

Kirish

So'ngi yillarda sonli metodlarning jadal rivojlanishi fan va texnika tomonidan ko'ndalang qo'yilgan bir qator amaliy masalalarni yechish zarurati paydo bo'lganligi bilan bog'liq, bunda zamonaviy tezkor kompyuterlarning paydo bo'lganligi ham muhim ahamiyatga ega. Quydagi muammolarni ko'rsatib o'tish yetarli: 1) yadro energiyasini egallash, yadro reaktorlarini qurish, 2) uchish apparatlarini loyihalash (samolyot va raketalar), 3) kosmik parvozlar dinamikasi, 4) boshqariladigan termoyadroviy sintez muammosi bilan bog'liq plazmalar fizikasini o'rganish va boshqalar.

Ushbu toifadagi masalalarni sonli metodlarni qo'llamasdan yechib bo'lmaydi. Hisoblash matematikasi va uning tatbiqi sohasidagi yutuqlar matematika faniga bo'lgan qiziqishni yanada ortirdi va uning yangi bo'limlarning paydo bo'lishiga olib keldi.

Hozirda matematik tavsiflash yoki matematik modellashtirishga imkon beruvchi murakkab jarayonlarni tadqiq etishning yangi nazariy usuli paydo bo'ldi, bu hisoblash eksperimentidir, ya'ni real jarayonlarni hisoblash matematikasi vositasida tadqiq etishdan foydalaniladi. Hisoblash eksperimenti to'g'risida batafsil to'xtalamiz. Biror bir fizik jarayonni hisoblash eksperimenti yordamida tadqiq etish lozim bo'lsin. Hisoblash eksperimenti bitta bosqichdan iborat bo'ladi.

Birinchi bosqich – masalani matematik talqin qilish yoki matematik modelni tanlash. Bungacha fizik yaqinlashish tanlanadi, ya'ni qanday faktorlarni hisobga olish, qandaylaridan voz kechish kerakligi aniqlanadi. Fizik yaqinlashishni tanlash bilan fizika sohasidagi mutaxassislar shug'ullanadi. Matematik modelda birguruh izlanayotgan va bir guruh berilgan miqdorlar ko'rsatiladi: ular orasida bog'liqlik mavjud, ya'ni, tenglamalar (algebraik yoki differensial) mavjud, ularni barcha zaruriy ma'lumotlar (tenglamaning koeffitsiyentlari, boshlang'ich va chegaraviy shartlar) bilan yozish, bu matematik modelni tanlashdan iborat. Fizikadagi matematik modellarni o'rganish bilan matematik fizika shug'ullanadi. Matematik fizika

tenglamalari asosan xususiy hosilali differensial tenglamalar, xuddi shuningdek integral va integro-differensial tenglamalardan iborat bo‘ladi. Bu tenglamalar odatda, asosiy fizik miqdorlarning saqlanish qonunlarini ifodalaydi (energiya, harakat miqdori, massa va boshqalar) va ular odatda, chiziqli bo‘lmagan tenglamalardan iborat bo‘ladi.

Jarayonni tavsiflovchi tenglamalar yozilgandan keyin, hosil bo‘lgan matematik modelni differensial va integral tenglamalar umumiy nazariyasi metodlari yordamida tadqiq etish lozim. Bunda masala to‘g‘ri qo‘yilganligini, berilganlarning yetarli ekanligi, ularning bir-biriga zid emasligi, masalaning yechilishi va yagona yechimga ega bo‘lishi shartlarini aniqlash, masala yechimini oshkor ko‘rinishda yozish mumkin ekanligi, xususiy yechimni tuzish mumkinli ekanligini aniqlashga to‘g‘ri keladi. Xususiy yechim fizik jarayon to‘g‘risida dastlabki ma’lumot olish, xuddi shuningdek, sonli metodlarning sifatini tekshirish uchun test o‘tkazishda muhim ahamiyatga ega.

Ikkinchi bosqich- masalani yechish uchun taqribiy (sonli) metodni qurush, hisoblash algoritmini yozish;

Uchinchi bosqich-hisoblash algoritmi uchun kompyuter dasturini tuzish;

To‘rtinchi bosqich-kompyuterda sonli hisoblashlar o‘tkazish;

Beshinchi bosqich-olingan sonli natijalarni tahlil qilish va matematik modelni aniqlashtirish.

Ba’zan shunday bo‘ladiki, matematik model juda qo‘pol-hisoblash natijalari fizik eksperimenti natijalariga mos tushmasligi mumkin yoki model o‘ta murakkab bo‘lishi, ayni paytda yechimini yetarlicha aniqlikda ancha sodda modellar yordamida olish mumkin. Bunday holda ya’ni hisoblash eksperimentining birinchi bosqichiga o‘tiladi va barcha bosqichlar takrorlanadi va hokazo.

Yuqorida fizik masalalarni nazariy tadqiq etishda hisoblash eksperimenti bosqichlari ko‘rsatildi. Bunda chap murakkab matematik modellarni qo‘llagan holda yangi nazariy tadqiq etish metodi to‘g‘risida borayapti.

Birinchi bosqichda matematik fizikasining klassik metodlari qo'llaniladi. Shuni ta'kidlash lozimki, ko'pgina masalalar fizikaning shunday matematik modellariga olib keladiki, ular uchun nazariya ishlab chiqish boshlang'ich holatda turibdi. Amaliyotda matematik fizikaning shunday chiziqli bo'lmagan masalalarni yechishga to'g'ri keladiki, ular uchun mavjudlik va yagonalik teoremlari isbotlanmagan ham.

Matematik fizika masalalarini sonli yechishda odatda chekli ayirmali metodlar yoki to'r metodidan foydalaniladi. Ushbu metod xususiy hosilali differensial tenglama yechimini topishni algebraik tenglamalar sistemasi yechimini topishga keltiradi.

Tipik matematik fizika masalalarini sonli yechishda ayirmali sxemalar nazariyasidan foydalaniladi. Sonli metodlar nazariyasida ikkita bosh masala mavjud:

Matematik fizika tenglamalarining diskret (ayirmali) approksimatsiyalarini tuzish va ushbu approksimatsiyalarining sifatliy karakteristikalarini tadqiq etish, bu o'z navbatida avvalambor, ayirmali sxemalarning approksimatsi xatoligi, turg'unligi va u bilan bog'liq bo'lgan aniqligini o'rganishga olib keladi;

Ayirmali tenglamalarni hisoblash algoritmining tejamliylik nuqtay-nazaridan to'g'ri yoki iteratsiya metodlari yordamida yechish.

Sonli metodlarning xarakterli xususiyati ularning-variantliligidir. Har bir tenglamaga cheksiz ko'p ayirmali approksimatsiyalarni mos qo'yish mumkinki, ular aynan bir xil asimptotik (ya'ni, to'r qadami ga nisbatan tartibga) xarakteristikalariga (aynan bir xil aniqlik, aynan bir xil xajmdagi hisoblashlar va hokazo) ga ega bo'ladi. Ana shu sababli, matematik fizika tenglamalari uchun juda ko'p sonli ayirmali sxemalar paydo bo'ladi.

Tabiiyki, shunday eng yaxshi metodni topish lozimki, u kam kompyuter vaqti sarflagan holda izlanayotgan yechimni berilgan aniqlikda topishga imkon bersin. Ana shunday sonli metodlarni yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan to'plamdan tanlab olish, ayirmali sxemalar nazariyasining asosiy maqsadi bo'lib hisoblanadi.

Eng yaxshi (optimal) metodni izlash uchun (uni tanlash yechilayotgan masala sinfiga bog'liq bo'ladi) yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan metodlar to'plamini, qo'shimcha talablar kiritish orqali toraytiriladi, bunday talablar sifatida approksimatsiya, turg'unlik, tejamlilik va boshqalar qaraladi. Bunda quyidagi umumiy talab muhim rol o'ynaydi: ayirmali sxema (diskret model) dastlabki differensial tenglamaning xususiyatlarini imkon qadar yaxshi modellashtirsin.

Amaliyot uchun berilgan sifatga ega bo'lgan ayirmali sxemani olish uchun umumiy prinsiplar, evristik usul va qoidalarni bayon qilish zarur. Bunday prinsiplar sifatida birjinslilik (aynan bir xillik) prinsipi va ayirmali sxemaning konservativligini ko'rsatish mumkin. Ayirmali sxemaning konservativligi, uning birorta saqlanish qonunini (balans tenglamasini) to'rda ifodalanishni anglatadi. Birjinsli sxemaning konservativligi statsionar va nostatsionar matematik fizika masalalari yechimining uzlukli koeffitsiyentli sinflarda yaqinlashishi uchun zaruriy shart bo'lib hisoblanadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida»gi farmoni, 2017 yil 20 apreldagi PQ-2909-son «Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi, 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida»gi va 2020 yil 6 oktabrdagi PQ-4851-son «Axborot texnologiyalari sohasida ta'lim tizimini yanada takomillashtirish, ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish va ularni IT-industriya bilan integratsiya qilish chora-tadbirlari to'g'risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi:

Ko'pgina amaliy xarakterdagi masalalar nohiziqli differensial tenglamalarga olib keladi . Bunday tenglamalarning yechimini topish uchun o'ziga xos yondashish talab qilinadi . Dissertatsiyada nohiziqli tenglamalarni yechish metodlari, algoritmlari va kompyuter dasturini ishlab chiqish ko'zda tutilgan. Nohiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini sonli modellashtirish muammosining qo'yilganligi ishning dolzarbligidan dalolat beradi.

Tadqiqot obyekti va predmetining belgilanish:

Dissertatsiyada tadqiqot obyekti sifatida nohiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi va gazlar dinamikasi tenglamalari qaralgan. Ishning predmeti nohiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi ayirmali sxemalar yordamida approksimatsiyalab, chiziqli bo'lmagan ayirmali masalalarga kelish, ularni yechish uchun oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to'r metodlaridan foydalanishdan iborat.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari:

Tadqiqotning asosiy maqsadi Nohiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini sonli yechishdan iborat bo'lib quyidagi, vazifalarni bajarish ko'zda tutilgan:

-Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun statsionar xolda differensial masalani qo'yish va xususiy holda ba'zi analitik yechimlarni topish;

-Kvazichiziqli issiqlik o'tkalarlazuvchanlik tenglamasi uchun ayirmali sxemalarni tuzish yechish algoritmlarini ishlab chiqish;

-Nohiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini ayirmali sxemalar bilan approksimatsiyalash, ayirmali sxemalarni oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to'r metodlari bilan yechish algoritmini ishlab chiqish;

-Matlab Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, hisoblash natijalari hamda grafiklarini taqqoslash.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

Nochiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarni yechish metodlarini chuqur tahlil etgan holda chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarini ayirmali hamda spektral-to'r metodlarini birgalikda qo'llab sonli yechish algoritmlarini chiqarish, Matlab Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, sonli hisoblashlar o'tkazish orqali hisoblash taqqoslash, amaliy masalalarni yechishda hisoblash eksperimenti bosqichlarini to'liq o'tkazish ko'nikmalarni egallashdan iborat.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari:

Tadqiqotda asosiy masala Nochiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini ayirmali sxemalar bilan approksimatsiyalash, ayirmali sxemalarni oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to'r metodlari bilan yechish algoritmini, kompyuter dasturini yaratish, kompyuterda sonli hisoblashlar o'tkazishdan iborat, tadqiqotda farazlarga asoslanilmagan.

Mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar tahlili:

Mavzuga oid adabiyotlarda amaliy matematika va axborot texnologiyalari sohasidagi yirik olimlarning quydagi asarlaridan foydalanildi:

1)Н.Н.Яненко, Б.Л.Режественский Системы квазилинейных уравнений

2)А.А.Самарский , Ю.П.Попов Разностные схемы газовой динамики

3)А.А.Самарский Теория разностных схем

Ushbu adabiyotlarda keltirilgan nochiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarini yechish metodlari tahlil qilindi, hamda aniq ko'rinishda berilgan chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini chiziqli bo'lmagan ayirmali sxemalar yordamida approksimatsiyalash, ayirmali sxemaga oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to'r metodlarini qo'llab, uni yechish algoritmi ishlab chiqildi, Matlab

Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzib sonli hisoblashlar o'tkazildi.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslublarning qisqacha tavsifi:

Tadqiqotda nochiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarini approksimatsiyalash uchun chiziqli bo'lmagan ayirmali sxemalar tatbiq etilgan, ayirmali sxemalarni yechish uchun progonka metodi qo'llanilgan, hamda spektral-to'r metodi yordamida sonli hisoblashlar olib borilgan.

Tadqiqot natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati:

Nochiziqli koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarini yechishga aynan bir vaqtda uchta metodni (oshkor va oshkormas hamda spektral-to'r) qo'llash ayirmali sxemalarni nazariy tahlil qilish, iteratsiya metodlarining yaqinlashishini aniqlash ishning nazariy ahamiyatini bildiradi. chiziqli bo'lmagan masalaga ayirmali, oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to'r metodlarini qo'llab yechish algoritmlarini chiqarish, Matlab Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, sonli hisoblashlar o'tkazish orqali hisoblash eksperimentining barcha bosqichlarini to'laqonli namoyish etish tadqiqotning amaliy ahamiyatini ko'rsatadi.

Dissertatsiya tarkibining qisqacha tavsifi:

Kirish qismida mavzuning dolzarbligi yoritilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobida kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini sonli yechish metodlari, kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari bo'yicha olib borilgan ishlar tahlili, differensial masala qo'yilgan, masalaning ba'zi analitik yechimlari olingan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Nyuton metodi, oshkormas sxemalar, spektral-to'r metodlari, ayirmali sxemalar keltirilgan, temperaturaviy to'lqinlarni hisoblash masalalari yoritilgan .

Uchinchi bobida Kvazichizikli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini sonli modellashtirishda chizikli bo'lmagan differensial masalaning qo'yilishi, ayirmali sxemalar, oshkormas sxema hamda spektral-to'r metodlari bilan yechish, metodlarini birgalikda qo'llash algoritmi chiqarilgan, Amaliy dasturlar paketi Matlab va C++ dasturlash tillarida dasturlar tuzilib sonli hisoblashlar o'tkazilgan Hisoblash natijalari o'zaro taqqoslangan.

Dissertatsiyada kirish, uchta bob, o'nta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxati keltirilgan. Dissertatsiyaning hajmi 76 betni tashkil etadi.

I-BOB. KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK MASALASINI SONLI YECHISH METODLARI.

1.1-§. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalari bo‘yicha olib borilgan ilmiy ishlar tahlili.

Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini sonli yechishga mo‘ljalangan ayirmali metodlar akademik A.A. Самарский va uning shogirdlari tomonidan yaratilgan. Xuddi shuningdek, bunday metodlar akademik Н.Н.Яненко va uning ilmiy maktabi olimlari tomonidan ishlab chiqilgan.

Ushbu olimlarning ishlarida kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasining ayrim xususiy yechimlari tuzilgan, yuguruvchi to‘lqinlar ko‘rinishidagi yechimlar uchun analitik formulalar hamda issiqlik oqimini tavsiflovchi formulalar chiqarilgan. Ushbu yechimlarni maxsus hollarda, masalan boshlang‘ich temperatura nolga teng bo‘lganda va maxsus chegaraviy rejim tanlanganda tuzish imkoniyatlari mavjud ekanligi ko‘rsatilgan. Issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsientining chiziqli emasligi, yangi fizik effektlarga olib kelish mumkinligi, ular orasida eng asosiysi-issiqlikning chekli tezlik bilan tarqalishidan iborat ekanligi yuqorida keltirilgan ishlarda ta’kidlab o‘tilgan. Ularda kvazichiziqli masalalarni sonli yechishda ayirmali metodlarning iteratsiyaga asoslangan variantlaridan foydalanish maqsadga muvofiq ekanligi keltirilgan.

Xuddi shuningdek, kvazichiziqli masalalarning yechimlarini tadqiq etishga bag‘ishlangan bir qator ilmiy-tadqiqot ishlari mavjud. Ularning tahliliga to‘xtalib o‘tamiz. Maqolada boshlang‘ich nolga teng energiyali kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi yechimidagi uzilishi (portlash) to‘g‘risidagi ma’lumotlar berilgan. Kvazichiziqli parabolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning qo‘yilishi ishda keltirilgan. Kvazichiziqli parabolik tenglamalar sinfi uchun boshqarishining sezgirmas elementlari haqidagi ma’lumotlarda bayon qilingan. Chiziqli bo‘lmagan chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli masalalar yechimlarining asimptotik avtomodel tabiati ishda tadqiq etilgan.

Maqolada kvazichiziqli parabolik masalalarning juda kuchsiz yechimlari uchun chegaraviy yuqori integrallanuvchanlikka oid tadqiqot natijalari bayon etilgan.

Kvazichiziqli parabolik masalalar yechimlari chegaralanganligining asoslanishi maqolada berilgan. Singulyar soʻndiruvchi hadga ega boʻlgan kvazichiziqli masala yechimining toʻliq soʻnishiga bagʻishlangan tadqiqotlarda keltirilgan.

Birinchi tartibli hadlar bilan bogʻliq ravishda chiziqlimaslikka ega boʻlgan kvazichiziqli parabolik masalalar kuchsiz yechimlarining global mavjudligi ishda qaralgan.

Fazoviy yutilishlarga ega boʻlgan chiziqli boʻlmagan issiqlik oʻtkazuvchanlik jarayoni matematik modeli tadqiq etilgan. Bir qator fizik tabiatga ega masalalar: chiziqli boʻlmagan kvant mexanikasi, chiziqli boʻlmagan elektrodinamika va optika, chiziqli boʻlmagan plazmalar nazariyasi, chiziqli boʻlmagan akustika, chiziqli boʻlmagan issiqlik oʻtkazuvchanlik xususiy hosilali chiziqli boʻlmagan differensial tenglamalarga olib kelishi taʼkidlangan. Chiziqsiz issiqlik oʻtkazuvchanlik matematik modelining turli modifikatsiyalariga oid maʼlumotlar maqolada keltirilgan. Kinetik nazariyaga asosan issiqlikning chekli tezlik bilan tarqalishi jarayoni oʻrganilgan. Ushbu muammo bilan taqsimot funksiyasining muvozanatga erishish chekli vaqti oʻrtasidagi oʻzaro bogʻliqlik oʻrnatilgan. Issiqlik uzatish, maydonlar nazariyasi masalalari va qisilmaydigan suyuqlik oqimlarini chekli elementlar usuli bilan tadqiq etishi masalalarida keltirilgan. Ushbu tadqiqot ishida aksariyat hollarda chekli elementlar usulining qattiq jismlar va konstruksiyalardagi kuchlanishlarni hisoblashga oid masalalarni yechishga tadbiiq etilganligi, ammo, hozirgi vaqtda chekli elementlar usuli issiqlik uzatish nazariyasi, maydonlar nazariyasi va suyuqliklar oqimi masalalarini yechishda keng miqyosda qoʻllanilayotganligi xususida toʻxtalib oʻtilgan. Darslikda statsionar maydonlar (issiqlik oʻtkazuvchanlik, elektrik potensial suyuqliklar oqimi va boshqalar) haqidagi masalalar qaralgan. Unda muhandislik amaliyotida uchraydigan bir qancha masalalar: issiqlik oʻtkazuvchanlik, gʻovak muhitlar orqali filtratsiya, ideal suyuqliklarning uyurmasiz oqimi, elektrik (yoki

magnit) potensialining taqsimlanishi, prizmasimon sterjenlarning buralishi, prizmasimon balkalarning egilishi, tayanch sirtlarning moylanishi va boshqalar keltirilgan. Gradient nochiziqlikka ega bo'lgan chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik masalasining yechimi asimtotikasiga oid tadqiqot natijalari bayon qilingan.

Yuqorida keltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari tahlilidan ko'rinadiki, kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini yechishda qo'llaniladigan asosiy metod bu chekli ayirmali metodlardan iborat. Shu sababli, chekli ayirmali metodlarga muqobil bo'lgan yuqori aniqlik va samaradorlikni ta'minlaydigan metodlar yaratish bo'yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borish zaruriyati paydo bo'ladi. Bu o'z navbatida kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasining ayirmali metodlar bilan olingan yechimi tabiatini o'rganishida yechimni taqqoslash matematik apparati sifatida o'ta muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

1.2-§. Statsionar masala

Chiziqli bo'lmagan issiqlik manbalariga ega bo'lgan statsionar tenglamani bir jinsli chegaraviy shartlari bilan qaraylik.

$$u''(x) = -f(u), 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (1.2)$$

Kesma $0 \leq x \leq 1$ da ayirmali to'r kiritamiz.

$\bar{\omega} = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1\}$ va differensial masala (1.1)-(1.2)ga mos kelgan ayirmali masalani yozamiz

$$y_{\bar{x}\bar{x}} = -f(y), \quad x = ih, i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (1.3)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad (1.4)$$

bunda $y_{\bar{x}\bar{x}} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2$ - ayirmali operator.

Ayirmali sxema (1.3)-(1.4)ning approksimatsiya xatosini hisoblaymiz, ayirmali chegaraviy shartlar (1.4) differensial masala chegaraviy shartlari (1.2)ni aniq approksimatsiyalagani uchun, faqat ayirmali tenglama (1.3)ning approksimatsiyasi xatoligini hisoblash yetarli. Ayirmali masala (1.3)-(1.4)ning yechimi y_i va differensial masala (1.1)-(1.2)ning yechimi u_i orasidagi ayirma

$$z = y - u$$

ni qaraymiz. Bundan $y = z + u$ ni (1.3)-(1.4)ga qo'yamiz

$$z_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{x}\bar{x}} = -f(z + u), i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.5)$$

$$z_0 = z_N = 0$$

Endi $f(z + u)$ funksiyani z atrofida Teylor qatoriga yoyamiz va yoyilmada chiziqli hadlar bilan chegaralanamiz

$$f(z + u) = f(u) + f'(\bar{y}) \cdot z, \quad (1.6)$$

bu yerda $\bar{y} = u + \theta z, 0 \leq \theta \leq 1$.

munosabat (6)ni (5)ga qo'yamiz

$$z_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{x}\bar{x}} = -[f(u) + f'(\bar{y}) \cdot z]$$

bundan

$$z_{\bar{x}\bar{x}} + f'(\bar{y}) \cdot z = -\psi, x = ih, i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (1.7)$$

$$z_0 = z_N = 0. \quad (1.8)$$

ayirmali masalaga kelamiz, bu yerda

$\psi = u_{\bar{x}\bar{x}} + f(u)$ – mos tushmaslik ma'lumki ayirmali sxema (3) ikkinchi

tartibli approksimatsiyaga ega

$$\psi = O(h^2).$$

Agar $f'(y) \leq 0$ bo'lsa u holda ayirmali masala (7)ning yechimi uchun ushbu baho o'rinli

$$\|z\|_c \leq \|\psi\|_c. \quad (1.9)$$

Masala (3)ning yechimi chegaralangan va uning uchun ushbu baho o'rinli

$$\|y\|_c \leq |f(0)| = c_0, \quad (1.10)$$

agarda $f'(y) \leq 0$ bo'lsa,

bunda $\|\cdot\|_c$ – uzluksiz funksiyalar fazosidagi norma deb tushuniladi .

Haqiqatdan ham

$$f(y) = f(0) + (f(y) - f(0)) = f(0) + f'(\bar{y}) \cdot y,$$

bu yerda

$$\bar{y} = \theta y, 0 \leq \theta \leq 1.$$

bundan

$$y_{\bar{x}\bar{x}} + f'(\bar{y}) \cdot y = -f(0),$$

$$y_0 = y_N = 0$$

Ushbu masala yechimi uchun (1.9)ga ko'ra, munosabat (1.10) o'rinli bo'ladi.

Chiziqli bo'lmagan ayirmali masala (1.3)ni yechish uchun Nyuton metodini qo'llash mumkin.

$$y_{\bar{x}\bar{x}}^{k+1} + f'(y)^k (y - y^k) = -f(y)^k$$

Bunda k-iteratsiya nomeri, $k = 0, 1, 2, \dots$. Bundan y^{k+1} ni topish uchun uch nuqtali chiziqli ayirmali masalaga yega bo'lamiz

$$y_{\bar{x}\bar{x}}^{k+1} + f'(y)^k y^{k+1} = -(f(y)^k - f'(y)^k y), \quad (1.11)$$

$$y_0^{k+1} = y_N^{k+1} = 0$$

bu masala progonka metodi bilan yechiladi va metod $f'(y) \leq 0$ bo'lganda turg'un bo'ladi.

Haqiqatdan ham

$$\frac{y_{i-1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f'(y)^k y_i^{k+1} = -(f(y_i)^k - f'(y_i)^k y_i)$$

ekanligini ko'rish mumkin, bundan

$$y_{i-1}^{k+1} - (2 - h^2 f'(y)^k) y_i^{k+1} + y_{i+1}^{k+1} = -h^2 (f(y_i)^k - f'(y_i)^k y_i)$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglamani uch nuqtali sxemalarning kanonik ko'rinishi

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$$

bilan taqqoslasak

$$A_i = B_i = 1, C_i = 2 - h^2 \cdot f'(y)^k,$$

$$F_i = h^2 (f(y_i)^k - f'(y_i)^k y_i)$$

bo'lishini ko'ramiz . Progonka metodi turg'un bo'ladi, agarda

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$$

bo'lsa, bu o'z navbatida $f'(y) \leq 0$ bo'lganda bajariladi.

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \alpha_1 = 0, i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \beta_1 = 0, i = 1, 2, \dots, N-1 \\ y_N^{k+1} = 0, \\ y_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^{k+1} y_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^{k+1}, i = N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0 \end{cases}$$

Endi progonka metodi orqali topilgan iteratsiyalarning yaqinlashish tezligini baholaymiz. Ushbu ayirmani

$$\mathcal{G} = y - y^{k+1}$$

kiritamiz bu yerda $y - y^{k+1}$ ayirmali masala (1.3)ning aniq yechimi. So'ngra

$y = y^k + \mathcal{G}$, $y = y^{k+1} + \mathcal{G}$ ni (1.11)ga qo'yamiz, hamda \mathcal{G} uchun ushbu

masalaga kelamiz

$$\mathcal{G}_{xx}^{k+1} + f'(y)^k \mathcal{G} = -F^k, \mathcal{G} = \mathcal{G}_N^{k+1} = 0, \quad (1.12)$$

$$F^k = f(y^k) - f(y) + (y - y^k) f'(y)^k. \quad (1.13)$$

So'ngra ushbu yoyilmani e'tiborga olamiz

$$f(y) = f(y^k) + f'(y^k)(y - y^k) + 0,5 f''(\tilde{y}^k)(y - y^k)^2,$$

bu yerda $\tilde{y}^k = y^k + \theta(y - y^k)$, $0 \leq \theta \leq 1$, o'rta qiymat hamda

$$F^k = -\frac{f''(\tilde{y}^k)}{2} \mathcal{G}^2$$

ekanligini aniqlaymiz .Shunday qilib, quydagi masalaning yechimini baholash talab etiladi.

$$\mathcal{G}_{xx}^{k+1} + f'(y)^k \mathcal{G} = 0,5 f''(\tilde{y}^k) \mathcal{G}^2, \mathcal{G}_0^{k+1} = \mathcal{G}_N^{k+1} = 0. \quad (1.14)$$

Agar $f(y) - f(y^k)$ botiq funksiya bo'lsa ,ya'ni

$$f''(y) \geq 0$$

u holda maksimumlik prinsipiga asosan

$$\mathcal{G} = y^{k+1} - y \leq 0, \quad y \leq y$$

bo'ladi, ya'ni iteratsiyalar (ketma – ket yaqinlashishlar) ayirmali masala (1.3)ning yechimiga quydagi yaqinlashadi.

Masala (14)ning yechimi uchun quydagi baho o'rinli

$$\|\mathcal{G}^{k+1}\|_c \leq 0,5 \|f''(y)^k\|_c \cdot \|\mathcal{G}^k\|_c^2, \quad (1.15)$$

yoki

$$\|\mathcal{G}^{k+1}\|_c \leq q \|\mathcal{G}^k\|_c^2,$$

agar

$$\|f''(y)\|_c \leq 16q.$$

Haqiqatdan ham, maksimum prinsipiga asosan masala (1.14) $f''(y) \leq 0$ da quydagi majerantaga ega

$$V(x) = Kx(1-x), \quad \|V(x)\|_c \leq \frac{1}{4}K,$$

bu yerda

$$K = \frac{1}{4} \|f''(y)\|_c \cdot \|\mathcal{G}^k\|_c^2$$

bo'lib, o'z navbatida

$$\|\mathcal{G}^k\|_c \leq \|V\|_c \leq \frac{1}{16} \|f''(y)\|_c \|\mathcal{G}^k\|_c^2 = q \|\mathcal{G}^k\|_c^2$$

ekanligi ko'rinadi.

Ushbuni e'tiborga olgan holda

$$\|q\mathcal{G}^{k+1}\|_c \leq \|q\mathcal{G}^k\|_c^2 \leq \dots \leq \|q\mathcal{G}^k\|_c^{2^{k+1}}$$

quydagi tengsizlikni hosil qilamiz.

$$\|\mathcal{G}^{k+1}\|_c \leq \frac{1}{q} \|q\mathcal{G}^k\|_c^{2^{k+1}}$$

ya'ni iteratsiyalar kvadratik qonuniyat bo'yicha yaqinlashadi, agar boshlang'ich yaqinlashish y^0 shunday tanlangan bo'lsa

$$q \| \mathcal{G}^0 \|_c < 1, \text{ ya'ni } q \| y^0 - y \|_c < 1.$$

Agar $f''(y) > -c_1$, $c_1 > 0$ bo'lsa, u holda (1.15) o'rniga to'g'ri fazosi L_2 da boshqa bahoga ega bo'lamiz:

$$\| \mathcal{G}^{k+1} \| \leq \frac{\| f''(y) \|_c}{2(\delta + c_2)} \cdot \| \mathcal{G}^k \|^2 \leq \frac{q_1}{\delta + c_1} \| \mathcal{G}^k \|^2, \quad (1.16)$$

bunda

$$\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad q_1 = 0,5 \| f''(y) \|_c.$$

1.3-§. Differensial masalaning qo'yilishi

Yuqori haroratli jarayonlarda, masalan plazmada sodir bo'ladigan jarayonda, issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti temperaturaning (va zichligining) chiziqli bo'lmagan funksiyalari bo'ladi, hamda bir qator masalalarda temperatura gradiyentining funksiyasi bo'ladi. So'ngra issiqlik manbalari (issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining o'ng tomoni) temperaturadan bog'liq bo'ladi, agarda, issiqlik kimyoviy reaksiya natijasida ajralib chiqayotgan bo'lsa, xuddi shuningdek, muhitning issiqlik sig'imi ham temperaturadan bog'liq bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga kelamiz

$$\frac{\partial \varepsilon(x, t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + f(x, t, u), \quad (1.17)$$

bunda issiqlik oqimi

$$\omega = \omega(x, t, u, \frac{\partial \omega}{\partial x})$$

temperatura va uning hosilasining chiziqli bo‘lmagan funksiyasi bo‘ladi.

Agarda issiqlik oqimi $\frac{\partial u}{\partial x}$ hosiladan chiziqli bog‘liq bo‘lsa va Furrye qonuni bajarilsa

$$\omega = -k(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

bo‘ladi, hamda biz kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga yega bo‘lamiz:

$$c(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x,t,u), \quad (1.18)$$

Bu holda issiqlik sig‘imi s issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsenti κ va o‘ng tomon f (issiqlik manbalarining zichligi) temperatura $u(x,t)$ ga bog‘liq bo‘ladi. Birjinsli bo‘lmagan muhitda k, c, f , funksiyalar x va t bo‘yicha uzilishga ega bo‘lishi mumkin (chunki har xil moddalar uchun k, c, f , ning temperatura u dan bog‘liqligi har xil bo‘ladi).

Ko‘pincha $k = k(u)$, $c = c(u)$, $f = f(u)$. funksiyalar faqat temperatura u dan bog‘liq bo‘ladi:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (g(u) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(u). \quad (1.19)$$

Endi yangi o‘zgaruvchi kiritsak

$$g = \int_0^u k(\xi) d\xi, \quad \varphi(g) = \int_0^u c(\xi) d\xi$$

tenglama (19)ni ushbu ko‘rinishga keltiramiz

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \bar{f}(g)$$

chunki

$$\frac{\partial g}{\partial x} = k(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

bo‘ladi, bunda

$$\int_0^g x(\mathcal{G})d\mathcal{G} = \int_0^u k(u)du .$$

Ko‘pincha $c(u)$ va $k(u)$ temperaturaning darajali funksiyalari bo‘ladi.

$$c(u) = c_0 u^\alpha , \quad k = k_0 u^\beta .$$

Bunday holda

$$\mathcal{G} = \int_0^u c(\xi)d\xi = c_0 \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} .$$

bo‘ladi, hamda ushbuni e‘tiborga olgan holda

$$k \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{c_0 u^\alpha} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} u^{\beta-\alpha} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} \left(\frac{\alpha+1}{c_0} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} \mathcal{G}^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial c}$$

tenglama (19)ni ushbu ko‘rinishga keltiramiz

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x_0 \mathcal{G}^\alpha \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}) + \tilde{f}(\mathcal{G}), \quad \delta = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+1} .$$

Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun differensial masala qo‘yamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (x_0 u^\delta \frac{\partial u}{\partial x}), \quad x_0 > 0, \delta > 0, x > 0 \quad (1.15)$$

$x = 0$ da temperatura

$$u = u_0 t^n \quad (1.16)$$

berilgan va tenglama (1.15)ning $x > 0, t > 0$ sohadagi yechimini topish talab qilinadi, bunda boshlang‘ich tempera tura nolga teng deb faraz qilinadi.

$$u(x,0) = 0 \quad (1.17)$$

Masalaning yyechimini yugiruvchi to‘lqinlar ko‘rinishida izlaymiz,

$$u(x,t) = v(Dt - x), \quad D = const,$$

bu yerda $v(\xi)$ – no‘malum funksiya .Ushbu ifodani (1.15)ga qo‘yib, quydagilarni hisobga olsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{dv}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{dv}{d\xi}$$

$v(\xi)$ funksiya uchun oddiy differensial tenglamaga kelimiz

$$Dv' = (x_0 v^\delta v')'$$

Bundan

$$x_0 v^\delta v' = Dv + const$$

yekanligini topamiz.

Endi $const = 0$ deb hisoblab

$$x_0 = v^\delta v = Dv$$

yoki

$$\frac{x_0 (v^\delta)'}{D\delta} = 1$$

ga ega bo'lamiz. Yana bir marta integrallab

$$\frac{x_0}{D\delta} v^\delta = \xi + c_0$$

yekanini ko'ramiz. Chunki $v = 0$ agar $t = x = 0$ ($\xi = 0$) da, u holda $c_0 = 0$ bo'ladi.

$$u = v(\xi) = \left(\frac{D\delta}{x_0}\right)^{1/\delta} = \left(\frac{D^2\delta}{x_0}\right)^{1/\delta} \cdot t^{1/\delta} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{1/\delta}.$$

Bundan $x = 0$ da

$$u(0, t) = \left(\frac{D^2\delta}{x_0}\right)^{1/\delta} \cdot t^{1/\delta}$$

ekani kelib chiqadi.

Buni (1.16) bilan taqqoslab

$$n = \frac{1}{\delta}, \quad \frac{D^2\delta}{x_0} = u_0^\delta$$

ni topamiz.

Shunday qilib, masala (1.15)-(1.17) yugiruvchi to'lqin ko'rinishdagi yechimga yega

$$u(x, t) = u_0 t^{1/\delta} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{1/\delta} = \frac{u_0}{D^{1/\delta}} (Dt - x)^{1/\delta} \quad 0 \leq x \leq Dt, \quad (1.18)$$

$$u(x, t) = 0 \quad x \geq Dt,$$

agarda $n = 1/\delta$ shart bajarilsa bu holda to‘lqin tezligi x_0, δ va u_0 parametrlar bilan aniqlanadi .

$$D = \sqrt{\frac{x_0 u_0^\delta}{\delta}}$$

va u chekli bo‘ladi.

Formula (1.18) ko‘rinishidagi yechim temperaturaviy to‘lqin deyiladi.

Issiqlik oqimini topamiz

$$\omega = -x_0 u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} = x_0 \frac{u_0^\delta}{\delta D^{1+1/\delta}} (Dt - x)^{1/\delta} = x_0 u_0^\delta / (\delta D) u(x, t) .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, temperaturaviy to‘lqin fronti $x = Dt$ da temperatura va issiqlik oqimi nolga teng bo‘ladi agar $\delta > 0$ da, hosila

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{\delta D^{1/\delta}} \frac{1}{(Dt - x)^{1-1/\delta}}$$

cheksizlikka aylanadi $\delta > 1$ da , chekli $\delta = 1$ da va nolga teng bo‘ladi $0 < \delta < 1$ da .Shu sababli, $\delta > 1$ da issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining faqat umumlashgan yechimlari haqida gapirish mumkin.

Chekli tezlik D formatiga ega bo‘lishining asosiy sababi-issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentining temperaturadan chiziqli bog‘liq bo‘lmaganidir. D uchun formuladan ko‘rish mumkinki, $\delta = 0$ bo‘lganda formal ravishda $D = \infty$ ga ega bo‘lamiz ya’ni issiqlik tarqalish tezligi cheksiz.

Ba’zan temperaturaviy frent qo‘zg‘almas bo‘lgan hol, ya’ni $D = 0$ bo‘lishi mumkin . Bunday yechim maxsus chegaraviy rejimda mavjud bo‘ladi.

$$u(0, t) = u_0 \frac{1}{(t_0 - t)^{1/\delta}} \quad (1.19)$$

bu yerda t_0 – ixtiyoriy o‘zgarimas agar boshlang‘ich shart $t = -\infty$ da berilgan deb faraz qilsak

$$u(x, -\infty) = 0 \quad (1.20)$$

Tenglama (1.15)ning yechimini o‘zgaruvchilarini ajratish metod bilan izlaymiz, bunda

$$u(x,t) = \mathcal{G}(x)T(t)$$

deb hisoblaymiz.

Ushbu ifodani (1.15)ga qo'yib, o'zgaruvchilarni ajratsak.

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dx} \left(x_0 \nu^\delta \frac{d\nu}{dx} \right) = \frac{1}{T^{\delta+1}} \frac{dT}{dt} = \lambda,$$

ni hosil qilamiz, bu yerda λ – ajratish parametri .Bundan o'z navbatida quydagi ikkita tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{d}{dx} \left(x_0 \nu^\delta \frac{d\nu}{dx} \right) - \lambda \nu = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T^{\delta+1} \quad (1.22)$$

Tenglama (1.21)ning yechimini quydagi ko'rinishda izlaymiz

$$\mathcal{G}^\delta = \alpha (x_1 - x_2)^\beta,$$

bu yerda α va β -hozirgacha no'malum sonlar, x_1 – ixtiyoriy son. \mathcal{G}^δ ni tenglama (1.21)ga qo'yamiz:

$$x_0 \alpha^{1+\frac{1}{\delta}} \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{\beta}{\delta} + \beta - 1 \right) (x_1 - x)^{\beta/\delta + \beta - 2} - \lambda \alpha^{1/\delta} (x_1 - x)^{\beta/\delta} = 0$$

Bundan

$$\beta = 2, \alpha = \frac{\lambda \delta^2}{2x_0(2 + \delta)}.$$

ekanligini aniqlaymiz.

Endi T uchun tenglama (1.22)ni integrallaymiz.

$$T(t) = [\delta \lambda (c_0 - t)]^{1/\delta},$$

bunda c_0 – integrallash o'zgaruvchisi. Natijada yechim biz quydagi funksiyaga kelamiz.

$$u(x,t) = \nu(x)T(t) = \left(\frac{\alpha}{\delta \lambda} \right)^{1/\delta} \left[\frac{(x_1 - x)^2}{c_0 - t} \right]^{1/\delta}.$$

Chegaraviy shart (1.19) bilan taqqoslasak, quyidagilarni topamiz

$$m = 1/\delta \quad c_0 = t_0 \quad u_0 = \left(\frac{x_1^2 \alpha}{\delta \lambda} \right)^{1/\delta} = \left(\frac{x_1^2 \delta}{2x_0(\delta + 2)} \right)^{1/\delta}$$

va o'z navbatida

$$x_1^2 = 2x_0(\delta + 2)u_0^{\delta/\delta}$$

Shunday qilib , tenglama (1.15) chegaraviy rejim (1.19) bilan ushbu yechimga ega:

$$u(x, t) = u_0 \left(\frac{1 - x/x_1}{\sqrt{t_0 - t}} \right)^{2/\delta} \quad 0 < x < x_1, \text{ da} \quad (1.23)$$

$$u(x, t) = 0 \quad x > 1 \text{ da}, \quad (1.24)$$

bunda x_1 -isitilish sohasi kengligi. Temperaturaviy to'liqin fronti qo'zg'almas , chunki x_1 -const bo'lib , u vaqt t dan bog'liq emas , u faqat masala parametri x_0, δ, u_0 dan bo'liq. Frontda issiqlik oqimi va temperatura nolga aylanadi $\delta > 0$ da , hosila $\frac{\partial u}{\partial x} = \infty$ bo'ladi $\delta > 2$ da (yuguruvchi to'liqin frontida

$\frac{\partial u}{\partial x} = \infty$ agar $\delta > 1$ bo'lsa).

Yechim (1.23)" turg'un to'liqin" tipida mavjud bo'ladi , agar $t < t_0$ da , u chegaraviy rejim (1.19) tipi bilan bog'liq.

Birinchi bob bo'yicha xulosalar

Birinchi bobdagi asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

Ayirmali sxema hamda spektral-to'r metodlari bo'yicha olib borilgan ilmiy tadqiqot ishlari tahlili keltirilgan.

Tabiatda temperaturaviy jarayonlarni sodir bo'lishi va issiqlik tarqalish tenglamalari hamda boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi keltirib o'tilgan.

Boshlang'ich va chegaraviy masalalarning qo'yilishi. Fazoviy vaqt bo'yicha approksimatsiya shartlari haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan va aniqlangan.

II-BOB. AYIRMALI SXEMA HAMDA SPEKTRAL-TO‘R METODLARI.

Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun ayirmali sxemalarni yozishni ko‘rib o‘tamiz . Agarda $k(u), c(u)$ va $f(u)$ temperatura u ning tez o‘zgaruvchi (masalan , darajali) funksiyalar bo‘lsa , bunday hollarda oshkor sxemalardan foydalanish maqsadga muvofiq emas . Oshkor funksiyalarning turg‘unlik sharti

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\min c(u)}{\max k(u)}$$

$k(u), c(u)$ funksiyalarning unchalik ko‘p bo‘lmagan tugunlardagi qiymatlari bilan aniqlanadigan hamda vaqt bo‘yicha juda kichik qadam talab etadi. Shu sababli shartsiz turg‘un bo‘lgan oshkormas sxemalardan foydalaniladi.

2.1-§. Nyuton metodi

Ushbu differensial tenglamani

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad 0 < x < 1 \quad (2.25)$$

quyidagi boshlang‘ich

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

va chegaraviy shartlari bilan qaraylik

$$u(0, t) = \mu_1(t) , \quad u(1, t) = \mu_2(t) .$$

bunda differensial masala (2.25) quyidagi to‘g‘ri to‘tburchakli sohada qaraladi

$$\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1 , 0 \leq t \leq T \} .$$

Qaralayotgan sohada ayirmali to‘r kiritamiz.

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j) \begin{array}{l} x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, h = 1/N \\ t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, M, \tau = T/M \end{array} \right\}$$

Ushbu to‘rda differensial masala (25)ga mos keluvchi hamda y^{j+1} ga nisbatan chiziqli bo‘lmagan quyidagi ayirmali masalani qaraymiz.

$$\frac{\varphi(y^{j+1}) - \varphi(y^j)}{\tau} = y_{\bar{x}\bar{x}}^{j+1}, x = x_i = ih, 0 < i < N, hN = 1. \quad (2.26)$$

Endi $\varphi''(y) \geq c_1 > 0$, $|\varphi''(y)| \leq c_2$ deb faraz qilamiz. Bu holda, ayirmali sxema (26) ning turg'unligi va C fazoda $O(\tau + h^2)$ tezlik bilan ta'minlanadi.

Ayirmali yechim y^{j+1} ni yangi vaqt qatlamida topish uchun ushbu chiziqli bo'lmagan tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\varphi(y^{j+1}) - \tau y_{\bar{x}\bar{x}}^{j+1} = \varphi(y^j).$$

Bu sxemani yechimi uchun Nyuton iteratsiya metodidan foydalanamiz.

$$\varphi^k y + \varphi'(y)(y - y^k) - \tau y_{\bar{x}\bar{x}}^{k+1} = \varphi(y^k) \quad (2.27)$$

Bundan y^{k+1} ni quydagi boshlang'ich

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

va chegaraviy shartlar

$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad y_N^{k+1} = \mu_2(t_{j+1}) \quad (2.28)$$

bilan topish uchun progonka metodidan foydalaniladi, metod

$$\varphi'(y) \geq 0$$

bo'lganda turg'un bo'ladi. Bunga ayirmali sxema (2.27)ni progonka metodi bilan yechiladigan standart ko'rinishga keltirib ishonch hosil qilish mumkin.

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{k+1} - \left(\varphi'(y_i^k) + \frac{2\tau}{h^2} \right) y_i^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{k+1} = F_i^k, \\ i = 1, 2, \dots, N-1,$$

bu yerda

$$F_i^k = \varphi(y_i^k) - \varphi(y_i^k) - \varphi'(y_i^k) y_i^k, y_i = y_i^k.$$

iteratsiyalarning yaqinlashish tezligini baholaymiz. Buning uchun quyidagi ayirmani kiritamiz.

$$\mathcal{G}_i^{k+1} = y_i^{k+1} - \varphi_i^k$$

bu yerda

$$\mathfrak{E}_i = y_i^{j+1}$$

endi tenglama (2.27)ga $y_i^k = \mathfrak{E}_i^k + \mathcal{G}_i^k$, $y_i^{k+1} = \mathfrak{E}_i^{k+1} + \mathcal{G}_i^{k+1}$ ni qo'yib, quydagini hosil qilamiz.

$$\varphi'(y)^k \nu - \tau \nu_{\bar{x}\bar{x}}^{k+1} = \varphi(y)^k - \varphi(y)^k + \varphi'(y)^k \nu + \tau \mathfrak{E}_{\bar{x}\bar{x}}^k = \varphi(\mathfrak{E})^k - \varphi(y)^k + \varphi'(y)^k (y - \mathfrak{E})^k.$$

So'ngra shuni e'tiborga olsak

$$\varphi(\mathfrak{E})^k = \varphi(y)^k + \varphi'(y)^k (\mathfrak{E} - y)^k + 0,5\varphi''(\tilde{y})^k (\mathfrak{E} - y)^2,$$

va o'z navbatida

$$\varphi(\mathfrak{E})^k - \varphi(y)^k + \varphi'(y)^k (y - \mathfrak{E})^k = \varphi''(\tilde{y})^k \nu^2 / 2.$$

bu yerda $\mathfrak{E} = y + \theta \mathcal{G}$, $0 \leq \theta \leq 1$ ekanidan tenglama (2.27)ni quydagi ko'rinishga kelamiz:

$$\begin{aligned} \varphi'(y)^k \nu - \tau \varphi''(\tilde{y})^k \nu^2 / 2 &= F^k, \\ x = ih, \quad 0 < i < N, \end{aligned} \quad (2.29)$$

chegaraviy shartlar birjinsli bo'ladi.

$$\nu_0^{k+1} = 0, \quad \nu_N^{k+1} = 0. \quad (2.30)$$

Maksimumlik pritsipidan foydalanib, ushbu bahoni hosil qilamiz

$$\|\nu\|_c^{k+1} \leq 0,5 \|\varphi''(\tilde{y})^k / \varphi'(y)^k\|_c \|\nu\|_c^2 \leq q \|\nu\|_c^2, \quad (2.31)$$

bu yerda

$$q = 0,5 \|\varphi''(\tilde{y})^k / \varphi'(y)^k\|_c \leq 0,5 \|\varphi''(\tilde{y})^k\|_c / c_1 \leq 0,5c_2 / c_1 = q_0$$

chunki

$$\varphi'(y) \geq c_1 > 0, \quad |\varphi''(y)| \leq c_2.$$

Bundan ko'rinadiki, iteratsiyalarning kvadratik qonuniyat bo'yicha yaqinlashish uchun boshlang'ich yaqinlashishning quyidagi shartini qanoatlantirish yetarlidir.

$$\|y - \mathfrak{E}\|_c^0 < 2c_1 / c_2. \quad (2.32)$$

Agar, masalan, $y = y = y^j$ deb olsak, u holda bu shart quydagini bildiradi

$$\tau \| y_1 \|_c < 2c_1 / c_2$$

va bu shart yetarlicha kichik ε uchun hardim bajariladi .

Nyuton metodini amalda qo'llanganda iteratsiyalar ixtiyoriy berilgan aniqlik bilan yaqinlashadi , agarda

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= y^\alpha, \quad \alpha < 1, \quad \varphi'(y) = \alpha y^{\alpha-1}, \\ \varphi''(y) &= -\alpha(1-\alpha)y^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

bo'lsa .Agar $y \geq 0$ bo'lsa ,ya'ni nolga aylanishi mumkin bo'lsa, u holda $c_2 = \infty$ bo'ladi va yuqoridagi baholardan foydalanib bo'lmaydi .

Qayt etib o'tamizki , ushbu shartdan

$$\varphi''(y) < 0$$

maksimumlik prinsipiga asosan, chegaraviy masala (2.29)-(2.30)ning yechimi manfiy emasligi kelib chiqadi .

$$v = y - \mathfrak{E} \leq 0, \quad y \leq \mathfrak{E},$$

ya'ni ildizga yaqinlashish quyidan sodir bo'ladi . Shu sababli , agar boshlang'ich yaqinlashish $y^0 < \mathfrak{E}$ bo'lsa , u holda birinchi iteratsiya $y^1 < \mathfrak{E}$ bo'ladi . Bunday holda $y^1 < 0$, ya'ni manfiy bo'lib qolishi mumkin , u holda hisoblarni amalda bajarib bo'lmay qoladi.

2.2-§. Oshkormas sxemalar .

Ushbu paragrafda kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

bu yerda

$$k(u) > 0.$$

Differensial masala (2.33) uchun ikkita oshkormas sxemani qaraylik

Sxema a):

$$\frac{\mathfrak{E}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[\alpha_{i+1}(y) \frac{\mathfrak{E}_{i+1} - \mathfrak{E}_i}{h} - \alpha_i(y) \frac{\mathfrak{E}_i - \mathfrak{E}_{i-1}}{h} \right] + f(y_i). \quad (2.34)$$

Sxema b):

$$\frac{\mathfrak{f}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[\alpha_{i+1}(\mathfrak{f}) \frac{\mathfrak{f}_{i+1} - \mathfrak{f}_i}{h} - \alpha_i(\mathfrak{f}) \frac{\mathfrak{f}_i - \mathfrak{f}_{i-1}}{h} \right] + f(\mathfrak{f}_i). \quad (2.35)$$

bu yerda

$$\mathfrak{f}_i = y_i^{j+1}, \quad y_i = y_i^j, \quad a_i(v) = a(v_{i-1}, v_i),$$

masalan ,

$$\alpha_i(v) = 0,5[k(v_{i-1}) + k(v_i)], \quad (2.36)$$

$$\alpha_i(v) = k\left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2}\right), \quad (2.37)$$

$$\alpha_i(v) = \frac{2k(v_{i-1})k(v_i)}{k(v_{i-1}) + k(v_i)} \quad (2.38)$$

Koeffitsenti $\alpha_i(v)$ ni hisoblash formulasiga qarab , temperaturaviy to‘lqinni hisoblash aniqligi o‘zgarib turadi.

O‘tkazilgan sonli eksperimentlar $k(u) = k_0 u^\delta$ temperaturaning darajali funksiyasi bo‘lganda shuni ko‘rsatadiki, $\alpha_i(v)$ uchun formula (2.38)dan foydalanmaslik lozim, formula (2.36) esa aniqligi bo‘yicha formula (2.37) dan aniqligi bo‘yicha yaxshi. Sxema (2.34) va (2.35) ni taqqoslaymiz. Bu sxemalarning approksimatsiya xatosi $\theta(\tau + h^2)$.

Ularning har ikalasi absolyut turg‘un, ya’ni to‘r qadamlari τ va h ixtiyoriy bo‘lganda turg‘un . Sxema a) y^{j+1} ning t_{j+1} qatlamdagi qiymatini topishga nisbatan chiziqli, bunda y^{j+1} ning qiymati y^j ning t_j qatlamdagi ma’lum qiymatiga ko‘ra topiladi, masalan, progonka metodi yordamida. Sxema a) absolyut turg‘un bo‘lganligi uchun to‘r qadami τ faqat aniqlikni ta’minlash nuqtai nazaridan tanlab olinadi. Sxema b) y^{j+1} ni topishga nisbatan chiziqli bo‘lmaganligi uchun uni yechishda iteratsiya metodi qo‘llaniladi . Iteratsiya jarayoni quydagi tarzda tuziladi:

$$\frac{y^{(s+1)} - y^{(s)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[\alpha_{i+1}^{(s)}(y) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - \alpha_i^{(s)}(y) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f(y_i^{(s)}). \quad (2.39)$$

Bunda $y^{(k+1)}$ ni topishga nisbatan ayirmali sxema chiziqli bo'lib hisoblanadi. Boshlang'ich yaqinlashish sifatida y ning oldingi qatlamdagi qiymati olinadi, ya'ni $y^0 = y^j$. Iteratsiya jarayoni, amalyotda ko'p uchraydigan k va f koeffitsentlar uchun yaqinlashuvchi bo'ladi. Amalda ikki yoki uch iteratsiya bajarish yetarlidir. Iteratsiya jarayoni yaqinlashmaydigan bo'lgan hollarda ham aniqlikni oshirish uchun ikkita iteratsiya bajarish foydalidir. Iteratsiya sxemasi (2.35), (2.39) yordamida hisoblashda yoki iteratsiyalar soni yoki iteratsiyalarning yaqinlashish aniqligi ε beriladi va quydagi shartning bajarilishi talab qilinadi.

$$\max_i |y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}| \leq \varepsilon.$$

Sxema (2.35), (2.39) ning kamchiligi shundan iboratki iteratsiyalarni hisoblash sxema a) ga qaraganda ikki marta ko'p kompyuter xotirasi talab qiladi ,chunki

$y^{(k+1)}$ ni hisoblash uchun $y^{(k)}$ va $y^{(k)}$ ni xotirada saqlash lozim y^{j+1} ning qiymatini y^j ning ma'lum qiymatiga ko'ra topish uchun (2.35) , (2.39) sxema bo'yicha bir nechta iteratsiya bajarish lozim sxema a) bo'yicha y^{j+1} darhol topiladi .

Bundan har ikkala sxema absolyut turg'un va bir xil tartibli approksimatsiyaga ega bo'lganligi uchun sxema a) iteratsiya sxemasi b) ga nisbatan afzalik tuyuladi . Ammo , bunday emas .

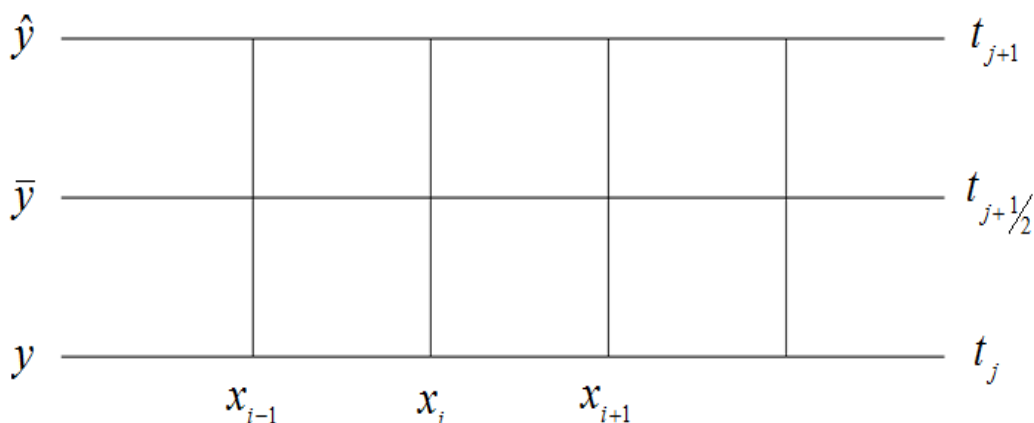
Amaliyot ko'rsatdiki, sxema a) va sxema b) yordamida bir xil aniqlik bilan hisoblashlar o'tkazish uchun sxema b) shunday yirik τ qadamga yo'l qo'yadiki, u iteratsiya talab qilinishiga qaramasdan hisoblash ishlarining keskin kamayishiga olib keladi. x va t bo'yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega bo'lgan sxemadan foydalanish mumkin .

$$y_t = \frac{1}{2}[(\alpha(\bar{y})\bar{y}_{\bar{x}})_x + (\alpha(y)y_{\bar{x}})_x] + f\left(\frac{\bar{y} + y}{2}\right).$$

Ammo, bunday kamchilikka ega, ular –nomoneton, ko‘pincha “xatoliklar” paydo bo‘lishiga olib keladi. Bu sxema yordamida yaxshi natija olish uchun vaqt bo‘yicha yetarlicha kichik qadam tanlash lozim.

Kuchsiz kvazichiziqlikka ega bo‘lgan sxema uchun $k = k(x,t)$, $f = f(u)$, $c = c(x,t)$ bo‘lsa, sxema prediktor –korrektordan foydalanish mumkin, uning aniqligi $\theta(\tau^2 + h^2)$ ga teng.

Endi $c = k = 1$, $f = f(u)$ bo‘lganda shunday sxemani keltiramiz (1-rasm)



$$\begin{aligned} \frac{\bar{y} - y}{0,5\tau} &= \bar{y}_{\bar{x}} + f(y), \quad \bar{y} = y(t_{j+1/2}), \\ \frac{\bar{y} - y}{\tau} &= \frac{1}{2}(\bar{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}) + f(\bar{y}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Biz yuqorida keltirilgan sxemalarni nazariy tadqiq qilishga to‘xtalib o‘tmaymiz. Birinchidan, bu juda yirik hisoblashlarni talab qiladi, ikkinchidan, olinadigan baholar juda qo‘pol (bu, chiziqli bo‘lmagan masalalar uchun odatiy hol) va qaralayotgan ayirmali sxemalarning qo‘llanilish shartlari haqida noto‘g‘ri natijalar va tasavvurlar berishga olib keladi.

Shu sababli qayt etib o‘tamizki, chiziqli bo‘lmagan masalalar uchun sonli metodlarning sifatini tekshirishda testlar o‘tkazish birlamchi ahamiyatga ega, ya’ni, chiziqli bo‘lmagan masalaning xususiy hollarida analitik yechimlar mavjud bo‘lgan masalalarni sonli yechish, ular chiziqli bo‘lmagan masalalar sinfiga mansub va ayirim mulohazalar yuritishga imkon beradi.

2.3-§. Spektral-to‘r metodining turg‘unligi.

Spektral-to‘r metodining nazariy jihatdan asoslanishi va gidrodinamik turg‘unlik muammolariga tadbiiq etilishi ishlarda keltirilgan.

Quyidagi differensial masalani qaraylik:

$$L_0 u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t), \quad -1 < x < 1, t > 0, \quad (2.41)$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad (2.42)$$

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (2.43)$$

Differensial masala (2.41)-(2.43) uchun Grin funksiyasini $G(x,\xi,t)$ orqali belgilaymiz.

Quyidagi funksiya kiritiladi:

$$\psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \quad (2.44)$$

bunda $u(x,t)$ masala (2.41)-(2.43) ning yechimidan iborat, bundan o‘z navbatida

$$u(x,t) = \int_{-1}^1 G(x,\xi,t) \psi(\xi,t) d\xi \quad (2.45)$$

ekanligini ko‘rish mumkin. Ushbu yechimni tenglama (2.41) ga qo‘yib, quyidagi masalaga kelinadi

$$\psi(x,t) - \int_{-1}^1 \frac{\partial G(x,\xi,t)}{\partial t} \psi(\xi,t) d\xi = - \int_{-1}^1 G(x,\xi,t) f(x,t) d\xi.$$

Ushbu belgilashni kiritib

$$\bar{T}(x,\xi,t) = - \frac{\partial G(x,\xi,t)}{\partial t},$$

oxirgi tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\psi(x,t) + \int_{-1}^1 \bar{T}(x,\xi,t)\psi(\xi,t)d\xi = -\int_{-1}^1 G(x,\xi,t)f(x,t)d\xi \quad (2.46)$$

Grin funksiyasi xossalaridan ko‘rinadiki, $\bar{T}(x,\xi,t)$ funksiya $[-1,1] \times [-1,1]$ sohada uzluksiz funksiyadan iborat, uning “dioganali” $x = \xi$ da chekli uzilishga ega [39]. Agarda quyidagi operatorni

$$\bar{\bar{T}}\psi = \int_{-1}^1 \bar{T}(x,\xi,t)\psi(\xi,t)d\xi,$$

va funksiyani

$$F(x,t) = -\int_{-1}^1 G(x,\xi,t)f(\xi,t)d\xi$$

kiritsak, tenglama (2.46) ni ushbu operatorli ko‘rinishida yozish mumkin

$$\psi + \bar{\bar{T}}\psi = F$$

yoki

$$(E + \bar{\bar{T}})\psi = F \quad (2.47)$$

Agarda vektorlar $\Psi(x,t)$ ni tenglama (2.47) ning yechimi bo‘lgan $\psi(x,t)$ funksiyalarni bo‘yicha yuqorida ko‘rsatilgan izomorfizm orqali aniqlab, ya’ni ushbu qoida bo‘yicha

$$\Psi(y,t) = (\psi(x,t)|_{x \in [x_0, x_1]}, \psi(x,t)|_{x \in [x_1, x_2]}, \dots) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M)$$

aniqlab, operator $\bar{\bar{T}}$ va funksiya F ni tenglama (2.47) ga quyidagi qoida bo‘yicha ta’sir etadi deb hisoblab

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \left(\sum_{i=1}^M \bar{T}^i \psi_i(x,t) \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, \sum_{i=1}^M \bar{T}^i \psi_j(x,t) \Big|_{x \in [x_1, x_2]}, \dots \right) = \\
&= \left(\int_{-1}^1 \bar{T}(x, \xi) \psi(\xi, t) d\xi \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, \dots \right) = (\bar{T} \psi, \bar{T} \psi, \dots, \bar{T} \psi), \\
\mathcal{F} &= \left(F_1(x, t) \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, F_2(x, t) \Big|_{x \in [x_1, x_2]}, \dots \right) = \\
&= \left(\int_{-1}^1 G(x, \xi, t) f(\xi, t) d\xi \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, \dots \right) = (Fx, Fx, \dots, Fx),
\end{aligned}$$

u holda tenglama (2.47) ni unga ekvivalent formada quyidagicha yoziladi

$$\Psi + \mathcal{F}\Psi = \mathcal{F}, \mathcal{F} \in L_{2,\rho}^M. \quad (2.48)$$

Differensial masala (2.41)-(2.43) ni spektral-to‘r metodi bilan yechish uchun qaralayotgan $[-1,1]$ kesmada to‘r kiritiladi:

$$-1 = a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M = b = 1$$

bunda M berilgan butun son. Qaralayotgan to‘r teng yoki tengmas oraliqli bo‘lishi mumkin. Masala (2.41)-(2.43) ning taqribiy yechimini birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida ifodalash uchun kiritilgan to‘rning har bir $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, elementi quyidagi alamashtirish orqali $[-1,1]$ kesmaga akslantiriladi:

$$x = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} \tilde{x} \quad (2.49)$$

bunda $m_j = x_j + x_{j-1}$, $l_j = x_j - x_{j-1}$, va $-1 \leq \tilde{x} < 1$ hamda l_j – to‘rning j – elementi uzunligi.

Qaralayotgan masala (2.41)-(2.43) ning taqribiy yechimi turli sondagi birinchi tur Chebishev ko‘phadlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida izlanadi:

$$u_j^{(p_j)}(x, t) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(p_j)}(t) T_n(\tilde{x}), x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (2.50)$$

bunda T_n – Chebishev ko‘phadlari. Umuman olganda, \tilde{x} argument j indeksga bog‘liq bo‘ladi, ammo kelgusi bayon qilishlarni soddalashtirish maqsadida bu yerda va kelgusida j indeks yozilmaydi, bunda $(p_j + 1)$ orqali qaralayotgan masala yechimini to‘rning j elementi $[x_{j-1}, x_j]$ da approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan Chebishev ko‘phadlarining umumiy soni belgilangan, bu yerda $p_j \rightarrow \infty$ har bir fiksirlangan j uchun deb hisoblanadi. Ta’kidlash lozimki, p_j son differensial masaladagi yuqori tartibli hosila ko‘rsatkichi 2 dan kichik bo‘lmasligi kerak, ya’ni $p_j \geq 2$. To‘rning maksimal qadamini $h = \max_{1 \leq j \leq M} l_j = \max_{1 \leq j \leq M} (x_j - x_{j-1})$ orqali, to‘r elementlarida yechimni approksimatsiyalash uchun zarur bo‘lgan minimal Chebishev ko‘phadlari soni $p_- = \min_{1 \leq j \leq M} p_j$ orqali belgilanadi.

Shunday qilib, qaralayotgan (2.41)-(2.43) differensial masalaning yechimini to‘rning barcha elementlarida approksimatsiyalash uchun zarur bo‘lgan Chebishev ko‘phadlarining umumiy soni ushbu formula bo‘yicha aniqlanadi

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^M (p_j + 1).$$

Spektral-to‘r metodida to‘rning ichki x_j ($j=1, 2, \dots, M-1$) tugunlarida taqribiy yechim (2.50) va uning birinchi tartibli hosilasining uzluksizligi, to‘rning $x_0 = a, x_M = b$ nuqtalarida mos chegaraviy shartlar (2.42) ning qanoatlantirilishi talab etiladi, ya’ni

$$\begin{cases} \frac{\partial^s u_j^{(p_j)}(x_j, t)}{\partial x^s} = \frac{\partial^s u_{j+1}^{(p_{j+1})}(x_j, t)}{\partial x^s}, s = 0, 1, j = 1, 2, \dots, M-1, \\ u_1(a, t) = 0, u_M(b, t) = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

$U^{(\bar{p})}(x,t) = (u_1^{(p_1)}(x,t), \dots, u_M^{(p_M)}(x,t))$, $(\bar{p}) = (p_1, p_2, \dots, p_M)$ taqribiy yechim vektori bo‘lib, uning har bir komponentasi o‘zining to‘r elementida aniqlangan.

Taqribiy yechim koeffitsientlari $a_n^{(p_j)}$ ni, $L_0 u_j^{(p_j)}$ operatorning $[x_{j-1}, x_j]$ intervalda $p_j - 2$ nomergacha bo‘lgan Chebishev ko‘phadlariga $\rho(\tilde{x})$ vazn bilan ortogonal bo‘lish shartidan aniqlanadi, ya’ni

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (L_0 u_j^{(p_j)}(x,t) - f(x,t)) T_l(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx = 0, \quad (2.52)$$

$$j = 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, \dots, p_j - 2,$$

bunda

$$\rho(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}}.$$

Ko‘rinib turibdiki, shartlar (2.51), (2.52) ning umumiy soni, taqribiy yechim (2.45) dagi noma’lum $a_n^{(p_j)}$ koeffitsientlari soni bilan o‘zaro teng va $\bar{m} = \sum_{j=1}^M (p_j + 1)$ tenglik o‘rinli.

Endi masala (2.51), (2.52) ning taqribiy yechimi $p_j \rightarrow \infty$ da dastlabki differensial masala (2.41)-(2.43) ning yechimiga yaqinlashishi ko‘rsatiladi.

Ushbu belgilash kiritiladi

$$\psi_j^{(p_j)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u_j^{(p_j)}(x,t)}{\partial x} \right), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (2.53)$$

bu holda

$$\psi_j^{(p_j)}(x,t) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(p_j)}(t) \left(\frac{2}{l_j} \right)^2 T_n(\tilde{x}). \quad (2.54)$$

Munosabat (2.46) dan kelib chiqadiki, $\psi_j^{(p)}$ funksiya interval (x_{j-1}, x_j) ning chetki nuqtalarida chap va o'ng tomondan chekli limitlarga ega bo'ladi. Vektor $U^{(\bar{p})}$ bo'yicha (2.46) ga asosan, shunday $u^{(p)}(x)$ funksiyalarni tuzish mumkinki, ular $[-1,1]$ kesmada aniqlangan va $C^1[-1,1]$ fazoga tegishli bo'ladi hamda bo'linish nuqtalari x_j da, ikkinchi tartibli hosila chap va o'ng tomonli limitlarga ega bo'ladi.

So'ngra spektral-to'r metodi bilan differensial masala (2.41)-(2.43) operatorli tenglama (2.54) ko'rinishga keltiriladi. Kesma $x \in [-1,1]$ da aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\psi^{(p)}(x, t) = \psi^{(p)}(x, t), \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \quad (2.55)$$

funksiya kiritiladi. Ma'lumki $\psi^{(p)}$ to'rning faqat ichki tugunlari x_j da chekli uzunliklarga ega va bundan tashqari

$$\psi^{(p)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u^{(p)}}{\partial x} \right) \quad (2.56)$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda yuqorida yuritilgan mulohazalarga asosan С.Л.Соболев ta'rifi ma'nosidagi umumlashgan hosilalar tushuniladi. Funksiyalar $u^{(p)}(x)$ chegaraviy shartlar (2.44) qanoatlantirgani uchun ularni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin

$$u^{(p)}(x, t) = \int_{-1}^1 G(x, \xi, t) \psi^{(p)}(\xi, t) d\xi . \quad (2.57)$$

Ta'riflash (2.48) dan va munosabat (2.46) dan foydalangan holda $u^{(p)}$ ning (2.57) dagi formulasi asosida (2.45) quyidagicha yozib olinadi. Bu holda

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{j-1}}^{x_j} \psi_j^{(p_j)}(x,t) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx + \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\int_{-1}^1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^i G(x, \xi, t)}{\partial t} \psi^{(p_j)}(\xi, t) d\xi \right) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx = \\
& = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(- \int_{-1}^1 f(x, t) G(x, \xi, t) d\xi \right) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx, \\
& j = 1, 2, \dots, M; k = 0, 1, \dots, p_j - m.
\end{aligned}$$

Yuqorida \overline{T} , F operatorlar uchun kiritilgan belgilashlardan foydalanib va $[-1, 1]$ kesma bo'yicha olingan integralni to'ring elementlari $[x_{j-1}, x_j]$ bo'yicha olingan integrallarning yig'indisi ko'rinishida ifodalab, quyidagi tenglama hosil qilinadi

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{j-1}}^{x_j} \psi_j^{(p_j)}(x,t) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^M \mathcal{F}^i \psi_i^{(p_i)} \right) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx = \\
& = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^M \mathcal{F}^i(x,t) \right) T_k(\tilde{x}) \rho(\tilde{x}) dx,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

bunda \mathcal{F}^i – operatorlar va \mathcal{F}^i – funksiyalar ushbu formulalar asosida aniqlanadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^i \psi_i^{(p_i)} &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^i G(x, \xi, t)}{\partial t} \psi^{(p_i)}(\xi, t) d\xi, \\
\mathcal{F}^i(x,t) &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x, \xi, t) f_i(x,t) d\xi, f_i = f(x,t), x \in [x_{i-1}, x_i].
\end{aligned}$$

Ushbu skalyar ko'paytmani kiritamiz

$$(\varphi, \psi)_{L_{2,\rho}} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x,t) \psi(x,t) \rho(\tilde{x}) dx$$

va Gilbert fazosi $L_{2,\rho}(x_{i-1}, x_i)$ qaraladi. Ma'lumki $\mathcal{F}^i : L_{2,\rho}(x_{i-1}, x_i) \rightarrow C[-1, 1]$, xuddi shuningdek $\mathcal{F}^i : C(x_{i-1}, x_i) \rightarrow C[-1, 1]$ o'rinli bo'ladi.

Haqiqatdan, ham

$$g_i(x, t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \bar{T}(x, \xi, t) \psi(\xi, t) d\xi$$

funksiyani kiritaylik. Bu holda

$$\begin{aligned} \frac{dg_i}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\int_{x_{i-1}}^x \bar{T}(x, \xi, t) \psi(\xi, t) d\xi + \int_x^{x_i} \bar{T}(x, \xi, t) \psi(\xi, t) d\xi \right) = \\ &= (T_- + T_+) \psi(\xi, t) + \int_{x_{i-1}}^x \frac{d\bar{T}(x, \xi, t)}{dx} \psi(\xi, t) d\xi + \int_x^{x_i} \frac{d\bar{T}(x, \xi, t)}{dx} \psi(\xi, t) d\xi = \\ &= \psi(\xi, t) + \int_{x_{i-1}}^x \frac{d\bar{T}(x, \xi, t)}{dx} \psi(\xi, t) d\xi + \int_x^{x_i} \frac{d\bar{T}(x, \xi, t)}{dx} \psi(\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Bunda hosilalar $\frac{d\bar{T}}{dy}$ chegaralangan va

$$(T_- + T_+) = (T(x, \xi, t)|_{\xi=x-0} + T(x, \xi, t)|_{\xi=x+0}) = 1.$$

Shu sababli

$$\left\| \frac{dg_i}{dx} \right\|_{L_2(-1,1)} \leq \|\psi\|_{L_2(-1,1)} + c_1 \|\psi\|_{L_2(-1,1)} + c_2 \|\psi\|_{L_2(-1,1)}.$$

Ammo, $L_{2,\rho} \in L_2$, chunki

$$\rho(\tilde{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2}}.$$

Bu holda $\|\psi\|_{L_2} \leq \|\psi\|_{L_{2,\rho}}$ va shu sababli, $g_i \in w_2^1$.

Ichma-ich joylashish teoremasiga asosan g_i uzluksiz va hattoki, $1/2$ ko'rsatkich bilan Gelder shartini qanoatlantiradi. Shunday qilib, quyidagilar o'rinli ekanligi isbotlandi:

$$\bar{T}^i : L_2(x_{i-1}, x_i) \rightarrow C[-1, +1]$$

bundan o‘z navbatida

$$\bar{T}^i : C(x_{i-1}, x_i) \rightarrow C[-1, +1].$$

Vektor $\Psi^{(p)} = (\psi_1^{(p_1)}(x, t), \dots, \psi_M^{(p_M)}(x, t))$ kiritiladi, uning har bir komponentasi $\psi_j^{(p_j)}$ o‘zining intervalida aniqlangan va munosabat (1.14) ga asosan $(p_j - 2)$ – tartibli ko‘phaddan iborat.

Bunday vektorlar fazosida orta sifatida quyidagi vektorlarni olish mumkin

$$\vec{T}_{i_1} = (T_{i_1}(\tilde{x}), 0, \dots, 0), \vec{T}_{i_2} = (0, T_{i_2}(\tilde{x}), 0, \dots, 0), \dots, \vec{T}_{i_M} = (0, \dots, 0, T_{i_M}(\tilde{x})),$$

bunda $T_{i_j}(\tilde{x})$ – birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari ($\tilde{x} \in [-1, 1]$) va $i_1 = 0, 1, \dots, p_1 - 2; i_2 = 0, 1, \dots, p_2 - 2; i_M = 0, 1, \dots, p_M - 2$. Vektor $\Psi^{(p)}$ aniqlangan chekli o‘lchovli $L_{2,\rho}^{(p)}$ fazoda quyidagi skalyar ko‘paytma kiritiladi

$$(\Psi^{(p)}, Z^{(p)}) = \sum_{j=1}^M \int_{x_{j-1}}^{x_j} \psi_j^{(p_j)}(x, t) z_j^{(p_j)}(x, t) \rho(\tilde{x}) dx, \tilde{x} \in [-1, 1].$$

Ushbu skalyar ko‘paytmadan foydalangan holda tenglama (2.58) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\left(\Psi^{(p)}, \vec{T}_{i_j} \right) + \left(\mathcal{F}\Psi^{(p)}, \vec{T}_{i_j} \right) = \left(\mathcal{F}, \vec{T}_{i_j} \right), \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, M, \\ i_j = 0, 1, 2, \dots, p_j - m \end{matrix} \quad (2.59)$$

bunda

$$\mathcal{F}\Psi^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^M \mathcal{F}\psi_j^{(p_i)}(x, t) \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, \sum_{j=1}^M \mathcal{F}\psi_j^{(p_2)}(x, t) \Big|_{x \in [x_1, x_2]}, \dots, \sum_{j=1}^M \mathcal{F}\psi_j^{(p_M)}(x, t) \Big|_{x \in [x_{M-1}, x_M]} \right) \\ \mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_1(x, t) \Big|_{x \in [x_0, x_1]}, F_2(x, t) \Big|_{x \in [x_1, x_2]}, \dots, F_M(x, t) \Big|_{x \in [x_{M-1}, x_M]} \right).$$

$\Psi = (\psi_1(x,t), \dots, \psi_M(x,t))$ vektor-funksiyalarning Gilbert fazosi $L_{2,p}^M$ kiritiladi, bunda $\psi_j(x,t) \in L_{2,\rho}(x_{i-1}, x_i)$, ya'ni

$$L_{2,\rho}^M \in L_{2,\rho}(x_0, x_1) \times L_{2,\rho}(x_1, x_2) \times \dots \times L_{2,\rho}(x_{M-1}, x_M)$$

bo'lib, ushbu fazoda ham skalyar ko'paytma xuddi $L_{2,\rho}^{(p)}$ fazosidagi kabi kiritiladi.

Endi $\Psi(x,t)$ vektorlar bo'yicha har doim $\psi(x,t)$ funksiyalarni $\psi(x,t) = \psi_i(x,t)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ qoida bo'yicha tuzish mumkinki, bu holda $L_{2,\rho}^M$ fazo $L_{2,\rho}^M(-1,1)$ fazoga ushbu skalyar ko'paytma bo'yicha

$$(\psi, z)_{L_{2,\rho}^M} = \sum_{j=1}^M \int_{x_{j-1}}^{x_j} \psi(x,t) z(x,t) \rho(\tilde{x}) dx$$

izomorf bo'ladi. So'ngra $P_{\bar{p}} : L_{2,p}^M \rightarrow L_{2,\bar{p}}^{(p)}$ proyektor quyidagi qoida bo'yicha

kiritiladi: agar $\Psi = (\psi_1(x,t), \dots, \psi_M(x,t))$ va $\psi_j(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_k^{(j)} T_k(\tilde{x})$ bo'lsa, u holda

$$P_{\bar{p}} \Psi = \left(\sum_{k=0}^{p_1-2} \ell_k^{(1)} T_k(\tilde{x}), \dots, \sum_{k=0}^{p_M-2} \ell_k^{(M)} T_k(\tilde{x}) \right).$$

Kiritilgan belgilashlar orqali (2.59) quyidagi ikkinchi turdagi operatorli tenglama ko'rinishida yoziladi:

$$\Psi^{(p)} + P_{\bar{p}} T \Psi^{(p)} = P_{\bar{p}} F, X^{(p)} \in L_{2,\rho}^{(p)}. \quad (2.60)$$

Yuqorida keltirilgan mulohazalar taqribiy yechim $\Psi^{(p)}$ ning aniq yechim Ψ ga $(p_-) \rightarrow \infty$ ga yaqinlashishi to'g'risida mulohazalar yurutish uchun (ya'ni $p_j \rightarrow \infty$ ixtiyoriy j uchun, bu yerda $(p_-) = \min(p_1, p_2, \dots, p_M)$) xulosalarga kelish imkonini beradi. Izomorfizmga asosan $\Psi^{(p)}$ ning Ψ ga yaqinlashishini va o'z navbatida (2.45) va (2.57) ga asosan taqribiy yechim

$$u^{(p)}(x,t) = \int_{-1}^1 G(x,\xi,t)u^{(p)}(\xi,t)d\xi$$

ning masala aniq yechim $u(x,t)$ ga yanada kuchliroq normada yaqinlashishini ko'rsatadi.

Qo'yilgan masalani sonli yechishda taqribiy yechim vaqtning diskret qatlamlarida qaraladi. Shu sababli, spektral-to'r metodining yaqinlashishini tadqiq etish vaqtning diskret qatlamlarida olib borilishini e'tiborga olgan holda, asosiy tenglamalar va ularning koeffitsientlarini yozishda soddalik uchun vaqt oshkor holda ko'rsatilmaydi, hamda asosiy tenglamalar diskret vaqt qatlamlarida qaraladi deb hisoblanadi. Vaqtning fiksirlangan qatlami t^* orqali belgilanadi.

Ikkinchi bob bo'yicha xulosalar

Ikkinchi bobdagi asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

1. Ikki qatlamli sxemalarning turg'unligi hamda chiziqshastirilgan ayirmali sxemalar topilgan va tahlil qilingan.
2. Nyuton metodi uchun differensial masalaning qo'yilishi keltirilgan.
3. Spektral-to'r metodining turg'unligi haqida nazariy ma'lumotlari keltirilgan.

III BOB. KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK MASALASINI SONLI MODELLASHTIRISH

Ushbu bobda kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini ayirmali sxemalar hamda spektral-to‘r metodi bilan sonli modellashtirish masalalari keltiriladi. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala ayirmali sxemalar va spektral-to‘r metodi bilan sonli modellashtiriladi. Hosil bo‘lgan “differensial-algebraik” tenglamalar sistemasini avtonom sistemalarga keltirish uchun chiziqli xosmas almashtirishlar ketma-ketligi bajariladi. Metodning hisoblash algoritmi ishlab chiqiladi, C++ dasturlash tilida tuzilgan dastur asosida harakterli parametrlarning turli qiymatlarida keng qamrovli hisoblash tajribalari o‘tkazish natijalari va ularning tahlili keltiriladi.

3.1-§. Differensial masalaning qo‘yilishi

Quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala qaraladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right), \quad a < x < b,$$

$$u(a, t) = 0,$$

$$u(b, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

bunda $\sigma > 0$.

Ushbu boshlang‘ich-chegaraviy masalani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma u^{\sigma-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad a < x < b, \quad (3.61)$$

$$u(a, t) = 0,$$

$$u(b, t) = 0, \quad (3.62)$$

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (3.63)$$

3.2-§. Ayirmali sxemalar

Differensial masala (3.61)-(3.63) ni ayirmali sxemalar bilan yechish uchun qaralayotgan uzluksiz

$$\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

sohada ayirmali to‘r kiritiladi

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), \begin{array}{l} x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad h = 1/N, \\ t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad \tau = T/M \end{array} \right\}.$$

Ayirmali $\bar{\omega}_{h\tau}$ to‘rda differensial masalaga mos quyidagi ayirmali masalalar qo‘yiladi:

Oshkormas sxema a) :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_i - y}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right], & 0 < i < N, \\ & & 0 \leq j < M, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), & 0 \leq i \leq N, \\ y_0^{j+1} &= 0, \quad y_N^{j+1} = 0, & 0 \leq j < M. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Oshkormas iteratsiya sxema b):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_i - y}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right], & 0 < i < N, \\ & & 0 \leq j < M, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), & 0 \leq i \leq N, \\ y_0^{j+1} &= 0, \quad y_N^{j+1} = 0, & 0 \leq j < M. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Sxema a) va b) da $\hat{y}_i = y_i^{j+1}$, $y_i = y_i^j$ hamda $a_i(\mathcal{G}) = a(\mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_i)$ koeffitsientlar quyidagi formulalardan birortasi bilan hisoblanishi mumkin:

$$a_i(\mathcal{G}) = 0,5[k(\mathcal{G}_{i-1}) + k(\mathcal{G}_i)],$$

$$a_i(\mathcal{G}) = k\left(\frac{\mathcal{G}_{i-1} + \mathcal{G}_i}{2}\right),$$

$$a_i(\mathcal{G}) = \frac{2k(\mathcal{G}_{i-1})k(\mathcal{G}_i)}{k(\mathcal{G}_{i-1}) + k(\mathcal{G}_i)}.$$

Temperaturaviy to‘lqinni hisoblash aniqligi koeffitsientlar $a_i(\mathcal{G})$ ning qanday yo‘l bilan hisoblanishidan kuchli bog‘liq bo‘ladi

Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxema b) ni nazariy jihatdan taqqoslash [1] da amalga oshirilgan, hamda sxema b) chiziqli bo‘lmaganligi sababli, uni yechish uchun quyidagi iteratsiya jarayonidan foydalanish maqsadga muvofiq ekanligi ta’kidlangan

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1}^{(s)}(y) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i^{(s)}(y) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right], & 0 < i < N, \\ & & 0 \leq s < 3, \\ & & 0 \leq j < M, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), & 0 \leq i \leq N, \\ y_0^{(s+1)} &= 0, \quad y_N^{(s+1)} &= 0, & 0 \leq j < M. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ushbu sxema $y^{(s+1)}$ ga nisbatan chiziqli ko‘rinishda bo‘ladi.

3.3-§. Spektral-to‘r metodi

Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun qo‘yilgan (3.61)-(3.63) differensial masalani spektral-to‘r metodi bilan yechish uchun qaralayotgan $[a, b]$ integrallash intervalida to‘r kiritiladi, ya’ni ushbu kesma M ta turli elementlarga bo‘linadi:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{M-1}, x_M],$$

bunda $x_0 = a$, $x_M = b$. Differensial masala (3.61)-(3.63) ning taqribiy yechimini birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida ifodalash uchun $[a, b]$

kesmaning har bir $[x_{j-1}, x_j]$ elementini $[-1, 1]$ kesmaga akslantiriladi. Natijada kiritilgan to‘rning har bir elementida (3.61)-(3.63) differensial masala quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \left(\frac{2}{l_i}\right)^2 u_i^\sigma \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \sigma u_i^{\sigma-1} \left(\frac{2}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.67)$$

$$u_i(1) = u_{i+1}(-1), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial y}(1) = \frac{1}{l_{i+1}} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y}(-1), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (3.69)$$

$$u_1(-2) = u_M(2) = 0, \quad (3.70)$$

$$u_i(y, 0) = u_0\left(\frac{m_i}{2} + \frac{l_i}{2} y, 0\right), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.71)$$

bunda tengliklar (3.67)-(3.69) to‘rning ichki tugunlarida taqribiy yechim va uning birinchi tartibli hosilasining uzluksizligi shartini, tenglik (3.70) chegaraviy shartlarni, tenglik (3.71) esa boshlang‘ich shartlar ko‘rinishini aniqlaydi. Bunda boshlang‘ich shartlar kelgusi hisoblash jarayonida muhim ahamiyatga ega bo‘lmaganligi sababli, alohida qaralmaydi.

Tenglamalar sistemasi (3.67)-(3.70) ning taqribiy yechimi birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori

$$u_j(y) = \sum_{n=0}^N a_n^{(j)} T_n(y), \quad T_n(y) = \cos(n \cdot \arccos y) \text{ ko‘rinishida izlanadi.}$$

Qaralayotgan to‘rning M ta elementlaridan har birida $(N + 1)$ ta birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari tugunlari, ya’ni kollokatsiya nuqtalari mavjud:

$$y_i = -\cos(\pi i / N), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Qatordagi $a_m^{(j)}$ koeffitsientlar $u_j(y_i)$ funksiyaning qiymatlari orqali teskari Chebishev almashtirishi

$$a_m^{(j)} = \frac{2}{Nc_m} \sum_{i=0}^N \frac{1}{c_i} u_j(y_i) T_m(y_i), \quad \begin{array}{l} m = 0, 1, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, M, \\ \text{agarm } \neq 0, N. \end{array}$$

$$c_0 = c_N = 2, \quad c_m = 1,$$

orqali topiladi va kelgusi bayonni soddalashtirish maqsadida qatorlarni matritsali belgilashlar

$$v = Ta$$

$$a = T^* v$$

orqali belgilab olinadi.

y_i diskret kollokatsiya tugunlarida birinchi va ikkinchi fazoviy hosilalar quyidagicha ifodalanadi

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Tb, \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = Td, \quad (3.73)$$

b va d vektorlar komponentalari a vektor komponentalari yordamida quyidagi qatorlar orqali aniqlanadi:

$$c_m b_m^{(j)} = 2 \sum_{\substack{p=m+1 \\ p \equiv m \pmod{2}}}^N p a_p^{(j)}, \quad m \geq 0, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.74)$$

$$c_m d_m^{(j)} = 2 \sum_{\substack{p=m+2 \\ p \equiv m \pmod{2}}}^N p(p^2 - m^2) a_p^{(j)}, \quad m \geq 0, \quad j = 1, \dots, M, \quad (3.75)$$

bunda $k \equiv l \pmod{2}$ belgilash $(k-l)/2$ ifoda butun qiymat qabul qilishini bildiradi.

Formulalar (3.74) va (3.75) matritsali ko‘rinishda quyidagicha yoziladi

$$b = Ra, \quad (3.76)$$

$$d = Pa, \quad (3.77)$$

bunda R va $P - ((N + 1)M) \times ((N + 1)M)$ tartib bo‘lgan blokli-diagonalli kvadrat matritsalar bo‘lib, ular quyidagi strukturaga ega:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_M \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_M \end{bmatrix},$$

$$R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Formulalar (3.76), (3.77) ni mos ravishda tengliklar (3.72), (3.73) ga qo‘yib hamda munosabatdan foydalangan holda fazoviy hosilalarning approksimatsiyasi topiladi:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{B}v, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \mathbf{A}v, \quad (3.79)$$

bunda \mathbf{A} va \mathbf{B} blokli-diagonalli kvadrat matritsalar bo‘lib, tartiblari $((N + 1)M) \times ((N + 1)M)$ ga teng, hamda ular quyidagi strukturaga ega:

sistemasi (3.72) va $2M$ ta chiziqli algebraik shartlar (3.73) dan tashkil topgan, noma'lumlarning umumiy soni ham tenglamalarning soniga teng bo'lib, $(N + 1)M$ tani tashkil etadi.

G xosmas matritsa xossalaridan foydalanilib, quyidagi belgilashlar kiritiladi:

$$\mathbf{H} = AG^{-1}, \quad (3.74)$$

$$\mathbf{f} = \sigma v^{\sigma-1} \cdot (Bv)^2, \quad (3.75)$$

hamda ular orqali tenglama (3.72) ni quyidagi yozish mumkin bo'ladi

$$\frac{dw}{dt} = w^\sigma \cdot \mathbf{H}w + \mathbf{f} \quad (3.76)$$

Shunday qilib, yuqoridagi munosabatdan foydalanib, oddiy differensial tenglamalar sistemasi (3.72) tartibi unga nisbatan kichik bo'lgan sistemaga keltiriladi, bunda H ham xosmas matritsa bo'lib, u \mathbf{H} matritsaning nolga teng bo'lgan satr va ustunlarini olib tashlash orqali hosil qilinadi, buning uchun uning elementlari w vektorning mos nolga teng elementlariga ko'paytiriladi.

Bu holatda, tenglamalar sistemasi (3.76) ni quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{dr}{dt} = r^\sigma Hr + f, \quad (3.77)$$

bunda H matritsa $((N - 1)M) \times ((N - 1)M)$ tartib ega bo'lgan matritsa,

$$r = \{u_1(y_1) \dots u_1(y_{N-1}), u_2(y_1) \dots u_2(y_{N-1}), \dots, u_M(y_1) \dots u_M(y_{N-1})\},$$

$$f = \{f_1(y_1) \dots f_1(y_{N-1}), f_2(y_1) \dots f_2(y_{N-1}), \dots, f_M(y_1) \dots f_M(y_{N-1})\}$$

vektorlar esa $(M(N - 1))$ uzunlikka ega bo'lgan vektorlar, bunda r vektor v vektordan faqatgina $(j - 1)N + 1$ va jN , $j = 1, 2, \dots, M$ komponentalari kamligi

bilan farqlanadi. v vektorning yetishmaydigan komponentalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan

$$w = Gv$$

foydalanib topiladi.

Tenglamalar sistemasi (3.77) evolyutsion sistemadan iborat bo‘lib, uni sonli yechish uchun spektral-to‘r metodi qo‘llanilgan. Sistemada vaqt bo‘yicha yangi qatlamga o‘tishda quyidagi oshkor sxemadan foydalaniladi

$$\begin{aligned} r(t + \tau) &= r(t) + Rr(t)^\sigma Qr(t) - Rf(t), \\ R\varphi(t) &= \frac{\tau}{12} [23\varphi(t) - 16\varphi(t - \tau) + 5\varphi(t - 2\tau)], \\ Q &= \frac{12}{\tau} (e^{H\tau} - E)(23E - 16e^{-H\tau} + 5e^{-2H\tau})^{-1}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

bunda Q matritsa tenglamalar sistemasi (3.77) da maxsus almashtirishlarni bajarish orqali hisoblanadi. E –birlik matritsa, R –uchinchi tartibli Adams-Beshfort sxemasi operatori, τ –integrallash qadami.

Oshkor sxema (3.78) Adams-Beshfort sxemasini qo‘llashga nisbatan integrallash qadami τ ga turg‘unlik nuqtai-nazaridan qo‘yiladigan talabni keskin pasaytirish imkonini beradi.

3.4-§. Hisoblash eksperimenti natijalari va ularning tahlili

Dastlab qaraganda, 3.2 paragrafda bayon qilingan oshkormas sxema a) iteratsiya talab qilmaganligi sababli undan foydalanish, iteratsiya talab qiladigan oshkormas sxema b) dan foydalanganga qaraganda afzaldek ko‘rinadi. Ammo, amaliy hisoblashlar oshkormas iteratsiyali sxema b) ning samarali ekanligini ko‘rsatadi.

Shu sababli, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning yuqori tartibli chiziqli bo‘lmagan funksiyasi bo‘lgan holda, ya’ni $k(u) = u^\sigma$, $\sigma = 1, 2, 3$

bo'lgan holda oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) larning samaradorligini hisoblash eksperimenti nuqtai - nazaridan taqqoslash muhim amaliy ahamiyatga ega. Mualliflarga ushbu yo'nalishda bajarilgan biror - bir tadqiqot ishlari ma'lum emas.

Ma'lumki, ixtiyoriy sonli metodlarning samaradorligini baholashda asosiy ko'rsatkich sifatida arifmetik amallar soni qaraladi. Ushbu tadqiqot ishida oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) larning samaradorligi issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^\sigma$, $\sigma = 1, 2, 3$ ko'rinishda bo'lganda arifmetik amallar soni bo'yicha taqqoslanadi, hamda oshkormas iteratsiya sxemasi b) ning oshkormas sxema a) ga nisbatan samarali metod ekanligi ko'rsatiladi.

O'tkazilgan hisoblash eksperimenti natijalari parametr σ ning qiymati ortib borishi bilan sxema oshkormas sxemasi a) bo'yicha ma'lum aniqlikka erishishi uchun vaqt bo'yicha juda kichik τ qadam tanlash zarurligini, bu esa o'z navbatida arifmetik amallar sonining keskin ortib ketishiga olib kelishini ko'rsatadi. Oshkormas iteratsiya sxemasi b) bo'yicha ma'lum aniqlikni ta'minlash uchun vaqt bo'yicha har bir qatlam oralig'ida atigi uchta iteratsiya bajarish kifoya ekanligi namoyish etilgan, natijada arifmetik amallar soni sezilarli darajada kamayishiga erishish mumkinligi ko'rsatilgan.

Ta'kidlash lozimki, ayirmali sxemalar (3.64) va (3.66) progonka metodi bilan yechiladi. Ma'lumki progonka metodini bitta qatlamda bajarish uchun $8N$ arifmetik amal sarflanadi, bu erda N to'ring tugunlari soni.

Oshkormas sxemasi a) ni amalga oshirish uchun zarur bo'lgan arifmetik amallar soni $Q_1 = 8N * N1$ ga, ushbu amallar soni ayirmali oshkormas iteratsiya sxemasi b) uchun $Q_2 = 8N * IT * N2$ ga teng bo'ladi, bunda $8N$ progonka metodini amallar soni, $N1$ va $N2$ lar mos ravishda oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) lardagi vaqt bo'yicha qatlamlar soni, IT esa

oshkormas iteratsiya sxemasi b) da bitta qatlamda amalga oshirilishi lozim bo'lgan iteratsiyalar sonidan iborat.

Differentsial masala (3.61)-(3.63) qaralayotgan

$$\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

sohada quyidagi ayirmali to'rtini kiritamiz

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, h = 1/N, t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, M, \tau = T/M \right\}.$$

Hisoblash eksperimenti olib borish uchun masala parametrlarini quyidagicha tanlaymiz : $0 \leq t \leq 4, \tau = 0.01, N = 100, h = 0.04, x \in [-2, 2]$.

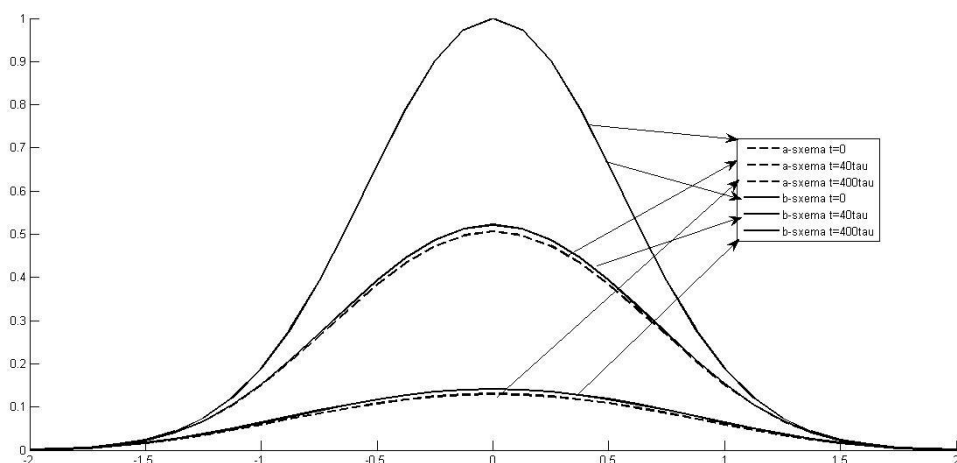
Dastlab $\sigma = 1$ bo'lgan holni, ya'ni $k(u) = u$ -issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli funksiyasi bo'lgan holni qaraymiz.

3.1-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u$ ($\sigma = 1$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b)) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-2}$)

	$t = 40\tau$		$t = 400\tau$	
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.3827	0.3925	0.1082	0.1172
-0.2	0.4828	0.4967	0.1259	0.1368
0	0.5064	0.5213	0.13	0.1413
0.2	0.4829	0.497	0.1261	0.137
0.5	0.3831	0.3933	0.1086	0.1177

Ushbu jadvaldagi hisoblash natijalari quyidagi grafikda o'z ifodasini topgan.



3.1-rasm. Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $\tau = 0.01$ vaqt qadami bilan olingan yechim

Hisoblash eksprementi o'tkazish natijasida olingan 3.1-rasmdan ko'rinadiki,

oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) lar bo'yicha olingan natijalar biroz farqlanadi. Oshkormas sxemasi a) ning aniqligini oshirish uchun vaqt bo'yicha to'r qadamini kichraytiramiz, oshkormas iteratsiya sxemasi b) ni o'z holatida qoldiramiz, ya'ni oshkormas sxemasi a) da ($\tau = 0.001, N1 = 100$) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) da ($\tau = 0.01, N1 = 100$) bo'lganda to'r tugunlarida hisoblash natijalari 3.2-jadvalda keltirilgan.

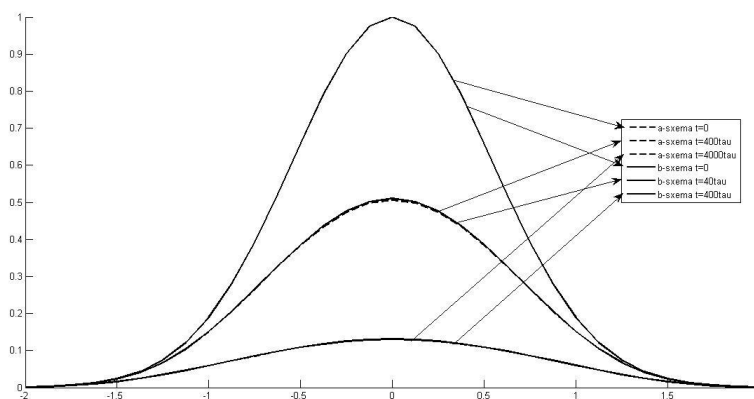
3.2-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u$ ($\sigma = 1$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a)) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b)) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-3}$)

	$t = 400\tau$	$t = 40\tau$	$t = 4000\tau$	$t = 400\tau$
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.3851	0.3925	0.1086	0.1172
-0.2	0.4863	0.4967	0.1264	0.1368
0	0.5102	0.5213	0.1305	0.1413

0.2	0.4863	0.497	0.1266	0.137
0.5	0.386	0.3933	0.1091	0.1177

Ushbu jadvaldagi hisoblash natijalari quyidagi grafikda o'z ifodasini topgan.



3.2-rasm. Oshkormas sxemasi a) $\tau = 0.001$ vaqt qadami bilan va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $\tau = 0.01$ vaqt qadami bilan olingan yechim

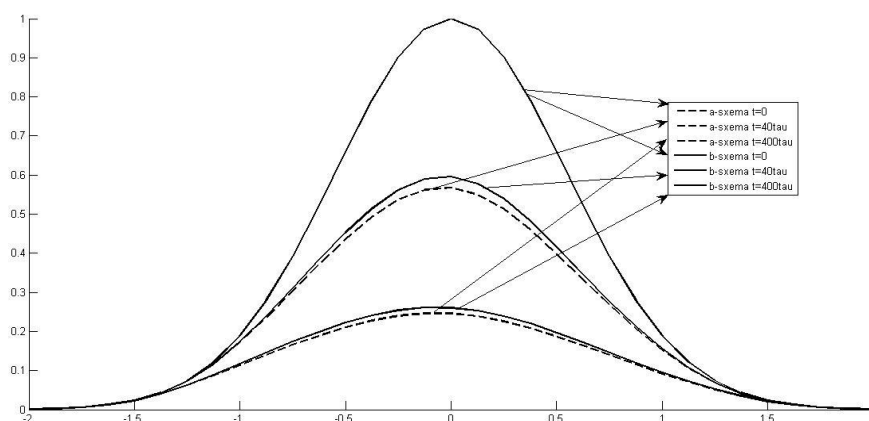
Hisoblash eksprimenti natijalari ko'rsatadiki, $\sigma = 1$ bo'lgan holda oshkormas iteratsiya sxemasi b) bo'yicha olingan natijalarga yaqin qiymatlarni olish uchun oshkormas sxemasi a) da vaqt bo'yicha to'r qadamini 10 marta kichraytirishga to'g'ri keladi. Bu holda oshkormas sxemasi a) da arifmetik amallar soni $Q_1 = 800\,000$ ga, oshkormas iteratsiya sxemasi b) da esa $Q_2 = 240\,000$ ga teng.

$\sigma = 2$ bo'lgan holda to'rning qadamlari uchun $h = 0.04$ va oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) lar uchun $\tau = 0.01$ qiymatlar tanlangan bo'lsin. Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) orqali hisoblash eksprimenti o'tkazilgan va olingan natijalar 3.3-jadvalda hamda grafik ko'rinishda 3.3-rasmda keltirilgan.

3.3-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^2$ ($\sigma = 2$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-2}$)

	$t = 40\tau$		$t = 400\tau$	
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.4365	0.453	0.2106	0.2222
-0.2	0.5468	0.5723	0.2425	0.2568
0	0.5674	0.5955	0.2458	0.2606
0.2	0.5279	0.5543	0.231	0.2448
0.5	0.398	0.4157	0.1868	0.1972



3.3-rasm. Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $t = 40\tau$ vaqt qadami bilan olingan yechim

Hisoblash natijasida olingan 3.3-rasmdan ko'rinadiki, oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) lar bo'yicha olingan natijalar sezilarli darajada farqlanadi.

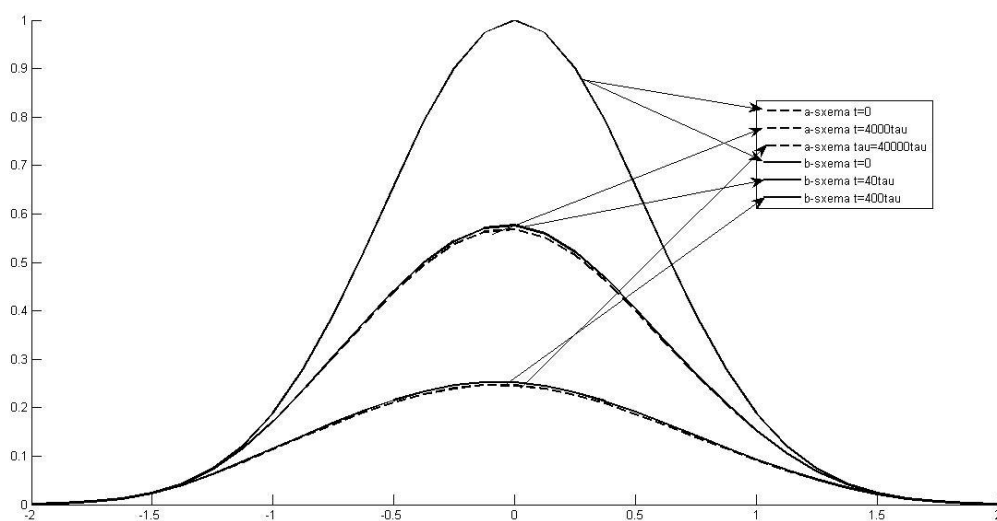
Oshkormas sxemasi a) ning aniqligini oshirish uchun vaqt bo'yicha to'r qadamini kichraytiramiz, oshkormas iteratsiya sxemasi b) ni o'z holatida qoldiramiz, ya'ni oshkormas sxemasi a) da $\tau = 0.0001$ va oshkormas iteratsiya

sxemasi b) da $\tau = 0.01$ bo'lganda to'r tugunlarida hisoblash natijalari 3.4-jadvalda hamda grafik ko'rinishda 3.4-rasmda keltirilgan.

3.4-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^2$ ($\sigma = 2$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-4}$)

	$t = 4000\tau$	$t = 40\tau$	$t = 40000\tau$	$t = 400\tau$
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.4369	0.453	0.2157	0.2222
-0.2	0.5475	0.5723	0.2488	0.2568
0	0.5682	0.5955	0.2524	0.2606
0.2	0.529	0.5543	0.2372	0.2448
0.5	0.3989	0.4157	0.1914	0.1972



3.4-rasm. Oshkormas sxemasi a) $\tau = 0.0001$ vaqt qadami bilan va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $\tau = 0.01$ vaqt qadami bilan olingan yechim

Hisoblash eksperimenti natijalari ko'rsatadiki, $\sigma = 2$ bo'lgan holda oshkormas iteratsiya sxemasi b) bo'yicha olingan natijalarga yaqin qiymatlarni

olish uchun oshkormas sxemasi a) da vaqt bo'yicha to'r qadamini 1000 marta kichraytirishga to'g'ri keladi.

Bu holda oshkormas sxemasi a) da arifmetik amallar soni $Q_1=8\ 000\ 000$ ga, oshkormas iteratsiya sxemasi b) da esa $Q_2=240\ 000$ ga teng.

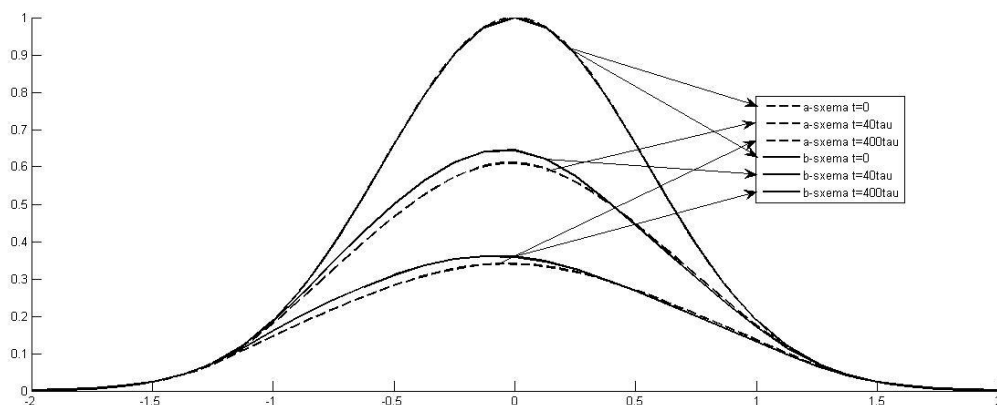
$\sigma = 3$ bo'lgan holda to'rning qadamlari uchun $h=0.04$ va oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) uchun $\tau = 0.01$ qiymatlar tanlangan bo'lsin.

Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) orqali o'tkazilgan hisoblash eksperimenti natijalari 3.5-jadvalda hamda grafik ko'rinishida 3.5-rasmda berilgan.

3.5-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^3$ ($\sigma = 3$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a)) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b)) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-2}$)

	$t = 40\tau$		$t = 400\tau$	
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.4649	0.5002	0.2823	0.3103
-0.2	0.5865	0.6237	0.332	0.356
0	0.6104	0.644	0.3402	0.3586
0.2	0.576	0.593	0.3253	0.3342
0.5	0.4463	0.4429	0.2693	0.2675



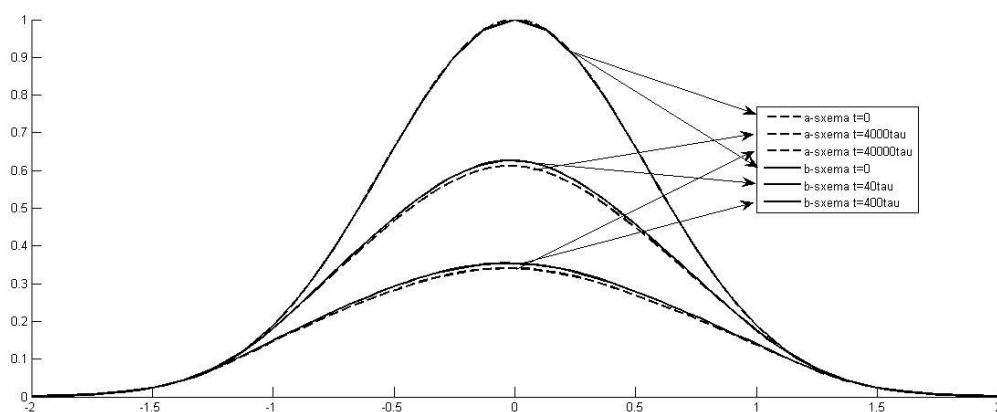
3.5-rasm. Oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $\tau = 0.01$ vaqt qadami bilan olingan yechim

Hisoblash eksperimenti o'tkazish natijasida olingan 3.5-rasmdan ko'rinadiki, oshkormas sxemasi a) va oshkormas iteratsiya sxemasi b) lar bo'yicha olingan natijalar keskin farqlanadi. Oshkormas sxemasi a) ning aniqligini oshirish uchun vaqt bo'yicha to'r qadamini kichraytiramiz, oshkormas iteratsiya sxemasi b) ni o'z holatida qoldiramiz, ya'ni oshkormas sxemasi a) da $\tau = 0.00001$ va oshkormas iteratsiya sxemasi b) da $\tau = 0.01$ bo'lganda to'r tugunlarida hisoblash natijalari 3.6-jadvalda hamda grafik ko'rinishida 3.6-rasmda keltirilgan.

3.6-jadval.

Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^3$ ($\sigma = 3$) bo'lgan holda oshkormas sxemasi (sxema a)) va oshkormas iteratsiya sxemasi (sxema b)) bilan olingan natijalar. ($h = 10^{-4}$)

	$t = 4000\tau$	$t = 40\tau$	$t = 40000\tau$	$t = 400\tau$
	sxema a)	sxema b)	sxema a)	sxema b)
-0.5	0.4852	0.5002	0.2901	0.3103
-0.2	0.5876	0.6237	0.3321	0.356
0	0.6117	0.644	0.3404	0.3586
0.2	0.5773	0.593	0.3255	0.3342
0.5	0.4448	0.4429	0.2648	0.2675



3.6-rasm. Oshkormas sxemasi a) $\tau = 0.00001$ vaqt qadami bilan va oshkormas iteratsiya sxemasi b) $\tau = 0.01$ vaqt qadami bilan olingan yechim

Hisoblash eksperimenti natijalari ko'rsatadiki, $\sigma = 3$ bo'lgan holda oshkormas iteratsiya sxemasi b) bo'yicha olingan natijalarga nisbatan yaqinroq qiymatlarni olish uchun oshkormas sxemasi a) da vaqt bo'yicha to'r qadamini 10000 marta kichraytirishga to'g'ri keldi. Bu holda oshkormas sxemasi a) da arifmetik amallar soni $Q_1=80\,000\,000$ ga, oshkormas iteratsiya sxemasi b) da esa $Q_2=240\,000$ ga teng bo'ladi.

Yuqoridagi hisoblash natijalarining grafiklaridan oshkormas iteratsiya sxemasi b) ning oshkormas sxemasi a) ga nisbatan yuqori aniqlikka ega ekanligini ko'rish mumkin [93].

Endi oshkormas iteratsiya sxemasi b) yordamida olingan yechimlarni paragraf 3.3 da bayon qilingan spektral-to'r metodi orqali olingan yechimlar bilan taqqoslaymiz. Bunda hisoblash eksperimenti parametrlarini quyidagicha tanlaymiz: $0 \leq t \leq 4, \tau = 0.01, x \in [-2, 2]$ hamda $[-2, 2]$ kesma teng oraliqlarga bo'linganda $N = 32, N = 64$ tugunlarga ega bo'lgan ayirmali sxemadan foydalangan holda, xuddi shuningdek bazis funksiyalari (Chebishev ko'phadlari) soni $N = 32$ va $N = 64$ ga teng bo'lgan spektral-to'r metodi bilan vaqtning $t = 0, 40\tau, 400\tau$ qatlamida olib borilgan, bu yerda τ vaqt bo'yicha to'r qadami.

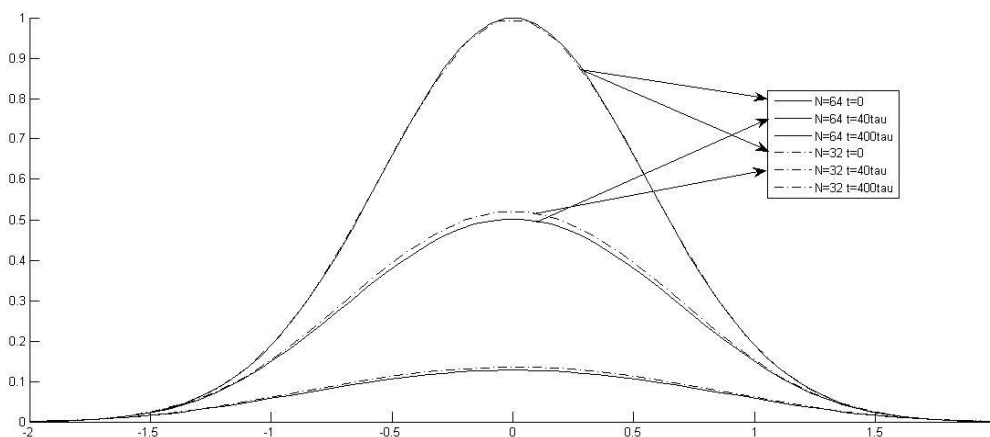
Dastlab $\sigma = 1$ bo'lgan holni, ya'ni $k(u) = k_0 u$ - issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli funksiyasi bo'lgan holni qaraymiz. Bunda spektral-to'r metodida bazis funksiyalari (Chebishev ko'phadlari) soni $N = 32$, to'r tugunlari $M = 4$ va $N = 64$, to'r tugunlari $M = 8$ ga teng, oshkormas iteratsiya sxemasi b) da tugunlar soni $N = 32$, $N = 64$ ga teng deb olingan. Olingan hisoblash natijalari 3.7-jadvalda hamda grafik ko'rinishida 3.7 - 3.8-rasmlarda keltirilgan.

3.7-jadval

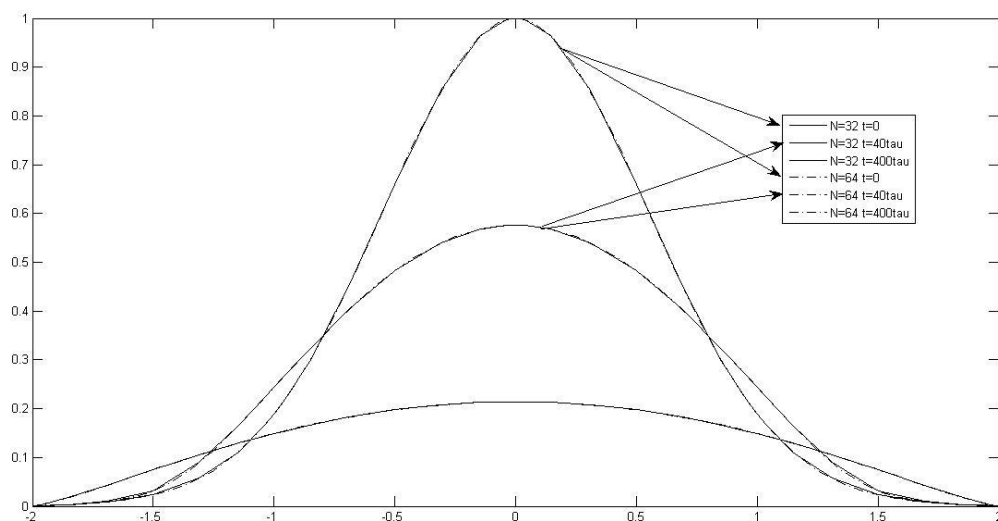
Issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u$ ($\sigma = 1$) bo'lgan holda iteratsiyali oshkormas sxemasi (sxema b)) va spektral-to'r metodi bilan olingan natijalar.

$$(h = 10^{-2})$$

$t = 40\tau$				
	sxema b)		Spektral-to'r metodi	
	N=32	N=64	N=32	N=64
-0.4	0.4345	0.4202	0.5151	0.5034
-0.25	0.4847	0.4685	0.5502	0.552
0	0.5196	0.5021	0.5759	0.5763
0.25	0.4853	0.4687	0.5502	0.552
0.4	0.4353	0.4203	0.5153	0.5147



3.7-rasm. Oshkormas iteratsiya sxemasi b) da olingan yechim,



3.8-rasm. Spektral-to‘r metodida olingan yechim.

Hisoblash eksperimenti o‘tkazish natijasida olingan 3.7-rasmdan oshkormas iteratsiya sxemasi b) yordamida olingan yechimlar esa bir-biriga yaqinligini 3.8-rasmdan spektral-to‘r metodi yordamida olingan yechimlar ustma-ust tushganligi, ko‘rish mumkin.

Endi $\sigma = 2$ bo‘lgan holni qaraymiz. Hisoblash eksperimenti parametrlarini $\sigma = 1$ bo‘lgan holdagidek qaraymiz. Olingan hisoblash natijalari 3.8-jadvalda hamda grafik ko‘rinishida 3.9 - 3.10-rasmlarda keltirilgan

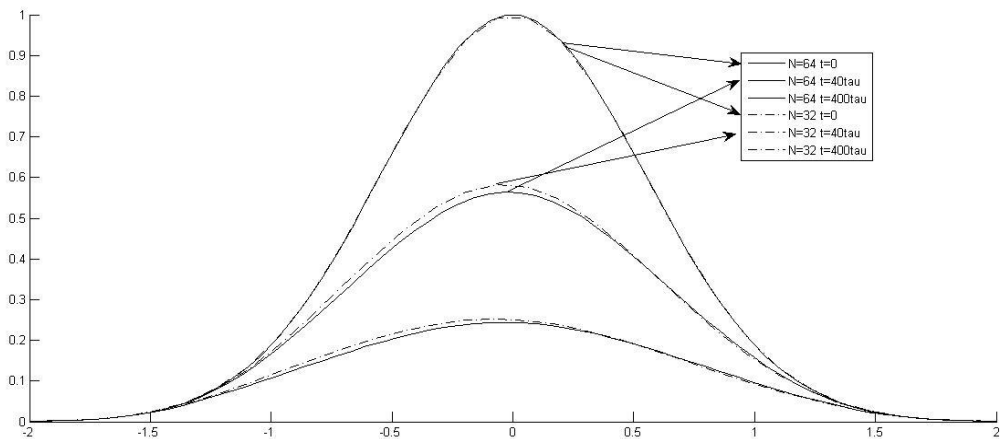
3.8-jadval

Issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = u^2$ ($\sigma = 2$) bo‘lgan holda iteratsiyali oshkormas sxemasi (sxema b)) va spektral-to‘r metodi bilan olingan natijalar.

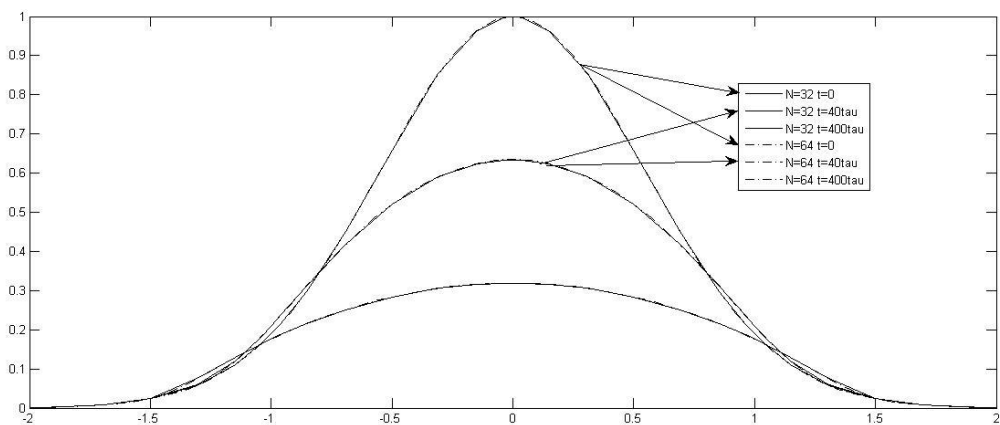
$$(h = 10^{-2})$$

$t = 40\tau$		
	sxema b)	Spektral-to‘r metodi

	N=32	N=64	N=32	N=64
-0.4	0.4911	0.4717	0.5572	0.5606
-0.25	0.5469	0.5263	0.603	0.6058
0	0.5785	0.5625	0.6337	0.6342
0.25	0.5228	0.5148	0.603	0.6058
0.4	0.4569	0.4535	0.5572	0.5606



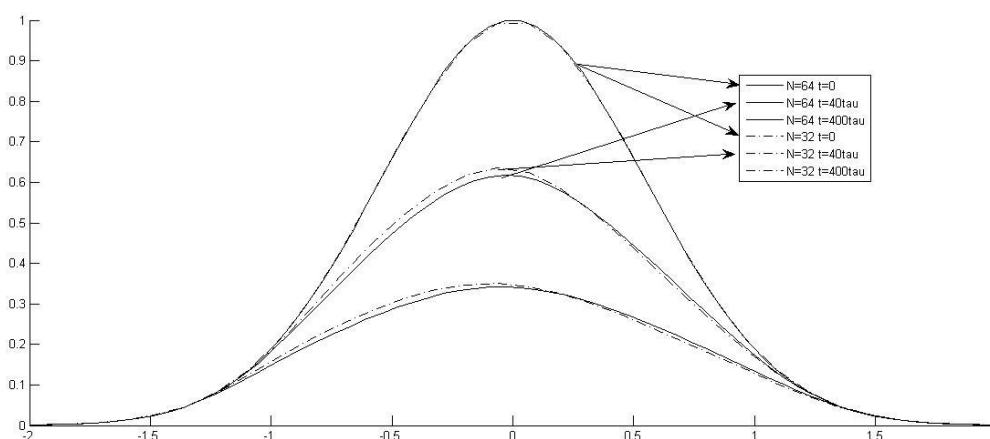
3.9-rasm. Oshkormas iteratsiya sxemasi b) da olingan yechim.



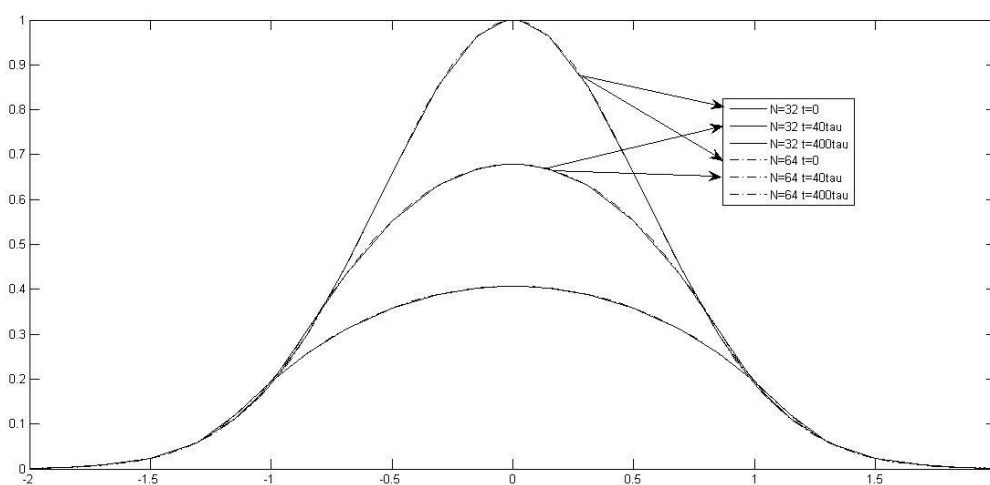
3.10-rasm. Spektral-to‘r metodida olingan yechim.

Hisoblash eksperimenti o‘tkazish natijasida olingan 3.9-rasmda oshkormas iteratsiya sxemasi b) yordamida olingan yechimlar vaqtning turli qatlamlarida farqli ekanligini, 3.10-rasmdan esa spektral-to‘r metodi yordamida olingan yechimlar ustma-ust tushganligi, ko‘rish mumkin.

Endi issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning kubik funksiyasi bo‘lgan, ya’ni $\sigma = 3$ holni qaraymiz. Hisoblash eksperimenti parametrlarini $\sigma = 1$ bo‘lgan holdagidek qaraymiz. Olingan hisoblash natijalari 3.9-jadvalda hamda grafik ko‘rinishida 3.11 - 3.12-rasmlarda keltirilgan



3.11-rasm. Oshkormas iteratsiya sxemasi b) da olingan yechim.



3.12-rasm. Spektral-to‘r metodida olingan yechim.

Hisoblash eksperimenti o‘tkazish natijasida olingan 3.11-rasmdan oshkormas iteratsiya sxemasi b) yordamida olingan yechimlar vaqtning turli qatlamlarida keskin farqlanishini 3.12-rasmdan spektral-to‘r metodi yordamida olingan yechimlar har doimgidek ustma-ust tushganligi, ko‘rish mumkin [94].

Ayni paytda 3.8, 3.10, 3.12 rasmlarda issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning yuqori darajali funksiyasi bo‘lgan hollarda qaralayotgan masalaning spektral-to‘r metodi bilan Chebishev ko‘phadlari soni turlicha bo‘lganda olingan sonli yechimlarining taqqoslash natijalaridan ko‘rinadiki, qo‘yilgan masalaning spektral-to‘r metodi bilan olingan taqribiy yechimlari $\sigma = 1, 2, 3$ parametrning tanlangan qiymatlarida mos tushadi, bu o‘z navbatida kam sonli ko‘phadlardan foydalangan holda yuqori aniqlikka ega bo‘lishligini ko‘rsatdi.

Uchinchi bob bo‘yicha xulosalar

Uchinchi bobdagi asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

- Chiziqli bo‘lmagan koeffitsientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala spektral-to‘r metodi bilan sonli modellashtirildi;
- “differensial-algebraik” tenglamalar sistemasini avtonom sistemalarga keltirish uchun chiziqli xosmas almashtirishlar qo‘llanildi;
- Spektral-to‘r metodining hisoblash algoritmi va dasturiy ta‘minoti ishlab chiqildi;
- C++ dasturlash tilida tuzilgan dastur asosida harakterli parametrlarning turli qiymatlarida keng qamrovli hisoblash eksperimenti o‘tkazish natijalari va ularning tahlili keltirildi.

Xulosa

Ayirmali sxema hamda spektral-to'rt metodlari bo'yicha olib borilgan ilmiy tadqiqot ishlari tahlili keltirilgan.

Boshlang'ich va chegaraviy masalalarning qo'yilishi. Fazoviy vaqt bo'yicha approksimatsiya shartlari haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan va aniqlangan.

Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun statsionar masalaga mos differensial masala qo'yiladi, uning ba'zi analitik yechimlari tuzildi.

Chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun qo'yilgan differensial masala ayirmali sxemalar bilan approksimatsiyalandi, oshkormas sxemalar yordamida yechish algoritmi ishlab chiqildi.

Chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun oshkormas sxemalar oilasi qaraldi, ularning koeffitsiyentlarini tanlab olish masalalari tahlil qilindi.

Ayirmali sxema hamda spektral-to'rt metodlari nazariy ma'lumotlari keltirilgan.

differensial masala qo'yildi;

qo'yilgan masalani sonli modellashtirish uchun ayirmali hamda spektral-to'rt metodi algoritmi ishlab chiqildi, algoritmgaga mos dasturiy ta'minot yaratildi hamda keng qamrovli hisoblash eksperimenti olib borildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1978. 591 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. 656 с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. 415 с.
4. Самарский А.А., Николаев В.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. 589 с.
5. Самарский А.А. Введение в численные методы – М.: Наука, 2005. 288 с.
6. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Наука, М. 2005, 480с.
7. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. 688 с.
9. Яненко Н. Н. О нелинейных уравнениях переменного типа //Записки научных семинаров ПОМИ. – 1980. – Т. 96. – №. 0. – С. 294-301.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.
11. Messaoudi S. A. A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy //Journal of mathematical analysis and applications. – 2002. – Т. 273. – №. 1. – С. 243-247.
12. Gol'dman N. L. Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient //Journal of Differential Equations. – 2019. – Т. 266. – №. 8. – С. 4925-4952.
13. Liu X. Insensitizing controls for a class of quasilinear parabolic equations //Journal of Differential Equations. – 2012. – Т. 253. – №. 5. – С. 1287-1316.

14. Duan Z. The asymptotic self-similar behavior for the quasilinear heat equation with nonlinear boundary condition //Computers & Mathematics with Applications. – 2009. – Т. 58. – №. 10. – С. 2005-2021.
15. Adimurthi K., Byun S. S. Boundary higher integrability for very weak solutions of quasilinear parabolic equations //Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 2019. – Т. 121. – С. 244-285.
16. Giacomoni J., Sauvy P., Shmarev S. Complete quenching for a quasilinear parabolic equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. – Т. 410. – №. 2. – С. 607-624.
17. Lan D. et al. Quasilinear parabolic equations with first order terms and L1-data in moving domains //Nonlinear Analysis. – 2021. – Т. 206. – С. 112233.
18. Мартинсон Л. К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением //Математическое моделирование.//Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского АА, Галактионова ВА, Курдюмова СП Сборник статей. М.: Наука. – 1986. – С. 279-309.
19. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Локализация горения в плазме с электронной теплопроводностью. – Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вын. 9, с. 620-624.
20. Berkovsky B. M., Bashtovoi V. G. The finite velocity of heat propagation from the viewpoint of the kinetic theory //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1977. – Т. 20. – №. 6. – С. 621-626.
21. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. — 1024 с.
22. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 542 с.
23. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Метастабильная локализация тепла в среда с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте: Препр. ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР №103. М., 1977. 87 с.

24. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1986. - №1. – С. 46-50.

25. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Устойчивость двухфазного потока газ – твердые частицы в пограничном слое // Изв РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1987. - №2. – С. 60-64.

26. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Численный метод решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнение на основе неоднородной сплайн – аппроксимации // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Сб. науч. тр. Инс-т. матем. СО РАН. –Новосибрск, 1989. – С. 151-164.

27. Нармурадов Ч.Б., Решение уравнения Орра – Зоммерфельда спектрально –сеточным методом // Докл. АН РУз. – Ташкент, 2001. - №10-11. – С.9-12.

28. Нармурадов Ч.Б. Алгоритм спектрально – сеточного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости пограничного слоя // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2001. - №5-6. – С. 57-60.

29. Нармурадов Ч.Б. Пакет прикиладных программ для решения задачи гидродинамической устойчивости // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2002. - №2. – С.40-43.

30. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость спектрально – сеточного метода // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2003. - №2. – С.64-71.

31. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Решения задачи гидродинамической устойчивост двухфазных потоков спектрально – сеточным методом / Вопросы кибернетики: Сб.науч.тр – Ташкент, ИК АН РУз, 2002. – вып. 168-5-9.

32. Нармурадов Ч.Б. Матричное преобразование в спектрально – сеточном методе // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2003. - №4. – С.9-13.
33. Нармурадов Ч.Б. Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Докл.АН РУз. – Ташкент, 2004.№1. – С.19-26.
34. Нармурадов Ч.Б. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля // Узбекский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. -№1. – С. 46-48.
35. Нармурадов Ч.Б. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Узбекский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. -№3. – С. 21-24.
36. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра – Зомерфельда // Математическое моделирование. – Москва, 2005. - №9(17). – С. 35-42.
37. Нармурадов Ч.Б. Исследование пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Техника и технология. – Москва, 2007. - №5(23). – С. 48-51.
38. Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование. – Москва, 2007. - №6(19). – С. 53-60.
39. Корпусов М.О. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. — М.: Физический факультет МГУ, 2014. 364 с.
40. Алимов Ш.А. О спектральных разложениях непрерывных функций из классов Соболева // Докл. РАН. – 1976. – № 3(229). – С. 529 – 530.
41. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
42. Нармурадов Ч.Б., Юлдашев Ш.М., Тойиров А.Х. Математическое моделирование нелинейных тепловых процессов // Проблемы

вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 3(27). — С. 76–89.

43. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. – Т.: «Fan va texnologiya», 2011. – 188 с.

44. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983.

45. Алимов Ш.А., Сафаев С.А. О числе отрицательных собственных значений оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. – Москва, 1993. -№10(29). – С.1843-1846.

46. Методы расчета турбулентных течений / Дж.Ламли, Ж.Матье и др.; под ред А.Д.Хонкина. – М.:Мир, 1984.-464с.

47. Grosch C.E., Salwen H. The stability of steady and time development plane Poiseuille flow // J.fluid mech. – 1968. -№1(34). –P.177-205.

48. Gottlieb D., Turkel E. On time discretization for spectral methods // Stud.appl.math. – 1980. - №1(63). –P.67-86.

49. Kleiser L. Spectral simulation of laminar-turbulent transition in plane Poiseuille flow and comparison with experiments // Lect. notes phys. – 1982. №170. –P.280-285.

50. Orszag S.A., Patera A.T. Secondary instability of wallbounded shearflows // J.fluid mech. – 1983. №128. –P.347-385.

51. Gottlieb D., Lustman L. The Dufort-Francl Chebyshev method for parabolic initial boundary value problems // Compyuters and fluids. -1983. - №2(11). –P.107-120.

52. Bridges T.J.,Morris P.J. Spectral calculations of the spatial stability of nonparallel boundary layers // AIAA paper. -1984.- №487. –P.1-8.

53. Ku H.G., Hatziavramids D. Solutions of the two-dimensional Navier – Stokes equations by Chebyshev expansion methods // Compyuters and fluids. - 1985. - №1(13). –P.99-113.

54. Fulton S.R., Taylor G.D. On the Gottlieb-Turkel time filter for Chebyshev spectral methods // J.comput. phys. -1984. №2(55). –P.302-312.

55. Gottlieb D. The stability of pseudospectral-Chebyshev methods // Math.comput. -1981. -№153(36). –P.107-11

ILOVA

ELEKTRON HISOBLASH MASHINALARI UCHUN YARATILGAN
DASTURNING RASMIY RO'YXATDAN O'TKAZILGANLIGI TO'G'RISIDAGI

GUVOHNOMA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ADLIYA VAZIRLIGI

№ DGU 32164

Ushbu guvohnoma O'zbekiston Respublikasining "ELEKTRON HISOBLASH MASHINALARI UCHUN YARATILGAN DASTURLAR VA MA'LUMOTLAR BAZALARINING HUQUQIY HIMOYASI TO'G'RISIDA"gi Qonuniga asosan quyidagi elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturga berildi

**Nochiziqli koeffitsentlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik
masalasini sonli modellashtirish**
(DASTUR NOMI)

Talabnoma kelib tushgan sana: 26.12.2023 (210) Talabnoma raqami: DGU 202311209

Huquq egasi(lari): TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI, UZ; YULDASHEV SHAMSIDDIN MAMARAJABOVICH,
UZ; IKROMOV AKMAL OLIMOVICH, UZ

Dastur muallifi(lari): YULDASHEV SHAMSIDDIN MAMARAJABOVICH, UZ; IKROMOV AKMAL OLIMOVICH, UZ

O'zbekiston Respublikasining Dasturiy mahsulotlar davlat reyestrda
29.12.2023 y. ro'yxatdan o'tkazildi.

