiymatida (1.59) sistema yagona yechim $c_1,c_2,...,c_n$ ga ega ekan. Shu sistemani echishda topilgan c_i larni (1.57) tenglikning o'ng tomoniga qo'yib, (1.56) integral tenglamaning $\varphi(x)$ yechimini olamiz.

Shunday qilib, Fredgolmning quyidagi 1- teoremasi isbotlandi:

Teorema 1.4. Agar λ parametr $K(x,y)$ yadroning maxsus soni bo'lmasa, u holda (1.56) integral tenglama har qanday uzluksiz o'ng tomon $f(x)$ uchun yagona yechimga ega.

Shu bilan birga, biz qarayotgan$det D(l) \neq 0$ bo'lgan holda (1.57) bir jinsli integral tenglama faqat trivial (aynan nolga teng) yechimga ega bo'ladi.

Haqiqatan, agar $f(x) \in 0$ bo'lsa, u holda (1.60) ga asosan hamma $g_i \in 0$ bo'ladi va (1.62) algebraik sistema, determinanti noldan farqli bo'lgani uchun faqat aynan nol $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ yechimga ega bo'ladi. Bundan (1.79) ga asosan $j(x) \in 0$ bo'ladi.

Shuni hisobga olib, Fredgolmning yukorida keltirilgan 1- teoremasini yana quyidagicha ifodalash ham mumkin: (1.37) integral tenglama, har qanday uzluksiz $f(x)$ funksiya berilganda, yagona yechimga ega bo‘lishi uchun unga mos kelgan bir jinsli (1.61) tenglama faqat nol $(j(x) \in 0)$yechimga ega bo‘lishi zarur va etarlidir.

Shuni eslatib o‘tamizki, (1.54) Fredgolm tenglamasiga mos kelgan bir jinsli tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi

$$j(x) - l\int_a^b K(x,y)j(x) = 0 \qquad (1.64)$$

Quyidagi bir jinsli tenglama

$$y(x) - l\int_a^b K(x,y)y(y)dy = 0 \qquad (1.65)$$

esa, (1.54) tenglamaga qo‘shma tenglama deyiladi. Demak, (1.54) tenglamaning qo‘shma tenglamasini hosil qilish uchun $K(x,y)$ yadro haqiqiy funksiya bo‘lganda, uning o‘zgaruvchilarining o‘rinlarini almashtirishning o‘zi kifoya, ya’ni $K(x,y)$ yadro $K(y,x)$ yadroga almashtiriladi. Agar $K(x,y)$ kompleks funksiya bo‘lsa, uning qo‘shma yadrosi $\overline{K(y,x)}$ bo‘ladi, bundagi chiziq kompleks funksiyadan uning qo‘shmasiga o‘tish zarurligini ko‘rsatadi.

Yuqorida berilgan ta’rifga asosan (1.61) bir jinsli tenglamaning qo‘shma tenglamasi

$$y(x) - l\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(y)q_i(x)y(y)dy = 0 \qquad (1.66)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu qo‘shma tenglama esa, (1.61) sistemaga qo‘shma bo‘lgan

$$d_i - l\sum_{j=1}^{n} a_{ji}d_j = 0 \qquad (1.67)$$

algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi, bu yerda

$$d_i = \int_a^b p_i(y)y(y)dy, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

Bu yerda (1.67) tenglikning (1.62) tenglikdan farqi α_{ij} larning α_{ji} larga almashtirilganidadir, ya’ni boshqacha qilib aytganda $\|\alpha_{ij}\|$ matritsa unga qo‘shma bo‘lgan $\|\alpha_{ji}\|$ matritsa bilan almashtirilmoqda.

Endi faraz qilaylik, λ maxsus sonlar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ lardan biri bilan ustma-ust tushsin va $D(\lambda)$ matritsaning rangi r ga teng bo‘lsin. U holda chiziqli algebra kursidan ma’lumki, bir jinsli algebraik sistema (1.62) va unga qo‘shma bo‘lgan (1.67) algebraik sistema ham $n-r$ chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘ladi.

Bu yechimlarni

$$c_1^j, c_2^j, \cdots, c_n^j \text{ va } d_1^j, d_2^j, \cdots d_n^j, \; j=1,2,...,n-r \tag{1.68}$$

deb belgilaylik.

Topilgan c_i^j larni, $f(x) \in 0$ deb turib,(1.64) tenglikka qo‘ysak

$$j_j(x) = l\sum_{i=1}^{n} c_i^j p_i(x), \qquad j = 1,2, ... ,\text{n-r} \tag{1.69}$$

yechimlarni olamiz. Huddi shuningdek

$$y_j(x) = l\sum_{i=1}^{n} d_i^j q_i(x), \qquad j = 1, ... ,\text{n-r} \tag{1.70}$$

yechimlarni hosil qilamiz. (1.69) va (1.70) formulalar bilan aniqlangan $\varphi_j(x)$ va $\psi_j(x)$ funksiyalar (1.61) va (1.65) bir jinsli tenglamalarning $n-r$ chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlaridir.

Shunday qilib, biz quyidagi Fredgolmning 2-teoremasini isbotladik:

Teorema 1.5.(1.56) tenglamaga mos kelgan bir jinsli (1.61) tenglama va unga qo‘shma bo‘lgan (1.65) bir jinsli tenglama teppa-teng $(n-r)$ tadan chiziqli erkli yechimlarga ega.

$\varphi_j(x)$ $j=1,..,n-r$ funksiyalar $K(x,y)$ yadroning λ_k maxsus songa mos maxsus funksiyalari deyiladi.

Bizga algebra kursidan yana Shu ham ma’lumki, agar $\lambda = \lambda_k$ maxsus son bo‘lsa, u holda (1.59) algebraik sistema har qanday o‘ng tomoni γ_i $i=1,2,...,n$ lar uchun ham yechimga ega bo‘lavermaydi. Bu sistemaning yechimga ega bo‘lishi uchun γ_i lar

$$\sum_{i=1}^{n} g_i d_i^j = 0, \qquad j = 1, ...,\text{n-r} \tag{1.71}$$

shartlarni qanoatlantirishi zarur va etarlidir. Bu (1.71) shartlar (1.61) va (1.61)larga binoan quyidagi shartlarga teng kuchlidir:

$$\int_a^b f(x)y_j(x)dx = l\sum_{i=1}^n d_i^j \int_a^b q_i(x)f(x)dx = 0 \qquad (1.72)$$

$$j = 1,...,n-r.$$

Endi Fredgolmning 3 - teoremasini keltiramiz:

Teorema 1.6. (1.21) integral tenglama yechimga ega bo‘lishi uchun uning o‘ng tomoni $f(x)$ bir jinsli qo‘shma (1.31) tenglamaning barcha yechimlari $\psi_j(x)$ $j = 1,...,n-r$ ga ortogonal bo‘lishi zarur va etarli.

Endi 2-turdagi Fredgolm tenglamasi

$$j(x) - l\int_a^b K(x,y)j(y)dy = f(x) \qquad (1.73)$$

ni ixtiyoriy λ uchun qaraylik. Bu deganimiz λ parametrning (1.44) shartga bo‘ysinishi talab qilinmaydi.

Matematik analiz kursidan ma’lumki, agar $K(x,y)$ funksiya $q\{a \le x \le b, a \le y \le b\}$ kvadratda uzluksiz bo‘lsa, u holda har qanday oldindan berilgan $\varepsilon > 0$ uchun Shunday chiziqli erkli uzluksiz funksiyalar sistemasi $\{p_i(x)\}$, $a \le x \le b$, va $\{q_i(y)\}$, $a \le y \le b$ topiladiki

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y) + K_\epsilon \qquad (1.74)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va Q kvadratda

$$(b-a)|K_\varepsilon(x,y)| < \varepsilon \qquad (1.75)$$

tengsizlik bajariladi.

Veyershtrass teoremasiga binoan $p_i(x)$ va $q_i(y)$ lar sifatida polinomlar olinishi mumkin. Qaralayotgan (1.38) tenglama yadrosi $K(x,y)$ ni (1.39) formula orqali ifodalab, (1.73) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz

$$j(x) - l\int_a^b K_e(x,y)j(y)dy = F(x) \qquad (1.76)$$

bu yerda

$$F(x) = f(x) + l\sum_{i=1}^n \int_a^b p_i(x)q_i(y)j(y)dy \qquad (1.77)$$

Har qanday fiksirlangan λ uchun ε ni shunchalik kichik qilib tanlaymizki,

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon} \tag{1.78}$$

tengsizlik bajarilsin. U holda (1.76) tenglama uchun (1.78) ga binoan (1.44) shart bajariladi, demak, (1.76) tenglama yagona yechimga ega va bu yechim (1.73) formulaga asosan $K_\varepsilon(x, y)$ yadroning $R_\varepsilon(x, y; \lambda)$ rezolventasi orqali yoziladi:

$$j(x) = F(x) + l \int_a^b R_e(x, y; l)F \tag{1.79}$$

Bu formuladagi $F(x)$ lar o‘rniga uning (1.77) tenglik orqali ifodalangan qiymatini qo‘yib, ma’lum va noma’lumlarni ajratib topamiz:

$$j(x) - l \int_a^b \sum_{i=1}^n r_i(x) q_i(y) j(y) dy = \mathrm{g(x)} \tag{1.80}$$

bunda

$$r_i(x) = p_i(x) + l \int_a^b R_e(x, y; l) p_i$$

$$g(x) = f(x) + l \int_a^b R_e(x, y; l) f$$

Shunday qilib, ixtiyoriy chekli λ uchun (1.73) Fredgolm integral tenglamasi o‘zgaruvchilari ajraladigan yadroli (1.80) tenglamaga ekvivalent ekan.

Bunday (1.80) tenglamalar esa Yuqorida har qanday chekli λ uchun batafsil o‘rganildi. Ana shu olingan natijalardan, Fredgolm teoremalaridan kelib chiqib, quyidagi Fredgolm alternativalarini keltiramiz:

λ ning har bir chekli qiymati uchun, (1.73) ga mos bir jinsli $(f \in 0)$ integral tenglama noldan farqli yechimga ega emas va bu holda (1.38) tenglama har doim ixtieriy o‘ng tomon f uchun yagona yechimga ega, yoki bir jinsli integral tenglama va unga qo‘shma bo‘lgan bir jinsli tenglama ham bir xil sondagi chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega va bu holda (1.73) integral tenglama har qanday $f(x)$ uchun yechimga ega bo‘lavermaydi, yechimga ega bo‘lishi uchun esa uning o‘ng tomoni $f(x)$ bir jinsli qo‘shma (1.65) tenglamaning barcha chiziqli erkli yechimlari (1.70) ga ortogonal bo‘lishi zarur va etarlidir.

Odatda, chegaraviy masalalarni yechish integral tenglamalarga keltirilsa, aynan yuqorida keltirilgan Fredgolm teoremalari keng foydalaniladi.

I-bob bo‘yicha xulosalar.

Ushbu bobda, issiqlik tarqalish tenglamalarini keltirib chiqarish, ekstremum prinspi va chegaraviy masalalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladigan ba’zi bir xossalar, teoremalar ularning mavjudlik va yagonaligi isbotlari, qattiq jism va izotrop jismda issiqlikning tarqalish tenglamasi, parabolik tipdagi tenglamalar issiqlik tarqalishi va diffuziya hodisalarini o‘rganishda eng ko‘p uchraydigan, asosan, parabolik tenglamalarning eng sodda vakili bo‘lgan-sterjenda issiqlik tarqalishi tenglamasikeltirilgan.

Ushbu bobda,xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy fundamental tushunchalaridan biri ko‘p o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni turlarga ajratish o‘rganilgan. Shu bilan birga issiqlik tarqalish tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi keltirilgan. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, boshlang‘ich-chegaraviy masalaning qo‘yilishi matematik fizika tenglamalari fanining klassik masalaridan biri bo‘lib, unda muhim ahamiyat kasb etadi.

II BOB. FILTRATSIYA TENGLAMASI UCHUN NOMA'LUM CHEGARALI MASALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Noma'lum chegarali masalar bu qisman differensial tenglama uchun chegara masalalarining maxsus turi bo'lib, u moddaning faza holatining o'zgarishini tavsiflaydi. Bunda muhit pozitsiyasi vaqt o'tishi bilan o'zgarib turadi. Faza o'rtasida aniq ko'rsatilmagan va vaqt o'tishi bilan o'zgarishi mumkin bo'lgan muhitning mavjudligi bunday muammolarning o'ziga xos xususiyati hisoblanadi. Muhit faza chegaralarining siljish tezligi fazali muhitda qo'shimcha shart bilan belgilanadi, bu masalani chiziqli bo'lmagan shaklga keltiradi Bunday masalalar harakatlanuvchi chegara masalasi yoki chegaralar o'zgarishi masalasi deb ham ataladi. Bu bu bobda noma'lum chegarali masalaning qo'yilishi, dastlabki aprior baholar, yechimning yagonaligi va mavjudligini keltiramiz.

2.1-§. Noma'lum chegarali chiziqsiz chegaraviy shartli masalalar

Noma'lum chegarali masalasining yechilishi harorat yoki konsentratsiya miqdorini hisoblash va fazalar chegaralarining har xil vaqtdagi holatini aniqlashdan iborat.Ushbu masalani yechishdagi asosiy qiyinchiliklar, harakatlanuvchi fazalar chegaralari haroratini yoki konsentratsiya qiymatlarini hisoblash uchun o'zgaruvchan muhitlarni tashkil etishi bilan bog'liq va bu fazalar chegaralarining pozitsiyasi oldindan ma'lum emas va ularni yechim paytida ham aniqlash kerak.

Noma'lum chegarali masalasini yechishning analitik va sonli usullari mavjud. Shu bilan birga, noma'lum chegarali masalaning yechimini yopiq analitik shaklda topish oddiy masala emas, uning yechimi faqat masalaning soddalashtirilgan formulasi ko'rib chiqilganda cheklangan miqdordagi holatlar uchun mumkin.

Noma’lum chegarali masalasining yechishning sonli usullari keng tarqalgan. Mavjud sonli usullarni taxminan ikki guruhga bo‘lish mumkin. Birinchi guruhga fazalar chegarasini tanlamaslikka va butun hisoblash maydonida umumiy tenglamadan foydalanishga imkon beradigan uchidan uchigacha hisoblash usullari kiradi.Ikkinchi guruhga fazalar chegaralarining pozitsiyasini aniq belgilashni nazarda tutadigan usullar kiradi.Uchidan uchigacha hisoblash usullarining asosiy xususiyati – bu fazali chegaralarni pozitsiyasini aniq kuzatish zarurati yo‘qligi,bu ko‘p o‘lchovli va ko‘p fazali masalalarni yechishda juda samarali bo‘lib chiqadi.Ushbu yondashuvni qo‘llash uchun asl muammo interfeyslarda uzluksiz koeffitsientlar bilan bitta tenglama shaklida umumlashtirilgan formulada yozilishi kerak.Berilgan masalani yechish uchun sonli algoritm qurish uchun uzilish koeffitsienlarini ma’lum bir oraliqda tekislash protsedurasi amalga oshiriladi.Ushbu usul A.A.Samarskiy va B.M.Budak asarlarida taklif qilingan. Bu usulning kamchiliklari interfaza chegaralarining o‘rnini aniqlashning past aniqligi.

Uchidan uchigacha hisoblash usullari orasida darajani belgilash usuli va fazali maydon usuli kengroq qo‘llaniladi.

Amaliyotda interfaza chegaralari harakatini aniq kuzatib boradigan usullardan keng foydalaniladi. Ushbu guruhning barcha usullari hisob-kitoblar bir xil yoki bir xil bo‘lmagan to‘rlarda olib borilganda,chekli farq usulini qo‘llash g‘oyasiga asoslangan.Bunday holda har doim harakatlanuvchi chegara hisoblash tarmog‘ining qaysi tugunlari o‘rtasida joylashganligi yoki qaysi tugun orqali o‘tishi aniqlanadi.Ulardan eng ko‘p qo‘llaniladiganlari o‘zgaruvchan vaqtni qadamlash usuli va oldingi fiksatsiya usuli hisoblanadi.

Noma’lum chegarali masalasini yechishning yana bir yondoshuvi dinamik ravishda moslashtiruvchi to‘r usulidan foydalanishni o‘z ichiga oladi.

Parabolik tenglamalar uchun erkin chegarali noma’lum chegarali masalasining klassik yechimi A.Fridman, A.Meirmanov,L.Rubinshteyn asarlarida keltirilgan.Ushbu masalaning o‘ziga xos xususiyati o‘rganilayotgan maydonning o‘zgaruvchan o‘lchamlari, harakatlanuvchi maydonning harorati, yechimning harakatini o‘rganishdir.Turli fazalardagi muhitning fizik xususiyatlari har xil bo‘ladi.Shuning uchun noma’lum chegarali masalasi chiziqsiz chegarali geometrik va fizik masalalarda tavsiflanadi, bu esa uni hal qilishni qiyinlashtiradi. Jim Duglas kvazilinear parabolik tenglama uchun Stefan muammosini yechishning yagonaligini isbotlash usulini taklif qiladi.V.Kainer nochiziqli tenglamalar uchun bir fazali Stefan muammosi uchun mavjudlik va yagonalik teoremalarini isbotladi.

Bir fazali masalalarning o‘ziga xos xususiyati erkin chegarasi va erkin chegarada o‘zgaruvchining birinchi tartibli hosilasining monotonligidir.Ushbu bobda noma’lum chegarali masalasining har qanday chekli vaqt oralig‘ida uning yechilishini ta’minlaydigan, qo‘zg‘almas chegaradagi va nolokal chegara shartli yechim uchun oziga xos aprior taxminlarini olishdir. Erkin chegarali masalalar sodda fizik hodisalarda hosil bo‘ladi. Masalan, muzning halqa tayoqchasini qaraymiz, muzning harorati har doim $0^\circ C$ va $x=a$ nuqtada harorat $T^\circ C$ darajada bo‘lsin, bunda $T>0$. Bu holatda muz erib boshlaydi va vaqtning har bir $t>0$ momentida suv $a \le x \le s(t)$ oraliqni egallaydi.

U bilan suvning haroratini belgilab olsak,u holda

$$\begin{gathered}\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0, \quad a < x < s(t), t > 0 \\ u(a,t) = T \quad , \quad t > 0 \text{ uchun} \\ u(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \text{ uchun}\end{gathered} \tag{2.1}$$

bu yerda $\alpha - 0$ dan farqli o‘zgarmas, $s(t)-$ oldindan berilmagan, noma’lum chegara, $x=s(t)$ egri chiziqda qo‘shimcha shart beriladi, aniqrog‘i energiya saqlanish qonuni beriladi. U quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -Ru_x\left(s(t),t\right) \quad (t>0 \text{ uchun}) \tag{2.2}$$

Bu yerda $R -$ biror musbat o'zgarmas. (2.1) va (2.2) masalalar Stefan masalalari deyiladi. Stefan masalalari no'malum chegarali masalalar bo'lib, qattiq jismlarning erish jarayonida (yoki suyuqliklarning kristallanishida) uchraydi.

Agar υ tuzning harorati bo'lmasa, u holda u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\beta^2 \upsilon_{xx} - \upsilon_t = 0 \ , s(t) < x < \infty, \ t > 0 \text{ uchun} \tag{2.3}$$

$\upsilon(s(t), t) = 0$, $t > 0$ uchun.

Bu yerda $\beta = const \neq 0$ va $\psi(x)$ berilgan musbat bo'lmagan funksiya (2.2) shart quyidagi (2.4) shart bilan almashtiradi:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -Ru_x(s(t), t) + R_{\circ} u_x(s(t), t) \ , \ t > 0 \text{ uchun} \tag{2.4}$$

bu yerda $R_{\circ} -$ ba'zi musbat doimiy.

(2.1),(2.3) va (2.4) lar Stefanning ikki fazali masalalari deyiladi,(2.1)–(2.2) masalalarni Stefanning bir fazali masalalari deyiladi.

Bu bobda asosan Stefanning bir o'lchovli masalalarini qarab chiqamiz va ular yechimlarining mavjudligi,yagonaligi hamda assimptotik harakati masalalarini o'rganamiz.

Quyidagi tenglamani qaraymiz. $s(t) > 0$ va $u(x,t)$ ni topish talab qilinsin,bunda $0 < x < s(t)$, $t > 0$ uchun

$$u_{xx} = u_t \tag{2.5}$$

$$u(0,t) = f(t) \ , \text{ bunda } f(t) \geq 0 \text{ va } t > 0 \tag{2.6}$$

$$u(x,o) = \varphi(x), \text{bunda } \varphi(x) \geq 0 \ , 0 < x \leq b \ , \tag{2.7}$$

$$\varphi(b) = 0 \ , b > 0$$

$$u(s(t), t) = 0 \ , \ t > 0 \text{ va } s(0) = b \tag{2.8}$$

$$u_x\left(s(t),t\right)=-\frac{ds(t)}{dt}\ ,\ t>0 \qquad (2.9)$$

uchun $x=s(t)$ funksiya$-$ oldindan berilmagan va $u(x,t)$ bilan aniqlanishi shart bo‘lgan erkin chegara.(2.6) $-$(2.8) shartlar birinchi chegaraviy masalani tashkil qiladi,shu bilan birga (2.9)$-$ shart erkin chegara sharti hisoblanadi.

$f\geq 0,\varphi\geq 0$ taxminlar masalaning fizik mohiyati sifatida qaraladi.

Ta’rif. Aytaylik, $u(x,t)$ va $s(t)$ (2.5)$-$(2.9) masalaning barcha $t<\delta(0<\delta\leq\infty)$ lar uchun yechimlari bo‘lsin, agar :

(I) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial u}{\partial t}$ lar $0<x<s(t)$,$0<t<\delta$ da uzluksiz;

(II) u va lar $0\leq x\leq s(t), 0<t<\delta$ da uzluksiz;

(III) $u(x,t), t=0, 0<\mathrm{x}\leq \mathrm{b}$ va $0\leq \underline{\lim} u(x,t)\leq \overline{\lim} u(x,t)<\infty$ lardava $t\to 0, x\to 0$ (agar $\varphi(0)=f(0)$,u holda $x=t=0$ da u ning uzluksizligi talab qilinadi)da uzluksiz;

(IV) $s(t)-$ $0\leq t<\delta$ larda uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

Teorema2.1 Faraz qilaylik, $f(t)$,$0\leq t<\infty$ va $\varphi(x)$, $0\leq \mathrm{x}\leq \mathrm{b}-$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.U holda (2.5) $-$(2.9) masalaning barcha uchun yagona $u(x,t), s(t)-$ yechimi mavjud.Bundan tashqari $x=s(t)$ funksiya t bo‘yicha monoton kamaymaydigan funksiya.

Bu paragrifda biz (2.5) $-$(2.9) masalani $u_x\left(s(t),t\right)$ uchun Volterra tipidagi chiziqsiz integral tenglamani yechish ekvivalent masalasi uchun hal qilamiz.Bu usul erkin chegarali barcha masalalar uchun tegishli.

Dastlavval biz,agar u,s (2.5) $-$(2.9) masalalarning barcha $t<0$ uchun yechimlari bo‘lsa,u holda $s(t)-$ monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlaymiz.

Maksimum prinsipiga ko‘ra $0 < x < s(t)$, uchun $u(x,t) \ge 0$ .Shuningdek, $x = s(t)$ da $u_x \le 0$ .Shuning uchun (2.9)ga ko‘ra $\frac{ds}{dt} \ge 0$,ya’ni $s(t)$ monoton kamaymaydigan funksiya.Aslida biz bundan ko‘prog‘ini isbotlashimiz mumkin.

Agar $\varphi(x) \ne 0$ yoki agar har bir $0 \le t \le \varepsilon(\varepsilon > 0)$ oraliqda $f(t) \ne 0$ bo‘lsa,u holda $s(t)$ qat’iy o‘suvchi funksiya bo‘ladi.

Haqiqatan ham,aks holda $s(t') = s(t'')$ larda qanoatlantiradigan t', t'' $(t' < t'')$ ikki nuqta mavjud bo‘lar edi.Lekin unda $s(t) = s(t')$ barcha $t' < t < t''$ va (2.9) ga ko‘ra $x = s(t)$ da $u_x = 0$, $t' < t < t''$.Bundan masalaning kuchli prinsipiga ko‘ra va bizning taxminimizga ko‘ra φ, f ga nisbatan $0 < x < s(t)$ da $u(x,t) > 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.Shuningdek $u(s(t),t)$ bo‘ladi,u holda $x = s(t)$, $t' < t < t''$ da $u_x < 0$ emasligi kelib chiqadi.

2.2-§. Dastlabki aprior baholarni o‘rnatish

Bu paragrafda dastlabki aprior baholarni isbotlaymiz. Aprior baholarni keltirib chiqarishning umumiy usuli juda sodda. Avval biz issiqlik o‘tkazuvchanlik operatorining xususiy holi uchun yoki bir qancha umumiy

$$L_0 u = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (a_{ij}\text{-o‘zgarmaslar}) \qquad (2.10)$$

ko‘rinishdagi parabolik operatorlar uchun o‘rnatamiz. Keyin biz quyidagi keltirilgan (2.5) ko‘rinishdagi parabolik operatorni qaraymiz va uni (x^0, t^0) nuqta atrofida $L_0 u = \overline{f}$ ko‘rinishda yozib olamiz, bu yerda $\overline{f} = f + (L_0 u - Lu)$ va L_0 - operator $a_{ij} = a_{ij}(x^0, t^0)$ koeffitsiyentlar bilan L_0 operator uchun olingan baholarni qo‘llab, biz L operator uchun kerakli baholarni olishga harakat qilamiz.

O‘zgarmas koeffitsiyentli tenglamalar bo‘lganda dastlabki baholarni olishga asoslanadigan bu usul differensial tenglamalarning boshqa masalalaridayam qo‘llaniladi.

$|u|_{2+a}$ norma ta’rifdagi $\left|d^2 D_i u\right|_a$ had mavjud. Shunday qilib, aprior baholar quyidagi parabolik tenglamalarni yechishga tegishli bo‘ladi:

$$L_u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \qquad (2.11)$$

Bunda

$$|u|_a + \sum |dD_x u|_a + \sum \left|d^2 D_x^2 u\right|_a \le K\left(|u|_0 + \left|d^2 f\right|_a\right) \qquad (2.12)$$

ko‘rinishida baho olib, biz $\left|d^2 D_t u\right|_a$ ham baholaymiz , agar $\left|d^2(gh)\right|_a \le \left|d^2 g\right|_a |h|_a$, $\left|d^2(gh)\right|_a \le |dg|_a |dh|_a$ tengsizliklardan foydalansak.

Bu bobda har qanday chegaralangan ochiq D to‘plam uchun teorema isbotlaymiz. Endi d_p , $D=(\xi,\tau)$ ni $d_p = \inf\limits_{Q\in D_\tau} d(P,Q)$ formula orqali aniqlaymiz, bu yerda D_τ - D to‘plamning chegarasining $t\le\tau$ yarim fazo bilan kesishmasidir.

Ta’rif. $P=\left(x^0,t^0\right)$ uchun va δ karrali N yarimkub deb

$$x_t^0 - \delta \le x_i \le x_i^0 + \delta \ , \ i=1,2,...,n \ , \ t^0 - \delta^2 \le t < t^0$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (x,t) nuqtalar to‘plamga aytiladi, bu yerda $x^0 = \left(x_1^0,...,x_2^n\right)$.

Agar $Q\in N$ bo‘lsa, u holda $d(P,Q)\le(n+1)^{\frac{1}{2}}\delta$ bo‘lishi ravshan.

Har qanday p va m nomanfiy butun sonlar va $0<\alpha<1$ uchun quyidagi normalarni keltirish qulay:

$$|g|_{p,m} = \sum_{j=0}^{m} M_{p,j}|g| \qquad (2.13)$$

$$|g|_{p,m+a} = |g|_{p,m} + \sum_{j=0}^{m} M_{p,j+a}|g| \qquad (2.14)$$

bu yerda

$$M_{p,j}|g| = \sum \left| d^{p+j} D_k^j g \right|_0 = \sum \sup_{P \in D} d_p^{p+j} \left| D_x^j g(P) \right| \ , \qquad (2.15)$$

$$M_{p,j+a}|g| = \sum H_a \left[d^{p+j} D_x^j g \right] = \sum \sup_{P,Q \in D} d_{PQ}^{p+j+a} \frac{\left| D_x^j g(P) - D_x^j g(Q) \right|}{d(P,Q)^a} \qquad (2.16).$$

Bizga ma'lumki,

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \qquad (2.17)$$

tenglama $D + B_T$ sohada berilgan edi va quyidagi taxminlarni ko'rgandan (A) L operatorning koeffitsiyentlari Gyolder sharti bo'yicha D da local uzluksiz (a ko'rsatkich bilan) va

$$\left| a_{ij} \right|_a \le K \ , \ \left| db_i \right|_a \le K_1 \ , \ \left| d^2 c \right|_a \le K_1 \qquad (2.18)$$

(B) har qanday $(x,t) \in D$ nuqta va har qanday ξ haqiqiy vektor uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \ge K_2 |\xi|^2 \ , (K_2 > 0) \qquad (2.19)$$

(C) $f(x,t)$ Gyolder sharti bo'yicha D da lokal uzluksiz (a ko'rsatma bilan) va

$$\left| d^2 f \right|_a < \infty \qquad (2.20)$$

Ularga ko'ra quyidagi teorema keltirilgan edi.

Teorema2.2 Agar $(A),(B)$ va (C) shartlar bajarilsa, u holda faqat K_1, K_2, n va a ga bog'liq shunday K o'zgarmas son mavjud bo'ladiki, D sohada aniqlangan (1.8) tenglamaning har qanday $u(x,t)$ yechimi uchun hamda $\sup_D |u| < \infty$ va $u(x,t)$, $D_x u, D_x^2 u, D_t u$ - Gyolder bo'yicha D da uzluksiz, $u(x,t)$ C_{2+a} ga tegishli va

$$|u|_{2+a} \le K \left(|u|_0 + \left| d^2 f \right|_a \right) \qquad (2.21)$$

Bu teorema quyidagi teoremaning natijasi sanaladi.

Teorema 2.3. Faraz qilaylik,

$$\left|a_{ij}\right|_{0,a} \le K_1,\ \ \left|b_i\right|_{1,a} \le K_1,\ \ \left|c\right|_{2,a} \le K_1 \tag{2.22}$$

qaysiki, har qanday haqiqiy ξ vektori uchun $\xi\ u(x,t) \in D$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge K_2\left|\xi\right|^2\ \ , K_2 > 0 \tag{2.23}$$

bo‘ladi va $\left|f\right|_{2,a} < \infty$.

Keyin (2.11) tenglamaning D sohada aniqlangan va Gyolder bo‘yicha uzluksiz hosilalarda $\left(D_x u, D_x^2 u, D_t u\right)$ ega va $\left|u\right|_0 < \infty$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $u(x,t)$ yechim C_{2+a} ga tegishli bo‘ladi va shunday faqat K_1, K_2, n va a ga bog‘liq shunday K o‘zgarmas son mavjud bo‘ladi va quyidagi tengsizlik

$$\left[u\right]_{0,2+a} \le K\left(\left|u\right|_0 + \left|f\right|_{2,a}\right) \tag{2.24}$$

bajariladi.

Lemma1.Faraz qilaylik, D_ε - D ning qism to‘plami va D ning chegarasigacha bo‘lgan masofa $\varepsilon > 0$ dan katta bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami bo‘lsin. $M_{p,m}[u]$ bilan D_ε ga nisbatan olingan $M_{p,m}[u]$ kattalikni belgilaymiz. Agar $M_{p,m}^{\varepsilon}[u] \le M$ bo‘lsa, bu yerda M - ε ga bog‘liq o‘zgarmas son, u holda $M_{p,m}[u]$ M ga teng yoki kichik bo‘lgan chegara bo‘ladi. Xuddi shunday tasdiq $M_{p,m}[u]$, $\left|u\right|_{p,m}$, $\left|u\right|_{p,m+a}$ uchun to‘g‘ri bo‘ladi.

Isbot. $d_{p,\varepsilon}$ funksiyani belgilab olamiz. Unda har qanday $p \in D_\varepsilon$ fiksirlangan nuqta uchun

$$d_{p.\varepsilon}^{p+m}\left|D_x^m u(P)\right| \le M$$

bo‘ladi. $\varepsilon \to 0$ deb faraz qilib, biz

$$d_p^{p+m}\left|D_x^m u(P)\right| \le M$$

ga ega bo‘lamiz.

Agar chap tomonda yuqori chegaraga o‘tsak, lemma tasdig‘i bajariladi.

$M_{p,m}[u]$, $\left|u\right|_{p,m}$, $\left|u\right|_{p,m+a}$ lar uchun isbotlar o‘xshash bo‘ladi.

Lemma2. $p \geq 0$, $m \geq 1$ - butun sonlar bo‘lsin.

Har qanday $0 < \varepsilon < 1$ uchun C o‘zgarmas son mavjud bo‘lib (faqat ε, p, m ga bog‘liq),

$$|u|_{p,m+1} \leq \varepsilon M_{p,m}[u] + CM_{p,0}[u] \tag{2.25}$$

tengsizlik barcha $u(P)$, $M_{p,m}[u] < \infty$, $M_{p,0}[u] < \infty$ lar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Belgilashlarni soddalashtirish uchun $M_{p,j} = M_{p,j}[u]$ ni qo‘yamiz. Umumiylikni buzmasdan , biz $|u|_{p,m-1}$ chekli deb faraz qilamiz, chegara aks holda avval P_δ uchun (2.25) ni

$$|u|^{\delta}_{p,m+1} \leq \varepsilon M^{\delta}_{p,m}[u] + CM^{\delta}_{p,0}[u] \leq \varepsilon M_{p,m} + CM_{p,0}$$

ga ega bo‘lamiz. Keyin $\delta \to 0$ da 1-lemmani qo‘llaymiz.

P - D sohada ixtiyoriy fiksirlangan nuqta va N - P uchli va μd_p qirrali yarim kub bo‘lsin. $\mu < \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ ni olamiz, bunda $N \subset D$.

Har qanday ikkita P_1 va P_2 nuqta uchun o‘rtacha qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra N yarim kubning yuqori asosi N^+ da

$$D_x^j u(Q) = \frac{D_x^{j-1} u(P_1) - D_x^{j-1} u(P_2)}{\overline{P_1 P_2}}$$

ga egamiz, bu yerda Q - N^+ dagi biror nuqta, $\overline{P_1 P_2}$ - P_1 dan P_2 gacha Yevklid masofa P_1 va P_2 sifatida N^+ qarama-qarshi uchlari olinib,

$$\left|P_x^j u(Q)\right| \leq \frac{2 \sup\limits_{N^+} \left|P_x^{j-1} u\right|}{2n^{\frac{1}{2}} \mu dp} \tag{2.26}$$

ni biror $Q \in N^+$ nuqta uchun topamiz.

$P_x^j u(P) - D_x^j u(Q) = \int\limits_Q^P D_\xi D_x^j u d\xi$ tenglikdan, bu yerda ξ Q va P ni bog‘lovchi oraliqda o‘zgaradi, biz (2.26) ni qo‘llab,

$\left|D_x^j u(P)\right| \le \dfrac{\sup_{N^+}\left|D_x^{j-1}u\right|}{\mu dp} + \mu n^{\frac{1}{2}} dp \sum \sup_{N^+}\left|P_x^j u\right|$ ga ega bo‘lamiz, bu yerda $j+1$ tartibli barcha xususiy hosilalar jamlanadi. Keyin $M_{p,j-1}$ va $M_{p,j+1}$ ta’riflardan

$$\left|D_x^j u(P)\right| \le (\mu dp)^{-1} \frac{M_{p,j-1}}{\left[\left(1-\mu n^{\frac{1}{2}}\right)dp\right]^{p+j-1}} + \mu n^{\frac{1}{2}} dpx \frac{M_{p,j+1}}{\left[\left(1-\mu n^{\frac{1}{2}}\right)dp\right]^{p+j+1}}$$

tengsizlik kelib chiqadi.Uning ikki tomonini ham d_p^{p+j} ga ko‘paytirib va P ning D sohadagi ixtiyoriy nuqta ekanligini bilgan holda, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun

$$M_{p,j} \le \varepsilon M_{p,j+1} + \frac{C_0}{2} M_{p,j-1} \tag{2.27}$$

(bu yerda C_0 faqat p va j ga bog‘liq) deb yakunlaymiz.

(2.27) yordamida keyinchalik biz j bo‘yicha induksiya bilan birga $0 \le i < j$ uchun

$$M_{p,i} \le \varepsilon M_{p,j} + \frac{C}{\varepsilon^{\frac{i}{j-1}}} M_{p,0} \tag{2.28}$$

ekanligini isbotlaymiz, bu yerda C faqat p va j ga bog‘liq. $j=1$ uchun bu ravshan . Bu tasdiq barcha $j \le k$ lar uchun o‘rinli deb faraz qilib, biz $j = k+1$ uchun ham isbotlaymiz.

(2.27) ga ko‘ra

$$M_{P,R} \le \frac{\varepsilon}{2} M_{P,R+1} + \frac{C_i}{\varepsilon} M_{P,R-1} \tag{2.29}$$

ga egamiz, bu yerda C_i odatdagidek o‘zgarmas sonlar bo‘lib, faqat P va R ga bog‘liq. Induktiv farazga ko‘ra

$$M_{P,R-1} \le \frac{\varepsilon}{2C_1} M_{P,R} + \frac{C_2}{\varepsilon^{R-1}} M_{P,0}$$

bo‘ladi. Buni (2.29) ga qo‘yib,

$$M_{P,R} \le \frac{\varepsilon}{2} M_{P,R+1} + \frac{C_3}{\varepsilon^{R}} M_{P,0} \tag{2.30}$$

ga ega bo‘lamiz, ya‘ni $j = R+1$, $i = R$ uchun o‘rinli.

Agar $i < R$ bo'lsa, u holda induktiv farazga ko'ra ($\varepsilon = \delta$ da) va (2.30) ga ko'ra ($\varepsilon = \lambda$ da)

$$M_{P.i} \le \delta M_{P,K} + \frac{C_u}{\delta^{\frac{i}{R-i}}} M_{P,0} \le \delta\lambda M_{P,R+1} + \left[\frac{C_3\delta}{\lambda^R} + \frac{C_4}{\delta^{\frac{i}{R-i}}}\right] M_{P,0}$$

$\delta = \varepsilon^{\frac{R-i}{R+1-i}}$, $\lambda = \varepsilon^{\frac{1}{R+1-i}}$ larni taxlab, (2.28) isbotini $j = R+1$ uchun tugallaymiz. (2.13) ta'rifni eslab, (2.11),(2.13)- ning natijasi ekanligini aytib o'tamiz.

Lemma 3. Har qanday $a \ge 0$ va ixtiyoriy p, q, j nomanfiy butun sonlar uchun (bunda $q \ge j$ shart bajariladi)

$$\left|D_x^j u\right|_{q,a} \le C_1 \left|u\right|_{q-j,a+j} \tag{2.31}$$

$$\left|u\upsilon\right|_{p+q,a} \le C_2 \left|u\right|_{p,a} \left|\upsilon\right|_{q,a} \tag{2.32}$$

$$\left|u\right|_{p,q+1} \le C_3 \left|u\right|_{p,a-|a|} + C_4 \sum \left|D_x u\right|_{p+1,a} \tag{2.33}$$

bu yerda $[a]$ - a ning butun qismi va C_R - faqat a, p, q, j ga bog'liq o'zgarmas sonlar.

Lemma 4. Faraz qilaylik, N - D da P uchli va $r = \dfrac{dp}{2(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ qirrali yarim kub bo'lsin. U holda har qanday $a \ge 0$ va $P \ge 0$ butun son uchun

$$r\left|u\right|_{P,a}^{N} \le \left|u\right|_{P+1,a}^{d} \tag{2.34}$$

Isbot. $r\left|u\right|_{P,a}^{N}$ dan bir hadini olamiz, aytaylik

$$r \sup_{a \in N} d_{Q,N}^{P+1} \left|D_x^i u(Q)\right| , \tag{2.35}$$

bu yerda $d_{Q,N}$ N ga nisbatan aniqlangan d_Q ning o'zi. Chunki $Q \in N$ uchun

$$r \le (n+1)^{\frac{1}{2}} r = dp - (n+1)^{\frac{1}{2}} r \le d_Q$$

va $d_{Q,N} \le d_Q$, u holda (2.35) ifoda

$$\sup_{Q \in N} d_Q^{P+i+1} \left|P_x^i u(Q)\right|$$

dan kichik yoki teng bo'ladi.

Xuddi shunday $r|u|_{P,a}^{N}$ ning qolgan hadlarini ham baholab, (2.34) tengsizlikka kelamiz.

Quyidagi lemma oldingisining teskarisidir.

Lemma 5. Faraz qilaylik, biror $a \geq 0$ va $P \geq 0$ butun son uchun

$$r|u|_{P,a}^{N} \leq H,$$

bu yerda N P uchun va $r = \dfrac{dp}{2(n+1)^{\frac{1}{2}}}$ qirrali yarim kub. D sohada P o‘zgaradi va H o‘zgarmas. U holda $|u|_{P+1,a}^{P}$ chekli va

$$|u|_{P+1,a}^{P} \leq CH \tag{2.36}$$

bu yerda C faqat p va a ga bog‘liq .

Isbot. Ixtiyoriy $P \in D$, $0 \leq j \leq [a]$ uchun

$$rd_{P,N}^{P+j}\left|D_x^j u(P)\right| \leq H$$

bo‘lsin, bu yerda $d_{P,N}$ N ga nisbatan aniqlangan dp ning o‘zi , qaysiki

$$d_{P,N} = r = \frac{dp}{2(n+1)^{\frac{1}{2}}} .$$

Bundan biz $d_P^{P+j+1}\left|D_x^j u(P)\right| \leq H\left[2(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]^{P+j+1}$ ga ega bo‘lamiz.

Tengsizlikning chap tomonida yuqori chegaraga o‘tib ($P \in D$ da)

$M_{P+1,j}[u] \leq H\left[2(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]^{P+j+1}$ ga ega bo‘lamiz. Qolgan hadlarni xuddi shuni izlasak, lemmani isbotlash jarayoni tugaydi.

Yordamchi teorema.

Bu paragrifda N - P uchli va d qirrali fiksirlangan yarim kub, faqat n va a ga bog‘liq o‘zgarmaslarni K orqali belgilaymiz, bundan tashqari

$$H_{a,N}|g| = \sup_{K \in N} \frac{|g(a) - g(R)|}{d(Q,R)^a}$$

ni qo‘yamiz.

Teorema2.4. $f(x,t)$, $u(x,t)$, $D_x u$, $D_x^2 u$ funksiyalar Nda Gyolder bo‘yicha uzluksiz bo‘lsin va $u(x,t)$

$$L_0 u \equiv \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f \tag{2.37}$$

tenglamani qanoatlantirsin, bu yerda $\Delta \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - Laplas operatori.

U holda shunday K o‘zgarmas son (faqat n va a ga bog‘liq) mavjud bo‘ladiki, qaysiki $i = 0,1,2$ uchun

$$P_x^i u(P) \le d^{-i} K \sup_N |u| + d^{2-i} K \sup_K |f| + d^{2-i+a} K H_{P,N}[f] \equiv K I_i \ , \tag{2.38}$$

$$d^a \frac{\left|D_x^i u(P) - D_x^2 u(Q)\right|}{d(P,Q)^a} \le K I_i + K d^{2-i+a} H_{Q,N}[f] \tag{2.39}$$

agar $d(P,Q) \le \frac{d}{4}$ bo‘lsa.

Isbot. N_η bilan D uchga ega va ηd qirrali yarim kubni belgilab olamiz va $\varphi(Q)$ - N funksiyada uch marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya hamda

$$\varphi(Q) = \begin{cases} 1, agar \ Q \in N_{\frac{1}{2}} \\ 0, agar \ Q \in \left(N - N_{\frac{3}{4}}\right) \end{cases} \tag{2.40}$$

va

$$\left|D_x^R D_t^h \varphi(x,t)\right| \le A d^{-R-2h} \ , \quad 0 \ge R + h \le 2 \tag{2.41}$$

shartlarni qanoatlantirsin.

$P = \left(x^0, t^0 + d^2\right)$ bo‘lsin va B bilan N ning quyi asosini belgilaymiz. Agar Grin ayniyatini , ya’ni

$$\upsilon L u - u L^* \upsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\upsilon a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u a_{ij}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_j} - u\upsilon\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right) + b_i u\upsilon\right] - \frac{\partial}{\partial t}(u\upsilon) \text{ ni } u(x,t) \quad \text{va}$$

$\varphi(x,t)G(x-\xi,t-\tau)$ funksiyalarga qo‘llasak, bu yerda

$$G(x-\xi,t-\tau)\equiv G(x,t;\xi,\tau)=\frac{(\tau-t)^{-\frac{n}{2}}}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2}}{4(\tau-t)}\right] \tag{2.42}$$

$L_0^{*}u=0$ tenglamaning fundamental yechimi bo‘ladi. ($L_0u=0$ tenglamaning qo‘shma tenglamasi), integrallashdan so‘ng

$$u(\xi,\tau)=-\int_0^{\tau}\int_B\varphi(x,t)f(x,t)G(x-\xi,t-\tau)dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}\int_B u(x,t)L_0^{*}\left[\varphi(x,t)G(x-\xi,t-\tau)\right]dxdt\equiv -H_0J_0 \tag{2.43}$$

ni har qanday $(\xi,\tau)\in N_{\frac{1}{2}}$ uchun topamiz.

Avval (2.38),(2.39) larni $i=2$ uchun isbotlaymiz.

$$H(Q)=D_{\xi}^{2}H_0\ ,\ J(Q)=D_{\xi}^{2}J_0 \tag{2.44}$$

bu yerda $Q=(\xi,\tau)$ deb faraz qilib, biz

$$D_{\xi}^{2}u(Q)=-H(Q)+J(Q) \tag{2.45}$$

ga ega bo‘lamiz. Har qanday Q uchun $J=J(Q)$ baholashdan boshlaymiz, bunda P dan Q gacha bo‘lgan masofa $\frac{d}{4}$ dan kichik. Ω bilan $\left(N_{\frac{3}{4}}-N_{\frac{1}{2}}\right)\cap\left\{t^{0}\le t\le\tau\right\}$ sohani belgilab, quyidagini yozish mumkin.

$$J=\int_Q u(x,t)\left\{(D_x+D_t)\left[\varphi(x,t)D_{\xi}^{2}G(x-\xi,t-\tau)\right]\right\}dxdt \tag{2.46}$$

keyinchalik biz

$$\left|D_{\tau}^{R}D_{\xi}^{j}G(x-\xi,t-\tau)\right|\le K(\tau-t)^{\frac{-(n+2R+j)}{2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2}}{5(\tau-t)}\right] \tag{2.47}$$

bu yerda $0\le R+j\le 4$ tengsizlik kerak bo‘ladi, qaysiki $G(x-\xi,t-\tau)$ ni to‘g‘ridan-to‘g‘ri differensiallash va $t^{m}e^{-\varepsilon t}\le C$ ($0<t<\infty$ uchun) tengsizlikni qo‘llash orqali tekshirish oson , bunda m,ε - ixtiyoriy musbat son va C faqat m va ε ga bog‘liq bo‘ladi.

(2.41),(2.47) dan foydalanib va $\left(\Delta_x + D_t\right) D_\xi^2 G = 0$ ligini e'tiborga olib

$$\left|J\right| \le K\left(\sup_N \left|u\right|\right)\sum_{i=0}^{1} d^{-2+i}\int_\Omega \left(\tau - t\right)^{-\frac{(n+2+i)}{2}} \exp\left[-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{5\left(\tau - t\right)}\right] dxdt \tag{2.48}$$

ga ega bo'lamiz. Oxirgi integralni $\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}$ ga bo'lamiz, bu yerda $\Omega_1 \Omega_2$ ning $\left|x - x^0 > \frac{d}{2}\right|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\left(x,t\right)$ nuqtalardan iborat, Ω_2 esa $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$ bo'ladi.

$\left(x,t\right) \in \Omega_1$ uchun $\left|x-\xi\right| \ge \frac{d}{4}$ tengsizlikdan foydalanib va $z = \dfrac{d^2}{\tau - t}$ ni qo'yib

$$\int_{\Omega_1} \le K d^n \int_0^\infty \frac{z^{(n+2+i)^2}}{d^{n+2+i}} \exp\left[-Kz\right] \frac{d^2}{z^2} dz \le \frac{K}{d^2} \tag{2.49}$$

ga ega bo'lamiz. Chunki $\tau - t > \left(\dfrac{d}{4}\right)^2$, agar $\left(x,t\right) \in \Omega_2$ (bunda $d\left(P,Q\right) < \dfrac{d}{4}$ ligi ma'lum) bo'lsa, u holda

$$\int_{\Omega_2} \le \frac{K}{d^{n+2+i}} \Omega_2 hamma \le \frac{K}{d^i} \tag{2.50}$$

(2.49), (2.50) va (2.48) lardagi

$$\left|J\right| \le K d^{-2} \sup_N \left|u\right| \tag{2.51}$$

kelib chiqadi.

$H = H\left(Q\right)$ baholandi, quyidagi tengsizlikdan foydalanamiz:

$$H = \int_{t^0}^{\tau}\int_B \left[D_\xi^2 G\left(x-\xi, t-\tau\right)\right] D_\xi \left[\int_{t^0}^{\tau}\int_B D_\xi G\left(x-\xi, t-\tau\right) dxdt\right] = H_1 + H_2 \tag{2.52}$$

H_2 dagi ichki integralni Ostragradskiy teoremasini qo'llab chegaraviy integral ko'rinishida yozish mumkin.

(2.52) ning to'g'riligi yuqoridagi 1-bob 3 paragrifdan kelib chiqadi. (2.47) yordamida va

$$\left|\varphi\left(x,t\right) f\left(x,t\right) - \varphi\left(\xi,\tau\right) f\left(\xi,\tau\right)\right| \le K\left(\left|x-\xi\right|^a + \left|t-\tau\right|^{\frac{a}{2}}\right) H_{Q,N}\left|f\right| +$$

$$+K\left(\frac{|x-\xi|}{d}+\frac{|t-\tau|}{d^2}\right)\sup_N|f| \qquad (2.53)$$

tengsizlik yordamida H_1 ni baholash mumkin:

$$|H_1|\le KH_{Q,N}[f]\int_{t^0}^{\tau}\int_B(\tau-t)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau-t)}\right]\times\left[|x-\xi|^a+|t-\tau|^{\frac{a}{2}}\right]dxdt+$$

$$+K\left(\sup_N|f|\right)\int_{t^0}^{\tau}\int_B(\tau-t)^{-\frac{n+2}{2}}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau-t)}\right]\left[-\frac{|x-\xi|}{d}+\frac{|t-\tau|}{d^2}\right]dxdt\,. \qquad (2.54)$$

Har bir fiksirlangan t da birinchi integralda $\rho(t-\tau)^{\frac{1}{2}}=|x-\xi|$ o‘rniga qo‘yish va $\tau-t^0\le d^2$ tengsizlikni e’tiborga olgan holda , biz $H_{Q,N}[f]$ da koeffitsiyent quyidagi kattalik bilan chegaralangan :

$$K\int_{t^0}^{t}\int_0^{\infty}\frac{(\tau-t)^{\frac{a}{2}}\rho^2+(\tau-t)^{\frac{a}{2}}}{(\tau-t)^{\frac{n+2}{2}}}\exp[-K\rho](\tau-t)^{\frac{n}{2}}\rho^{n-1}d\rho dt\le$$

$$\le K\int_{t^0}^{\tau}\frac{dt}{(\tau-t)^{\frac{1-a}{2}}}\le K\left(\tau-t^0\right)^{\frac{a}{2}}\le Kd^a\ .$$

Shunga o‘xshash, $\sup_N|f|$ da koeffitsiyent K son bilan chegaralanganligini ko‘rsatish mumkin.

Bundan kelib chiqadiki,

$$|H_1|\le Kd^aH_{Q,N}[f]+K\sup_N|f| \qquad (2.55)$$

H_2 uchun ham dS_x bilan ∂B sirt elementini belgilab,

$$|H_2|\le K\left(\sup_N|f|\right)\int_{t^0}^{\tau}\int_{\partial B}\left|D_\xi G(x-\xi,t-\tau)\right|dS_x dt \qquad (2.56)$$

ni hosil qilamiz.

(2.47) dan va $|x-\xi|>\frac{3d}{4}$($x\in\partial B$ uchun) va $z=\frac{d^2}{\tau-t}$ o‘rniga qo‘yishdan foydalanib

$$\int_{t^0}^{\tau}\int_{\partial B}\left|D_{\xi}G(x-\xi,t-\tau)\right|dS_x dt \le Kd^{n-1}\int_{\beta}^{\infty}\frac{z^{\frac{n+1}{2}}d^2}{d^{n+1}z^2}\exp[-Kz]dz \le K \qquad (2.57)$$

ga ega bo'lamiz, chunki $\beta = \dfrac{d^2}{\tau - t^0} \ge 1$. Bundan

$$|H| \le Kd^a H_{Q,N}[f] + K\sup_N |f| \qquad (2.58)$$

ni topamiz.

(2.58) , (2.51) va (2.45) dan (3.2) $i=2$ chun kelib chiqadi.

2.3-§. Noma'lum chegarali masalalar yechimlarining yagonaligi va mavjudligi.

Bu paragrafda noma'lum chegrali masalalar yechimining va mavjudligini ko'rib chiqamiz.

Teorema2.5. Faraz qilaylik, $f(t), 0 \le t < \infty$ va $\varphi(x)$, $0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{b}-$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.U holda (2.11) $-$(2.14) masalaning barcha uchun yagona $u(x,t), s(t)-$yechimi mavjud. Bundan tashqari $x=s(t)$ funksiya t bo'yicha monoton kamaymaydigan funksiya.

Bu paragrafda biz (2.11) $-$(2.14) masalani $u_x(s(t),t)$ uchun Volterra tipidagi chiziqsiz integral tenglamani yechish ekvivalent masalasi uchun hal qilamiz. Bu usul erkin chegarali barcha masalalar uchun tegishli.

Dastavval biz, agar u,s (2.11) $-$(2.14) masalalarning barcha $t<0$ uchun yechimlari bo'lsa,u holda $s(t)-$monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlaymiz. C_δ bilan $0 \le t \le \delta$ oraliqda uzluksiz $\upsilon(t)$ funksiyalar to'plamini belgilaymiz,qaysiki $\|\upsilon\| = \sup\limits_{0\le t\le\delta}|\upsilon(t)|$ cheklangan normaga ega bo'lgan,bunda $C_{\delta,\mathrm{M}}$ bilan C_δ to'plamning $\{\upsilon; \upsilon \in C_\delta, \|\upsilon\| \le M\}$ qism to'plamini belgilaymiz.T_υ bilan(2.35) ning o‘ng qismini belgilaymiz,bu yerda $s(t)$ (2.36) orqali beriladi.Har bir $M>0$ uchun, agar δ yetarligi kichik bo‘lsa, $2\delta M<b$ bo‘lsin va har qanday $\upsilon \in C_{\delta,M}$ uchun $s(t)$ funksiya ((2.36) formula bilan beriladigan) musbat (haqiqatdan ham, $s(t)>\frac{b}{2}$)va bundan T_υ to‘liq aniqlanganligi kelib chiqadi.

To‘g‘ridan-to‘g‘ri elementar hisoblash orqali agar

$$M=1+4\left[\sup_{0\le x\le b}\left|\varphi^{'}(x)\right|\right], \tag{2.59}$$

va agar

$$AM_{\delta}^{\frac{1}{2}}\le 1 \tag{2.60}$$

($\left|f^{'}(t)\right|,\left|f(0)-\varphi(0)\right|,b,\frac{1}{b}$ yuqori chegaralarga bog‘liq ba’zi A o‘zgarmas uchun),u holda $T\ C_{\delta,M}$ ni o‘ziga aylanadi va qisqartirilgan shakli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

$T\ C_{\delta,M}$ da yagona υ belgilangan nuqtaga ega deb xulosalaymiz,u holda υ (2.35) ning yechimi hisoblanadi.

Shunday qilib,2-lemmaga ko‘ra ba’zi yetarlicha kichik δ da barcha $t<\delta$ uchun (2.11)-(2.14) ning yechimini mavjudligini isbotladik.

$t<\delta$ da yagonaligini isbotlash uchun $t<\delta$ uchun (2.11)-(2.14)sistemaning boshqa bir u_0,s_0 yechimi mavjud deb faraz qilamiz va υ_0 $0\le t<\delta$ uchun (2.35) ning yechimiga mos kelsin.

$t\le\delta$ da har qanday $\delta^{'}<\delta$ uchun yagonaligini isbotlash yetarli.

$\overline{M}=\max\left\{M,\sup_{0\le t\le\delta},\left|\upsilon_0(t)\right|\right\}$, $A\overline{M_{\delta}^{\frac{1}{2}}}\le 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy musbat son bo‘lsin deb faraz qilamiz,bu yerda A -(2.60) dagi doimiy.U holda T

ning $C_{\delta,M}$ ni o'ziga aylanishini isbotlashda qo'llanilgan hisoblashlar orqali $T\,C_{\delta,M}$ ni o'ziga aylanishining qisqartirilgan shakli ekanligini ko'rsatish mumkin.Shuning uchun $C_{\bar{\delta},\bar{M}}$ da T akslantirishning bittadan ortiq bo'lmagan qo'zg'almas nuqtasi mavjud bo'ladi.Bundan $0 \le t \le \delta$ uchun $\upsilon(t) = \upsilon_0(t)$ kelib chiqadi.

Demak, agar $0 \le t \le \bar{\delta}, 0 \le x \le s(t)$ bo'lsa, u holda $s(t) = s_0(t), u(x,t) = u_0(x,t)$ bo'ladi.

Endi $t > \bar{\delta}$ uchun (2.11)-(2.14) sistemani qaraymiz,ya'ni $t \ge \bar{\delta}$ ($t \ge 0$ o'rniga)da (2.11),(2.12),(2.13),(2.14) larni qaraymiz,bu paytda (2.13) kabi $0 < x \le s(\bar{\delta})$ da $u(x,\bar{\delta}) = u(x,\bar{\delta})$ bilan almashtirilsa

$$M_0 = 1 + 4\left[\sup_{0 \le x \le s(\bar{\delta})} \left|u^{'}(x,\bar{\delta})\right|\right] \tag{2.61}$$

shunga o'xshash $\bar{\delta} \le t < \delta$ oraliqda u_0, s_0 uchun (2.11)-(2.14) masalani integral tenglamaga keltiramiz.Shuningdek, $u(x,\bar{\delta}) = u_0(x,\bar{\delta}), s(\bar{\delta}) = s_0(\bar{\delta})$ bo'ladi,u holda $\upsilon(t)$ va $\upsilon_0(t)$ uchun integral tenglamalar mos tushadi.Endi ko'rilgan mulohazalarni takrorlab, $\upsilon(t) = \upsilon_0(t)$,($\bar{\delta} \le t \le \vec{\delta}$,har qanday $\vec{\delta}$ uchun).

$$A\overline{M_0}\left(\vec{\delta} - \bar{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \le 1 \;, \overline{M_0} = \max\left\{M_0, \sup_{0 \le t \le \delta}, \left|\upsilon_0(t)\right|\right\}$$ shartni qanoatlantiradi.

Shu bilan birga,biz shuni takror aytishimiz mumkinki,har qadamda vaqt oralig'i ε dan kichik bo'lmagan deb tanlanishi mumkin,bunda $\varepsilon\; A\max\left\{1 + 4\left[\sup_{\substack{0 \le x \le s(t) \\ \bar{\delta} \le t \le \delta}} \left|u_x(x,t)\right|\right], \sup_{0 \le t \le \delta}\left|\upsilon_0(t)\right|\right\}\varepsilon^{\frac{1}{2}} = 1$ shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib,barcha $t < \delta$ uchun mavjudligi va yagonaligi isbotlandi, bu yerda δ -ixtiyoriy musbat son ((2.60)ni qanoatlantiradigan).Oldingi isbot jarayonidan,agar $t>0$ uchun (2.11)-(2.14) o‘rniga $t>\lambda$ uchun (2.11)-(2.14) ni qarasak,ya’ni $t>\lambda$ uchun (2.11),

(2.12), (2.13),(2.14) lar bajarilib va $\delta < x \le s(\lambda)$ uchun $u(x,\lambda)=u(x,\lambda)$ ga almashtiriladi.

Shu bilan birga agar

$$\left|u_x(x,\lambda)\right|, s(\lambda) \text{ va} \frac{1}{s(\lambda)} \tag{2.62}$$

lar λ ga bog‘liq bo‘lmagan holda chegaralangan bo‘lsa,u holda $\lambda \le t \le \lambda+\varepsilon$ oraliqda masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi,bu yerda ε -ba’zi λ ga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas son.

Shunday qilib,(2.11)-(2.14) sistemaning har qanday yechimi uchun $s(t)$ funksiya monoton kamaymaydigan funksiya bo‘lib, $\frac{1}{s(\lambda)} \le \frac{1}{b}$ bo‘ladi.

2.5-teoremaning isbotini yakunlash uchun quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli.

Har qanday $t_0>0$ uchun shunday $\varepsilon>0$ mavjud bo‘lib,agar barcha $t<t_0$ uchun (2.11)-(2.14) sistema yagona yechimga ega bo‘lsa ,u hold $t<t_0+\varepsilon$ uchun ham yagona yechimga ega bo‘ladi.

Yuqoridagilarni e’tiborga olib,agar barcha $t<t_0$ uchun $u(x,t)$,$s(t)$ lar (2.11)-(2.14) sistemaning yechimi bo‘lsa,u holda barcha yetarlicha kichik $\eta>0$ uchun

$$\sup_{0<x<s(t_0-\eta)} \left|u_x(x,t_0-\eta)\right|, s(t_0-\eta) \tag{2.63}$$

funksiyalar η ga bog‘liq bo‘lmagan holda chegaralangandir.Agar biz

$$\sup_{0<t<t_0} \left|\upsilon(t)\right| < \infty \tag{2.64}$$

ni isbotlasak,u holda (2.36) dan $t < t_0$ uchun $s(t)$ funksiyaning chegaranganligi kelib chiqadi.

Keyin, (2.29)ni x bo‘yicha differensiallashdan so‘ng va (2.64),(2.25) lardan foydalanib,(2.63)dagi λ gi funksiyani chegaralanganligini ko‘rsatamiz.Shuning uchun agar biz (2.64) ni isbotlasak,u holda 1-teorema isboti yakunlanadi.

Isbot. $\upsilon(t)$ uchun $t_0 - \mu < t < t_0$ (μ yetarli kichik)oraliqda (2.11)-(2.14) sistemaga keladigan integral tenglamadan foydalanamiz.Bunda $u(0, t_0 - \mu) = f(t_0 - \mu)$ bo‘ladi,u holda tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\upsilon(t) = 2\int_0^{s(t_0-\mu)} u_\xi(\xi, t_0 - \mu) N\left(s(t), t; \xi, t_0 - \mu\right) d\xi - 2\int_{t_0-\mu}^{t} f^{'}(\tau) N\left(s(t), t; 0, \tau\right) d\tau +$$

$$+2\int_{t_0-\mu}^{t} \upsilon(\tau) G_x\left(s(t), t; s(\tau), \tau\right) d\tau \equiv T_1 + T_2 + T_3 \ . \qquad (2.65)$$

Shuningdek, $\upsilon(t) \le 0$,biz endi faqat pastki chegara $\upsilon(t)$ ni topishimiz kerak bo‘ladi.

$$\psi(t) = \inf_{t_0-\mu<\tau<t} \upsilon(t) \qquad (2.66)$$

deb belgilab, T_3 ni baholaymiz:

$$T_3 = -\int_{t_0-\mu}^{t} \upsilon(t) \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau} K\left(s(t), t; s(\tau), \tau\right) d\tau + \int_{t_0-\mu}^{t} \upsilon(\tau) \frac{s(t) + s(\tau)}{t - \tau} K\left(-s(t), t; s(\tau), \tau\right) d\tau \equiv$$

$$\equiv T_3^{'} + T_3^{''} \qquad (2.67)$$

Shuningdek, $s(t) - s(\tau) \ge 0$ va $\upsilon(t) \le 0$,u holda

$$T_3^{''} \ge 0 \qquad (2.68)$$

$$\left|T_1^{''}\right| \le \beta_0 \left|\psi(t)\right| \int_{t_0-}^{t} \frac{1}{t - \tau} \exp\left[-\frac{b^2}{t - \tau}\right] d\tau \le \beta_1 \left|\psi(t)\right| \mu \le \frac{1}{2}\left|\psi(t)\right| \qquad (2.69)$$

Bu yerda β_0, β_1 -o‘zgarmaslar(b ga bog‘liq) va μ $2\beta_1\mu \le 1$ shartdan topiladi.

Endi μ ni fiksirlaymiz.

Ko‘rinib turibdiki,

$$\left|T_1+T_2\right| \le \beta^{'} \;, t_0-\mu \le t \le t_0 \;, \tag{2.70}$$

bu yerda $\beta^{'}$ - μ ga bog‘liq , t ga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas son.

(2.65), (2.67) va (2.70) larni birlashtirib,

$$\upsilon(t) \ge \frac{1}{2}\psi(t) - \beta^{'}, (t_0-\mu \le t < t_0 \;) \tag{2.71}$$

ga ega bo‘lamiz.

(2.71) ning ikki tomonining quyi chegarasini olib,

$$\psi(t) \ge -2\beta^{'}, (t_0-\mu \le t < t_0) \tag{2.71}$$

hosil bo‘ladi,bundan $t_0-\mu \le t < t_0$da $\upsilon(t)$ning chegaralanganligi kelib chiqadi.Shunday qilib,(2.64) isbotlandi.

(2.12) shartning $u_x(0,t) = f(t)$,bu yerda

$$f(t) < 0 \;\; \text{va} \;\; t > 0 \tag{2.72}$$

Shart bilan almashish asosida hosil bo‘lgan noma’lum chegarali masalani qaraymiz.

Teorema 2.6. Faraz qilaylik, $f(t)$ $(0 \le t < \infty)$- uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.U holda (2.11),(2.72),(2.13) va (2.14) masalalarning barcha $t < \infty$ uchun yagona $u(x,t), s(t)$ yechimlari mavjud bo‘ladi.Bundan tashqari, $s(t)$ qat’iy monoton o‘suvchi funksiya.

Bu teorema ham birinchi teorema bilan bir xil isbotlanadi.

II-bob bo‘yicha xulosalar.

Magistirlik dissertatsiya ishining bu bobida noma'lum chegarali masalaning qo'yilishi, dastlabki aprior baholar, yechimning yagonaligi va mavjudligi keltirilgan. Erkin chegarali masalalar sodda fizik hodisalarda hosil bo'ladi. Masalan, muzning halqa tayoqchasini qaraymiz, muzning harorati har doim $0^{\circ}C$ va $x=a$ nuqtada harorat $T^{\circ}C$ darajada bo'lsin, bunda $T>0$. Bu holatda muz erib boshlaydi va vaqtning har bir $t>0$ momentida suv $a \le x \le s(t)$ oraliqni egallaydi. Biz Stefanning bir o'lchovli masalalarini qarab chiqdik va ular yechimlarining mavjudligi,yagonaligi hamda assimptotik harakati masalalarini o'rgandik.

Quyidagi tenglamani qaraymiz. $s(t)>0$ va $u(x,t)$ ni topish talab qilinsin,bunda $0<x<s(t)$, $t>0$ uchun

$$u_{xx}=u_t \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=f(t)\ ,\ \text{bunda}\ f(t)\ge 0\ \text{va}\ t>0 \tag{2.6}$$

$$u(x,o)=\varphi(x),\text{bunda}\ \varphi(x)\ge 0\ ,0<x\le b\ , \tag{2.7}$$

$$\varphi(b)=0\ ,b>0$$

$$u(s(t),t)=0\ ,\ t>0\ \text{va}\ s(0)=b \tag{2.8}$$

$$u_x(s(t),t)=-\frac{ds(t)}{dt}\ ,\ t>0 \tag{2.9}$$

uchun $x=s(t)$ funksiya $-$ oldindan berilmagan va $u(x,t)$ bilan aniqlanishi shart bo'lgan erkin chegara.(2.6) $-$(2.8) shartlar birinchi chegaraviy masalani tashkil qiladi,shu bilan birga (2.9)$-$ shart erkin chegara sharti hisoblanadi.

$f\ge 0,\varphi\ge 0$ taxminlar masalaning fizik mohiyati sifatida qaraladi.

Biz (2.5) $-$(2.9) masalani $u_x(s(t),t)$ uchun Volterra tipidagi chiziqsiz integral tenglamani yechish ekvivalent masalasi uchun hal qilamiz. Bu usul erkin chegarali barcha masalalar uchun tegishli.

III BOB. FILTRATSIYA JARAYONLARINING NOMA’LUM CHEGARALI FLORIN TIPIDAGI MASALA TAHLILI

Mexanika, fizika, biologiya, ekologiya, sotsiologiya va boshqalardagi turli hodisa va jarayonlarning haqiqiy matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarini o‘rganishga olib keladi. Parabolik tenglama uchun noklassik masalani yechish ko‘p sonli ishlarning mavzusidir. Bu bobda noma’lum chegarali Florin tipidagi masala va masala yechimi va noma’lum chegara uchun aprior baholarni olish usullari ishlab chiqilgan, masala yechimining yagonaligi va mavjudligi o‘rganilgan.

3.1-§.Noma`lum chegarali chiziqsiz chegaraviy shartli Florin tipidagi masala.

Klassik bo‘lmagan masalalar zamonaviy differensial tenglamalar nazariyasining dinamik rivojlanayotgan yo‘nalishlaridan biridir. Daryo va dengizlarda oqava suvlar ta’sirida yuzaga keladigan ifloslanish jarayonlarini matematik modellashtirish uchun mahalliy bo‘lmagan chegaraviy shartlar (noklassik) masalalari qo‘llaniladi.

Yana bunday masalalarning yechimlaridan biri Florin masalasi (noma’lum chegaraviy sharti ushbu chegaraviy shart uchun yopiq shaklda ko‘rsatilgan). Florin masalasi qisqa tarixga ega; bu birinchi navbatda gidroelektr inshootlarida suv o‘tkazmaydigan pardalarni o‘rnatish paytida, loy eritmalari poydevor toshlariga va to‘g‘onlar tayanchlari qirg‘oqlariga quyilganda paydo bo‘lgan. Bunga viskoplastik tayoqning qattiq to‘siqqa ta’siri muammosi bilan bog‘liq bo‘lgan masalalar sinfini ham kiritish mumkin. [22; 397-410]

Ushbu bobda biz kvazi chiziqli parabolik tenglama uchun erkin chegarali Florin tipidagi chiziqli nolokal masalani o‘rganamiz. Aprior baholar Shauder tipidagi hisob-kitoblar orqali o‘rnatiladi. Belgilangan hisob-kitoblar asosida ko‘rib chiqilayotgan vaqt oralig‘idagi erkin chegaraning harakati o‘rganiladi va dastlabki masalani hal qilishning o'ziga xosligi isbotlanadi. Nihoyat, olingan va asl masala yechimining mavjudligi Shauder tipidagi aprior baholar yordamida isbotlanadi.

Zamonaviy fanda chiziqli bo'lmagan muhitda sodir bo'ladigan jarayonlarga qiziqish ortib bormoqda. Bu yerda gidro va gaz dinamikasi, plazma fizikasi, kimyoviy reaksiyalar nazariyasi va boshqalar masalalarini ko'rsatish mumkin [14, 15]. Yangi muammolarni shakllantirish bilan bog'liq holda, chiziqli bo'lmagan muhitdagi jarayonlarning matematik modellari yordamida hal qilinadigan matematik fizikaning chiziqli bo'lmagan masalalarini o'rganishga yangi yondashuvlarni ishlab chiqish zarurati tug'iladi [10,29,16]. Bundan tashqari, parabolik tenglamalar uchun ushbu masalalarning aksariyati erkin chegaraga ega chegaraviy masalalarga qisqartiriladi. Erkin chegara bilan bog'liq muammolar moddaning agregatsiya holatining o'zgarishi, suyuqlikning g'ovakli muhitda harakatlanishi bilan bog'liq issiqlik jarayonlarini matematik tavsiflashda paydo bo'ladi.

Shu sababli ular metallurgiyada, payvandlash jarayonlarini o'rganishda, materiallarni elektron va plazma bilan qayta ishlashda, elektr kontaktlari nazariyasida, geotermiya, abadiy muzlik, filtratsiya nazariyasi va boshqalarda keng qo'llaniladi.[17,18,19,20, 21]. Bunday masalalarning vakillaridan biri Florin masalasi deb ataladi (erkin chegara sharti bu chegara uchun noma'lum bo'lgan shaklda berilgan) va u birinchi marta gidrotexnikada paydo bo'lgan [22]. Stefan muammosining klassik yechish qobiliyati nazariyasi va parabolik tenglamalar uchun erkin chegaralari bo'lgan boshqa masalalar [17-11] va boshqalarda tuzilgan. Zamonaviy fan va texnikaning talablari noklassik masalalarni (tenglama chegarasi noma'lum) ko'rib chiqish zaruriyatiga olib keladi.

Lokal bo'lmagan chegara sharoitlari bilan bog'liq muammolar daryolarda, dengizlarda chiqindi suvlar bilan ifloslanish jarayonlarini matematik modellashtirish uchun qo'llaniladi [14,16,18].

Lokal Stefan masalasi [30] da, bunday tenglama uchun nolokal shartlarga ega Stefan masalasi esa [23] da oʻrganilgan. [23, 24, 32, 33] da turli parabolik tenglamalar uchun Florin tipidagi erkin chegaraga ega boʻlgan bir qator lokal boʻlmagan oldindan oʻrnatilgan natijalar koʻrib chiqildi, ularda ba'zi chegara shartlari nolokal shaklda koʻrsatilgan.

Kvazi chiziqli parabolik tenglama uchun Florin masalasi.

Masalaning qo'yilishi. $0 < t \le T$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi s(t) funksiyani topish talab qilinadi, $D = \{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$tenglamani qanoatlantiradi.

$$u_t(t,x) = a(u)u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D \tag{3.1}$$

va quyidagi boshlangʻich va chegara shartlari

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le s_0, \tag{3.2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.3}$$

$$\alpha u(t,0) = u\big(t, s(t)\big), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.4}$$

$$u_x(t, s(t))) = p, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.5}$$

Dissertatsiya davomida biz berilgan funktsiyalar uchun quyidagiasosiy shartlar bajariladi taxmin qilamiz:

1. $a(u)$ va $a'(u)$funksiyalari $a(u) \ge a_0 > 0$, $a'(u) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi argumentning istalgan qiymati uchun aniqlanadi.

2. α, s_0, plar quyidagini qanoatlantiruvchi oʻzgarmas sonlar

$-1 < \alpha \le 0, \quad s_0 > 0, \; p > 0$

3. $\varphi(x)$ 3-tartibli , $\psi(t)$ birinchi tartibli uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar, $\varphi'''(x)$, $\psi'(t)$ Gyolder shartini qanoatlantiradi.

4. Chetki nuqtalarida quyidagi shartlarni (shu jumladan yordamchi shartlarni) qanoatlantirsin.

$$\varphi'(0) = \psi(0), \ \ \alpha\varphi(0) = \varphi(s_0), \quad \varphi'(s_0) = p$$

Tadqiqot quyidagi sxema bo‘yicha amalga oshiriladi. Birinchidan, $s(t), u(t,x)$ yechimlar va ularning hosilalari uchun ba'zi aprior baholar o‘rnatiladi. Keyinchalik, ushbu hisob-kitoblarga asoslanib, biz ko‘rib chiqilgan vaqt oralig‘ida erkin chegaraning harakatini o‘rganamiz, yechimning o‘ziga xosligini va muammoning global echilishi mumkinligini isbotlaymiz. Shu maqsadda tuzilgan (3.1)–(3.5) masalani $s(t), u_x(t,x)$ funksiyalari uchun ekvivalent masalaga (Stefan tipidagi) keltiramiz. $u_x(t,x) = v(t,x)$deb belgilaymiz. Keyin (3.1)-(3.5) masaladan quyidagini olamiz.

$$v_t(t,x) = a(u)v_{xx}(t,x) + a'_u(u)v(t,x)v_x(t,x), \qquad (t,x) \in D, \qquad (3.6)$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \qquad 0 \le x \le s_0 \qquad (3.7)$$

$$v(t,0) = \psi(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad (3.8)$$

$$v\big(t, s(t)\big) = p, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (3.9)$$

$$p\dot{s}(t) = \alpha a\big(u(t,0)\big)v_x(t,0) - a\Big(u\big(t,s(t)\big)\Big)v_x\big(t,s(t)\big), \quad 0 \le t \le T. \ (3.10)$$

Lemma1.$\varphi(x) \le 0, \ \varphi'(x) \ge \ p > 0, \psi(t) \ge \ p > \ 0 (3.1-3.4)$ bo‘ladi. Qachonki

$$0 \ < p \le \ v(t,x) = \ u_x(t,x) \le M^1 \ \ M^1 = \max\left\{\max_x|\varphi'(x)|, \max_t|\psi(t)|, p\right\}.$$

Isbot. (3.6)–(3.9) masaladan ko‘rinib turibdiki, agar $v(t,x)$funksiya D-sohaning ichki nuqtasida manfiy minimumiga erishmasa, u holda 1-Lemma shartlaridan ekstremum printsipiga ko‘ra, $v(t,x) \ge v\big(t, s(t)\big) = p > 0$ni oling. Manfiy minimumning yo‘qligi quyidagicha isbotlanadi. $v(t,x)$ funksiya qaysidir

$R(t_0, x_0)$ichki nuqtada manfiy minimumiga erishsin , keyin bu nuqtada $v(R) < 0, v_x(R) = 0,\ v_{xx}(R) > 0, v_t(R) \leq 0$. (3.6) tenglamadan biz qarama-qarshilikni olamiz. Demak $v(t,x)$ funksiya D sohaning ichki nuqtasida manfiy minimumiga erishmaydi. Shunday qilib, ekstremum printsipiga ko‘ra (3.6)-(3.9) masaladan

$0 < p \leq v(t,x) = u_x(t,x) \leq M_1$ olamiz, bu yerda $M_1 = \max\{\max_x|\varphi'(x)|, \max_t|\psi(t)|, p\}$. U holda ma’lum xossasi bo‘yicha parabolik tenglama yechimi uchun

$$v_x\big(t, s(t)\big) < 0. \tag{3.11}$$

Lemma 1 isbotlandi.

Teorema1.$\psi'(t) \geq 0, \varphi'(x) \leq \psi(0)$shuningdek (3.1-3.4) shartlar va Lemma1 bajarilsin.U holda shunday o‘zgarmas N topilsaki, berilgan funksiyalar uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin.

$$0 < \dot{s}(t) \leq N, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.12}$$

Bu yerda $N = \max\{\max_{0\leq x\leq s_0}\frac{|\varphi'(x)-p|}{s_0-x}, \max_{0\leq t\leq T}\frac{|\psi(t)-p|}{s_0}\}$

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $v_x(t,0), v_x\big(t,s(t)\big)$ funksiyalarning manfiy va chegaralangan ekanligini isbotlashimiz kerak. $v_x\big(t,s(t)\big)$ funksiyaning manfiyligiallaqachon olingan ((3.11)qarang).

(3.6)-(3.9) masalada $\omega(t,x) = v(t,x) - \psi(t)$va $\omega(t,x)$ uchun masalada o‘zgartirish kiritamiz.

$$a(u)\omega_{xx}(t,x) + a'(u)\big(\omega(t,x) + \psi(t)\big)\cdot\omega_x(t,x) - \omega_t(t,x) =$$

$$= \psi'(t) \geq 0, \qquad (t,x) \in D, \tag{3.13}$$

$$\omega(0,x) = \varphi'(x) - \psi(0) \leq 0, \qquad 0 \leq x \leq s_0, \tag{3.14}$$

$$\omega(t,0) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.15}$$

$$\omega\big(t,s(t)\big) = p - \psi(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.16}$$

(3.13)-(3.16) masaladan ekstremum printsipiga ko‘ra$\overline{D}$ da $\omega(t,x) \le 0$. U holda $\omega(t,x) \le \omega(t,0) = 0$. Parabolik tipdagi tenglama yechishning ma’lum xossasi bo‘yicha $\omega_x(t,0) < 0$ yoki $v_x(t,0) < 0$ ni olamiz.Demak, belgilanganidan $v_x(t,0) < 0$va $v_x(t,s(t)) < 0$,shuningdek 1-teorema shartlaridan va (3.10) dan bizda

$$\dot{s}(t) > 0 \tag{3.17}$$

Endi $\dot{s}(t)$ ni yuqoridan baholaymiz.Buning uchun $v_x(t,s(t))$ ni pastdan baholaymiz. (3.6)-(3.9) masalada

$$U(t,x) = v(t,x) + N\big(x - s(t)\big) - p, \quad N = const > 0 \tag{3.18}$$

$U(t,x)$ uchun (3.6)-(3.9) masalada quyidagi masalani olamiz

$$a(u)U_{xx}(t,x) + a'(u)\big(U(t,x) - N\big(x - s(t)\big) + p\big)U_x(t,x) -$$

$$-a'(u)NU(t,x) - U_t(t,x) =$$

$$= N\dot{s}(t) + N\big(a'(u)(N(s(t) - x) + p)\big) \ge 0, \quad (t,x) \in D, \tag{3.19}$$

$$U(0,x) = \varphi'(x) + N(x - s_0) - p \le 0, \qquad 0 \le x \le s_0, \tag{3.20}$$

$$U(t,0) = \psi(t) - Ns(t) - p \le 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.21}$$

$$U\big(t,s(t)\big) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.22}$$

Demak, ekstremum prinsipiga ko‘ra, $\overline{D}$ da $0 > U(t,x) \le U\big(t,s(t)\big) = 0$. Keyin hosila ishorasi bo‘yicha teorema yordamida biz $U_x\big(t,s(t)\big) \ge 0$ ni olamiz. Shuning uchun,$U_x\big(t,s(t)\big) = v_x\big(t,s(t)\big) + N \ge 0$. Bundan

$$v_x\big(t,s(t)\big) \ge -N \tag{3.23}$$

$v_x\big(t,s(t)\big)$ ning bahosi [4-teorema] natijasidan kelib chiqadi.(3.13)-(3.16) nmasalaning ko‘rinishi

$$W_t = \tilde{a}(u)W_{xx} + \tilde{b}(t,x,W,W_x), \qquad (t,x) \in D \tag{3.24}$$

$$W(0,x) = \Phi(x), \qquad 0 \le x \le s_0, \tag{3.25}$$

$$W(t,0) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.26}$$

$$W(t,s(t)) = \psi(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3.27}$$

$\tilde{a}(u)$ va $\tilde{b}(u)$funksiyalar 4-teorema [4] shartlarini qanoatlantiradi. Qachonki $0 \le t \le T,\ 0 \le x \le s_0$ bo'lganda

$$|W_x(t,x)| \le N_1, \qquad |W|_{1+\gamma} \le N_2 \tag{3.28}$$

Demak,

$$-N_1 \le W_x(t,0) \le 0, \tag{3.29}$$

va bu funksiya Gyolder shartini qanoatlantiradi. Va nihoyat, (3.11), (3.17), (3.23), (3.29) tengsizliklaridan foydalanib, (3.10) dan topamiz.

$$0 < \dot{s}(t) \le N, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.30}$$

teorema1 isbotlandi.

Lemma2.$(s(t), v(t,x))$ funksiyalar juftligi (3.6)-(3.10) masala yechimi bo'lsin. Keyin $(s(t), u(t,x))$funksiyalar juftligi

$$u(t,x) = \int_0^x v(t,\xi) + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s(t)} v(t,\xi)d\xi \tag{3.31}$$

(3.1)-(3.5) masala yechimi bo'ladi.

Isbot. Biz $u_x = v,\ \ v_{xx} = v_x$ ekanligini bilamiz va (3.31)ni t ga nisbatan differensiallab

$$u_t(t,x) = \int_0^x v_t(t,\xi)d\xi + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s(t)} v_t(t,\xi)d\xi \tag{3.32}$$

Biz (3.6) tenglamadan foydalanamiz, u quyidagicha yoziladi

$$v_t = \frac{d}{d\xi}[a(u)v_{\xi}.]$$

Keyin (3.10) ni hisobga olgan holda (3.32) dan olamiz

$$u_t(t,x) = \int_0^x \frac{d}{d\xi}[a(u)v_{\xi}]d\xi + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s(t)} \frac{d}{d\xi}[a(u)v_{\xi}]d\xi =$$

$$= a\big(u(t,x)\big)v_x(t,x) - a\big(u(t,0)\big)v_x(t,0) + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha-1}\Big[a\Big(u\big(t,s(t)\big)\Big)v_x\big(t,s(t)\big) - a\big(u(t,0)\big)v_x(t,0)\Big] =$$

$$= a(u)v_x - \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)a\big(u(t,0)v_x(t,0)\big) + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1}$$
$$+ + \frac{1}{\alpha-1}a\Big(u\big(t,s(t)\big)\Big)v_x\big(t,s(t)\big) =$$

$$= a(u)v_x - \frac{\alpha}{\alpha-1}a\big(u(t,0)v_x(t,0)\big) + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}a\Big(u\big(t,s(t)\big)\Big)v_x\big(t,s(t)\big)$$

$$= a(u)v_x - \frac{1}{\alpha-1}\Big[\alpha a\big(u(t,0)v_x(t,0)\big) - a\Big(u\big(t,s(t)\big)\Big)v_x\big(t,s(t)\big)\Big] + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} =$$

$$= a(u)v_x(t,x) - \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} + \frac{p\dot{s}(t)}{\alpha-1} = a(u)v_x(t,x) = a(u)u_{xx}(t,x),$$

(3.1) tenglama bajariladi.

Dastlabki holatni tekshiring. (3.7) va (3.4) shartni hisobga olgan holda

$$u(x,0) = \int_0^x v(0,\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s_0} v(0,\xi)\,d\xi$$
$$= \int_0^x \varphi'(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s_0}\varphi'(\xi)d\,\xi$$
$$= \varphi(x) - \varphi(0) + \frac{1}{\alpha-1}\big(\varphi(s_0) - \alpha\varphi(0)\big) = \varphi(x)$$

ya'ni (3.2) shartlar bajariladi.

(3.4) shartni qanoatlantiraylik. (3.31) dan bizda

$$u(t,0)=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^{s(t)} v(t,\xi)d\xi, u\big(t,s(t)\big)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^{s(t)} v(t,\xi)d\xi.$$

Bu tengliklardan $\alpha u(t,0) = u(t,s(t))$ ni olamiz. (3.3),(3.5) shartlarni qanoatlantirishini isbotlash oson. Lemma2 isbotlandi.

3.2-§. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi

Teorema2. $a'_u(\tilde{u}) > 0$ bo'lsin va (3.1-3.4) shartlar va 1-teorema ham bajarilsin.U holda (3.1)-(3.5) masala yechimi yagona bo'ladi.

Isbot. (3.1)-(3.5) masalaning ikkita yechimi bo'lsin:$[0,T_1]$ segmentda $s_1(t)$, $\{(t,x){:}\, 0<t\le T_1, 0<x<s_1(t)\}$ sohada $u_1(t,x)$, $[0,T_2]$ segmentda $s_2(t)$, $\{(t,x){:}\, 0<t\le T_2, 0<x<s_2(t)\}$ sohada $u_2(t,x)$. $T=\min[T_1,T_2]$, $h(t)=\min\{s_1(t),s_2(t)\}$ va

$Q=\{(t,x){:}\, 0<t\le T, 0<x<h(t)\}$.

$\bar{Q}$ sohada funksiyalarni qaraymiz.

$U(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)$.

Keyin $U(t,x)$ uchun quyidagi masalani olamiz

$$U_t(t,x)=a(u_1)U_{xx}(t,x)+a'_u(\tilde{u})U(t,x)u_{2xx}, \qquad (t,x)\in Q \tag{3.33}$$

$$U(0,x)=0, \qquad 0\le x\le s_0 \tag{3.34}$$

$$U_x(t,0)=0, \qquad 0\le t\le T \tag{3.35}$$

$$\alpha U(t,0)=u_1\big(t,h(t)\big)-u_2\big(t,h(t)\big), \qquad 0\le t\le T \tag{3.36}$$

$$U_x\big(t,h(t)\big)=u_{1x}\big(t,h(t)\big)-u_{2x}\big(t,h(t)\big), \qquad 0\le t\le T \tag{3.37}$$

Q soha ichida musbat maksimum va manfiy minimumning yo'qligi quyidagicha isbotlangan. $U(t,x)$funktsiya $p=(t_0,x_0)$nuqtadamusbat maksimumga erishsin, keyin bu nuqtada

$U(p) > 0,\ U_x(p) = 0,\ U_t(p) \geq 0,\ U_{xx} \leq 0.$ (3.33) tenglamadan qarama-qarshilikni olamiz.

$$0 \leq U_t(p) = a(u_1)U_{xx}(p) + a'_u(\tilde{u})U(p)u_{2xx} < 0$$

Demak, bu nuqtada $U(t,x)$ funksiya musbat maksimumga erishmaydi.

Endi $U(t,x)$ funksiya $p = (t_0, x_0)$ nuqtada manfiy minimumga erishsin.

keyin bu nuqtada

$$U(p) < 0\ ,\ U_x(p) = 0,\ U_t(p) \leq 0, U_{xx}(p) \geq 0. \qquad (3.33)$$

tenglamadan

$$0 \leq U_t(p) = a(u_1)U_{xx}(p) + a'_u(\tilde{u})U(p)u_{2xx} > 0$$

Shunday qilib, biz $U(t,x)$ funktsiyaning ichki nuqtada musbat maksimum va manfiy minimumga erishmasligini isbotladik. (3.33) va (3.34) shartlardan ko‘rinib turibdiki$U(t,x)$funksiyaning ekstremum nuqtalari Q dagi $h(t)$ egri chiziqda yotadi.

P nuqta $U(t,x)$funksiyaning Q dagi maksimum nuqtasi bo‘lsin. (3.34), (3.35) shartlarni hisobga olsak, P nuqta $x = h(t)$egri chiziqda yotishi kerak, ya’ni $P = \big(t_0, h(t_0)\big),\ t_0 \in [0,T]$ .Aniqlik uchun$s_1(t_0) < s_2(t_0)$, keyin $h(t_0) = s_1(t_0)$bo‘lsin. Parabolik tipdagi tenglamalar yechimlarining ma'lum xossasiga ko‘ra, $U_x(P)\ >\ 0$. (3.37) dan

$$0 < U_x(p) = U_x\big(t_0, h(t_0)\big) = U_x\big(t_0, s_1(t_0)\big) = u_{1x}\big(t_0, s_1(t_0)\big) - u_{2x}\big(t_0, s_1(t_0)\big)$$
$$= p - u_{2x}\big(t_0, s_1(t_0)\big) \leq 0$$

Qarama-qarshilikka kelamiz. Shunday qilib, bu holatda hech qanday musbat maksimum yo‘q. Endimanfiy minimum yo‘qligini isbotlaylik. $U(t,x)$ funksiya $P = t_0, s_1(t_0))$ nuqtadamanfiy minimumga erishsin, u holda $U(P)\ <\ 0$. $u_x(t,x)\ \geq\ p > 0$(3.36) shartdan

$$\alpha U(t_0,0) = u_1\big(t_0,s_1(t_0)\big) - u_2\big(t_0,s_1(t_0)\big) < u_1\big(t_0,s_1(t_0)\big) - u_2\big(t_0,s_2(t_0)\big)$$
$$= U\big(t_0,s_1(t_0)\big) < 0.$$

Agar $\alpha = 0$ bo‘lsa, biz darhol qarama-qarshilikni olamiz. Bizda $\alpha < 0$ bor, bu $U\,(t_{0,0}) > 0$ ekanligini ko‘rsatadi. Bu tenglikdan ko‘rinib turibdiki, $U(t,x)$ funksiya chap chegarada o‘zining musbat maksimumiga etadi. $U(t,x)$ funksiya chap chegaraning qaysidir nuqtasida musbat maksimumiga erishsin. Keyin $U_x(t_0,0) < 0$bo‘ladi, bu (3.35) shartga zid.

Shunday qilib, biz qarama-qarshilikka erishdik. $p = (t_0,x_0)$ nuqtadagi funktsiya $U(t,x)$ manfiy minimumiga erishmaydi.

Endi $s_1(t_0) > s_2(t_0)$, keyin $h(t_0) = s_2(t_0))$ bo‘lsin. $U(t,x)$ funksiya $P = (t_0,s_2(t_0))$ nuqtada musbat maksimumiga erishsin. U holda $U(P) > 0$ bo‘lishi kerak. (3.36) dan $u_x(t,x) \geq p > 0$ ni hisobga olsak,

$$\alpha U(t_0,0) = u_1\big(t_0,s_2(t_0)\big) - u_2\big(t_0,s_2(t_0)\big) > u_1\big(t_0,s_1(t_0)\big) - u_2\big(t_0,s_2(t_0)\big)$$
$$= U\big(t_0,s_2(t_0)\big) > 0.$$

Bizda $\alpha \leq 0$, bu $U(t,x)$funksiya chap chegarasida manfiy minimumiga erishishini ko‘rsatadi. U holda u $U_x(t_0,0) > 0$bo‘lishi kerak va bu (3.35) shartga zid keladi. Demak, bu holda $U(t,x)$funksiya musbat maksimumiga erishmaydi.

Endi biz manfiy minimumning yo‘qligini isbotlaymiz. $U(t,x)$ funksiya $P = t_0,s_2(t_0))$ nuqtada manfiy minimumiga erishsin. Keyin $U_x(P) < 0$ kerak bo‘ladi. [11].(3.5) ni hisobga olgan holda (3.37) shartdan

$$0 > U_x(P) = U_x\big(t_0,h(t_0)\big) = U_x\big(t_0,s_2(t_0)\big) = u_{1x}\big(t_0,s_2(t_0)\big) - u_{2x}\big(t_0,s_2(t_0)\big)$$
$$= u_{1x}\big(t_0,s_2(t_0)\big) - p \geq 0,$$

va yana bir qarama-qarshilikka kelamiz. $s_1(t_0) = s_2(t_0)$tenglikdan bu holatda ekstremum yo‘qligi kelib chiqadi (3.37)

$$U_x(t_0, s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_1(t_0))$$
$$= u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = 0,$$

bulardan Q sohada $U(t,x) \equiv 0$ ekanligini ko‘rsatadi.

Endi biz erkin chegaraning o‘ziga xosligini isbotlaymiz. $t = t_0,\ s_1(t_0) < s_2(t_0)$ nuqtada qaraymiz.(3.5) dan

$$p = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) = u_{2x}(t_0, s_1(t_0)) < u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = p$$

qarama-qarshilikka kelamiz.

Teorema2. isbotlandi.

Stefan masalalarida yechimning maksimal oralig‘ini aniqlashda, uchta omil hisobga olinadi: 1)sohaning yechiluvchanligi; 2) tegishli fazodagi yechimning aprior baholarimavjudligi 3) erkin chegaradagi yechim gradienti modulining yuqoridan va yuqoridan chegaralanganligi;

Agar biz ushbu masalalarga ba'zi shartlar qo‘yadigan bo‘lsak (yuqoridagi omillarni ma’lum bir vaqt oralig‘ida bajarilishini ta'minlasak), Stefan masalasining klassik yechimi vaqtning barcha qiymatlari uchun mavjud.

Bir o‘lchovli masala ko‘p o‘lchovliga nisbatan bir qator afzalliklarga ega. Masalan, soha har doim yechiluvchan emas, chunki erkin chegara $s(t)$ monoton ravishda ortib boradigan funktsiyadir va berilganlarning differensial xossalarini yetarlicha qanoatlantiradi va Florin masalasi bo‘lsa, biz ushbu xususiyatlarning bajarilishini qaraymiz.

Teorema3. Teorema1. shartlari va $(0,0)$ va $(0, s_0)$ nuqtalarda (1)shartlar bajarilgan shartlarda (3.1)-(3.5) masalaning$u(t,x) \in C^{2+\gamma}(\overline{D}),\ s(t) \in C^{1+\gamma}[0,T]$ yagona yechim mavjud.

Isbot.$\dot{s}(t)$ning Gyolder shartini γ ko‘rsatkichi bilan qanoatlantirishini isbotlaylik. Buning uchun $v_x(t, s(t))$funksiyaning Gyolder shartini bajarishiniisbotlash kifoya. $\tau = t,\ y = \frac{x}{s(t)}$yangi o‘zgaruvchilardaD soha $Q = \{(t, x): 0 < t \leq T, 0 < x < 1\}$ sohaga mos keladi. (3.6)-(3.10) masala

$$V_\tau = \frac{a(u)}{s^2(\tau)} V_{yy} + f\big(\tau, y, s(\tau), V, V_y\big), \quad (\tau, y) \in Q \tag{3.38}$$

$$V(0, y) = \varphi'(ys_0), \ \ 0 \leq y \leq 1, \tag{3.39}$$

$$V(\tau, 0) = \psi(\tau), \ \ \ 0 \leq \tau \leq T, \tag{3.40}$$

$$V(\tau, 1) = P, \ \ 0 \leq \tau \leq T, \tag{3.41}$$

bu erda $V(\tau, y) = v\big(\tau, ys(\tau)\big)$,

$$f(\ldots) = [\frac{a'_u V(\tau, y)}{s(\tau)} - \frac{ya(0)}{ps^2(\tau)} V_y(\tau, 1)] V(\tau, y)$$

almashtirish yordamida (3.38)-(3.41) masalada bir jinsli bo‘lmagan holati

$$U(\tau, y) = V(\tau, y) - p(\tau, y) + (\tau + 1)[p(0, y) - \varphi'(ys_0)],$$

$p(\tau, y) = [\psi(\tau)(1 - y) + yp]$ bir jinsli shartlarga qisqartiriladi.U holda (3.38)-(3.41) masalaning ko‘rinishi

$$U_\tau(\tau, y) = A(U) U_{yy} + B\big(\tau, y, s(\tau), U, U_y\big), \tag{3.42}$$

$$U|_\Gamma = 0 \tag{3.43}$$

Bu yerda Г- Q sohaning parabolik chegarasi. (3.42) teorema4, [29] shartlarini qanoatlantiradi.

$$A = \frac{a'_u}{s^2(\tau)} \geq \frac{a'_0}{s^2(T)} > 0$$

$$\frac{|B|}{A} \leq K(U_y^2 + 1)$$

Keyin (3.42), (3.43) masaladan topamiz

$$|U|_{1+\gamma}^{\bar{Q}} \leq N_3 \tag{3.44}$$

(3.10) formuladagi barcha shartlar Gyolder shartini qanoatlantirgani uchun $\dot{s}(t)$ ham Gyolder shartini qanoatlantiradi.

Endi biz $u(t,x)$ funksiyaning yuqori hosilalarini ham taxmin qilishimiz mumkin. Yuqoridagi hisob-kitoblarga asoslanib, biz shunday xulosaga kelishimiz mumkin.

$$|u|_{1+\gamma}^{\Omega} \leq N_4, \qquad |u_{xx}|_{\gamma}^{\Omega} \leq N_5$$

Keyin (3.1) tenglamadan topamiz

$$|u_t|_{\gamma}^{\Omega} \leq N_6$$

Shunday qilib,

$$|u|_{2+\gamma}^{\Omega} \leq C$$

Ko‘rib chiqilayotgan sohayechiluvchan emasligi, $\dot{s}(t)$hosilasi Gyolder shartini bajarishining isbotlanganligi va $u(t,x)$ uchun $C^{2+\gamma}$ fazodagi normalarning aprior baholari olinganligi sababli biz umumiy yechimni ko‘rishimiz mumkin. (qarang [17,18,23, 24]). (3.42), (3.43) dan ko‘rinib turibdiki, bu tenglamaning barcha koeffitsientlari Gyolder shartini qanoatlantirganligi sababli (3,30 ga qarang), chiziqli tenglamalar natijalariga ko‘ra biz taxminni topamiz.

$$|U|_{2+\alpha}^{\bar{Q}} \leq C$$

Erkin chegara va yechim uchun zarur aprior baholarni hisobga olgan holdatenglamalarni yechish, umumiy yechish qobiliyatini isbotlash usullari ishlab chiqilgan.Natijalarga ko‘ra, biz ushbu hisob-kitoblarni allaqachon o‘rnatganimizdan [1,9,12,13] teoremaning tasdiqlanishi olinadi.

III-bob bo‘yicha xulosalalar.

Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko‘rinishlari uchun lokal masalalar juda ko‘plab avtorlar tomonidan o‘rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko‘plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko‘rinishlari uchun nolokal (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati berilmasdan, balki sohaning u yoki qismi orasidagi bog‘lanishlar beriladi) masalalami o‘rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar noklassik masalalar jumlasiga kirib, noklassik masalalar bilan hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlarida juda ko‘plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Masalaning qo‘yilishi. $0 < t \leq T$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi s(t) funksiyani topish talab qilinadi, shundayki $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N,$ s(t) sohadagi Gyolder shartini) qanoatlantiradi. $D = \{(t, x): 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$tenglamani qanoatlantiradi.

$$u_t(t, x) = a(u)u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in D \tag{3.1}$$

va quyidagi boshlang‘ich va chegara shartlari

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{3.2}$$

$$u_x(t, 0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.3}$$

$$\alpha u(t, 0) = u\big(t, s(t)\big), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.4}$$

$$u_x(t, s(t))) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.5}$$

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida noma’lum chegarali Florin tipidagi masala va masala yechimi va noma’lum chegara uchun aprior baholarni olish usullari ishlab chiqilgan, masala yechimining yagonaligi va mavjudligi o‘rganilgan.

XULOSA VA TAKLIFLAR.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. 1-bob 3 ta paragrafdan, 2-bob 3 ta paragrafdan, 3-bob 2 ta paragrafdan iborat. 1-bob filtratsiya tenglamalariva asosiy chegaraviy masalalarning qo‘yilishi haqida, 2-bob filtratsiya tenglamasi uchun noma’lum chegarali masalalar va ularni yechish usullari bo`lsa, 3-bobda esa filtratsiya jarayonlarining noma’lum chegarali florin tipidagi masala tahlilio‘rganildi.

Dissertatsiyaning birinchi bobida, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy fundamental tushunchalaridan biri ko‘p o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli tenglamalarni turlarga ajratish o‘rganilgan. Shu bilan birga issiqlik tarqalish tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning qo‘yilishi keltirilgan. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, boshlang‘ich-chegaraviy masalaning qo‘yilishi matematik fizika tenglamalari fanining klassik masalaridan biri bo‘lib, unda muhim ahamiyat kasb etadi.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida noma’lum chegarali masalaning qo‘yilishi, dastlabki aprior baholar, yechimning yagonaligi va mavjudligi keltirilgan. Erkin chegarali masalalar sodda fizik hodisalarda hosil bo‘ladi. Masalan, muzning halqa tayoqchasini qaraymiz, muzning harorati har doim $0^{\circ}C$ va $x=a$ nuqtada harorat $T^{\circ}C$ darajada bo‘lsin, bunda $T>0$. Bu holatda muz erib boshlaydi va vaqtning har bir $t>0$ momentida suv $a\le x\le s(t)$ oraliqni egallaydi. Biz Stefanning bir o‘lchovli masalalarini qarab chiqdik va ular yechimlarining mavjudligi,yagonaligi hamda assimptotik harakati masalalarini o‘rgandik.

Quyidagi tenglamani qaraymiz. $s(t)>0$ va $u(x,t)$ ni topish talab qilinsin,bunda $0<x<s(t)$, $t>0$ uchun

$$u_{xx}=u_t \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=f(t)\ ,\ \text{bunda}\ f(t)\ge 0\ \text{va}\ t>0 \tag{2.6}$$

$$u(x,o)=\varphi(x),\text{bunda}\ \varphi(x)\ge 0\ ,\ 0<x\le b\ , \tag{2.7}$$

$$\varphi(b)=0\ ,b>0$$

$$u(s(t),t)=0\ ,\ t>0 \text{ va } s(0)=b \tag{2.8}$$

$$u_x(s(t),t)=-\frac{ds(t)}{dt}\ ,\ t>0 \tag{2.9}$$

uchun $x=s(t)$ funksiya $-$ oldindan berilmagan va $u(x,t)$ bilan aniqlanishi shart bo‘lgan erkin chegara.(2.6) $-$(2.8) shartlar birinchi chegaraviy masalani tashkil qiladi,shu bilan birga (2.9)$-$ shart erkin chegara sharti hisoblanadi.

$f\geq 0,\varphi\geq 0$ taxminlar masalaning fizik mohiyati sifatida qaraladi.

Biz (2.5) $-$(2.9) masalani $u_x(s(t),t)$ uchun Volterra tipidagi chiziqsiz integral tenglamani yechish ekvivalent masalasi uchun hal qilamiz. Bu usul erkin chegarali barcha masalalar uchun tegishli.

Magistrlik dissertatsiyasining uchinchi bobida Florin tipidagi masalani o`rganishga bag`ishlangan. Unda filtratsiya tenglamalari uchun Florin masalasi o`rganilgan. Qaralayotgan masalalar qo`yilgan va masalalarning yechimlari uchun aprior baholar olingan, issiqlik tarqalish tenglmalarini keltirib chiqarish, ekstremum prinspi va chegaraviy masalalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladigan ba’zi bir xossalar, teoremalar ularning mavjudlik va yagonaligi isbotlari keltirilgan.

Masalaning qo‘yilishi. $0<t\leq T$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi s(t) funksiyani topish talab qilinadi, shundayki $s(0)=s_0>0$, $0<\dot{s}(t)\leq N,$ s(t) sohadagi Gyolder shartini) qanoatlantiradi. $D=\{(t,x){:}\,0<t\leq T, 0<x<s(t)\}$tenglamani qanoatlantiradi.

$$u_t(t,x)=a(u)u_{xx}(t,x),\quad (t,x)\in D \tag{3.1}$$

va quyidagi boshlang‘ich va chegara shartlari

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq s_0, \tag{3.2}$$

$$u_x(t,0)=\psi(t),\qquad 0\leq t\leq T, \tag{3.3}$$

$$\alpha u(t,0) = u\big(t, s(t)\big), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.4}$$

$$u_x(t, s(t))) = p, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.5}$$

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida noma’lum chegarali Florin tipidagi masala va masala yechimi va noma’lum chegara uchun aprior baholarni olish usullari ishlab chiqilgan, masala yechimining yagonaligi va mavjudligi o‘rganilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

Normativ – huquqiy hujjatlar va metadologik ahamiyatga molik nashrlar

1. Mirziyoyev Sh.M .“Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz.” Toshkent, “O‘zbekiston” , 2017.
2. Mirziyoyev Sh.M “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash” to‘g‘risidagi qarori 2019 yil 9-iyul
3. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining Oliy Majlisga murojaatnomasi. LEX.UZ.
4. Mirziyoyev yanvarda yosh tadqiqotchilar, ilmiy tadqiqot muassasalari rahbarlari va ishlab chiqarish sektori vakillar bilan uchrashuvda so‘zlagan nutqi. LEX.UZ.
5. O‘zbekiston Respublikasining “ Ta’lim to‘g‘risida” gi Qonuni.// O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 y.,,225-modda
6. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining Oliyta’lim tizimi 2030 yilgacha rivojlantirish kontsepsiyasi. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining ПФ5847-son 08.10.2019 farmoniga ilova. LEX.UZ.
7. Жураев Т. Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари. Тошкент, Университет, 2013. 332 бет.
8. Зикиров О. С. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Тошкент, Университет, 2012. 260 бет.
9. Салоҳиддинов М. С. Математик физика тенгламалари.Тошкент. “Ўқитувчи”. 2002. 445 б.
10. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, с.736.
11. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.428 с.
12. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232. С

13. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередачаю М.: Едиториал УРСС, 2003.-784 с.

14. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры., М.: Ноука. Физматлит, 1997, 320 с.

15. Самарский А.А., Галактионов В.А. Курдомов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задаче для квазилинейных параболических уравнений.М.: Наука, 1987,477 с.

16. Кружков С.Н. Априорная оценка для производной решения параболиче ского уравнения // Вестник МГУ. Сер.1.62,(1967).0.41-48.

17. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск. Наука, 1986, 239 с.

18. Мейрманов А.М. Многофазная задача Стефана для квазилинейных пара-болических уравнений, ДСС, 1973, вып.13. с.74-85.

19. Рубенштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайзгие, 1967. 468 г.

20. Данилюк И.И. О задаче Стефана. УМН, 1985, Т.40, вып.5(245), с. 133-185.

21. Fasano A., Primicerio M. Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions. J.Math. Anal.Appl..1979, .72. p.247-273.

22. Флорин В.А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды. Изв. АН СССР. 1951, ОТН, N11.с. 1625-1649.

23. Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014, 240 с.

24. Тураев Р.Н. Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения. UzMJ., 2017, Хо3. с.8-16.

25. Іванчов М.І., Снітко Г.А. Виначення залежних від часу коефіцієнтів на-раболічного рівняння в області з вільною межею. Нелинейные граничныезадачи- 2011, т.20, с.28-44.

26. Баранська 1.Э., Іванчов М.Г. Обернена задача для двовимирного рівняннятеплопровідності в області з вільними межами. Український математичний вісник- 2007, Том 4, № 4, с. 457 484.

27. De Lllo S., Salvatori M. A two-phase free boundary problem for the nonlinearheat equation. J. of Nonlinear Math. Physics 2004. V. 1, no. 1. P. 134-140.

28. Visintin A. Models of phase transitions. Progress Nonlinear Differential Equations, vol.28, Birkhauser, Baston, MA, 1996.

Monografiya, ilmiy maqola, patent, ilmiy to‘plamlar.

29. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнение с двумя независимыми переменными // Труы Моск. Матем. Общ.ва. т.16 (1967). 329-346.

30. Douglas, Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. // Proc. Amer.Math.Soc. 1957.Vol.8, No.4. P.402-408.

31. Ильин А.М, Калашников А.С, Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.// УМН, 1962, Т. 17, вып. 3, с.3-141.

32. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе. // Украинский математический журнал (2012), т.64, №1, стр.71-80.

33. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.мат.Науки".2012. №26. С.99-106.

34. Takhirov J.O., Turaev R.N. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences, (New York), Vol.187, No.1, (2012). pp. 86-100.

35. Turaev R.N. Nonlocal Florin problem for quasilinear diffusion equation taking into account nonlinear convection. Bulletin of University of Karaganda. 2020. No 4. P.1221.

36. Ren-Hu Wang a,b, Lei Wang a, Zhi-Cheng Wang.Free boundary problem of a reaction–diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018). 1233-1257.

37. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. Пер. с англ. / Г. Готтштайн. - Москва : БИНОМ; Лаборатория знаний, 2011. - 400 с.

38. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. A one-phase Stefan problem for a nonclassical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. //App.Math.and Com. 2016. No.182, № 5. P. 809-818.

39. Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face.// El.Jour.Differ.Eq. 2016. No.206, № 21. P.1-16.

40. Zh. O. Takhirov. Florin-Type problem for the Parabolik Equation with power Nonlinearity.// Journal .Mat.Scians.2020. vol.246,p.429-444.

41. Тахиров Ж. О., Тўраев Р. Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе.// Укр.Мат.Журнал, 2012,том.64. No1.c.38-46.

42. Т. Д. Вентцель. Об одной задаче со свободной границей для уравнение теплопроводиости. // Докл. АН СССР, 1960, том 131, номер 5, 1000-1003.

43. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнение. // Вестник МГУ. Сер 1. Мат.№2. 1966.c.40-54.

44. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнение. // Вестник МГУ. №5ю1966. с. 51-62.

45. Uralova H. “Bir jinsli bo’lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi” Science and education jurnali 2022-yil iyun soni 39-bet

46. Uralova H. “Parabolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich shartlar va chegaraviy shartlar” Science and education jurnali 2023-yil 37-soni 10 –bet

Internet saytlari.

47. http:// mathserfer. com.uz.

48. http:// gufo.me.

49. http:// xn- b1 agsdjmeufge. xn- p1 ai.

50. http:// easymath. Com. Uz.

51. http:// www. mathforyou. net.
52. http:// www. skoltech.uz.
53. http:// comp – science. narod. uz.