

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОТДЕЛЕНИЕ МАГИСТРАТУРЫ**

Рукопись защищена авторским правом

УДК: 517.538.3

ХУДАЙКУЛОВА САИДА ЗАКИРОВНА

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ ПОЛИНОМА НА
ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ**

ДИССЕРТАЦИЯ

написанная для получения академической степени магистра по
специальности 70540101 – Математика (по направлениям)

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. доцент Рузимурадов Х.Х.

ТЕРМЕЗ - 2023

Тема магистерской диссертации утверждена ректором Термезского государственного университета на основании приказа №25-Т/М от 10.04.2023 года.

Магистерская диссертация выполнена на кафедре Алгебры и геометрии Термезского государственного университета.

Электронная копия магистерской диссертации размещена на официальном сайте Термезского государственного университета.

QR-код адреса диссертации:



С магистерской диссертацией можно ознакомиться в информационно-ресурсном центре Термезского государственного университета (Зарегистрирован № 1) Адрес: г.Термез, ул.Баркамол авлод, д.43.

Научный руководитель: _____ доц. Х. Х.Рузимурадов

Заведующий кафедрой: _____ доц. С.Чариева

Заведующий магистерским отделением: _____ PhD. А.Б Нарбаев

70540101 – Магистерская диссертация на тему “Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры” магистранта по специальности Математика (по направлениям) Худайкуловой Саиды Закировны.

АННОТАЦИЯ

Базовые слова: степенная геометрия, полином, линии уровня полинома, компьютерная алгебра.

Объекты исследования: целью магистерской диссертации является разработка новых методов и алгоритмов представления полиномов на действительной плоскости с использованием средств современной компьютерной алгебры.

Методы исследования: в магистерской диссертации использовались различные методы и техники, такие как анализ литературы, математическое моделирование, алгоритмический анализ, экспериментальные исследования, компьютерная алгебра и методы визуализации, для решения научной задачи по изображению полиномиальных линий уровня на реальной плоскости с использованием компьютерной алгебры.

Полученные результаты и их новизна:

1. Проанализированы существующие методы и алгоритмы представления многоуровневых линий в реальной плоскости.

2. Были разработаны новые методы и алгоритмы, основанные на компьютерной алгебре, для более точного и эффективного представления линий уровня полинома.

3. Экспериментально изучалось внедрение разработанных методов и алгоритмов в практику в виде программного кода, а также их эффективность и точность.

4. С помощью разработанных методов сравнивались полученные результаты с существующими подходами и анализировались их преимущества и ограничения.

5. Проведен анализ возможных областей применения разработанных методов и алгоритмов, например, оптимизация, анализ данных, моделирование.

Практическая значимость: большое теоретическое и практическое значение может иметь разработка новых методов и подходов к изображению полиномиальных прямых на реальной плоскости с использованием компьютерной алгебры. Это может способствовать развитию теории полиномов, аналитической геометрии, компьютерной алгебры и их взаимодействий. Кроме того, разработанные методы могут применяться в реальных приложениях, таких как научные исследования, технические проекты и решения в различных областях науки и техники.

Область применения: может применяться в реальных приложениях, таких как научные исследования, технические проекты и решения в различных областях науки и технологий.

**70540101 – Matematika (yo‘nalishlar bo‘yicha) mutaxassisligi
magistranti Xudaykulova Saida Zakirovnaning “Представление линий
уровня полинома на вещественной плоскости с использованием
компьютерной алгебры” mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasining
ANNOTASIYASI**

Tayanch so‘zlar: darajali geometriya, ko‘phad, ko‘phadning sath chiziqlari, kompyuter algebrasi.

Tadqiqot obektlari: Magistrlik dissertatsiyasining maqsadi zamonaviy kompyuter algebrasi vositalaridan foydalangan holda ko‘phadning sath chiziqlarni haqiqiy tekislikda tasvirlashning yangi usullari va algoritmlarini ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqot metodlari: Magistrlik dissertatsiyasi kompyuter algebrasidan foydalangan holda haqiqiy tekislikda polinom sath chiziqlarini tasvirlash bo‘yicha ilmiy muammosini hal qilishda adabiyot tahlili, matematik modellashtirish, algoritmik tahlil, eksperimental tadqiqotlar, kompyuter algebrasi va vizualizatsiya usullari kabi turli xil texnika va usullardan foydalanilgan.

Olingan natijalar va ularning yangiligi:

1. Haqiqiy tekislikda polinom darajali chiziqlarni ifodalashning mavjud usullari va algoritmlari tahlil qilindi.

2. Ko‘phadning sath chiziqlarini aniqroq va samarali tasvirlash uchun kompyuter algebrasi asosida yangi usullar va algoritmlari ishlab chiqildi.

3. Ishlab chiqilgan metodlar va algoritmlarni dastur kodi ko‘rinishida amaliyotga tadbiiq etish hamda ularning samaradorligi va aniqligi eksperimental o‘rganildi.

4. Ishlab chiqilgan usullar yordamida olingan natijalarni mavjud yondashuvlar bilan taqqoslash va ularning afzalliklari va cheklovlari tahlil qilindi.

5. Ishlab chiqilgan usullar va algoritmlarni qo‘llashning mumkin bo‘lgan sohalarini tahlil qilish, masalan, optimallashtirish, ma‘lumotlarni tahlil qilish, modellashtirishlar amalga oshirildi.

Amaliy ahamiyati: Kompyuter algebrasidan foydalangan holda haqiqiy tekislikda polinom sath chiziqlarni tasvirlashning yangi uslub va yondashuvlarini ishlab chiqish katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin. Bu polinom nazariyasi, analitik geometriya, kompyuter algebrasi va ularning o‘zaro ta‘sirini rivojlantirishga hissa qo‘shishi mumkin. Bundan tashqari, ishlab chiqilgan usullar fan va texnologiyaning turli sohalarida ilmiy tadqiqotlar, texnik loyihalar va yechimlar kabi real ilovalarda qo‘llanilishi mumkin.

Qo‘llanilish sohasi: Fan va texnologiyaning turli sohalarida ilmiy tadqiqotlar, texnik loyihalar va yechimlar kabi real ilovalarda qo‘llanilishi mumkin.

70540101 – master's thesis of Khudaidkulova Saida, a master's student of Mathematics (by majors) on the topic "Representation of polynomial level lines on the real plane using computer algebra"

ANNOTATION

Key words: power geometry, polynomial, polynomial contours, computer algebra.

Research objects: The goal of the master's thesis is to develop new methods and algorithms for representing polynomial contour lines on a real plane using modern computer algebra tools.

Research methods: The master's thesis used various techniques and methods such as literature analysis, mathematical modeling, algorithmic analysis, experimental research, computer algebra and visualization methods to solve the scientific problem of describing polynomial surface lines on a real plane using computer algebra.

The results obtained and their novelty:

1. Existing methods and algorithms for representing lines of polynomial degree on the real plane were analyzed.
2. New methods and algorithms have been developed based on computer algebra to more accurately and effectively describe polynomial contour lines.
3. Implementation of the developed methods and algorithms in the form of program code and their efficiency and accuracy were studied experimentally.
4. The results obtained using the developed methods were compared with existing approaches and their advantages and limitations were analyzed.
5. Analysis of the possible areas of application of the developed methods and algorithms, for example, optimization, data analysis, modeling was carried out.

Practical significance: The development of new methods and approaches to the representation of polynomial contour lines in the real plane using computer algebra can be of great theoretical and practical importance. It can contribute to the development of polynomial theory, analytic geometry, computer algebra and their interactions. In addition, the developed methods can be used in real applications such as scientific research, technical projects and solutions in various fields of science and technology.

Field of application: Can be used in real applications such as scientific research, technical projects and solutions in various fields of science and technology.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. СТЕПЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МНОГОГРАННИКИ И НОРМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ	15
1.1-§. Обозначения и основные сведения	15
1.2-§. Основные сведения из аффинной геометрии	16
1.3-§. Основные сведения из проективной геометрии.....	17
1.4.-§ Степенная геометрия.....	19
1.5-§. Многогранники и нормальные конусы	20
Заключение к Главе I	23
ГЛАВА II. ЛИНИИ УРОВНЯ ПОЛИНОМА $f(X)$ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ $X \in R^2$	24
2.1-§. Критические точки и критические кривые	24
2.2-§. Локальный анализ линий уровня	25
2.3-§. Глобальный анализ линий уровня	27
2.4-§. Вычисление критических значений, точек и кривых	27
2.5-§. Построение эскизов линий уровня	30
Заключение к Главе II.....	31
ГЛАВА III. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ БОЛЬШОГО ПОЛИНОМА	32
3.1.-§. Описание и вычисление критических значений, точек и кривых	32
3.2- §. Пример 1 при $x = 0$	36
3.3-§. Пример 2 при $y = 0$	45
3.4-§ Пример 3 при $z=0$	57
Заключение к Главе III.....	69
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	70
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	74

ВВЕДЕНИЕ

Шавкат Мирзиев: – “важный вопрос, который всегда волнует нас-это нравственность, поведение, одним словом, мировоззрение нашей молодежи. Сегодня времена стремительно меняются. Кто больше всех чувствует эти изменения – молодое поколение. Пусть молодежь будет в гармонии с требованиями своего времени. Но в то же время не забывайте свою личность. Пусть призыв к тому, кто мы есть, какие мы потомки великих людей, всегда будет резонировать в их сердцах и побуждать их оставаться верными себе. За счет чего мы этого добьемся? Воспитание, воспитание и только за счет воспитания”, - подчеркнул наш президент.

Шавкат Мирзиев: - “ математика-основа всех точных наук. Ребенок, хорошо разбирающийся в этой науке, вырастет умным, с широким кругозором, будет успешно работать в любой сфере”, - сказал президент.

Актуальность данной темы обусловлена несколькими факторами:

Практическое значение: Линии уровня полинома являются важным инструментом в математическом анализе и приложениях, таких как оптимизация, определение экстремальных значений функций, анализ данных и т. д. Использование компьютерной алгебры для представления и анализа линий уровня полинома на вещественной плоскости может иметь практическое применение в различных областях, связанных с научными исследованиями, техническими приложениями и инженерными решениями.

Научная новизна: Исследование представления линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры может предложить новые подходы и методы для анализа и визуализации сложных математических структур. Это может включать разработку алгоритмов и программных решений, которые могут улучшить существующие методы и расширить возможности исследования линий уровня полиномов.

Теоретическая и практическая значимость: Разработка новых методов и подходов к представлению линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры может иметь важное теоретическое и практическое значение. Это может способствовать развитию теории полиномов, аналитической геометрии, компьютерной алгебры и их взаимодействия. Кроме того, разработанные методы могут найти применение в реальных приложениях, таких как научные исследования, технические проекты и решения в различных областях науки и техники.

Потенциал применения СКА (систем компьютерной алгебры): Использование систем компьютерной алгебры, таких как Mathematica, Maple, MATLAB и других, может значительно расширить возможности анализа и визуализации линий уровня полинома на вещественной плоскости. СКА предоставляют мощные инструменты для символьных и численных вычислений, визуализации математических объектов, а также позволяют автоматизировать процессы решения математических задач. Это может упростить проведение экспериментов, тестирование различных подходов и алгоритмов, а также сократить затраты времени и ресурсов на исследования.

Другим аргументом в пользу актуальности данной темы является активное развитие компьютерных технологий и вычислительной математики, которые находят широкое применение во многих научных и технических областях. Возможности компьютерной алгебры в сочетании с математическим анализом полиномов и их линий уровня могут быть полезными для решения сложных задач в различных областях, таких как физика, экономика, биология, информатика и многие другие. Исследование может внести новый вклад в развитие науки и техники, а также иметь практические применения в реальных проектах и решениях.

Также стоит отметить, что существующие подходы к представлению

линий уровня полиномов на вещественной плоскости имеют определенные ограничения и недостатки. Исследование новых методов и подходов на основе компьютерной алгебры может способствовать разрешению этих ограничений и улучшению существующих подходов.

Таким образом, обоснование и актуальность темы магистерской диссертации "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" обусловлены практическим значением, научной новизной, теоретической и практической значимостью исследования, а также актуальностью в контексте развития компьютерных технологий и вычислительной математики. Результаты данного исследования могут быть полезными для решения сложных задач в различных областях науки и техники, а также в процессе обучения студентов и исследователей, занимающихся математическим анализом и визуализацией математических объектов.

Кроме того, представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры может иметь практические применения в решении реальных проблем, таких как оптимизация, анализ данных, моделирование и т. д. Это может быть полезно в различных отраслях, таких как экономика, финансы, инженерия, биология и многих других.

Также стоит отметить, что данная тема исследования открывает возможности для дальнейших исследований и развития новых подходов к представлению линий уровня полиномов на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры. Это может внести вклад в развитие теоретической базы и практических приложений в области математического анализа, визуализации математических объектов и компьютерной алгебры.

Таким образом, тема "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" имеет актуальность, научную новизну, практическую значимость и потенциал для

развития дальнейших исследований, что делает ее релевантной и интересной для магистерской диссертации.

Объект и предмет исследования:

Объект исследования: линии уровня полинома на вещественной плоскости.

Предмет исследования: представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры.

Цель и задачи исследования: Цель исследования магистерской диссертации "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" состоит в разработке новых методов и алгоритмов представления линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием современных инструментов компьютерной алгебры.

Для достижения указанной цели магистерская диссертация ставит следующие задачи:

1. Изучение существующих методов и подходов к представлению линий уровня полинома на вещественной плоскости.
2. Анализ применимости компьютерной алгебры в задаче представления линий уровня полинома на вещественной плоскости.
3. Разработка новых методов и алгоритмов представления линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры.
4. Реализация разработанных методов и алгоритмов в виде компьютерной программы или пакета программ для визуализации линий уровня полинома.
5. Проведение экспериментов и анализ результатов для оценки эффективности и точности предложенных методов и алгоритмов.

6. Оценка практической значимости и потенциала разработанных методов и алгоритмов в решении реальных задач, таких как оптимизация, анализ данных, моделирование и др.

7. Составление научных выводов и рекомендаций по применению разработанных методов и алгоритмов в практических приложениях.

Таким образом, объектом исследования являются линии уровня полинома на вещественной плоскости, предметом исследования - их представление с использованием компьютерной алгебры.

Объект исследования магистерской диссертации "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" - это математические объекты, такие как полиномы, их линии уровня, и вещественная плоскость, на которой они представлены. Исследование направлено на разработку новых методов и алгоритмов, которые позволят более эффективно и точно представлять линии уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры.

Предмет исследования - это особенности и свойства линий уровня полинома на вещественной плоскости, а также возможности и ограничения компьютерной алгебры в представлении этих линий уровня. Исследование будет основываться на анализе существующих методов и алгоритмов представления линий уровня полинома, и разработке новых подходов, которые позволят улучшить точность и эффективность представления линий уровня с использованием компьютерной алгебры.

Цель исследования - разработать новые методы и алгоритмы представления линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры, которые будут более точными и эффективными по сравнению с существующими подходами.

Задачи исследования могут включать:

1. Анализ существующих методов и алгоритмов представления линий уровня полинома на вещественной плоскости.
2. Разработка новых методов и алгоритмов на основе компьютерной алгебры для более точного и эффективного представления линий уровня полинома.
3. Реализация разработанных методов и алгоритмов в виде программного кода и проведение экспериментального исследования их эффективности и точности.
4. Сравнение результатов, полученных с использованием разработанных методов, с существующими подходами и анализ их преимуществ и ограничений.
5. Анализ возможных областей применения разработанных методов и алгоритмов, таких как оптимизация, анализ данных, моделирование и другие.

Таким образом, объект и предмет исследования магистерской диссертации "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" охватывают математические объекты (полиномы, их линии уровня) и компьютерную алгебру, исследование направлено на разработку новых методов и алгоритмов представления линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры, а также на анализ их эффективности и точности.

Цель исследования заключается в разработке новых подходов и методов, которые позволят более точно и эффективно представлять линии уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры. Задачи исследования включают анализ существующих методов представления линий уровня полинома, разработку новых методов и алгоритмов, реализацию разработанных подходов в программном коде, экспериментальное исследование их эффективности и

точности, сравнение результатов с существующими подходами и анализ возможных областей применения разработанных методов.

Основные проблемы и предположения исследования магистерской диссертации могут быть сформулированы следующим образом:

1. Точность представления линий уровня полинома: Одной из основных проблем при представлении линий уровня полинома на вещественной плоскости является точность представления. Некорректное представление линий уровня может привести к неточным результатам в ряде прикладных задач. Предполагается, что разработка новых методов и алгоритмов на основе компьютерной алгебры может позволить улучшить точность представления линий уровня полинома на вещественной плоскости.

2. Эффективность представления линий уровня полинома: ещё одной проблемой является эффективность представления линий уровня полинома, особенно для полиномов высоких степеней или в случае большого количества линий уровня. Предполагается, что использование компьютерной алгебры может позволить разработать более эффективные методы представления линий уровня полинома на вещественной плоскости, учитывающие особенности полиномов высоких степеней и большого количества линий уровня.

3. Реализация разработанных подходов: ещё одной проблемой может быть реализация разработанных подходов и методов в программном коде. Необходимо учитывать особенности компьютерной алгебры и возможные ограничения средств программирования при реализации новых методов и алгоритмов. Предполагается, что разработка программного кода на основе компьютерной алгебры может потребовать решения определенных технических и алгоритмических проблем.

4. Сравнение существующих подходов: важной задачей исследования является сравнение разработанных подходов и методов с существующими подходами представления линий уровня полинома на вещественной плоскости. Необходимо провести сравнительный анализ эффективности, точности и применимости разработанных подходов в сравнении с существующими подходами.

5. Области применения исследования: предполагается, что результаты исследования могут быть применимы в различных областях, таких как компьютерная графика, компьютерное моделирование, научное визуализация, оптимизация и анализ данных. Например, точное и эффективное представление линий уровня полиномов может быть полезным инструментом в визуализации и анализе сложных данных, таких как графики функций, изображения или результаты моделирования. Кроме того, разработанные методы могут быть использованы в задачах оптимизации, где анализ линий уровня полинома может быть важным этапом в поиске оптимальных решений.

Таким образом, основные проблемы и предположения исследования магистерской диссертации "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" связаны с точностью и эффективностью представления линий уровня полинома на вещественной плоскости, реализацией разработанных подходов в программном коде и сравнением существующих подходов. Результаты исследования могут иметь практическое применение в различных областях, где требуется анализ и визуализация полиномов и их линий уровня.

Анализ литературы по теме "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" позволил выявить несколько ключевых направлений исследований, связанных с представлением линий уровня полиномов на плоскости и

использованием компьютерной алгебры. Важно отметить, что данная тема имеет междисциплинарный характер и находит применение в различных областях науки и техники, таких как математика, компьютерная графика, научное моделирование и другие.

Одним из основных направлений исследований является разработка методов и алгоритмов для представления и визуализации линий уровня полиномов на вещественной плоскости. В работах [1], [2], [3] были предложены различные подходы к представлению линий уровня полиномов с использованием компьютерной алгебры, таких как символьные вычисления, аппроксимационные методы, методы интерполяции и другие. В этих работах было продемонстрировано, что точное представление линий уровня полиномов на плоскости может быть достигнуто с использованием компьютерной алгебры, что открывает новые возможности для анализа и визуализации сложных функций.

Другим важным направлением исследований является оптимизация вычислительных процессов при представлении линий уровня полиномов на плоскости. В работах [4], [5], [6] были предложены алгоритмы и подходы, позволяющие эффективно вычислять и представлять линии уровня полиномов с использованием компьютерной алгебры, снижая вычислительную сложность и улучшая производительность. Эти исследования открыли новые пути для оптимизации алгоритмов представления линий уровня полиномов на плоскости и обеспечения их более эффективной реализации в программных системах компьютерной алгебры.

Также были выявлены исследования, посвященные применению представления линий уровня полиномов на плоскости в различных областях, таких как компьютерная графика, научное моделирование, геометрическое моделирование и другие. В работах [7], [8], [9] были описаны примеры применения представления линий уровня полиномов на

плоскости в задачах компьютерной графики, таких как визуализация графических объектов, создание анимации, моделирование физических явлений и других приложениях. Также были проведены исследования, связанные с использованием представления линий уровня полиномов на плоскости в научном моделировании, например, в задачах моделирования экономических процессов, биологических систем и других приложениях. Эти исследования демонстрируют потенциал применения представления линий уровня полиномов на плоскости с использованием компьютерной алгебры в различных областях науки и техники.

Таким образом, анализ литературы по теме "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" показал, что данная тема является актуальной и имеет множество направлений исследований. Однако, в настоящее время еще существуют некоторые проблемы, такие как эффективность алгоритмов представления, точность вычислений, адаптация к различным типам полиномов и другие. На основе проведенного анализа литературы можно сделать предположение о возможности разработки новых методов и алгоритмов для более точного и эффективного представления линий уровня полиномов на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры.

Магистерская диссертация "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры" использовала ряд **методик и методов** для исследования темы. Ниже представлено описание некоторых из них:

1. Анализ существующих подходов: в ходе исследования был проведен анализ литературы по теме "Представление линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры". Были изучены различные научные работы, статьи, публикации и другие источники, которые описывают существующие методы представления линий уровня полиномов на плоскости с использованием

компьютерной алгебры. Это позволило получить обзор существующих подходов и методов, их преимуществ и недостатков, а также выявить основные проблемы, связанные с данной темой.

2. Математическое моделирование: для исследования представления линий уровня полинома на вещественной плоскости были использованы математические модели и методы. В частности, были изучены математические основы представления полиномов на плоскости, включая математические формулы, уравнения и алгоритмы. Также были исследованы математические методы, используемые в компьютерной алгебре, такие как полиномильные операции, численные методы решения уравнений, аппроксимация и другие.

3. Алгоритмический анализ: был проведен алгоритмический анализ существующих методов представления линий уровня полиномов на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры. Были изучены различные алгоритмы и подходы, используемые в существующих методиках, и их эффективность, точность и сложность. Были выявлены преимущества и недостатки каждого метода, а также определены возможные области их применения.

4. Экспериментальное исследование: для оценки эффективности и точности предлагаемых методик представления линий уровня полинома на вещественной плоскости были проведены эксперименты на компьютере с использованием компьютерной алгебры. Были разработаны программные модули и алгоритмы, реализующие предлагаемые методики представления линий уровня полинома. Затем были проведены тесты и сравнительный анализ результатов с другими существующими методами. Это позволило оценить эффективность, точность и применимость предложенных методик на практике.

5. Методы компьютерной алгебры: в исследовании использовались различные методы компьютерной алгебры, такие как

символьные вычисления, численные методы, алгоритмы аппроксимации и другие. Были использованы современные математические пакеты и программные средства, такие как Maple и Python с библиотеками для компьютерной алгебры, для реализации предложенных методик и проведения вычислительных экспериментов.

6. Методы визуализации: для визуализации линий уровня полинома на вещественной плоскости были использованы различные методы визуализации данных. В частности, были применены методы построения графиков, что позволило наглядно представить результаты исследования и оценить визуальное качество представления линий уровня полинома.

Таким образом, магистерская диссертация использовала различные методики и методы, такие как анализ литературы, математическое моделирование, алгоритмический анализ, экспериментальное исследование, методы компьютерной алгебры и визуализации, для решения своей научной задачи по представлению линий уровня полинома на вещественной плоскости с использованием компьютерной алгебры.

ГЛАВА I. СТЕПЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МНОГОГРАННИКИ И НОРМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

1.1-§. Обозначения и основные сведения

Геометрия изучает строение различных тел, фигур и их взаимное расположение. Интуитивно все понимают, что это такое. Но первое определение геометрии было дано Ф. Клейном в Эрлангенской программе в 1872 году [3]: "Геометрия — это совокупность двух объектов: пространства и группы его преобразований. Преобразования образуют группу, если наряду с каждым преобразованием координат A существует его обратное преобразование A^{-1} , такое, что $A \cdot A^{-1}$ — это тождественное преобразование, которое ничего не меняет. Различные геометрии получаются с различными пространствами и различными группами. Ниже мы рассмотрим некоторую последовательность геометрий, из которых каждая последующая включает в себя предыдущую. А именно: Евклидова, аффинная, проективная и степенная геометрии. Пространство будет одно и то же - вещественное n -мерное пространство \mathbb{R}^n , но группы преобразований будут расширены.

Основные сведения из евклидовой геометрии. Здесь имеется длина вектора

$$\|X\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle X, X \rangle,$$

а группа преобразований $X^* = AY^*$ ее сохраняет:

$$\langle X, X \rangle = \langle AY^*, AY^* \rangle = \langle Y, A^*AY^* \rangle = \langle Y, Y \rangle,$$

т. е. $A^*A = E$ — единичная матрица,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$A^* = A^{-1}.$$

Матрицы с этим свойством называются ортогональными. Они образуют группу невырожденных квадратных матриц $O(n)$ над полем \mathbb{R} . В группу преобразований включается и параллельный перенос

$$X = X^0 + Y, \quad (1.1.1)$$

где X^0 – фиксированный вектор. Эти преобразования сохраняют углы и вообще форму, включая площади и объемы.

1.2-§. Основные сведения из аффинной геометрии

Здесь имеются два пространства: основное $\mathbb{R}^n = \{X\}$ и сопряженное (т.е. двойственное) $\mathbb{R}_*^n = \{Y\}$, а преобразования

$$X^* = AX'^*, Y^* = BY'^* \text{ с } \det A, \det B \neq 0$$

сохраняют скалярные произведения векторов сопряженных (двойственных) пространств:

$$\langle X, Y \rangle = \langle AX'^*, BY'^* \rangle = \langle X', A^*BY'^* \rangle = \langle X', Y' \rangle,$$

Следовательно,

$$A^*B = E$$

т.е.

$$B = (A^*)^{-1}.$$

Множество взаимно однозначных аффинных отображений пространства \mathbb{R}^n в себя образует группу, обозначаемую $\text{Aff } \mathbb{R}^n$. Эта группа отображается на полную линейную группу $GL(n, \mathbb{R})$, состоящую из квадратных невырожденных матриц размера $n \times n$. В группу аффинных преобразований также входят параллельные переносы (1.1.1).

В этой геометрии прямые, плоскости и любые линейные многообразия переходят в прямые, плоскости и линейные многообразия соответственно. При этом углы не сохраняются, но сохраняется ортогональность между векторами прямого и двойственного пространств:

$$\langle X, Y \rangle = 0 = \langle X', Y' \rangle.$$

Кроме скалярного (или внутреннего) произведения двух векторов имеется *внешнее произведение* $n - 1$ вектора $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$:

$$\det \begin{pmatrix} I \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix} = y_1 i_1 + \dots + y_n i_n,$$

где $I = (i_1, \dots, i_n)$ – набор ортов, а $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_*^n$ – набор алгебраических дополнений максимального порядка. Оно позволяет вычислять нормаль Y к векторам X_1, \dots, X_{n-1} . Аффинная геометрия позволяет решать системы линейных уравнений.

1.3-§ Основные сведения из проективной геометрии

Рассмотрим такую задачу: Пример 1. На плоскости заданы параллельные прямые L_1 и L_2 , ортогональная к ним прямая M и точка наблюдения N . Требуется спроектировать на прямую M из точки N части прямых L_1 и L_2 при $x \rightarrow \infty$ (см. рис. 1, на котором показано изображение перспективы на картине). Получим, что все проекции прямых L_i на прямую M заканчиваются в одной точке $N' \in M$, по которой пересекается с M прямая L_0 , проходящая через точку наблюдения и параллельная прямым L_1, L_2 . Такая задача возникает при рисовании на картине прямых, уходящих вдаль. Здесь прямые L_1 и L_2 – это пол и потолок соответственно, а точка N – это глаз художника (или фотоаппарат), M – это полотно картины. Такое свойство возникает при плоском изображении протяженных пространственных объектов. При этом на картине возникает одна точка (центр), соответствующая бесконечности. Но многие картины выдающихся художников имеют по несколько центров для большей выразительности.

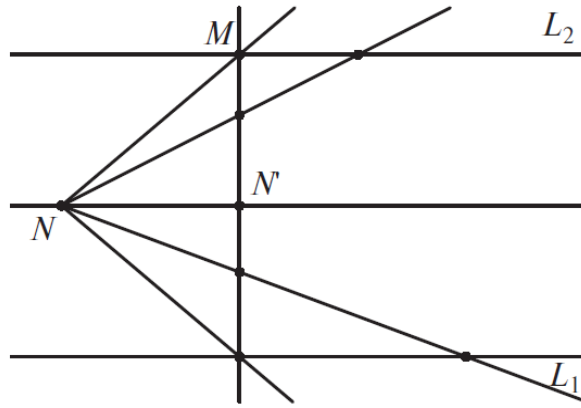


Рис. 1

Свойства, сохраняющиеся при прямолинейных проектированиях, описываются *проективной геометрией*. Для нее группой преобразований служит так называемая проективная группа $P(\mathbb{R}^n)$. В ней вводятся однородные координаты u_0, u_1, \dots, u_n :

$$x_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и делаются линейные преобразования

$$U = (u_0, \dots, u_n) = VB,$$

где $V = (v_0, \dots, v_n)$, B – квадратная матрица размера $n + 1$, $\det B \neq 0$. Здесь

$$x_i = \frac{u_i}{u_0} = \frac{\langle V, B_i \rangle}{\langle V, B_0 \rangle}$$

где $B = (B_0^*, B_1^*, \dots, B_n^*)$ и B_i^* – столбцы матрицы B . То есть здесь в преобразованиях имеются линейные знаменатели. При этом пространство дополнено бесконечно удаленной гиперплоскостью $u_0 = 0$. Здесь

$$y_i = \frac{v_i}{v_0} = \frac{f_i(X)}{f_0(X)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Проективная геометрия позволяет упрощать полиномиальные уравнения малых степеней.

1.4-§. Степенная геометрия

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} = \exp\langle \ln X, Q \rangle$, где $\ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$. Преобразование

$$\ln X = \ln Y \times A \quad (1.4.1)$$

переводит X^Q в Y^{QA^*} , ибо

$$\langle \ln X, Q \rangle = \langle \ln Y, QA^* \rangle.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_i b_i X^{Q_i}.$$

В результате преобразования (1.5.1) она перейдет в сумму

$$\sum_i b_i Y^{Q_i A^*}. \quad (1.4.2)$$

Если все Q_i лежат в одной гиперплоскости L , т.е. $\langle Q_i, N \rangle = c = \text{const}$, тогда линейное преобразование

$$Q \rightarrow QA^*$$

может перевести гиперплоскость L в гиперплоскость $p_n = c = \text{const}$. Тогда сумма (1.4.2) содержит y_n только в степени c , множитель y_n^c можно вынести за скобку и после сокращения на y_n^c останется полином только от переменных y_1, \dots, y_{n-1} . Здесь для векторных показателей $Q \in \mathbb{R}^n$ получается аффинная геометрия. При этом векторы $\ln X, \ln Y$ лежат в сопряженном пространстве \mathbb{R}_*^n . Преобразования степенной геометрии включают параллельный перенос (1.1.1), линейные замены $X = YA$ и степенные преобразования (1.4.1). Алгоритмы алгебраической и степенной геометрий позволяют решать алгебраические уравнения любой сложности при использовании соответствующего программного обеспечения [9].

В принципе, степенная геометрия пригодна и для упрощения более

сложных уравнений –обыкновенных дифференциальных и в частных производных [2, 10–13].

1.5-§. Многогранники и нормальные конусы

Для краткости изложения можно полагать, что $n = 2$. Тогда многогранник становится многоугольником и все объекты легко изображаются рисунками на двух плоскостях: основной \mathbb{R}^2 и двойственной \mathbb{R}_*^2 (см. [8, Гл. 1]).

Пусть в \mathbb{R}^n задано несколько точек $\{Q_1, \dots, Q_k\} = \mathbf{S}$. Их выпуклая оболочка

$$\Gamma(\mathbf{S}) = \left\{ Q = \sum_{i=1}^k \mu_i Q_i, \mu_i \geq 0, \sum_i \mu_i = 1 \right\} \quad (1.5.1)$$

является многогранником. Его граница $\partial\Gamma$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$, ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и граней $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей $d: 1 < d \leq n - 1$. Если задан вещественный n -вектор $P = (p_1, \dots, p_n)$, то максимум и минимум скалярного произведения $\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$ на множестве \mathbf{S} достигаются на точках Q_i , лежащих на границе $\partial\Gamma$. Выделим для каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ (включая вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $a_j^{(1)}$) то множество векторов P , для которых максимум $\langle P, Q \rangle$ достигается на точках $Q_i \in \Gamma_j^{(d)}$. Это будет её *нормальный конус*

$$U_j^{(d)} = \left\{ P: \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle \text{ для } Q', Q'' \in \Gamma_j^{(d)}, Q''', Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)} \right\}. \quad (1.5.2)$$

При этом вектор P лежит в пространстве \mathbb{R}_*^2 , двойственном пространству \mathbb{R}^2 . Вообще, здесь мы находимся в ситуации аффинной геометрии.

Пример. Пусть $n = 2$ и множество \mathbf{S} состоит из трех точек $Q_1 = (3,0), Q_2 = (0,3), Q_3 = (1,1)$. Их выпуклая оболочка Γ – это треугольник с этими вершинами $\Gamma_j^{(0)} = Q_i, j = 1,2,3$, и тремя ребрами $\Gamma_j^{(1)}$ на плоскости \mathbb{R}^2 . На рис. 2 изображены носитель и многоугольник Γ примера.

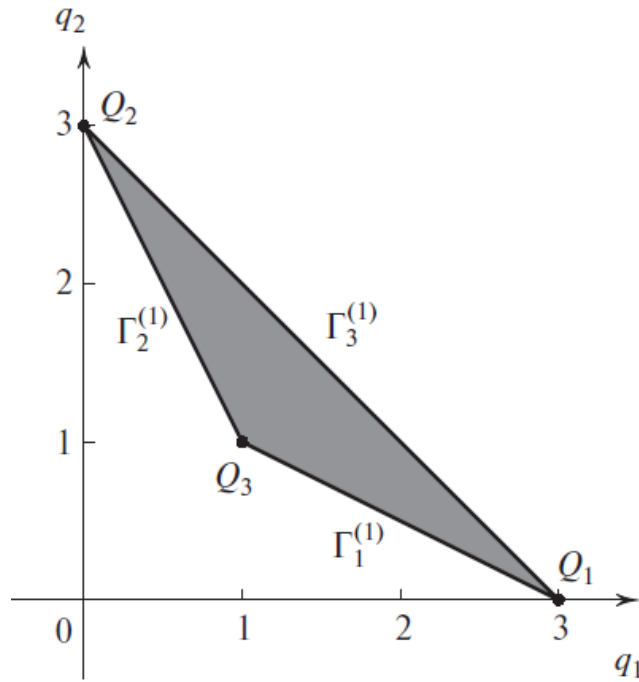


Рис. 2

Ребро $\Gamma_1^{(1)} = [Q_1, Q_3]$, его направляющий вектор $R_1 = Q_3 - Q_1 = (2, -1)$. Нормальный вектор $N_1 = (1, 2)$. Но этот вектор N_1 направлен от ребра $\Gamma_1^{(1)}$ внутрь треугольника Γ . Поэтому внешняя нормаль $\tilde{N}_1 = (-1, -2)$. Натянутый на него луч $\lambda \tilde{N}_1 = (-\lambda, -2\lambda)$ с $\lambda > 0$ является нормальным конусом $U_1^{(1)}$. Аналогично находим $U_2^{(1)} = \lambda(-2, -1)$ и $U_3^{(1)} = \lambda(1, 1)$ с $\lambda > 0$. Нормальный конус вершины $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ есть

$$U_1^{(0)} = \{P = \lambda(-1, -2) + \mu(1, 1), \lambda, \mu > 0\}.$$

Аналогично находим нормальные конусы

$$U_2^{(0)} = \{P = \lambda(-2, -1) + \mu(1, 1), \lambda, \mu > 0\},$$

$$U_3^{(0)} = \{P = \lambda(-1, -2) + \mu(-2, -1), \lambda, \mu > 0\}.$$

Нормальные конусы $U_j^{(d)}$ граней $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника Γ рис. 2 показаны на рис. 3. Итак, на сопряженной плоскости \mathbb{R}_*^2 лучи, нормальные к ребрам $\Gamma_j^{(1)}$ и направленные наружу треугольника Γ , образуют нормальные

конусы $U_j^{(1)}$ ребер $\Gamma_j^{(1)}$ (рис. 5). Секторы между ними – это нормальные конусы $U_j^{(0)}$ вершин $\Gamma_j^{(0)}$.

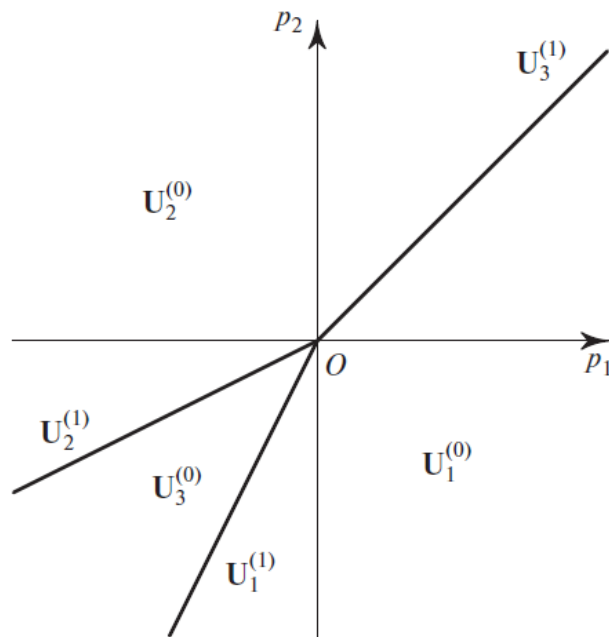


Рис. 3

Пусть в силу исходной задачи нас интересует не вся граница $\partial\Gamma$, а только ее часть, соответствующая некоторому множеству \mathcal{K} направлений P . Тогда множество \mathcal{K} назовем *конусом задачи*. Он не обязательно выпуклый. Через $\partial\Gamma(\mathcal{K})$ обозначим ту часть границы $\partial\Gamma$, для элементов которой $\Gamma_j^{(d)}$ их нормальные конусы $U_j^{(d)}$ пересекаются с конусом задачи \mathcal{K} . Назовем $\partial\Gamma(\mathcal{K})$ – *границей задачи*.

Заключение к Главе I.

В данной главе были представлены материалы, связанные с исследованием линий уровня многочлена на плоскости. Полученные результаты являются важной теоретической основой для последующих глав диссертации.

В ходе анализа были изучены основные понятия и определения, связанные с линиями уровня, включая скалярное и внешнее произведение векторов, проективную геометрию, степенную геометрию, аффинную геометрию, многогранники и нормальные конусы. Эти концепции играют важную роль в понимании и визуализации линий уровня многочлена.

Анализ представленных теоретических материалов позволяет сделать вывод, что изучение линий уровня многочлена на плоскости имеет широкий спектр применений. Полученные результаты могут быть использованы в решении сложных алгебраических и дифференциальных уравнений.

Данные материалы являются важным компонентом теоретической основы и будут служить указаниями для последующих глав диссертации, где будет рассматриваться более подробное исследование линий уровня многочлена, их свойств и применение в различных областях.

ГЛАВА II. ЛИНИИ УРОВНЯ ПОЛИНОМА $f(X)$ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ $X \in R^2$

2.1-§. Критические точки и критические кривые

Пусть $X = (x_1, x_2) \in R^2$. Рассмотрим вещественный полином $f(X)$.
При постоянной $c \in R$ кривая на плоскости R^2

$$f(X) = c \quad (2.1.1)$$

является *линией уровня* полинома $f(X)$.

Наша задача — описать все линии уровня полинома $f(X)$ на
вещественной плоскости $X \in R^2$.

Пусть $C_* = \inf f(X)$ и $C^* = \sup f(X)$ по $X \in R^2$.

Основной результат:

Теорема. *Имеется конечное множество критических значений c :*

$$C_* < c_1^* < c_2^* < \dots < c_m^* < C^* \quad (2.1.2)$$

которым соответствуют критические линии уровня

$$f(X) = c_j^*, j = 1, \dots, m, \quad (2.1.3)$$

а для значений c из каждого из $m + 1$ интервала

$$I_0 = (C_*, c_1^*), I_j = (c_j^*, c_{j+1}^*), j = 1, \dots, m - 1, I_m = (c_m^*, C^*) \quad (2.1.4)$$

линии уровня топологически эквивалентны. Если $C_ = c_1^*$ или $C^* = c_m^*$, то
интервалы I_0 или I_m отсутствуют.*

Поэтому для выявления расположения всех линий уровня полинома
 $f(X)$ надо найти все критические значения c_j^* , изобразить m критических
линий уровня (2.1.3) и по одной линии уровня для произвольного значения
 c из $m + 1$ интервала (2.1.4). Способ вычисления этих линий уровня описан
в [1] и отчасти в [2, гл. I, § 2] с помощью степенной геометрии. Более
традиционный подход см. в [3, гл. I] или [4]. Локальное строение линий
уровня полинома рассматривалось в [2, гл. I, § 3]. Здесь некоторые

результаты из [2, гл. I, § 3] дополнены.

Критические точки и критические кривые

Точка $X = X_0$ называется *простой* для полинома $f(X)$, если в ней отлична от нуля хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Определение 1. Точка $X = X_0$; для полинома $f(X)$ называется *критической порядка k* , если в точке $X = X_0$ равны нулю все частные производные от $f(X)$ до порядка k , т. е. все

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(X^0) = 0, 1 \leq i + j = l \leq k,$$

и отлична от нуля хотя бы одна частная производная порядка $k + 1$.

Определение 2. *Кривая*

$$g(X) = 0 \tag{2.1.5}$$

называется *критической* для полинома $f(X)$, если

- 1) она лежит на какой-то линии уровня (2.1.1) и
- 2) на ней $\partial f / \partial x_1 \equiv 0$, или $\partial f / \partial x_2 \equiv 0$.

Значения постоянной $c = f(X)$ в критических точках $X = X_0$ и на критических линиях (2.1.5) назовём *критическими* и обозначим c_j^* согласно (2.1.2).

2.2-§. Локальный анализ линий уровня

В дальнейшем вблизи точки $X = X^0$ будем рассматривать аналитические обратимые замены координат

$$y_i = x_i^0 + \varphi_i(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0), i=1,2, \tag{2.2.1}$$

где φ_i — аналитические функции от $X = X^0$.

Лемма 1 ([2, гл. I, § 3]). *Если точка X^0 простая и в ней $\partial f / \partial x_2 \neq 0$, то существует замена (2.2.1), приводящая уравнение (2.1.1) к виду*

$$f(X) = y_2 = c. \quad (2.2.2)$$

Она следует из теоремы о неявной функции.

Линии уровня (2.2.2) — это прямые, параллельные оси y_1 .

Рассмотрим решения уравнения (2.1.1) вблизи критической точки

$X^0 = 0$ порядка 1. Тогда

$$f(X) = f_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots$$

Дискриминант Δ выписанной квадратичной формы есть $\Delta = b^2 - 4ac$.

Лемма 2 ([2, гл. I, § 3]). *Если в критической точке первого порядка $X^0 = 0$ дискриминант $\Delta = 0$, то существует замена (2.2.1), приводящая уравнение (2.1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + \sigma y_1^2 + y_2^2 = c, \quad (2.2.3)$$

где $\sigma = 1$ (если $\Delta < 0$) или $\sigma = -1$ (если $\Delta > 0$).

Это двумерный вариант известной леммы Морса [5, гл. I, § 2].

Лемма 3. *Если в критической точке первого порядка $X^0 = 0$ дискриминант $\Delta = 0$, то существует замена (2.2.1), приводящая уравнение (2.1.1) к виду $f(X) = f_0 + y_2^2 + \tau y_1^n = c$, (2.2.2) где целое $n > 2$ и число $\tau \in \{-1, 0, +1\}$. Пусть теперь критическая точка $X^0 = 0$ имеет порядок $k > 1$. Согласно [1, раздел 5] соответствующая ей линия уровня либо не имеет ветвей, входящих в критическую точку $X^0 = 0$, либо имеет несколько таких ветвей.*

В первом случае критическая линия уровня состоит из этой точки $X^0 = 0$, а остальные линии уровня являются замкнутыми кривыми вокруг неё и соответствуют одному знаку разности $c - f(X^0)$.

Во втором случае критическая линия уровня состоит из конечного числа ветвей разных кратностей, входящих в критическую точку $X^0 = 0$. Они разбивают окрестность этой критической точки на криволинейные

секторы.

Остальные линии уровня заполняют эти секторы, оставаясь на некотором расстоянии от критической точки $X^0 = 0$. При этом в соседних секторах они соответствуют разным знакам разности $c - f(X^0)$, если разделяющая их ветвь имеет нечётную кратность, и одному знаку этой разности, если разделяющая их ветвь имеет чётную кратность.

2.3-§. Глобальный анализ линий уровня

Определение 3. Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ многоугольника Ньютона $\Gamma(f)$ полинома $g(X) = f(X) - c$, которое имеет внешнюю нормаль $P_j^{(1)} = (p_1, p_2)$ с одной или двумя положительными координатами p_i и соответствует укороченному полиному $g_j^{(1)}(X)$. Тогда пересечение корня $x_1 = A\tau^{p_1}, x_2 = B\tau^{p_2}$ (где постоянные $A, B \in R$) укороченного полинома $g_j^{(1)}(X)$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$ с бесконечностью $x_i = \pm\infty$ назовём *бесконечной точкой пересечения*. Кратность корня – это *кратность* этой точки.

Лемма 4. Если все рёбра $\Gamma_j^{(1)}$ из определения 3 не содержат точки $(q_1, q_2) = 0$ и у полинома $f(X)$ бесконечные точки пересечения имеют кратность один, то для всех значений постоянной c из одного из $m + 1$ интервалов (2.1.4) линии уровня (2.1.1) топологически эквивалентны.

2.4-§. Вычисление критических значений, точек и кривых

В общем случае вычисление критических значений c_j^* и соответствующих им критических точек и кривых удобно проводить с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, в первую очередь, с помощью базисов Грёбнера [6], [7, Гл. 2, 3].

Идеал, определяющий критические точки и кривые, состоит из следующих полиномов:

$$J = \left\{ f(X) - c, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}. \quad (2.4.1)$$

Как следует из основной теоремы, число критических значений c_j^* конечно. Тогда базис Грёбнера \mathcal{GBJ} идеала (2.4.1) для чистого лексикографического порядка $c \succ x_1 \succ x_2$ содержит полином $h(c)$, зависящий только от переменной c . Среди вещественных корней этого полинома следует искать критические значения c_j^* , для которых имеются вещественные критические линии уровня.

Базис Грёбнера, задаваемый идеалом \mathcal{GBJ} , имеет размерность либо 0, либо 1. В первом случае критических кривых нет, ибо идеал \mathcal{GBJ} нульмерен. Во втором случае некоторым критическим значениям c_j^* соответствуют критические кривые.

В большинстве систем компьютерной алгебры имеются процедуры построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры для проверки нульмерности идеала, вычисления его размерности и др. Подробнее рассмотрим, как могут быть реализованы подобные вычисления в системе Maple. Можно воспользоваться пакетами Groebner и PolynomialIdeals, а также входящими в него процедурами: Basis - для вычисления базиса Грёбнера, Hilbert Dimension — для вычисления размерности идеала, IsZero Dimension — для проверки нульмерности идеала, PrimaryDecomposition — для примарного разложения идеала, Equidimensional Decomposition — для декомпозиции идеала на идеалы различных размерностей.

Используем следующий порядок вычислений.

1. Составляется идеал \mathcal{J} и для него вычисляется базис Грёбнера \mathcal{GBJ} с чисто лексикографическим порядком $c \succ x_1 \succ x_2$ с применением процедуры Basis пакета Groebner.

2. Базис \mathcal{GBJ} позволяет найти все критические значения c_j^* с помощью полинома $h(c)$ в виде алгебраических чисел. Такой полином автоматически определяется для указанного выше лексикографического

порядка, либо с помощью процедуры `UnivariatePolynomial` и, по возможности, раскладывается на множители.

3. Среди критических значений c_j^* отбираются те, которым соответствуют вещественные критические точки и критические кривые. Для этого для каждого множителя $h_i(c)$ полинома $h(c)$ вычисляется новый базис Грёбнера на основе ранее вычисленного базиса и этого множителя, но уже с другими лексикографическими порядками: $c < x_1 < x_2$ и $c < x_2 < x_1$. Это есть некоторый вариант примарной декомпозиции, который позволяет определить полиномы только от x_1 или от x_2 , задающие координаты критических точек.

4. Теперь для каждого примарного идеала следует найти его множество вещественных нулей. Если критическое значение c_j^* принадлежит \mathbb{Q} , то все вычисления выполняются точно. Если же оно есть алгебраическое число, то можно поступить так, как описано в [1, п. 5.6], т. е. проводить все вычисления по модулю идеала, определяющего критическое значение и критическую точку. В данной работе вычисления иррациональных критических значений и иррациональных координат критических точек проводятся приближённо с повышенной точностью.

5. Характер каждой критической точки определяется с использованием дискриминанта Δ квадратичной формы разложения функции $f(X)$ вблизи неё согласно леммам 2 и 3. Разложения вещественных ветвей линий уровня в окрестности каждой критической точки и на бесконечности вычисляются с использованием алгоритмов степенной геометрии. В частности, в СКА Maple удобно выполнять такие вычисления с помощью пакета `PolyhedralSets`, а также пакета процедур из пакета `algcurves`.

6. Выполненные вычисления позволяют перейти к построению эскизов линий уровня так, как это описано [2].

2.5-§. Построение эскизов линий уровня

Для построения эскиза линии уровня можно воспользоваться какой-либо системой компьютерной алгебры, имеющей программы построения изолиний (изоповерхностей) для двумерных или трёхмерных скалярных полей. Эти программы используют различные вычислительные алгоритмы, основанные на применении конечных элементов, которые покрывают некоторую часть плоскости (обычно используются треугольные или квадратные конечные элементы) Затем вычисляют значения функции (2.1.1) в вершинах сетки, и они интерполируются на весь конечный элемент. Такие алгоритмы хорошо справляются с ситуацией, когда у линии уровня нет особенностей. Наличие особенностей заставляет существенно уменьшать шаг разбиения и, соответственно, увеличивать объём вычислений. В примерах раздела 7 все рисунки линий уровня построены с использованием процедуры `contour` пакета `matplotlib` для языка программирования Python.

В ряде случаев удаётся улучшить качество эскиза линии уровня, если для определённого значения c уравнение (2.1.1) может быть разложено на множители, а нули этих множителей (или часть их) задают алгебраическую кривую рода 0. С такой задачей неплохо справляется пакет `algcurves` системы Maple. Этот пакет, в частности, позволяет исследовать плоские алгебраические кривые. С его помощью можно изобразить эскиз кривой $f(x_1, x_2) = 0$ путём численного интегрирования соответствующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

для некоторого набора начальных условий, определяемых точками, в которых хотя бы одна из частных производных функции $f(x_1, x_2) = 0$ равна нулю. Использование данного пакета для исследования набора кривых с разными порядками особенностей показало, что в случае особенностей высоких порядков качество эскиза получается не слишком высоким.

Заключение к Главе II.

В данной главе были рассмотрены основные концепции и методы, связанные с анализом линий уровня. Была изучена связь между линиями уровня и геометрией многочлена, а также их роль в определении топологической структуры функции.

В главе были представлены следующие ключевые моменты:

1. Определение линий уровня и их связь с нулями полинома: линии уровня являются графическим представлением значений функции, в которых она достигает постоянного уровня. Они определены с использованием многочлена, нулями которого являются критические точки функции.
2. Топологическая эквивалентность линий уровня: если критические значения функции имеют кратность один и не содержат бесконечных точек пересечения, то линии уровня с постоянным уровнем на разных интервалах критических значений топологически эквивалентны.
3. Критические значения, точки и кривые: критические точки и кривые определяются с использованием идеала, состоящего из полиномов, включающих функцию и ее частные производные. Размерность идеала определяет наличие критических кривых.
4. Алгоритмы компьютерной алгебры для анализа критических точек и кривых: для вычисления и анализа критических точек и кривых можно использовать алгоритмы компьютерной алгебры, такие как базисы Грёбнера. Эти методы позволяют определить критические значения и кривые.
5. Построение эскизов линий уровня с использованием компьютерных алгебраических систем и алгоритмов, таких как метод конечных элементов, можно построить эскизы линий уровня. Качество схемы линий уровня может быть улучшено

ГЛАВА III. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНИИ УРОВНЯ БОЛЬШОГО ПОЛИНОМА

3.1-§. Описание и вычисление критических значений, точек и кривых

В работе [3] рассматривалась устойчивость в линейном приближении стационарного решения одной многопараметрической системы Гамильтона. В процессе исследования возникла необходимость изучить нули некоторого полинома $g(x, y, z)$ 6-го порядка от трёх переменных x, y, z :

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & 4x^5y - 4x^5z + 48x^4y^2 - 92x^4yz + 40x^4z + 344x^3y^3 - \\ & 904x^3y^2 + 736x^3yz^2 - 192x^3z^3 + 1200x^2y^4 - 4376x^2y^3z + \\ & 5360x^2y^2z^2 - 2752x^2yz^3 + 512x^2z^4 + 2500xy^5 - 11700xy^4z + \\ & 19168xy^3z^2 - 14656xy^2z^3 + 5376x^2z^4 - 768xz^5 - 7500y^5z + \\ & 21800y^4z^2 - 25408y^3z^3 + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 + 512z^6 + 2x^5 + \\ & 82x^4y - 64x^4z + 740x^3y^2 - 1152x^3yz + 456x^3z^2 + 3156x^2y^3 - \\ & 6784x^2y^2z + 5144x^2yz^2 - 1344x^2z^3 + 6490xy^4 - 14464xy^3z + \\ & 13816xy^2z^2 - 6720xyz^3 + 1344xz^4 + 20250y^5 - 45120y^4z + \\ & 37928y^3z^2 - 14976y^2z^3 + 2880yz^4 - 256z^5 + 13x^4 + 412x^3y - \\ & 344x^3z + 2782x^2y^2 - 5176x^2yz + 2200x^2z^2 + 828xy^3 - 12936xy^2z + \\ & 15888xyz^2 - 5088xz^3 - 37827y^4 + 67608y^3z - 35496y^2z^2 + \\ & 2016yz^3 + 1872z^4 + 64x^3 + 1728x^2y - 1152x^2z + 15552xy^2 - \\ & 20736xyz + 6912xz^2 + 46656y^3 - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Здесь, исследуем линии уровня на трёх нулевых сечениях поверхности

$g(x, y, z) = 0$ т. е. для функций $f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}$, $f_2(x, z) = g(x, y, z)|_{y=0}$, и $f_3(x, y) = g(x, y, z)|_{z=0}$.

Вычисление критических значений, точек и кривых. Безусловно наиболее удобно вычислять критические значения c_j^* и соответствующие им критические точки и кривые с помощью алгоритмов компьютерной

алгебры, предварительно вычислив базисы Грёбнера соответствующих идеалов с подходящими мономиальными порядками, учитывая полиномиальный характер задачи (подробнее см. [7, Гл. 2, 3]).

Идеал, определяющий критические точки и кривые, состоит из полинома $f(X) - c$ и его частных производных по X (2.4.1).

На основании основной теоремы, количество критических значений c_j^* ограничено. Тогда базис Грёбнера \mathcal{GBJ} идеала (2.4.1) для чистого лексикографического порядка $c > x_1 > x_2$ содержит полином $h(c)$, зависящий только от переменной c . Нужно искать критические значения c_j^* , для которых существуют реальные критические линии уровня среди вещественных корней этого полинома.

Базис Грёбнера, задаваемый идеалом \mathcal{GBJ} , имеет размерность либо 0, либо 1. В первом случае критических кривых нет, ибо идеал \mathcal{GBJ} нульмерен. Во втором случае некоторым критическим значениям c_j^* соответствуют критические кривые.

В большинстве систем компьютерной алгебры имеются процедуры построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры для проверки нуль мерности идеала, вычисления его размерности и др. Подробнее рассмотрим, как могут быть реализованы подобные вычисления в системе Maple. Можно воспользоваться пакетами Groebner и Polynomial Ideals, а также входящими в него процедурами: Basis — для вычисления базиса Грёбнера, Hilbert Dimension — для вычисления размерности идеала, IsZero Dimensional — для проверки нуль мерности идеала, Primary Decomposition — для примарного разложения идеала, Equidimensional Decomposition — для декомпозиции идеала на идеалы различных размерностей.

Используется следующий порядок вычислений.

1. Составляется идеал \mathcal{J} и для него вычисляется базис Грёбнера \mathcal{GBJ} с

чисто лексикографическим порядком $c \succ x_1 \succ x_2$ с применением процедуры Basis пакета Groebner

2. Базис \mathcal{GB} позволяет найти все критические значения c_j^* с помощью полинома $h(c)$ в виде алгебраических чисел. Такой полином автоматически определяется для указанного выше лексикографического порядка, либо с помощью процедуры Univariate Polynomial и по возможности раскладывается на множители.

3. Среди критических значений c_j^* отбираются те, которым соответствуют вещественные критические точки и критические кривые. Для этого для каждого множителя $h_i(c)$ полинома $h(c)$ вычисляется новый базис Грёбнера на основе ранее вычисленного базиса и этого множителя, но уже с другими лексикографическими порядками: $c \prec x_1 \prec x_2$ и $c \prec x_2 \prec x_1$. Это есть некоторый вариант примарной декомпозиции, который позволяет определить полиномы только от x_1 или от x_2 , задающие координаты критических точек.

4. Теперь для каждого примарного идеала следует найти его множество вещественных нулей. Если критическое значение c_j^* принадлежит \mathbb{Q} , то все вычисления выполняются точно. Если же оно есть алгебраическое число, то можно поступить так, как описано в [1, п. 5.6], т. е. проводить все вычисления по модулю идеала, определяющего критическое значение и критическую точку. В данной работе вычисления иррациональных критических значений и иррациональных координат критических точек проводятся приближённо с повышенной точностью.

5. Характер каждой критической точки определяется с использованием дискриминанта Δ квадратичной формы разложения функции $f(X)$ вблизи неё согласно леммам 2 и 3. Разложения вещественных ветвей линий уровня в окрестности каждой критической точки и на бесконечности вычисляются с использованием алгоритмов степенной геометрии. В частности, в СКА Maple удобно выполнять такие вычисления

с помощью пакета PolyhedralSets, а также пакета процедур из пакета algcurves.

б. Выполненные вычисления позволяют перейти к построению эскизов линий уровня так, как это описано [2].

Замечания об обозначениях. Последующие разделы работы содержат большое число различных объектов, поэтому дадим здесь краткое описание принятой нотации.

– Каждое из нулевых сечений поверхности, заданной полиномом (3.1.1), обозначается символом f_j , где j принимает значения 1, 2, 3, соответствующие той переменной, которая полагается равной нулю. Полином, определяющий критические значения c_i^* обозначается $h_i(c)$, а его k -й множитель соответственно $h_{ik}(c)$.

– Для соответствующего полинома f_j вычисляется его носитель и многоугольник Ньютона $\Gamma(f_j)$. Все рёбра многоугольника нумеруются и обозначаются в тексте $\Gamma_k^{(1)}$, а соответствующий k -му ребру укороченный полином обозначается $f_k^{(1)}$. Нумерация рёбер и укороченных полиномов сквозная в пределах своего раздела. В силу технических трудностей на рисунках многоугольников Ньютона верхний индекс у k -го ребра $\Gamma_k^{(1)}$ опускается. Поскольку в вычислениях используются только грани размерности один, то это не должно привести к путанице.

– Если полином f_j преобразуется, то результат его i -го преобразования обозначается $_i f_j$. При этом все соответствующие этому полиному объекты степенной геометрии имеют соответствующий левый нижний индекс, т.е. обозначает 3-е ребро многоугольника Ньютона, полинома, полученного на втором шаге преобразований.

3.2-§. Пример 1 при $x = 0$

Критические значения. Рассмотрим вычисление линий уровня полинома

$$f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}.$$

$$\begin{aligned} f_1 = & -7500y^5z + 21800y^4z^2 - 25408y^3z^3 + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 + \\ & 512z^6 + 20250y^5 - 45120y^4z + 37928y^3z^2 - 14976y^2z^3 + 2880yz^4 - \\ & 256z^5 - 37827y^4 + 67608y^3z - 35496y^2z^2 + 2016yz^3 + 1872z^4 + \\ & 46656y^3 - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Для полинома (3.2.1) составляем идеал Id_1 , определяющий критические точки и кривые: $Id_1 = \left\{ f_1 - c, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \right\}$. Для него строим базис Грёбнера GBJ_1 с чисто лексикографическим порядком $y < z < c$, в который входят полиномы, зависящие соответственно от $\{c\}$, $\{c, z\}$, $\{c, z\}$, $\{c, y\}$, $\{c, y, z\}$, $\{c, y, z\}$. Получаем 6 полиномов, некоторые из которых имеют 15-ю степень и выглядят очень громоздко. Поэтому мы их не приводим здесь в явном виде. Пользуемся первым полиномом, определяющим критические значения полинома (3.2.1), и разлагаем его на множители [7, гл. 2, 3].

$$\begin{aligned} h_1(c) = & c^2(791015625 \cdot 10^{12}c^4 - 4137285273243305806216 \cdot 10^5c^3 \\ & + 2268208541119374290121362928c^2 \\ & - 42844219213475982104286084531c \\ & + 38437670697580573719552 \cdot 10^6). \end{aligned}$$

Первый множитель этого полинома $h_{11}(c) = c^2$ задаёт первое критическое значение $c_1^* = 0$. h_{12} имеет два вещественных корня $c_2^* \approx 0.9355$, $c_3^* \approx 523029.1004$ и пару комплексных корней. Добавляя каждый множитель полинома $h_1(c)$ в найденный выше базис Грёбнера, составляем его примарную декомпозицию. Рассмотрим эти критические значения последовательно.

Критическая линия $h(y, z) = c_1^* = 0$. Вычисляя идеал $SP_1(h_1)$ для

двух различных мономиальных порядков, находим соответствующие полиномы от переменных и соответственно

$$y^8(y-2)(y-14)(8000y^3-50832y^2+111321y-84672)^2,$$

$$z^8(z-8)(z-27)(2560z^3-22176z^2+63909z-61344)^2.$$

С их помощью определяем, что критическому значению $c_1^* = 0$ соответствуют четыре критические точки: $(y_1, z_1) = (0, 0)$, $(y_2, z_2) = (2, 3)$, $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$, $(y_4, z_4) = (14, 27)$. Рассмотрим характер каждой из этих критических точек. Полином (3.2.1) при $c = 0$ факторизуется на два множителя: линейный

$$3z - 2y \tag{3.2.2}$$

и полином пятой степени

$$h(y, z) = 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - 1792yz^4 + 25z^5 - 6750y^4 + 10540y^3z - 5616y^2z^2 + 1248yz^3 + 12609y^3 - 14130y^2z + 2412yz^2 + 936z^3 - 15552y^2 + 20736yz - 6912z^2. \tag{3.2.3}$$

Это единственный случай, когда полином $f_j - c_k^*$ факторизуется. Поэтому особенности находим для множителя (3.2.3), но в критической линии учитываем и (3.2.2). Далее рассматриваем только полином $h(y, z)$ и для него применяем систему обозначений подраздела 3.

a) Разложение в точке $(y_1, z_1) = (0, 0)$. Здесь конус задачи есть $K_3 = \{P = (p_1, p_2) < 0\}$. Непосредственные вычисления показывают, что квадратичная форма h_2 ряда Тейлора полинома h есть полный квадрат $h_2 = -1728(3z - 2y)^2$ и имеет общий множитель с кубической формой h_3 . Таким образом, теорема о неявной функции неприменима, и здесь необходимо применить следующую технику [1, см. 5.2].

Вычисляем выпуклую оболочку носителя полинома (3.2.3) с использованием пакета PolyheralSets. Многоугольник Ньютона и его рёбра показаны на рис. 1.

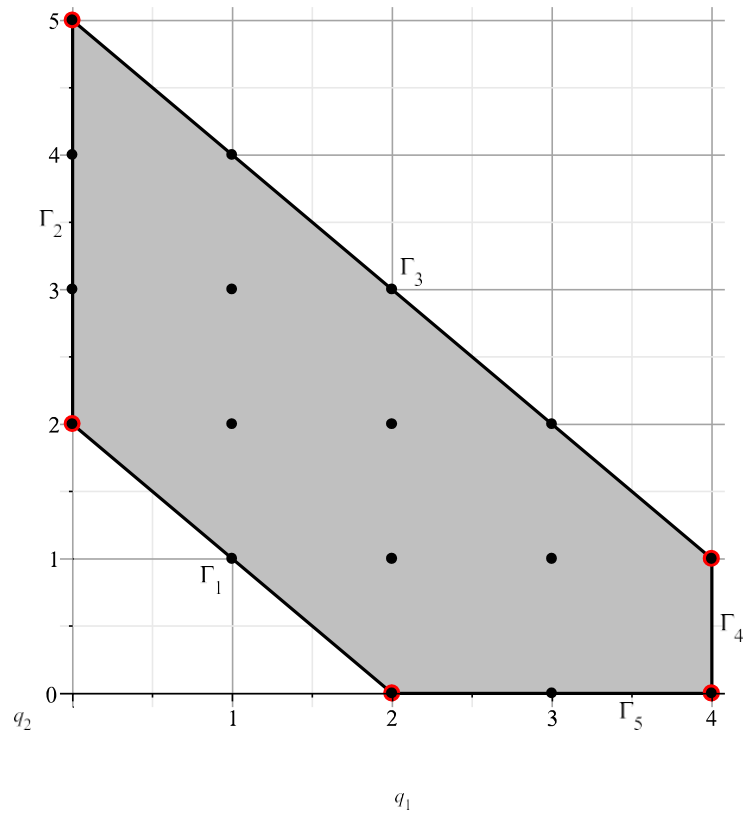


Рис. 1. Многоугольник Ньютона и его рёбра для полинома (3.2.3)

Рёбру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченный полином $h_1^{(1)} = -1728(3z - 2y)^2$

Выполним подстановку $z = \frac{3y}{2} + z_1$ и получим полином ${}_1h$ в переменных y, z_1

$$\begin{aligned}
 {}_1h = & 6y^5 - 44y^4z_1 + 160y^3z_1^2 - 256y^2z_1^3 + 128yz_1^4 + 256z_1^5 - 12y^4 + \\
 & 388y^3z_1 - 172y^2z_1^2 + 480yz_1^3 - 128z_1^4 - 576y^2z_1 + 6624yz_1^2 + 936z_1^3 - \\
 & 6912z_1^2.
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 2.

Единственному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ этого многоугольника, у которого нормальный конус попадает в конус задачи $K_3 = \{P < 0\}$, соответствует укороченный полином $h_1^{(1)} = 12(y^2 + 24z_1)^2$. Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка $z_1 = \frac{-y^2}{24} + z_2$. Она приводит к полиному ${}_2h$ от переменных y, z_2

$$\begin{aligned}
{}_2h = & \frac{1}{31104}y^{10} + \frac{1}{2592}y^9 + \frac{1}{1296}y^8z_2 + \frac{1}{2592}y^8 - \frac{1}{27}y^7z_2 - \frac{5}{27}y^6z_2^2 + \frac{35}{144}y^7 - \\
& \frac{35}{27}y^6z_2 + \frac{4}{3}y^5z_2^2 + \frac{40}{9}y^4z_2^3 - \frac{79}{64}y^6 - \frac{65}{6}y^5z_2 + \frac{92}{3}y^4z_2^2 - \frac{64}{3}y^3z_2^3 - \frac{160}{3}y^2z_2^4 + \\
& \frac{4}{3}y^5 + \frac{839}{8}y^4z_2 + 100y^4z_2^2 - \frac{704}{3}y^2z_2^2 + 128z_2^4 + 256z_2^5 - 164y^3z_2 - \\
& 1845y^2z_2^2 + 480yz_2^3 - 128z_2^4 + 6624yz_2^2 + 936z_2^2 - 6912z_2^2. \quad (3.2.5)
\end{aligned}$$

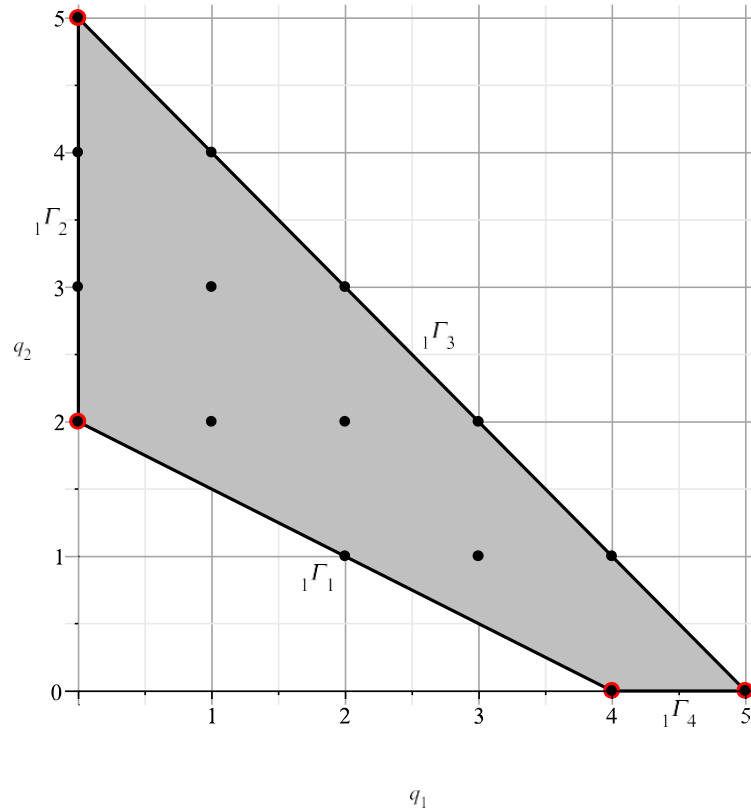


Рис. 2. Многоугольник Ньютона и его рёбра для полинома (3.2.4)

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 3) имеет единственное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ нормальным конусом из конуса задачи $K_3 = \{P < 0\}$, которому соответствует полином ${}_2h = \frac{4y^5}{3} - z_2^2$. Таким образом, получаем два решения $z_2 = \pm y^{5/2} / 72$. Выполняя обратную подстановку, в итоге получаем разложения двух ветвей

$$z_{1,2} = \frac{3}{2}y - \frac{1}{24}y^2 \pm \frac{1}{72}y^{5/2}$$

которые в особой точке $(0, 0)$ имеют касание второго порядка. Вычисления с использованием функции `puisex` из пакета `algsurves` системы Maple или с

использованием функции `AsymptoticSolve` системы `Mathematica` приводят к таким же результатам.

б) Точка $(y_2, z_2) = (2, 3)$ лежит на прямой $z = 3y/2$, являющейся корнем полинома (3.2.2). Эта точка является критической точкой самопересечения.

в) Точка $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$ была подробно рассмотрена в статье [1] первых двух авторов, поэтому здесь мы приведём только итоговый результат. Дискриминант квадратичной формы $h_2(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$, вычисленный с большой точностью, равен нулю, а кратный корень этой квадратичной формы не обнуляет кубическую форму $h_3(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$. Следовательно, указанная точка является точкой возврата кривой $f_1(y, z) = 0$, а её разложение в окрестности

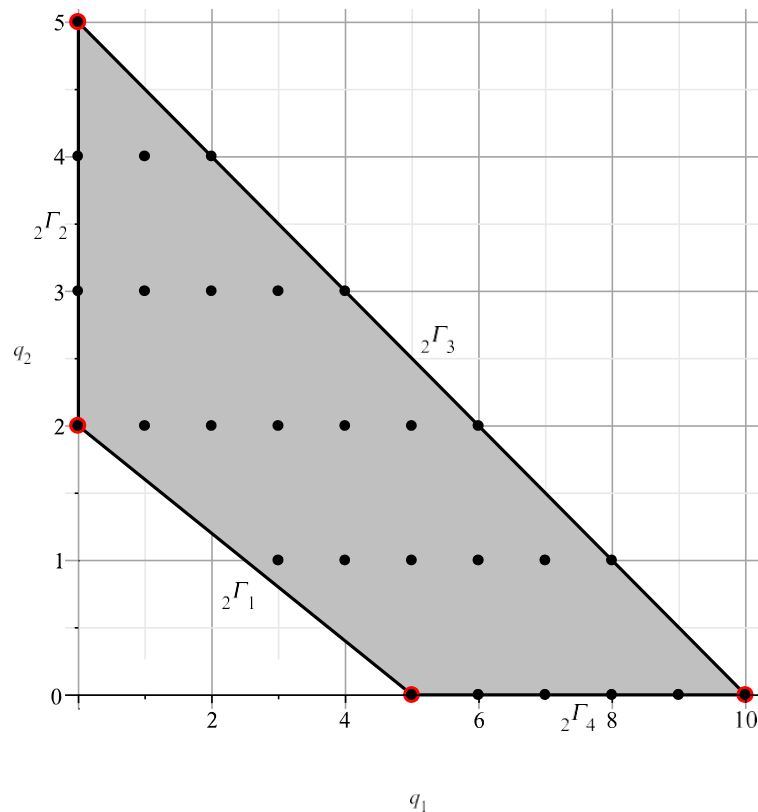


Рис. 3. Многоугольник Ньютона и его рёбра для полинома (3.2.5)

особой точки описывается формулой $z = 0.823545771 + 1.03264746 y + 0.05480984628(2.342744299 - y)^{3/2}$ при $y \leq y_3 \approx 2.342744299$.

з) В точке $(y_4, z_4) = (14, 27)$ вычисляем (с точностью до постоянного множителя) квадратичную форму h_2 :

$$f_1(y_4 + \eta, z_4 + \zeta) = 243\eta^2 - 256\eta\zeta + 68\zeta^2.$$

Её дискриминант $\Delta = -560$, следовательно, по лемме 2 критическая точка (y_4, z_4) является изолированной.

д) Рёбрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_5^{(1)}$ соответствуют укороченные полиномы

$$h_2^{(1)} = 8z^2(32z^3 - 16z^2 + 117z - 864) \text{ и}$$

$$h_5^{(1)} = -27y^2(250y^2 - 467y + 576).$$

Их нули дают координаты пересечения кривой $h = 0$ с осями Oz и Oy соответственно. Полином $h_2^{(1)}$ имеет два вещественных корня: 0 и 2.7470, а полином $h_5^{(1)}$ — только корень 0.

е) Рёбру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствует укороченный полином $h_4^{(1)} = 250y^4(10z - 27)$. Значит, при $y \rightarrow \infty$ имеем $z \rightarrow 27/10$. Применяя технику из [1], находим

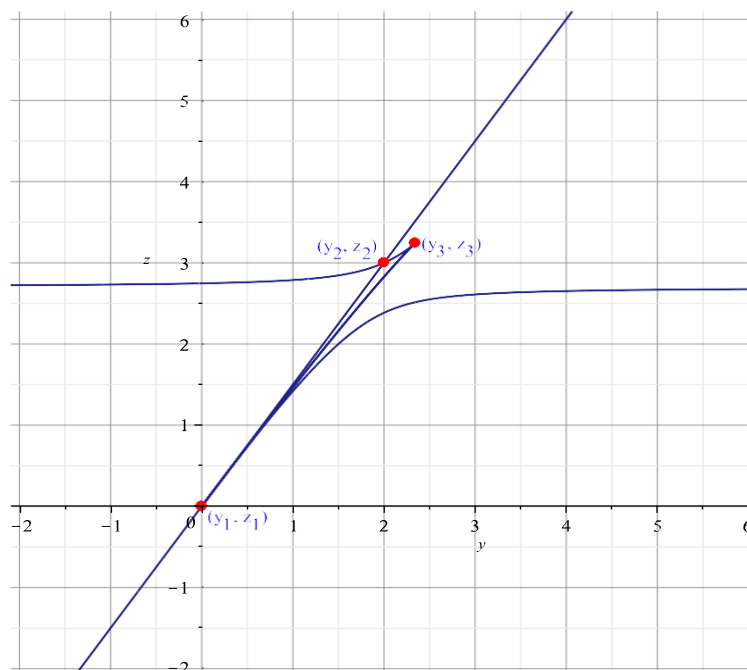


Рис. 4. Линии уровня для критического значения $c_1^* = 0$ полинома f_1 .

разложение ветви кривой на бесконечности:

$$z = \frac{27}{10} - \frac{243}{2500y} \quad (3.2.6)$$

Итак, кривая $h = 0$ имеет горизонтальную асимптоту $z = 27/10$. Этой асимптоте соответствует бесконечная точка пересечения первой кратности.

Стремящейся к ∞ координате z в многоугольнике Γ соответствует верхняя вершина, т.е. при $k = \infty$ нет точек кривой (3.2.3).

Конусам задач K_1 и K_2 соответствуют только вершины многоугольника Ньютона рис. 1.

Жс)Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укороченный полином

$$h_3^{(1)} = 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - 1792yz^4 + 256z^5 = 4z(25y^2 - 28yz + 8z^2)^2,$$

который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей, соответствующих конусу задачи $K_1 = \{P: p_1 > 0, p_2 > 0\}$, нет.

На рис. 4 показана линия уровня $f_1 = 0$, состоящая из линии $h = 0$ и прямой (3.2.2) $3z - 2y = 0$. Изолированная критическая точка $(y_4, z_4) = (14, 27)$ не попала на рисунок. Прямой $y = 3z/2$, также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

Критическая линия $f_1(y, z) = c_2^* \approx 0.9355$. Из второго идеала $\mathcal{SP}_2(h_1)$ получаем по два действительных и комплексных значений c_j . Рассматривая только вещественные значения, находим, что критическому значению $c_2^* \approx 0.9355$ соответствует критическая точка $(y_5, z_5) \approx (1.8205, 2.6593)$, координаты которой суть корни полиномов

$$18750y^4 - 2852902500y^3 + 12177572500y^2 - 2088009y + 1280664, \\ 8000z^4 - 211120z^3 + 1348356z^2 - 3312315z + 2843316. \quad (3.2.7)$$

Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора полинома (2.4.1) в этой точке:

$$f_1(y_5 + \eta, z_5 + \zeta) \approx 0.93558 - 392.0146\eta^2 + 568.6296\eta \zeta - 209.3918\zeta^2,$$

и получаем, что её дискриминант $\Delta \approx -4998.9489$ отрицательный, следовательно, точка $(1.8205, 2.6593)$ является изолированной критической точкой.

Эта линия пересекается с осями в точках $(0, 0)$ и $(0, 2.747016946)$. Её асимптотики суть $y = 3/2 z$ и (3.2.6). Сама линия показана на рис. 5.

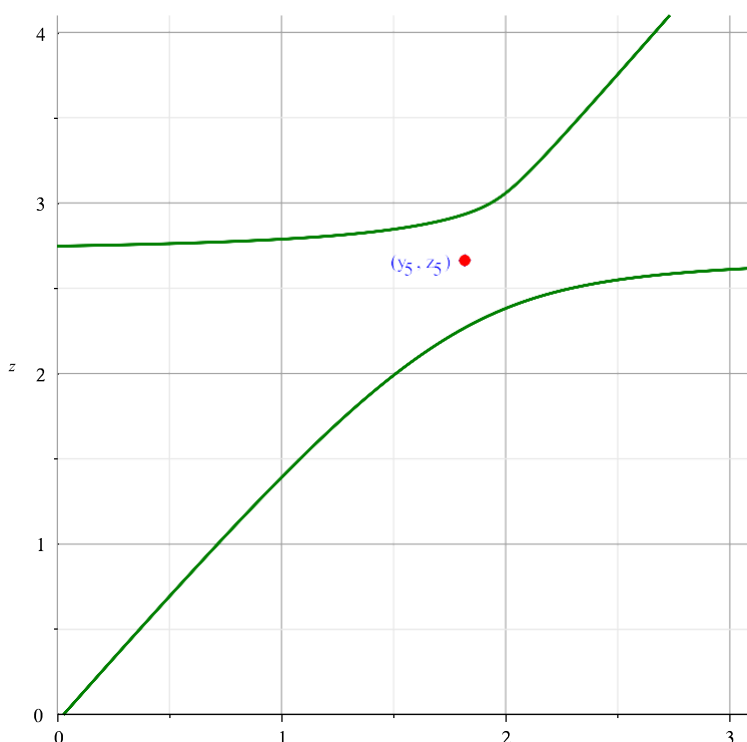


Рис. 5. Линии уровня для критического значения $c_2^* \approx 0.9355$ полинома f_1 .

Критическая линия $f_1(y, z) = c_3^* \approx 523029.1004$. Также из идеала $\mathcal{SP}_2(h_1)$ находим, что критическому значению $c_3^* = 523029.1004$ соответствует критическая точка $(y_6, z_6) \approx (9.5641, 18.3933)$, координаты которой суть другие вещественные корни полиномов (3.2.7). Вычисление квадратичной формы ряда Тейлора полинома (3.2.1) в этой точке даёт результат:

$$f_1(y_6 + \eta, z_6 + \zeta) \approx 523029.101 - 0.0001\zeta - 0.00038\eta + 3.108 \cdot 10^6 \eta^2 - 3.10910^6 \eta \zeta + 766031.179\zeta^2.$$

Мы видим, что в разложении свободный член близок к c_3^* и коэффициенты линейных членов малы. Дискриминант данной квадратичной формы $\Delta \approx (9.5641, 18.3933)$ является точкой самопересечения. Эта линия пересекается с осями в точках $(2.0996, 0)$, $(0, -2.6070)$ и $(0, 3.5223)$, её асимптотики те же, её эскиз показан на рис. 6.

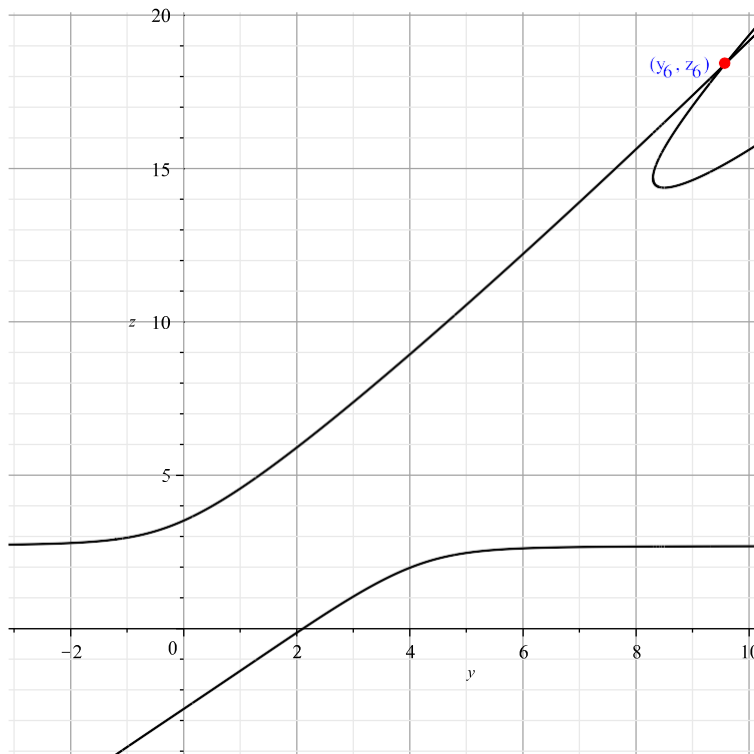


Рис. 6. Линии уровня для критического значения $c_3^* \approx 523029.1004$ полинома f_1 .

Все критические линии уровня полинома f_1 . На рис. 7 показаны все критические линии уровня полинома f_1 для соответствующих критических значений c_j^* , а также критические точки. В силу выбранного масштаба, критические точки уровня c_1^* плохо различимы. Подробнее эти точки показаны на рис. 4. На нём в криволинейном треугольнике с вершинами (y_1, z_1) , (y_2, z_2) , (y_3, z_3) лежит точка (y_5, z_5) . Некритические линии уровня лежат между критическими линиями и критическими точками рис. 7.

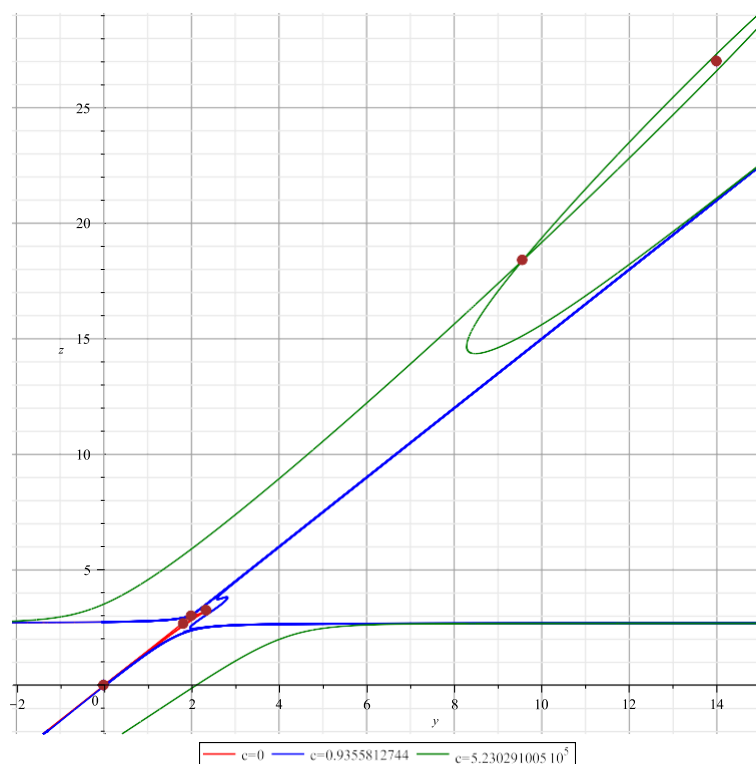


Рис. 7 Линии уровня для критического значения полинома f_1 .

3.3-§. Пример 2 при $y = 0$

Критические значения. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 f_2 = & -4x^5z + 40x^4z^2 - 192x^3z^3 + 512x^2z^4 - 768xz^5 + 512z^6 + \\
 & 2x^5 - 64x^4z + 456x^3z^2 - 1344x^2z^3 + 1344xz^4 - 256z^5 + 13x^4 - \\
 & 344x^3z + 2200x^2z^2 - 5088xz^3 + 1872z^4 + 64x^3 - 1152x^2z + \\
 & 6912xz^2 - 13824z^3
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Идеал, определяющий критические точки и кривые и включающий в себя функцию $f_2 - c$ и его первые производные, состоит из следующих полиномов

$$Id_2 = \left\{ f_2 - c, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z} \right\}.$$

Для этого идеала строим базис Грёбнера $\mathcal{GB}J_2$ с чистым лексикографическим порядком $c \succ z \succ x$, найденный с помощью процедуры Groebner [Basis].

Первый полином этого базиса есть

$$\begin{aligned}
h_2(c) = & c(16c^2 - 17435c + 15925248) \times (18225 \cdot 10^8 c^4 + \\
& 219593845975 \cdot 10^5 c^3 - 166039069316301172071c^2 + \\
& 199547881177990316949504 c - 84569630503397437621665792)
\end{aligned}
\tag{3.3.2}$$

Он зависит только от c и определяет критические значения полинома (3.3.1). Критическое значение $c_1^* = 0$ является корнем множителя $h_{21}(c) = c$. Множитель $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$ не имеет вещественных корней, значит, не выявляет вещественные критические значения c_j . Ещё два иррациональных критических значения $c_2^* \approx 17590.60940$ и $c_3^* \approx 4162.403160$ задаются корнями третьего множителя в (3.3.2)

Идеал \mathcal{GBJ}_2 имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция даёт три идеала. Можно сразу исключить из рассмотрения идеал $\mathcal{SP}_2(h_2)$, содержащий множитель $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$, который не имеет вещественных корней.

Критическая линия $f_2(x, z) = c_1^* = 0$. Идеал $\mathcal{SP}_1(h_2)$, являющийся примарной декомпозицией множителя $h_{21}(c) = c$, включает полиномы c , $62144z^{14} + 3178496z^{13} + 17618944z^{12} + 53712704z^{11} + 83353369z^{10} + 42910541z^9 - 34250732z^8 + 92661536z^7 + 44242816z^6 - 44658432z^5 + 36578304z^4, -2687921593523634176 z^{13} - 34906091624775188480z^{12} - 209646836565166307328z^{11} - 717809757784574929984z^{10} - 1395096902560948574269z^9 - 1391000168810966419626z^8 - 414219249823112818193z^7 - 989978918218726674788z^6 - 1359995427547542403776z^5 + 44989667987413693824 xz^3, -427910073600905300160z^4 + 44989667987413693824 xz^2 - 179958671949654775296z^3, -21973906577585552490496z^{13} - 274219691042743274733568z^{12} - 1569796991169618160588800z^{11} -$

$$\begin{aligned}
& 5004433077233995232707904z^{10} - 8441114957318849630660081z^9 - \\
& 5521961458811860727741337z^8 + 2910068553190244608309880z^7 - \\
& 4856586515216271331078816z^6 - \\
& 4913807691571657657866494208z^5 + \\
& 3773420647566644086822656z^4 - 70543799404264671916032xz^2 + \\
& 293932497517769466316800z^3 + 17635949851066167979008x^2 - \\
& 211631398212794015748096xz + 634894194638382047244288z^2.
\end{aligned}$$

а) Корень его первого полинома — вещественное число $c_1^* = 0$. Среди корней полиномов идеала $\mathcal{SP}_1(h_2)$, ищем вещественные значения. Таковыми являются две критические точки $(0, 0)$ и $(-8, -4)$.

б) Рассмотрим характер вещественных критических точек. При $c_1 = 0$ в критической точке $(0, 0)$ квадратичная форма h_2 ряда Тейлора полинома (3.3.1) обнуляется и теорема о неявной функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки согласно [1, п. 5.2]. Вычисляем выпуклую оболочку носителя полинома (3.3.1) с использованием пакета Polyhedral Sets. Носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 8. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченный полином $f_1^{(1)} = 64(x - 6z)^3$. Выполним подстановку $z = x/6 + z_1$ и получим полином в переменных x и z_1 :

$$\begin{aligned}
f_2 = & \frac{100}{729}x^6 - 13824z_1^3 + 1872z_1^4 - 256z_1^5 + 512z_1^6 + \frac{20}{81}x^5z_1 - \frac{8}{27}x^4z_1^2 \\
& - \frac{448}{27}x^3z_1^3 - 32x^2z_1^2 - 3840xz_1^3 + \frac{256}{3}x^2z_1^4 - \frac{8}{81}x^4z_1 \\
& - \frac{104}{27}x^3z_1^2 - \frac{4672}{9}x^2z_1^3 + \frac{3392}{3}xz_1^4 - 256xz_1^4 - \frac{16}{3}x^4 \\
& - \frac{296}{243}x^5.
\end{aligned}$$

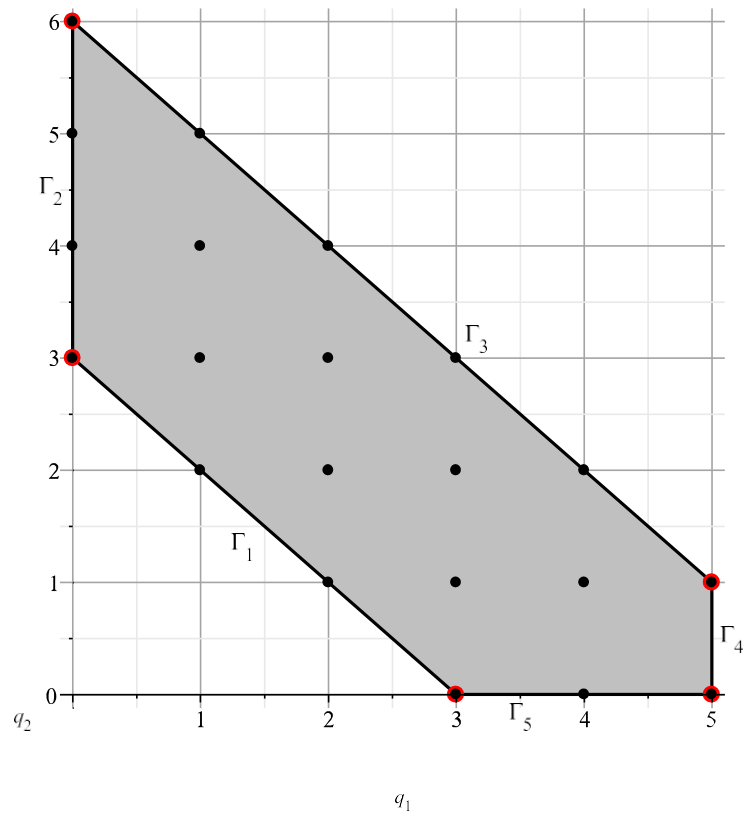


Рис. 8. Многоугольник Ньютона для полинома f_2 .

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 9. Единственному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника Ньютона, нормальный конус которого попадает в конус нашей задачи $K = \{P < 0\}$, соответствует укороченный полином

$f_1^{(1)} = 13824z_1^3 - x^4/3$. Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка

$z_1 = 18^{1/3} x^{4/3}/36 + z_2$. Она приводит к ещё одному полиному от переменных x, z_2 , который содержит слагаемые с дробными степенями. Дабы избежать больших объёмов вычислений, сразу произведём замену вида

$$x = x_1^3$$

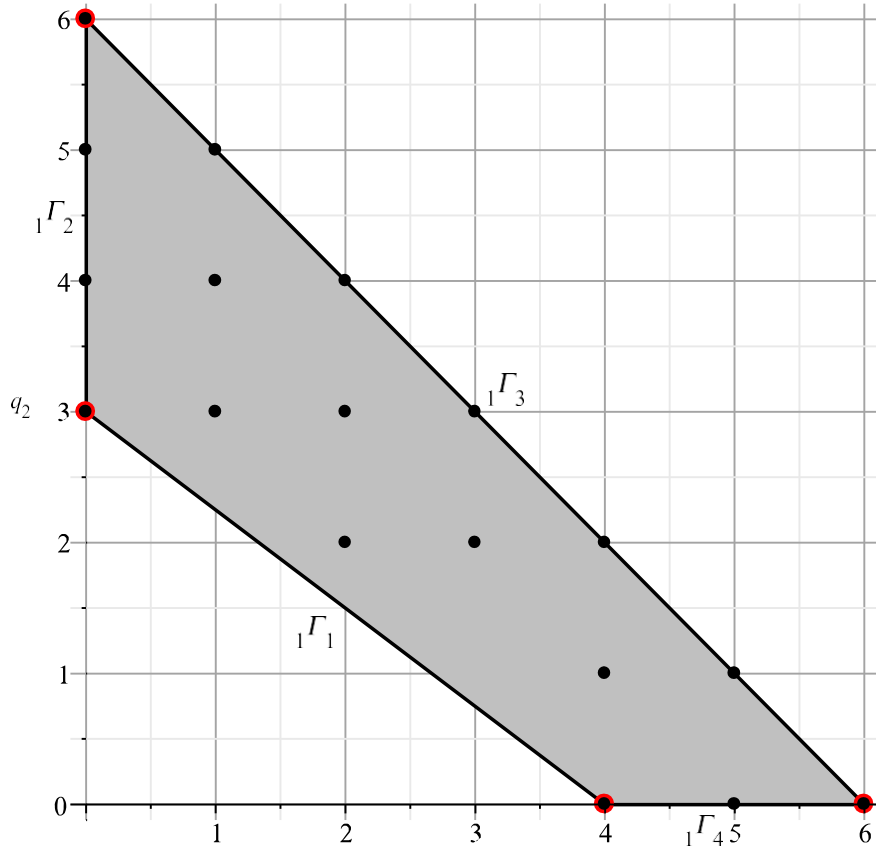


Рис. 9. Многоугольник Ньютона для полинома f_2 .

и получим более удобный вид полинома для вычислений:

$$\begin{aligned}
 f_2 = & 1152 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^2 + \frac{26 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^2}{3} - 208 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^4 + \frac{1168 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2^2}{27} + \\
 & \frac{16 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2}{9} - \frac{292 \cdot 18^{2/3} x_1^{14} z_2^2}{243} - \frac{160 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^3}{81} - 32 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^2 - \frac{256 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^5}{3} + \\
 & \frac{320 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^4}{9} + \frac{160 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^4}{27} + \frac{2 \cdot 18^{1/3} x_1^{22}}{2187} + \frac{448 x_1^9 z_2^3}{27} + \frac{256 x_1^6 z_2^4}{3} + 256 x_1^3 z_2^5 - \\
 & \frac{242 x_1^{12} z_2}{81} + \frac{104 x_1^9 z_2^2}{27} - \frac{4672 x_1^6 z_2^3}{9} - \frac{3392 x_1^3 z_2^4}{3} - 32 x_1^6 z_2^2 + 3840 x_1^3 z_2^3 - 256 z_2^5 + \\
 & 512 z_2^6 - 13824 z_2^3 + 1872 z_2^4 - \frac{2 \cdot 18^{2/3} x_1^{14}}{81} + \frac{133 \cdot 18^{1/3} x_1^{16}}{5832} - \frac{18^{2/3} x_1^{20}}{6561} - \\
 & \frac{23 \cdot 18^{1/3} x_1^{19}}{4374} - \frac{18^{2/3} x_1^{22}}{13122} + \frac{13 \cdot 18^{2/3} x_1^{17}}{4374} - \frac{32 x_1^{18} z_2}{243} + \frac{20 \cdot 18^{1/3} x_1^{16} z_2^2}{243} + \frac{2 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2}{729} - \\
 & \frac{2 \cdot 18^{2/3} x_1^{20} z_2}{2187} - \frac{256 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2^3}{27} + \frac{32 \cdot 18^{2/3} x_1^{14} z_2^2}{81} - \frac{80 x_1^{15} z_2^2}{81} - \frac{320 x_1^{12} z_2^3}{81} + \frac{364 x_1^{15} z_2}{243} + \\
 & \frac{56 x_1^{12} z_2^2}{81} + \frac{x_1^{24}}{13122} - \frac{14 x_1^{21}}{2187} + \frac{46 x_1^{18}}{729} - \frac{64 x_1^{15}}{243} - 320 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^2 + \frac{3392 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^3}{27} + \\
 & \frac{160 \cdot 18^{1/3} x_1^{11} z_2^3}{81} + \frac{28 \cdot 18^{2/3} x_1^{17} z_2}{729} - \frac{52 \cdot 18^{1/3} x_1^{13} z_2}{243} - \frac{112 \cdot 18^{1/3} x_1^{13} z_2^2}{81} - \frac{320 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^4}{9} + \\
 & \frac{80 \cdot 18^{2/3} x_1^{11} z_2}{9} + \frac{10 \cdot 18^{1/3} x_1^{19} z_2}{729} - \frac{424 \cdot 18^{2/3} x_1^{11} z_2^2}{81}
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 10) имеет два ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ из конуса нашей задачи, которым соответствуют следующие укороченные полиномы:

$$f_1^{(1)} = \frac{2 \cdot 18^{2/3}(x_1^6 + 1296z_2)x_1^8}{81}$$

$$f_2^{(1)} = 32 \cdot 18^{2/3}(-x_1^8 + 2 \cdot 18^{2/3}z_2x_1^4 - 24 \cdot 18^{1/3}z_2^2)x_1^2.$$

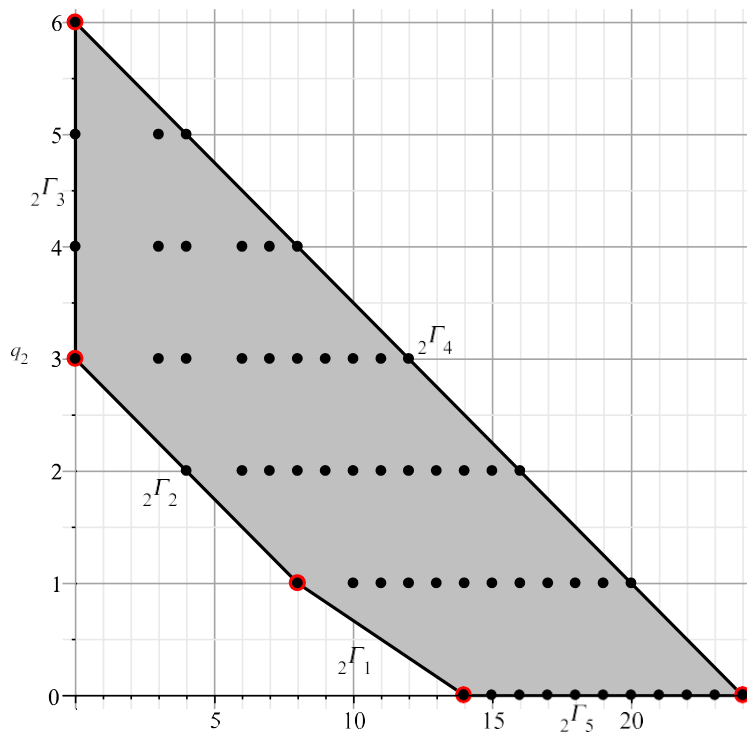


Рис. 10. Многоугольник Ньютона для полинома f_2 .

Решением первого укорочённого уравнения будет $z_2 = -x_1^6/1296$. Выполнив обратную подстановку как для z , так и для x , получаем разложение ветви вблизи точки $(0, 0)$.

$$z = \frac{x}{6} - \frac{18^{1/3}(-x)^{4/3}}{36} - \frac{x^2}{1296}.$$

Поскольку соответствующее ребро содержит точку с ординатой 1, то здесь применима теорема о неявной функции, которая даёт однозначную ветвь. Укороченный полином $f_2^{(1)}$, соответствующий второму ребру, не имеет

нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь. Вычисления с использованием функции `puisex` из пакета `algcurves` системы Maple приводят к таким же результатам.

в) Также критическому значению $c_1^* = 0$ соответствует критическая точка

$(x_2, z_2) = (-8, -4)$. Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора полинома (5.1) в этой точке, используя команду `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, z_2 + \zeta) = 9216\xi^2 - 28672\xi\zeta + 36864\zeta^2.$$

Дискриминант данной квадратичной формы $\Delta = -536870912 < 0$, следовательно, точка $(-8, -4)$ является изолированной критической точкой. Для анализа критических линий на бесконечности проанализируем многоугольник Ньютона (рис. 8) полинома (3.3.1) и выделим укорочённые полиномы, соответствующие рёбрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату.

Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что два ребра соответствуют бесконечности $\Gamma_3^{(1)}$ и $\Gamma_4^{(1)}$.

Рассмотрим ребро $\Gamma_3^{(1)}$, которому соответствует укорочение

$$f_3^{(1)} = -4z(-2z + x)(x^2 - 4xz + 8z^2)^2.$$

По нему можно определить первый член разложения $z = x/2 + z_1$. Произведя такую замену в (3.3.1), получаем $f_2 = 4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 + 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 + 768xz_1^5 + 512z_1^6 - 8x^5 - 24x^2z_1 + 136x^3z_1^2 + 704x^2z_1^3 + 704xz_1^4 - 256xz_1^5 - 128x^4 - 1024x^3z_1 - 2624x^2z_1^2 - 1344xz_1^3 + 1872z_1^4 - 512x^3 - 4608x^2z_1 - 13824xz_1^2 - 13824z_1^3$.

В выпуклой оболочке полинома выбираем соответствующее бесконечности ребро, тогда его укорочённый полином будет выглядеть следующим образом: $f_3^{(1)} = 4x^5(z_1 - 2)$. Также по этому укорочению

определяется второй член разложения: $z_1 = 2 + z_2$. Продолжая аналогично, выявляем первую ветвь разложения в бесконечности

$$z = \frac{x}{2} + 2 + \frac{4}{x} \quad (3.3.3)$$

Аналогично рассмотрим ребро $\Gamma_4^{(1)}$, ему соответствует укороченный полином $f_4^{(1)} = -2x^5(2z - 1)$. Значит при $x \rightarrow \infty$ имеем $z \rightarrow \frac{1}{2}$. Произведём

замену $z = \frac{1}{2} + z_1$ в полиноме (3.3.1), получаем

$$\begin{aligned} f_2 = & -4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 - 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 - 768xz_1^5 + 512z_1^6 - \\ & 24x^2z_1 + 168x^3z_1^2 - 320x^2z_1^3 - 576xz_1^4 + 1280z_1^4 - 9x^4 - 32x^3z_1 + \\ & 952x^2z_1^2 - 4320xz_1^3 + 3152z_1^4 - 18x^3 + 296x^2z_1 + 336xz_1^2 - 9440z_1^3 - \\ & 16x^2 + 3528xz_1 - 17768z_1^2 + 1152x - 9416z_1 - 1611. \end{aligned}$$

У его многоугольника Ньютона возьмём единственное ребро, с нормальным конусом, попадающим в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так: $f_2^{(1)} = -x^4(4xz_1 + 9)$. Для определения 3-го члена разложения произведём ещё одну замену вида:

$$z_1 = -9/(4x) + z_2.$$

После очередных вычислений соответствующий укороченный полином будет иметь вид $f_2^{(1)} = -4x^5z_2 + 36x^3$. Таким образом, разложение второй ветви в бесконечности выглядит так:

$$z = \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + \frac{9}{x^2}. \quad (3.3.4)$$

Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `puisex` из пакета `algcures` системы Maple.

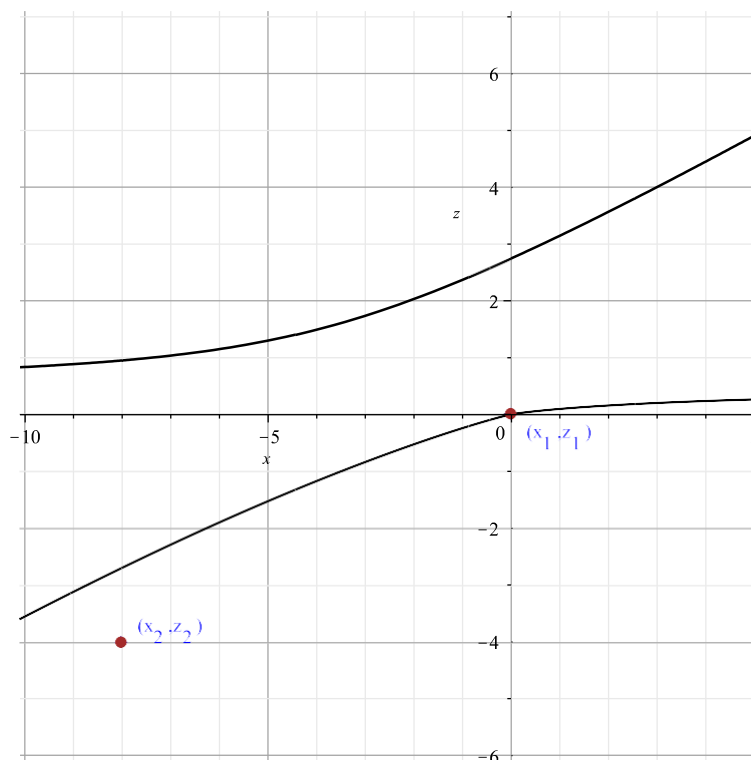


Рис. 11. Линии уровня для критического значения c_1^* полинома f_2 . Корни укороченных полиномов

$$f_2^{(1)} = 16z^3(32z^3 - 16z^2 + 117z - 864),$$

$$f_5^{(1)} = x^3(2x^2 + 13x + 64),$$

соответствующих рёбрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_5^{(1)}$ многоугольника Ньютона полинома (3.3.1), дают точки пересечения с осями координат. Пересечение с Oz при $z=0$ и $z \approx 2.747016946$, а с осью Ox только при $x=0$.

Для изображения этих линий уровня на плоскости (рис. 11) воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algcures`. Асимптотики (3.3.3) и (3.3.4)

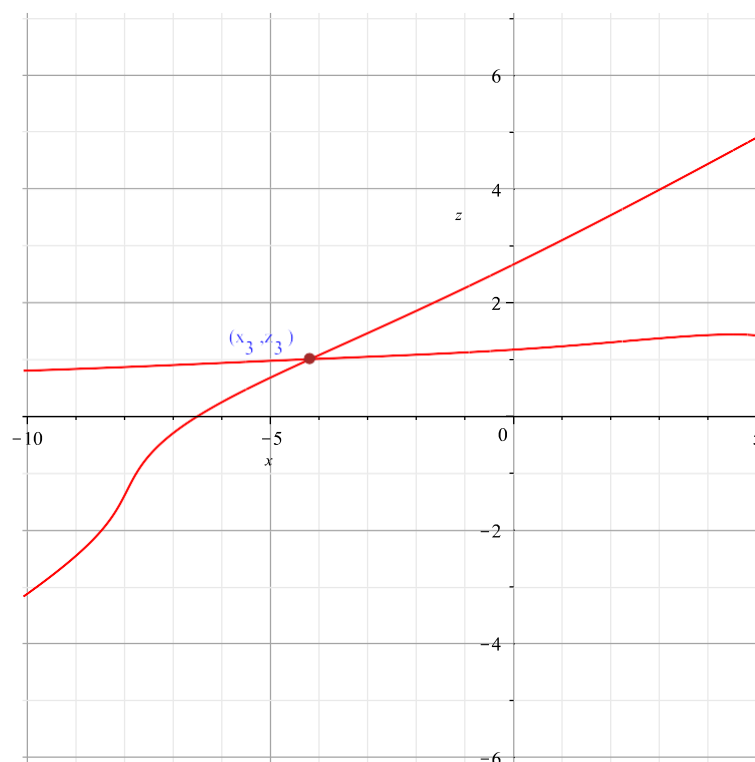


Рис. 12. Линии уровня для критического значения $c=17590.6094$ полинома f_2 .

Соответствуют простым бесконечным точкам пересечения. Поэтому здесь работает лемма 4.

Критическая линия $f_2(x, z) = c_2^* \approx 17590.6094$. Первый из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал \mathcal{SP}_3 , есть критическое значение $c_2^* \approx -17590.6094$. и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами $(x_3, z_3) \approx (-4.2020, 0.9946)$. Рассмотрим эту точку, координаты которой являются корнями полиномов 4-й степени. Возьмём их значения приблизительно с большой точностью. Найдём квадратичную форму ряда Тейлора в точке (x_3, z_3) :

$$h_2(x_3 + \xi, z_3 + \zeta) = -17590.60939 + 1 \cdot 10^{-6}\xi + 704.298847\xi^2 - 21546.06087\xi\zeta + 50690.90696\zeta^2.$$

Здесь свободный член близок к c_2^* и коэффициент линейного члена мал. Поэтому дискриминант этой формы $\Delta \approx 3.2142 \cdot 10^8$ положительный, следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Критические линии уровня при c_2^* пересекают

ось Ox в точке $(x, z) \approx (-6.5012, 0)$, а ось Oz в точках $(x, z) \approx (0, 01.1627)$ и $(x, z) \approx (0, 2.6681)$. Здесь верны асимптотики (3.3.3) и (3.3.4). Эскиз этой критической линии показан на рис. 12.

Критическая линия $f_2(x, z) = c_3^* \approx 4162.4031$. Второй из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал \mathcal{SP}_3 есть критическое значение $c_3 \approx 4162.4031$ и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами $(x_4, z_4) \approx (-7, 1522, -2.9929)$. Рассмотрим квадратичную форму разложения ряда Тейлора исходного полинома (3.3.1) в критической точке (x_4, z_4) :

$$h_2(x_4 + \xi, z_4 + \zeta) = 4162.4022 - 0.0004\zeta + 0.00084\xi + 350.751998\xi^2 + 4785.99943\xi\zeta - 11228.6467\zeta^2.$$

Здесь свободный член близок к c_3^* и коэффициенты линейных членов малы. Поэтому её дискриминант равен $\Delta \approx 3.8659 \cdot 10^7 > 0$. Следовательно это точка самопересечения.

Критические линии уровня пересекают ось Ox в точке $(x, z) \approx (3.206553809, 0)$, а ось Oz в точках $(x, z) \approx (0, -0.6481)$ и $(x, z) \approx (0, 2.7632)$. Эта критическая линия показана на рис. 13.

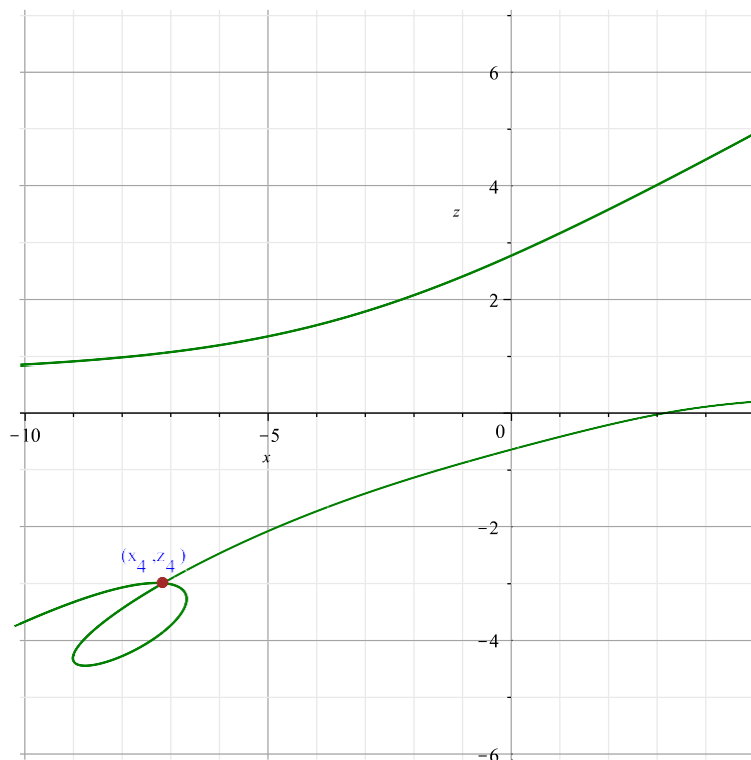


Рис. 13. Линии уровня для критического значения $c_3^* = 4162.4031$ полинома f_2 .

На рис. 14 показаны все критические линии уровня полинома f_2 для соответствующих критических значений c_j^* , а также критические точки. Некритические линии уровня расположены между соответствующими критическими согласно (2.1.4).



Рис. 14. Все критические линии уровня полинома f_2 .

3.4-§. Пример 3 при $z=0$

Критические значения. Рассмотрим последнее нулевое сечение:

$$\begin{aligned}
 f_3 = & 4x^5y + 48x^4y^2 + 344x^3y^3 + 1200x^2y^4 + 2500xy^5 + 2x^5 + \\
 & 82x^4y + 740x^3y^2 + 3156x^2y^3 + 6490xy^4 + 20250y^5 + 13x^4 + \\
 & 412x^3y + 2782x^2y^2 + 828xy^3 - 37827y^4 + 64x^3 + 1728x^2y + \\
 & 15552xy^2 + 46656y^3.
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Первый полином базиса Грёбнера GBJ_3

$$\begin{aligned}
 h_3(c) = & c(1738071441650390625c^6 + 8280321886721438116 \cdot \\
 & 10^5c^5 + 13366043451422095808794624c^4 + \\
 & 226388815999145527309322158080c^3 + \\
 & 33335217445009148607411951501312c^2 + \\
 & 14684298419139851546639897167134720c - \\
 & 876052122097662955869886609920884736).
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Он зависит только от c , факторизуется на два множителя и определяет критические значения полинома (3.4.1). Критическое значение $c_1^* = 0$ является корнем множителя $h_{11}(c) = c$. Второй множитель в (3.4.2) имеет только два вещественных критических значения $c_1^* \approx -476393.0349992$ и $c_1^* \approx 51.5040463$.

Критическая линия $f_3(x, y) = c_1^* = 0$. Идеал \mathcal{GBJ}_3 имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция даёт два идеала. Рассмотрим идеал $\mathcal{SP}_1(h_3)$, являющийся примарной декомпозицией множителя $h_{31}(c) = c$, выявляет критическое значение $c_1^* = 0$. Корни полиномов, входящих в идеал $\mathcal{SP}_1(h_3)$, определяют критические точки $(x_1, y_1) = (0, 0)$ и $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$

a) Рассмотрим характер вещественных критических точек. При $c_1^* = 0$ в критической точке $(0, 0)$ квадратичная форма h_2 ряда Тейлора полинома (3.4.1) обнуляется и теорема о неявной функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки. Вычисляем выпуклую оболочку носителя полинома (3.4.1). Многоугольник Ньютона показан на рис.15.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$, внешняя нормаль которого входит в конус нашей задачи $K = \{P < 0\}$, соответствует укороченный полином $f_1^{(1)} = 64(x + 9y)^3$. Выполним подстановку $y = -x/9 + y_1$ и получим полином в переменных x и y_1 :

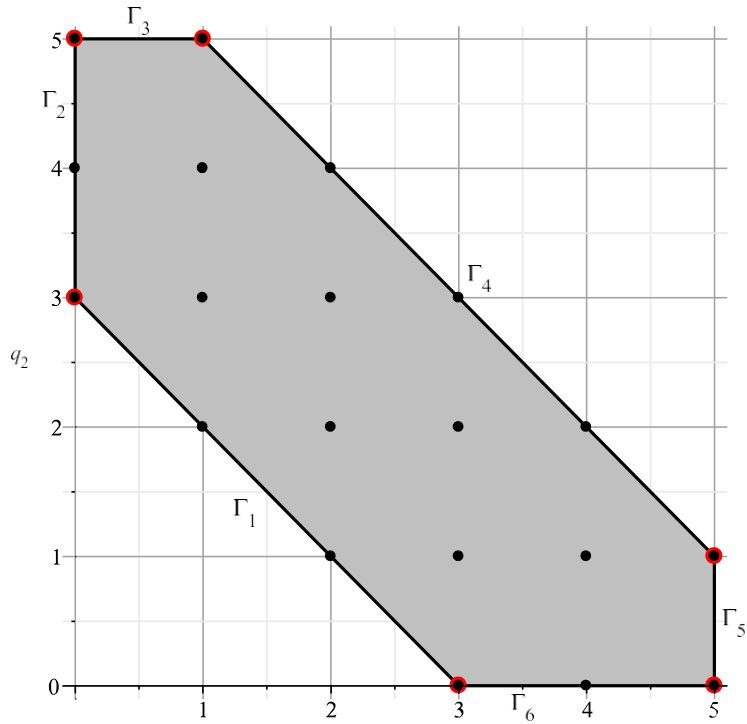


Рис. 15. Многоугольник Ньютона для полинома f_3 .

$$\begin{aligned}
 f_3 = & \frac{10816}{59049}x^6 + 46656y_1^3 - 37827y_1^4 + 20250y_1^5 + \frac{9152}{6561}x^5y_1 \\
 & - \frac{8800}{729}x^4y_1^2 + \frac{9664}{81}x^3y_1^3 + 32x^3y_1 - 296x^2y_1^2 \\
 & + 17640xy_1^3 - \frac{1700}{9}x^2y_1^4 + \frac{10400}{729}x^4y_1 \\
 & - \frac{2944}{27}x^3y_1^2 + \frac{24944}{4}x^2y_1^3 - 4760xy_1^4 + 2500xy_1^5 \\
 & - \frac{16}{3}x^4 - \frac{10880}{6561}x^5.
 \end{aligned}$$

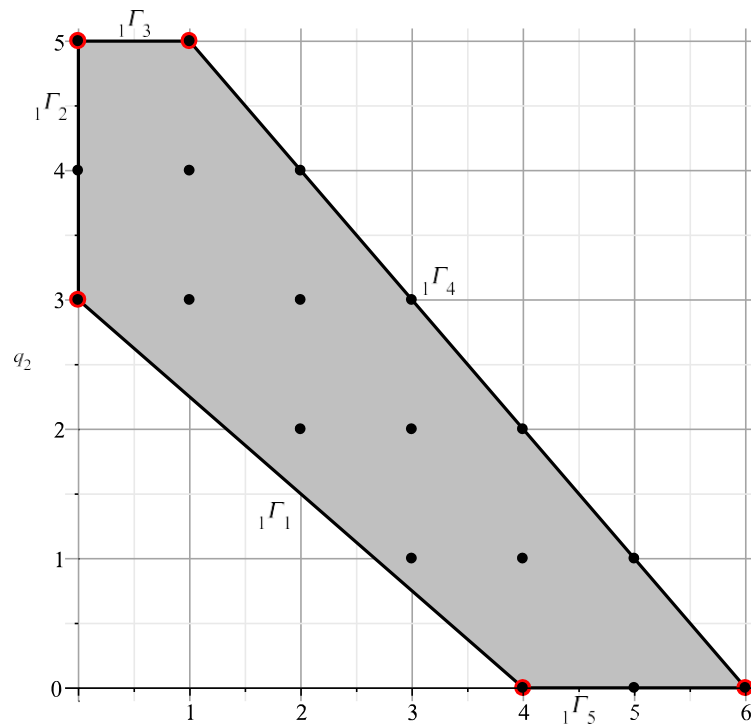


Рис. 16. Многоугольник Ньютона для полинома f_3 .

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 16. Его единственному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ с нормальным конусом в конусе нашей задачи $K = \{P < 0\}$, соответствует укорочённый полином $f_1^{(1)} = 16x^4/3 + 46656y_1^3$. Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка $y_1 = 18^{1/3}x^{4/3} / 54 + y_2$. Она приводит к ещё одному полиному от переменных, x, y_2 . Но при подстановке выявляются дробные степени переменной x , что в свою очередь приводит к некоторым трудностям. Чтобы упростить дальнейшие действия, тут же произведём ещё одну замену вида $x = x_1^3$. Так получаем полином

$$\begin{aligned}
f_3 = & 46656y_2^3 - 37827y_2^4 + 20250y_2^5 - \frac{1700x_1^{18}y_2}{19683} + \frac{6250x_1^{15}y_2^2}{2187} \\
& - \frac{5128x_1^{15}y_2}{6561} + \frac{8075x_1^{12}y_2^2}{729} + \frac{9664x_1^9y_2^3}{81} - \frac{1700x_1^6y_2^4}{9} \\
& + 2500x_1^3y_2^5 - \frac{2209x_1^{12}y_2}{729} - \frac{2944x_1^9y_2^2}{27} + \frac{24944x_1^6y_2^3}{9} \\
& - 4760x_1^3y_2^4 + 32x_1^9y_2 - 296x_1^6y_2^2 + 17640x_1^3y_2^3 \\
& + \frac{2416x_1^{21}}{177147} + \frac{7892x_1^{18}}{59049} + \frac{2350x_1^{15}}{6561} + \frac{16 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}}{27} \\
& - \frac{736 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}}{19683} + \frac{2899118^{\frac{1}{3}}x_1^{16}}{157464} - \frac{74 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}}{729} \\
& + \frac{2791 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}}{177147} - \frac{425 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{22}}{1062882} - \frac{14225 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{20}}{4251528} \\
& + \frac{625 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{23}}{6377292} + 2592 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^2 - 2802 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^3 + 48 \\
& \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2 - \frac{296 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2}{27} + 980 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^2 \\
& + \frac{490 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2}{27} - \frac{467 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^2}{6} - \frac{9520 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^3}{27} \\
& + 1875 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^4 + \frac{12472 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^2}{81} + \frac{625 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^3}{9} \\
& - \frac{2944 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2}{729} + \frac{6236 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2}{2187} - \frac{2380 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^2}{243} \\
& + \frac{6250 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^4}{27} + \frac{4832 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2^2}{729} - \frac{3400 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^3}{243} \\
& - \frac{18325 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{16}y_2}{78732} - \frac{850 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2^2}{2187} + \frac{6250 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^3}{729} \\
& + \frac{2416 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}y_2}{19683} + \frac{3125 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}y_2}{118098}.
\end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 17, и имеет два ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ обращённые, к нулевой точке, которым соответствует следующие укороченные полиномы

$$f_1^{(1)} = \frac{16 \cdot 18^{1/3}(x_1^5 + 81 \cdot 18^{1/3}y_2)x_1^8}{27}$$

$$f_2^{(1)} = 48 \cdot 18^{2/3}(x_1^8 + 3 \cdot 18^{2/3}y_2x_1^4 + 54 \cdot 18^{1/3}y_2^2)y_2.$$

Для $f_1^{(1)}$ корнем будет $y_2 = 18^{2/3}x_1^5 / 1458$. Выполняя обратную подстановку по x и y , получаем разложение ветви вблизи точки получаем разложение ветви вблизи точки $(0,0)$

$$y = -\frac{x}{9} + \frac{18^{1/3}x^{4/3}}{54} - \frac{8748^{1/3}x^{5/3}}{4374}.$$

Поскольку первое ребро имеет верхнюю точку с ординатой 1, то здесь применима теорема о неявной функции, которая даёт единственную ветвь.

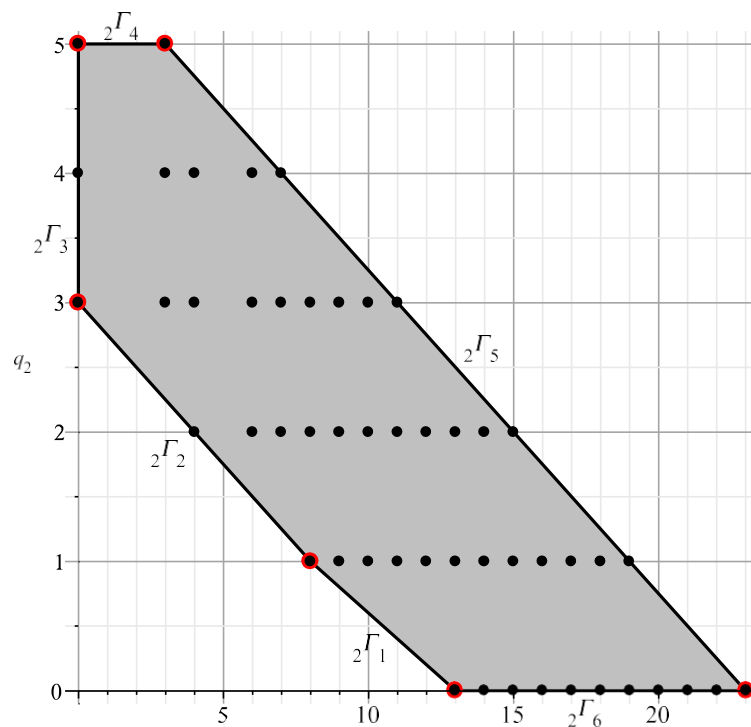


Рис. 17. Многоугольник Ньютона для полинома f_3 .

Второе укорочение $f_2^{(1)}$ не имеет нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь.

б) Также критическому значению $c_1^* = 0$ соответствует критическая $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$. Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора полинома (6.1) в этой точке с использованием команды `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, y_2 + \eta) = 576\xi^2 + 1728\xi\eta + 5184\eta^2.$$

Дискриминант $\Delta = 8957952$ отрицательный, следовательно, точка (x_2, y_2) является изолированной критической точкой.

в) Для анализа критических линий на бесконечности рассмотрим многоугольник Ньютона (рис.15) полинома (3.4.1). Выделим укороченные полиномы, соответствующие рёбрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату. Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что таковых три: $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_4^{(1)}$ и $\Gamma_5^{(1)}$.

з) Рассмотрим ребро $\Gamma_3^{(1)}$, ему соответствует укороченный полином $f_3^{(1)} = 250y^2(10x + 81)$. Значит, при $y \rightarrow \infty$ имеем $x \rightarrow -81/10$. Произведём замену $x = -81/10 + x_1$ в полиноме и возьмём соответствующее ребро, попадающее в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так: $f_3^{(1)} = 4y^4(625yx_1 - 2916)$. Для определения 2-го члена разложения произведём ещё одну замену вида: $x_1 = 2916/625y + x_2$. После очередных вычислений соответствующий укороченный полином будет иметь вид

$$f_3^{(1)} = 2500y^5x_2 + \frac{472392}{125}y^3.$$

Таким образом, разложение первой ветви в бесконечности выглядит так:

$$x \approx -\frac{81}{10} + \frac{2916}{625y} - \frac{118098}{7812y^2}.$$

Ей соответствует простая бесконечная точка пересечения.

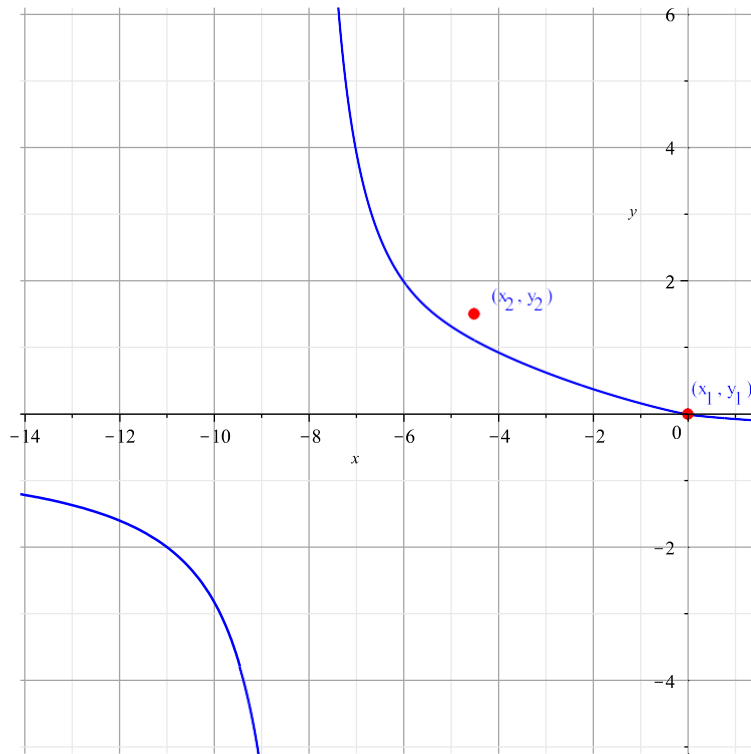


Рис. 18. Линии уровня для критического значения $c_1^* = 0$ полинома f_3 .

д) Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствует укороченный полином $f_4^{(1)} = 4xy(x^2 + 6xy + 25y^2)^2$, который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей в бесконечности не имеет.

е) Аналогично рассмотрим ребро $\Gamma_5^{(1)}$, которому соответствует укорочение $f_5^{(1)} = 2x^5(2y + 1)$. По нему можно определить, что первая замена будет $y = -1/2 + y_1$, а также, что при $x \rightarrow \infty$ имеем горизонтальную асимптоту $y = -1/2$. Произведя такую замену, в многоугольнике Ньютона полученного полинома выбираем соответствующее бесконечности ребро, его укороченный полином есть: $f_5^{(1)} = 4x^4(xy_1 - 4)$. Также по этому укорочению определяется второй член разложения: $y_1 = 4/x + y_2$. Продолжая аналогично, выявляем очередное укорочение $f_5^{(1)} = 4x^5y_2 + 136x^3$ и, соответственно, вторую ветвь разложения в бесконечности

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{4}{x} - \frac{34}{x^2}.$$

Ей также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

Пересечение с осями координат можно определить по рёбрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_6^{(1)}$, таковым и единственным для осей Ox и Oy является точка $(0, 0)$. Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `ruisex` из пакета `algcures` системы Maple.

Теперь изобразим линии уровня на плоскости. Для этого воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algcures`. Критическую линию уровня и точки для $c_1^* = 0$ см. на рис. 18.

Критическая линия $f_3(x, y) = c_2^* \approx -476393.0349$. При этом c_2^* имеется только одна критическая точка $(x_3, y_3) \approx (-11.3777, -1.0391)$. Её координаты являются первым набором корней полиномов 6-й степени:

$$12000x^6 + 376640x^5 + 4789184x^4 + 32751568x^3 + 128618398x^2 + 276229080x + 255518145,3 \cdot 10^5 y^6 - 607040y^5 + 56704y^4 + 505904y^3 - 403522y^2 + 14397y - 26487, \quad (3.4.3)$$

которые получаются при примарной декомпозиции идеала $\mathcal{SP}_2(h_3)$, включающего множитель h_{32} , при лексикографических порядках $c > y > x$ и $c > x > y$ соответственно. Корни полиномов (3.4.3) суть иррациональные числа, поэтому также возьмём их приближительные значения с большой точностью. Найдём квадратичную форму ряда Тейлора в точке (x_3, y_3) :
 $h_2(x_3 + \xi, y_3 + \eta) = -476393.0342 + 0.0002\eta + 0.00025\xi + 373296.3064\eta\xi + 13334.30346\xi^2 + 462406.3700\eta^2.$

Здесь постоянная близка к c_2^* , коэффициенты линейных членов малы, а дискриминант этой формы $\Delta \approx 1.1468 \cdot 10^{11}$ положительный. Следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Также критическая линия уровня при c_2^* пересекает ось Oy при $y \approx -1.4798$ и ось Ox при $x \approx -12.822060973$. Она

показана на рис. 19.

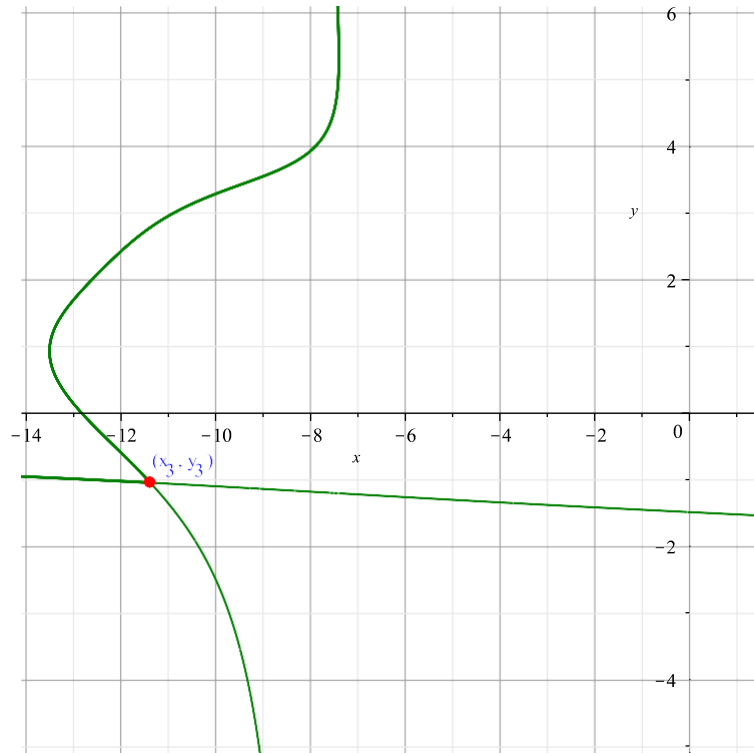


Рис. 19. Линии уровня для критического значения $c_2^* \approx -476393.035$. полинома f_3 .

Критическая линия $f_3(x, y) = c_3^* \approx 51.5040$. При этом c_3^* критическая точка $(x_4, y_4) \approx (-4.8952, 1.4224)$. Её координаты являются вторым набором корней полиномов (3.4.3). Аналогично рассмотрим квадратичную форму разложения ряда Тейлора исходного полинома в критической точке $x_4 \approx -4.8952, y_4 \approx 1.4224$ соответствующей критическому значению $c_3 = 51.5040$:

$$h_2(x_4 + \xi, y_4 + \eta) = 51.5041 + 0.0003\eta - 0.00010\xi - 2046.65935\eta\xi - 408.778677\xi^2 - 1602.0119\eta^2.$$

Здесь постоянная близка к c_3^* и коэффициенты линейных членов малы. Поэтому дискриминант $\Delta \approx 1.5693 \cdot 10^6$ положительный, что по лемме 2 означает точку, в которой пересекаются две ветви кривой. Критические линии уровня при c_3^* пересекают оси Ox и Oy при $x \approx 0.8749$ $y \approx 0.1063$ соответственно. Линия уровня и критическая точка изображены на рис. 20.

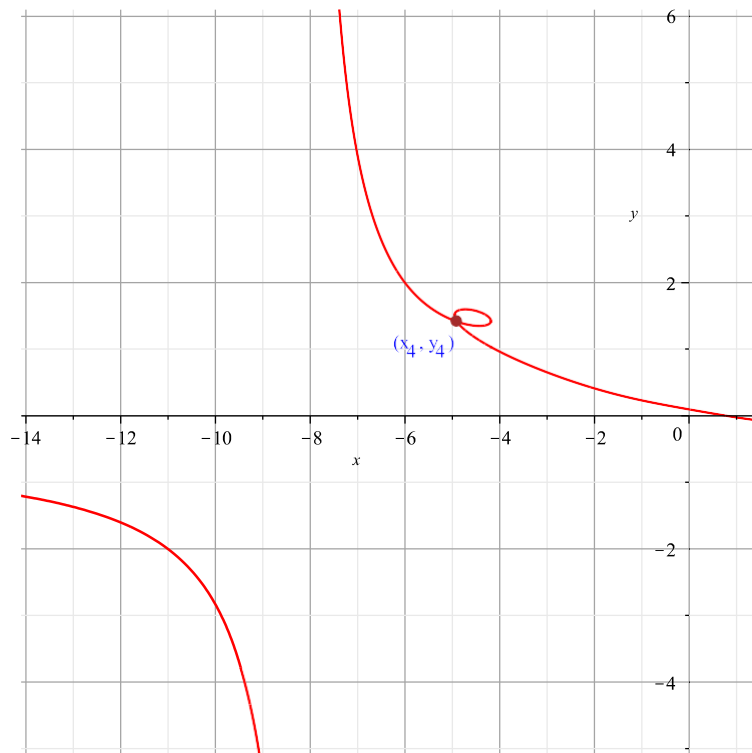


Рис. 20. Линия уровня для критического значения $c_3^* \approx 51.5040$ полинома f_3 .

Все критические линии уровня полинома f_3 . На рис. 21 показаны все критические линии уровня полинома f_3 для соответствующих критических значений c_j^* , а также критические точки. Некритические линии уровня расположены между соответствующими критическими линиями и критическими точками.

Отметим, что для всех трёх полиномов f_1, f_2, f_3 все бесконечные точки пересечения имеют первую кратность. Поэтому применима лемма 4 и все некритические линии уровня расположены между найденными критическими и топологически эквивалентны в интервалах (2.1.4)

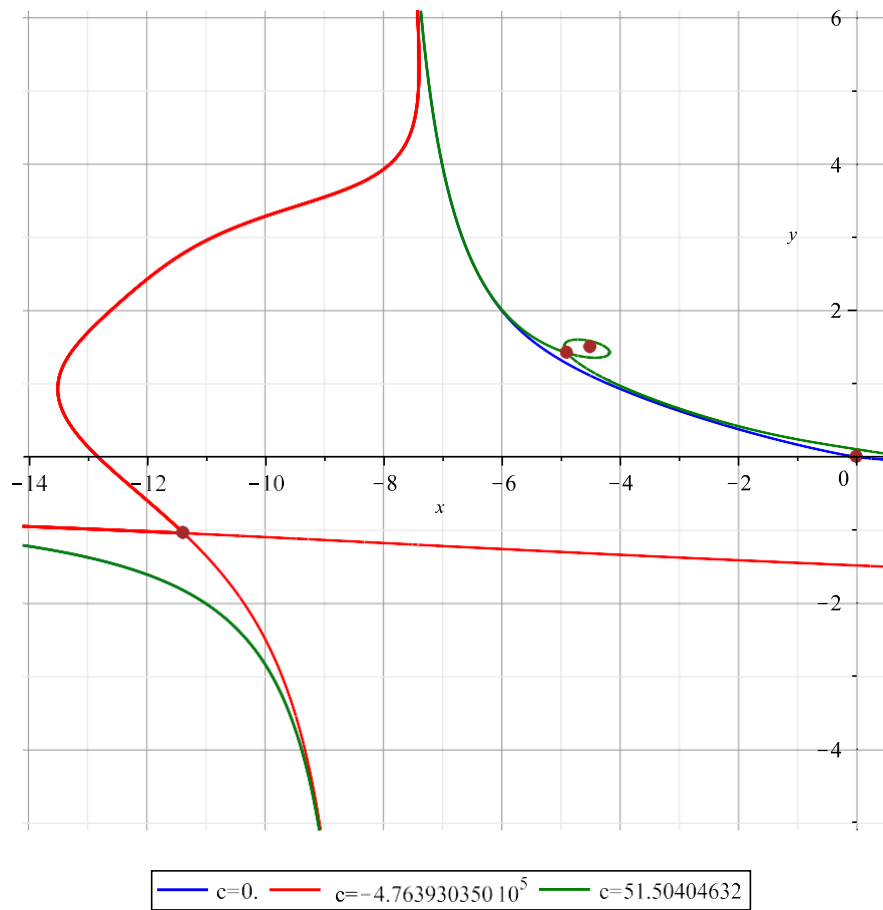


Рис. 21. Все критические линии уровня полинома f_3 .

Заключение к Главе III.

В заключение главы 3, мы рассмотрели различные критические точки и критические линии уровня для заданного полинома. Мы использовали метод Грёбнера для построения базиса Грёбнера и определения критических значений. Затем мы проанализировали каждое критическое значение, исследуя соответствующие критические точки и их свойства.

Мы обнаружили, что некоторые критические точки являются изолированными, в то время как другие точки представляют собой точки самопересечения или возврата кривой. Мы вычислили многоугольники Ньютона и их рёбра для уточнения исследуемых областей. Кроме того, мы использовали методы подстановки и вычисления квадратичных форм для более детального анализа критических точек.

Особое внимание было уделено построению линий уровня для каждого критического значения. Мы продемонстрировали линии уровня на соответствующих плоскостях и указали на особенности каждой линии. Мы также показали, как преодолеть трудности вычисления, такие как нахождение асимптот и точек пересечения.

В результате наших исследований, мы получили более полное представление о критических точках и кривых для заданного полинома. Эти результаты могут быть полезны для дальнейшего изучения свойств полиномов и их графиков.

В целом, глава 3 представляет собой важный этап в изучении свойств полиномов и их кривых, и представленный анализ помогает расширить наше понимание их структуры и поведения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации проведено исследование линий уровня полинома $f(X)$ на вещественной плоскости R^2 .

Полученные результаты расширяют существующие знания о линиях уровня полинома $f(X)$ и позволяют лучше понять их структуру и свойства. Предложенный способ вычисления линий уровня полинома $f(X)$ с использованием степенной геометрии может быть эффективным инструментом для исследования полиномов и их линий уровня в различных приложениях, таких как оптимизация, определение экстремумов и анализ данных.

Таким образом, результаты исследования, представленные в данной диссертации, являются важным вкладом в теорию полиномов и их линий уровня, и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в данной области.

Таким образом, в данной диссертации было исследовано поведение полинома $f(X)$ на вещественной плоскости R^2 с использованием понятий критических точек, критических кривых и линий уровня. Была доказана теорема о существовании конечного множества критических значений полинома $f(X)$ и соответствующих им критических линий уровня.

Были рассмотрены определения критических точек и критических кривых полинома $f(X)$, а также введены понятия критических значений c и критических линий уровня. Описан способ вычисления линий уровня полинома $f(X)$ с использованием степенной геометрии, а также предложен традиционный подход к изучению локального строения линий уровня.

Было выявлено, что линии уровня полинома $f(X)$ на вещественной плоскости $X \in R^2$ могут быть разделены на $m + 1$ интервалов, где m - число критических значений c . Критические линии уровня оказались топологически эквивалентными внутри каждого интервала, за исключением случаев, когда $C_* = c_1^*$ или $C^* = c_m^*$.

Данное исследование вносит вклад в теорию полиномов и расширяет наши знания о линиях уровня полинома $f(X)$ на вещественной плоскости. Результаты данной работы могут быть использованы в различных приложениях, таких как оптимизация, численное моделирование, анализ данных и других областях математики и её приложений.

Далее возможны дополнительные исследования, такие как изучение свойств критических линий уровня в более общем случае, исследование специальных классов полиномов, а также расширение результатов на более высокие размерности. Это может привести к новым теоретическим и практическим результатам, которые могут быть полезны в различных научных и инженерных приложениях.

Исследование, проведенное в рамках магистерской диссертации, посвящено изучению методов и алгоритмов анализа критических точек и линий уровня функций многих переменных. В ходе исследования были рассмотрены различные подходы к анализу критических точек и линий уровня, включая методы нахождения критических значений, определение вещественных и алгебраических критических точек, а также оценка характеристик критических точек.

Были проанализированы различные математические техники, такие как базис Грёбнера и процедура `UnivariatePolynomial`, которые позволяют находить критические значения и определять вещественные и алгебраические критические точки с использованием различных лексикографических порядков. Были также рассмотрены алгоритмы вычисления множеств вещественных нулей примарных идеалов, включая приближенные методы для иррациональных критических значений и координат критических точек.

Кроме того, были изучены алгоритмы оценки характеристик критических точек, такие как дискриминант квадратичной формы разложения функции вблизи критических точек, а также алгоритмы

разложения вещественных ветвей линий уровня в окрестности критических точек и на бесконечности.

Полученные результаты исследования могут быть использованы в различных областях, таких как оптимизация, определение экстремумов функций, построение линий уровня, анализ геометрических и топологических свойств функций многих переменных. Данные методы и алгоритмы могут также быть реализованы в программных пакетах математического моделирования и символьных вычислений, таких как СКА Maple и пакет PolyhedralSets.

Таким образом, проведенное исследование представляет важный вклад в разработку методов и алгоритмов анализа критических точек и линий уровня в функциях многих переменных, расширяет нашу теоретическую и практическую базу знаний в этой области математики и компьютерных наук. Результаты исследования могут быть использованы для более эффективного решения ряда практических задач, таких как оптимизация систем с множеством переменных, анализ и моделирование сложных систем, таких как экономические, социальные или технические системы, а также для создания новых алгоритмов и программных инструментов для анализа функций многих переменных.

Данные исследования также могут быть применены в других научных областях, таких как физика, биология, инженерные науки и другие, где функции многих переменных широко используются для моделирования сложных систем и процессов. Разработанные методы и алгоритмы могут быть интегрированы в существующие программные системы и инструменты, и таким образом, способствовать развитию и совершенствованию научных и технических исследований в этих областях.

В целом, результаты исследования представляют важный вклад в развитие теоретических и практических аспектов анализа критических точек и линий уровня функций многих переменных, и могут быть

использованы в различных приложениях в науке, технике и других областях знаний. Дальнейшие исследования в этой области могут способствовать развитию новых методов и алгоритмов анализа функций многих переменных, что откроет новые возможности и применения в различных научных и прикладных областях. Для будущих исследователей и практиков в области анализа функций многих переменных, результаты данного исследования могут служить основой для развития новых подходов и решений, а также вдохновить на проведение дальнейших исследований в этой области.

Кроме того, проведенный анализ различных методов и подходов к анализу функций многих переменных позволяет выделить определенные тенденции и направления развития данной области и предложить рекомендации для дальнейших исследований. Например, разработка новых алгоритмов и методов анализа функций многих переменных с использованием машинного обучения и искусственного интеллекта может быть одним из перспективных направлений исследований в данной области.

Также следует отметить, что результаты исследования могут быть применены в реальных практических задачах, таких как оптимизация сложных систем, моделирование и анализ социальных, экономических и технических процессов, а также в разработке новых программных инструментов для анализа функций многих переменных. Это может иметь важное практическое значение для решения реальных проблем в различных областях деятельности.

Таким образом, на основе проведенных анализов можно сделать общее заключение о важности и актуальности исследований в области анализа функций многих переменных, их потенциале для развития научных и прикладных решений, а также о необходимости дальнейших исследований в данной области с использованием новых подходов и методов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д., Батхин А. Алгоритмы и программы вычисления корней полинома от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021.

№ 5. С. 22—43. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0132347421050046>.

2. Брюно А., Батхин А. Линии уровня полинома на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2021.

№ 57. С. 1—24. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-57>. eprint:

https://keldysh.ru/papers/2021/prep2021_57.pdf. URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-57>.

3. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.

4. Милнор Д. Теория Морса: Пер. с англ. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2011. 184 с.

5. Singh C., Singh J. Accurate contour plotting using 6-node triangular elements in 2D // Finite Elements in Analysis and Design. 2009. Vol. 45, no. 2. P. 81–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.07.011>.

6. Hoeij M. Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor // J. Symbolic Computation. 1997. Vol. 23. P. 209–227.

7. Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.

8. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.

9. Koll’ar J. Lectures on Resolution of Singularities. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2007.

10. Давенпорт Дж., Серр Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991.
11. Кириенко Д.П. Система компьютерной алгебры Maple, Среднее общеобразовательная школа №179 МИОО, г.Москва.
12. Бухбергер Б. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов// Компьютерная алгебра. Символика и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986.
13. Давенпорт Дж., Серр Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991.
14. Кириенко Д.П. Система компьютерной алгебры Maple, Среднее общеобразовательная школа №179 МИОО, г.Москва.
15. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, Физматлит, 1998. — 288 с. — ISBN: 5-02-015168-8.
16. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.
17. Aardal K., Weismantel R., Wolsey L. Non-standard approaches to integer programming. 1999.
18. Ajtai M. The shortest vector problem in L2 is NP-hard for randomized reductions // Electronic Colloquium for Computational Complexity. 1997. TR97-047.
19. Borwein J.M., Lisoněk P. Applications of Integer Relation Algorithms. Centre for Experimental and Constructive Mathematics Department of Mathematics and Statistics Simon Fraser University. 1997
20. Lenstra H.W. Integer programming with a fixed numbers of variables. Report 81-03. Dep. Math. Univ., Amsterdam. 1981.
21. Lenstra A.K., Lenstra H.W., Lovasz L. Factoring polynomials with rational coefficients // Math. Ann. 1982. V 261. P.515–534.
22. Arageli: A library for doing exact computation. Department of Computer Science. University of Nizhni Novgorod. <http://www.unn.ru/cs/arageli>.
23. Cohen H. A course in computational algebraic number theory. Berlin e.a.: Springer, 1993.

24. von zur Gathen J., Gerhard J. Modern Computer Algebra. Cambridge University Press, 1999.

25. LiDIA — A library for computational number theory. TH Darmstadt/Universität des Saarlandes, Fachbereich Informatik, Institut für Theoretische Informatik. <http://www.informatik.th-darmstadt.de/pub/TI/LiDIA>.

26. Shoup V. NTL: A library for doing number theory. Department of Computer Science, University of Wisconsin–Madison. <http://www.shoup.net>.

27. Ro‘zimuradov X.X., Xudaykulova S.Z. Polinomial halqalar ideallarining gryobner bazislarini kompyuter algebrasi tizimlarida hisoblash. - “Umumta’lim fanlarini sinxron va asinxron bog‘lab o‘quvchi kreativ faoliyatini rivojlantirishda integrativ yondashuv” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari. Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti. 2022 yil 14 may.

28. Z.Kh.Khaydarov, S.Z.Khudaykulova. Calculation of polynomial level lines in the plane. – Algebra va analizning dolzarb masalalari mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami 1-qism 2022 йил 18-19 ноябрь, 28-30 betlar.

29. www.ziyonet.uz.

30. www.math.ru.