KIRISH

Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi:

Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar, aksariyat hollarda, kvazichiziqli temperaturaviy jarayonlarni modellashtirish, issiqlik tarqalish masalalarini sonli modellashtirish va taqribiy yechimlarini qurish, taqribiy yechimlarning aniqligi darajasini oshirish masalalariga keltiriladi. Kvazichiziqli tenglamalar bilan gazlar dinamikasi masalalarida, plazmalarda kechadigan yuqori haroratli jarayonlarda issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning (va zichlikning) chiziqli bo‘lmagan funksiyasidan, bundan tashqari bir qator masalalarda temperatura gradientining chiziqli bo‘lmagan funksiyasidan iborat bo‘ladi, agarda issiqlik kimyoviy reaksiya sababli ajralib chiqayotgan bo‘lsa, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining o‘ng tomoni bo‘lgan issiqlik manbalari temperaturaga bog‘liq bo‘ladi, ayrim hollarda muhitning issiqlik sig‘imi ham temperaturaga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Shu sababli, kvazichiziqli jarayonlarni modellashtirish va ularni sonli hisoblash usullarini ishlab chiqish, ushbu sohadagi tadqiqotlarning muhim ob’ektidir. Shu maqsadda, tabiiy jarayonlarni qamrab oluvchi chiziqli bo‘lmagan matematik modellarni qurish, samarali sonli yechish sxemalari va algoritmlarini qurish hamda ularning dasturiy ta’minotini yaratish amaliy matematika sohasidagi dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Dunyoda amaliy tadbiqqa ega bo‘lgan ko‘plab fizika, tibbiyot masalalarini matematik modellashtirish, matematik-fizika masalalaridagi muammolarni tadqiq qilish, ularni ayirmali sxemalarda qo‘llash, sonli yechimini topish hamda amaliy natijalarga ega bo‘lish, ularni amaliyotda qo‘llashga doir ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. «vaqt o‘tishi, hayot o‘zgarishi bilan odamlarning iste’mol talabi va ehtiyojlari ham muttasil ortib bormoqda. Yerimiz, suvimiz esa ko‘paymasligi tabiiy, albatta.

Bunday resurslar nafaqat bizda, butun dunyoda cheklangan. Binobarin, biz endi aqlimizni, intellektual salohiyatimizni, bilim va tajribamizni oshirishimiz, aynan ana shu omillarni iqtisodiy o‘sish nuqtalari va resurs manbalariga aylantirishimiz shart.»

Tadqiqot obyekti va predmetining belgilanishi:

Sifatida bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas va chiziqli bo‘lmagan koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalari olingan.

Tadqiqotning predmeti amaliy masalalarni yechishga yo‘naltirilgan ayirmali sxemalar hamda spektral-to‘r metodi yordamida ularni yechish algoritmlarini ishlab chiqish va dasturiy ta’minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari:

Tadqiqotning maqsadi gazlar dinamikasi hamda kvazichiziqli temperaturaviy jarayonlarni sonli modellashtirish masalalarini sonli yechish algoritmi va kompyuter dasturini ishlab chiqish hamda berilgan matematika-fizika masalalarni yechish.

Tadqiqotning vazifalari:

-Tadqiqot muammosiga oid adabiyotlarni o‘rganib chiqish va ayirmali sxemalar hamda spektral-to‘r metodlarini o‘rganishni ilmiy asoslab berish;

-Ta’lim tizimida tadqiqot jarayoniga oid mavjud bo‘lgan milliy va xorijiy ilmiy ish va maqolalarni tahlil qilish va tadqiqot ishiga mos dastur rejani ishlab chiqish;

-Kvazichiziqli tenglamalarni ayirmali sxema hamda spektral-to‘r metodlari yordamida sonli yechish algoritm va kompyuter dasturini ishlab chiqish.

-Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun statsionar xolda differensial masalani qo‘yish va xususiy holda ba’zi analitik yechimlarni topish;

-Kvazichiziqli issiqlik o‘tkalarlazuvchanlik tenglamasi uchun ayirmali sxemalarni tuzish yechish algoritmlarini ishlab chiqish;

-Bo‘lakli-o‘zgarmas koeffitsientlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini ayirmali sxemalar bilan approksimatsiyalash, ayirmali sxemalarni oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to‘r metodlari bilan yechish algoritmini ishlab chiqish;

-Matlab Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, hisoblash natijalari hamda grafiklarini taqqoslash.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas va chiziqli bo‘lmagan koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarining sonli yechimlari qurilgan;

bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas va chiziqli bo‘lmagan koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalari uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli yechish algoritmlari ishlab chiqilgan.

bo‘lakli o‘zgarmas koeffitsientlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarni yechish metodlarini chuqur tahlil etgan holda kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarini ayirmali hamda spektral-to‘r metodlarini birgalikda qo‘llab sonli yechish algoritmlarini chiqarish, matlab amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, sonli hisoblashlar o‘tkazish orqali hisoblash taqqoslash, amaliy masalalarni yechishda hisoblash eksperimenti bosqichlarini to‘liq o‘tkazish ko‘nikmalarni egallashdan iborat. metodologik jihatdan yangicha talqin berishga harakat qilinganligi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari:

1.Chiziqli differensial masalaning qo‘yilishi. chiziqsiz to‘lqinlar evolyutsiyasi matematik modellari, dispersiyaga ega bo‘lgan nochiziqli muhitlarda to‘lqinlarning tarqalishi.

2. Chebishev ko‘phadlari va ularning xossalari keltirilishi, Kortevega-de Vriza tenglamasi spektral metodi bilan sonli modellashtirish masalalari keltirilishi. Kortevega-de Vriza tenglamasi uchun qo`yilgan boshlang`ich-chegaraviy masala spektral metodi bilan sonli modellashtirilishi.

3. Uzlukli o‘zgarmas koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi ayirmali usullar va spektral-to‘r usuli bilan sonli modellashtirilish. Mazkur bobda dastlab differensial masala qo‘yilishi. Qo‘yilgan masalani sonli modellashtirish uchun ayirmali sxemalar hamda spektral-to‘r usullari assosida sonli yechish algoritmi ishlab chiqilishi, algoritmga mos dasturiy ta’minot tuzilishi, olingan sonli natijalar tahlil etilishi. Hosil bo‘lgan “differensial-algebraik” tenglamalar sistemasini ikkita avtonom sistemalarga keltirish uchun chiziqli xosmas almashtirishlar qo‘llanilishi. Usullarning hisoblash algoritmlari ishlab chiqilishi, C++ dasturlash tilida tuzilgan dastur asosida harakterli parametrlarning turli

qiymatlarida keng qamrovli hisoblash tajribalari o‘tkazilishi, olingan sonli natijalar va ularning tahlili keltirilishi.

Tadqiqot mavzusi bo‘yicha qisqacha adabiyotlar tahlili:

Mavzuga oid adabiyotlarda amaliy matematika va axborot texnalogiyalari sohasidagi yirik olimlarnng quydagi asarlaridan foydalanildi:

1) Н.Н.Яненко, Б.Л.Реждественский Системы квазилинейных уривнений
2) А.А.Самарский , Ю.П.Попов Разнестные схемы газавой динамики
3) А.А.Самарский Теория разностных схем

Ushbu adabiyotlarda keltirilgan bo‘lakli-o‘zgarmas koeffitsientlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarini yechish metodlari tahlil qilindi, hamda aniq ko‘rinishda berilgan chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini chiziqli bo‘lmagan ayirmali sxemalar yordamida approksimatsiyalash, ayirmali sxemaga oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to‘r metodlarini qo‘llab, uni yechish algoritmi ishlab chiqildi,

Tadqiqot bo‘yicha nashriy va elektron adabiyotlar ro‘yxatini tayyorlashda asosan internet tizimidagi axborot qidiruv tizimlaridan, hamda maxsus saytlar va impakt faktori yuqori bo‘lgan ilmiy jurnallardan foydalanildi.

Tadqiqotda qo‘llanilgan uslublarning qisqacha tavsifi:

Tadqiqotda bo‘lakli-o‘zgarmas koeffitsientlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarini approksimatsiyalash uchun chiziqli bo‘lmagan ayirmali sxemalar tatbiq etilgan, ayirmali sxemalarni yechish uchun iteratsion usullar qo‘llanilgan, hamda spektral-to‘r metodi yordamida sonli hisoblashlar olib borilgan.

Tadqiqot natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati:

Bo‘lakli-o‘zgarmas koeffitsientlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalalarini yechishga aynan bir vaqtda uchta metodni (oshkor va oshkormas hamda spektral-to‘r) qo‘llash ayirmali sxemalarni nazariy tahlil qilish, iteratsiya metodlarining yaqinlashishini aniqlash ishning nazariy ahamiyatini bildiradi. chiziqli bo‘lmagan masalaga ayirmali, oshkor va oshkormas sxemalar hamda spektral-to‘r metodlarini qo‘llab yechish algoritmlarini chiqarish, Matlab

Amaliy dasturlar paketi hamda C++ dasturlash tilida dastur tuzish, sonli hisoblashlar o‘tkazish orqali hisoblash eksperimentining barcha bosqichlarini to‘laqonli namoyish etish tadqiqotning amaliy ahamiyatini ko‘rsatadi.

Dissertatsiya tarkibining qisqacha tavsifi:

Kirish qismida mavzuning dolzarbligi yoritilgan;

Dissertatsiyaning birichi bobida kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun nazariy bilimlar va olib borilgan ilmiy tadqiqot ishlari keltirilgan va Kortevega-de Vriza tenglamasining yechimlari olingan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida Kortevega-De Vriza tenglamasini spektral metodlar yordamida yechish usullari keltirilgan. Differensial masala qo‘yilgan va uning yechish usuli keltirilgan.Chebishev ko‘phadlari haqida ma’lumot keltirilgan.

Dissertatsiyaning uchinchi bobida bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffitsientlarga ega kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi matlab dasturida grafiklari va C++ dasturida hisoblash algoritmlari keltirilgan.

Dissertatsiya har bir bobida xulosalanib umumiy xulosa ham keltirilgan.

Dissertatsiyada kirish,uchta bob,o‘n bitta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro‘yxati keltirilgan. Dissertatsiyaning hajmi 78 betni tashkil etadi.

I BOB. KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK O`TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINI MODELLASHTIRISHNING NAZARIY ASOSLARI

Ushbu bobda chiziqsiz to‘lqinlar evolyutsiyasi matematik modellari, dispersiyaga ega bo‘lgan nochiziqli muhitlarda to‘lqinlarning tarqalishi, dispersiyaga ega bo‘lgan nochiziqli muhitlarda bunday to‘lqinlarning harakatini tavsiflovchi Kortevega-de Vriza tenglamasi hamda uning modifikatsiyalangan shakli haqida bayon qilinadi.

1.1-§. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar haqida tushuncha.

Har xil obektlarni modellar yordamida tadqiq qilishning ko‘pgina masalalari chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishga olib keladi. Xususan,elektron,radioelektronva hisoblash tehnikasi qurilmnalarini tadqiq qilishda,tebranishlar nazariyasi,suyuqlik va gaz mehanikasi,kimyo-tehnologiya va boshqa sohalar masalalarini modellar yordamida yechishda ana shunday amaliy masala yuzaga keladi.Quyida chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari bilan tanishamiz.

Algebraik va transendent tenglamalar, ularni yechishning geometrik talqini dastlabki tushunchalar.

Ushbu

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

Chiziqli bo‘lmagan tenglamaning ildizini (ildizlarini) topish talab etiladi. Agar f(x) funksiya ko‘phad bo‘lsa, u holda (1.1) tenglama n–darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya’ni

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) = a^0 x_n + a^1 x_n - 1 + ...+ a^{n-10} x + a^n = 0 \tag{1.2}$$

bunda $a^0, a^1, ..., a^{n-1}, a^n$ berilgan $\mathrm{P}_n(x)$ ko‘phadning koeffisiyentlari.Boshqacha aytganda,algebraik tenglama deb algebraik (butun, ratsional, irratsional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamaga aytiladi.

Darajasi to‘rtdan yuqori bo‘lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffisiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko‘phadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko‘phad koeffisiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Quyiroqda n–darajali algebraik tenglama, ya'ni $P_n(x)$ ko'phadning ildizlari haqida kengroq tushunchalar berilgan.

Algebraik bo'lmagan har qanday tenglama transendent tenglama (transendent funksiyalar: ko'rsatgichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va boshqa funksiyalarni o'z ichiga olgan tenglama) deb ataladi.

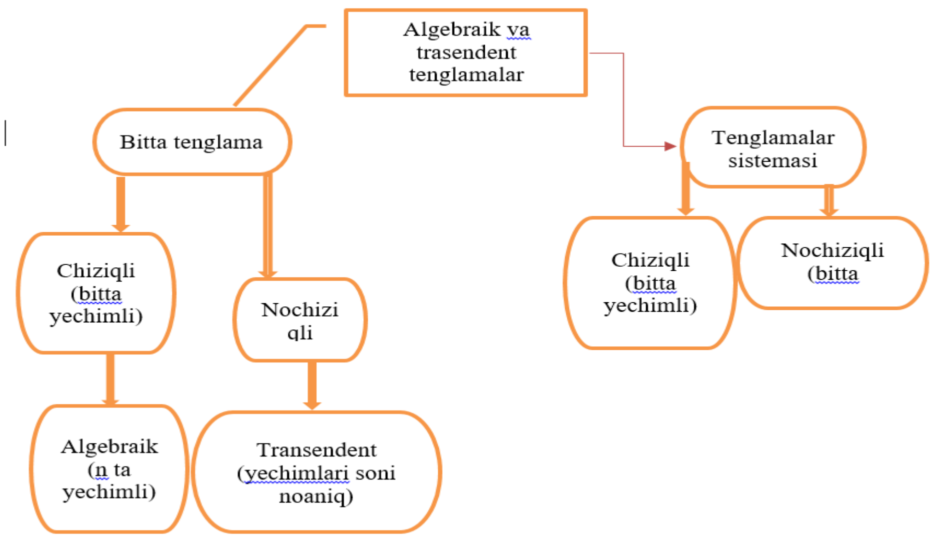
Masalan,

$$(2.1x+1)/(0.3x+1)\sin(2x)-0.4x\cdot 2=1$$

yoki

$$2\cdot 0.1x-6\cdot \lg(44-x)+5.5\sin(x)=0$$

Kamdan kam hollardagina transendent tenglamalar ildizlarining aniq qiymatini topish mumkin. Transendent tenglamalar birorta ham haqiqiy ildizga ega bo'lmasligi, chekli yoki cheksiz sondagi ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, yuqorida keltirilgan misollardan birinchi tenglama 7 ta, ikkinchisi esa 5 ta haqiqiy ildizga ega (buni mustaqil aniqlang, masalan, Shularga ko'ra tenglamaning taqribiy ildizlarini topish usullari va ularning aniqlik darajasi muhim ahamiyatga ega. Shunday qilib, algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo'linadi: chiziqli (bitta yechimli) va chiziqli bo'lmagan (bir yoki bir nechta yechimli) tenglamalar. Chiziqli bo'lmagan tenglamalar esa: algebraik (yechimlari n ta) va transendent (yechimlari soni noma'lum) tenglaalarga bo'linadi (1.1-rasm)



1.1-rasm.Tenglamalar klassifikatsiyasi.

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo‘linadi: to‘g‘ri (yoki analitik) va taqribiy (iteratsion) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha yechimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga ushbu $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning yechimlarini topishni misol qilib keltirish mumkin. Bu tenglamaning yechimlari quyidagicha:

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo‘linadi: to‘g‘ri (yoki analitik) va taqribiy (iteratsion) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha yechimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga ushbu $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning yechimlarini topishni misol qilib keltirish mumkin. Bu tenglamaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish bir necha bosqichga bo‘linadi: ildizlarning mavjudligini, sonini, xarakterini va ularning joylashishini tekshirish; ildizlarni ajratish; ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish, ya’ni tenglamaning yagona ildizi mavjud bo‘lgan yetarlicha kichik [a,b] kesmani aniqlash (dastlabki yaqinlashuvchi ildiz); ildizlarning barchasini yoki ularning bir qismini talab qilingan aniqlikda topish.

Dastlabki uchta bosqichda analitik yoki grafik usuldan (ba’zida tadqiqot obyekti yoki hodisaning fizik ma’nosidan) foydalanish mumkin. Bunda quyidagi holatlar kuzatiladi: ildiz yagona; cheksiz ko‘p yechimlar; ildiz yo‘q; bir nechta yechimlar mavjud bo‘lib, ulardan ba’zilari haqiqiy, ba’zilari esa mavhum; ildizlar karrali; ildizlar bir biriga juda yaqin va dastlabki yaqinlashishni topish murakkab.

Oxirgi bosqichda esa biror taqribiy (iteratsion) usuldan foydalaniladi, bunda dastlabki tenglamaning ildizini topish juda murakkab bo‘lgan holda bu tenglama uning ildiziga teng yoki unga juda ham yaqin joylashgan ildizli sodda tenglamaga ham almashtirilishi (masalan, transendent tenglamani algebraik tenglamaga almashtirish) mumkin.

Tenglamani yechishning geometrik talqini. Tenglamaning ildizlari har xil bo‘lishi mumkin. Geometrik nuqtai nazardan bu x ildiz $y = f(x)$ funksiya grafigining o_x abssissa o‘qi bilan kesishish nuqtasini bildiradi.

Agar birinchi tartibli hosila $f^{'}(x) \neq 0$ bo‘lsa,

u holda x – oddiy ildiz, aks holda esa u karrali ildiz deb ataladi.

Agar barcha k< ε shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida

$$| f(x^{n+1}) < \varepsilon |$$

va

$$| x^{n+1} - x^{n} < \varepsilon |$$

shartlar bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta’kidlaymizki, bir tomonlama usullar qo‘llanilayotganda ko‘proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi qo‘llanilayotgan taqribiy usullarning samaradorligini taqqoslashda muhim ahamiyatga ega. Iteratsion usul m-tartibga (yoki m – yaqinlashish tezligiga) ega deyiladi, agar m eng katta musbat son bo‘lib, uning uchun shunday q>0 – chekli musbat son mavjud bo‘lsaki, u ushbu $| x^{n+1} - x | \leq q | x^{n} - x | m$ shartni qanoatlantirsa $| x^{n} - x |$ miqdor iteratsiyaning bajarilayotgan qadamidagi absolyut xatosi, q o‘zgarmas son asimptotik xatoning konstantasi deb ataladi. Bu q o‘zgarmas son f(x) funksiyaning x = 0 nuqtadagi hosilasi orqali baholanadi. Agar m=1 va q $\in$ (0;1) bo‘lsa, u holda qo‘llanilayotgan usul chiziqli yaqinlashish tezligiga ega deyiladi (ba’zida bu holdagi usul maxraji q ga teng bo‘lgan geometrik progressiya tezligi bilan yaqinlashadi deyiladi). Agar baholash

$$| x^{n-1} - x | \leq qn + 1 | x^{n} - x | m, n \to \infty da$$

$$q^{n} \to 0$$

Tenglamani yechishning taqribiy (iteratsion) usullari va iteratsion jarayon tushunchalari. Tenglamani yechish uchun qo‘llaniladigan taqribiy (iteratsion) usullar quyidagilar: kesmani ikkiga bo‘lish usuli (dixotomiya usuli); proporsional bo‘laklar usuli (vatarlar usuli); urinmalar usuli (Nyuton usuli); oddiy iteratsiya usuli; kesuvchi chiziqlar usuli; kombinatsiyali usul (bir necha usulning uyg‘un birikmasidan tuzilgan usul); kesimlar usuli (chiziqli interpolyatsiya qoidasi); Steffensen usuli (EytkenSteffensen usuli) va hokazo.

Dastlabki $f(x)=0$ tenglamani

$\phi(x)=x+g(x)\cdot f(x)$ almashtirish orqali unga ekvivalent bo‘lgan ushbu $x=\phi(x)$ tenglamaga keltiramiz, bunda g(x) – ishorasini o‘zgartirmaydigan ixtiyoriy uzluksiz funksiya.

Iteratsion usullarda yechimning dastlabki x^0 ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirib boriladi. Natijada yechimning $x^0, x^1, x^2 .... x^n$ ketma-ketligi hosil qilinadi. Tenglamani yechishning iteratsion usuliga ko‘ra uning ildiziga yaqinlashuvchi $\{x^n\}$ ketma-ketlik $\lim\limits_{x^n} = 0 \to \infty$ tenglikning bajarilishidan chiqariladi.

Agar bunda x^n ni hisoblash uchun undan oldin hisoblangan bitta x^n yaqinlashshdan foydalanilsa, ya’ni $x^{n+1}=\phi^n(x^n)$, u holda bu usul bir nuqtali (bir qadamli) yoki oddiy iteratsiya usuli, aks holda esa, ya’ni oldin hisoblangan birnechta yaqinlashishdan

$$x^{n+1}=\phi^n(x^n, x^{n+1}, x^{n-2}, ...)$$

kabi foydalanilsa, u holda bu usul ko‘p nuqtali (ko‘p qadamli) iteratsiya usuli deb ataladi. Agar bunda φn funksiya n dan bog‘liq bo‘lmasa, jarayon statsionar, aks holda esa nostatsionar deb ataladi. Masalan, oddiy iteratsiya usuli statsionar va bir qadamli usul bo‘lib, birinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi, Nyuton usuli esa statsionar va bir qadamli bo‘lib, ikkinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi.

Agarda bunda $\{x^n\}$ ketma-ketlik n→∞ bo‘lganda aniq x yechimga bir tomonlama (chapdan yoki o‘ngdan yaqinlashsa – bir tomonlama usul) yoki ikki tomonlama (har ikkala tarafidan yaqinlashsa – ikki tomonlama usul) intilsa, iterasiya jarayoni yaqinlashadi deyiladi. Faraz qilaylik, ε - ildizni topish talab qilinayotgan absolyut aniqlik bo‘lsin. Hisoblash jarayonining tugallash kriteriyasi: hisoblash jarayoni ikki tomonlama yaqinlashishida

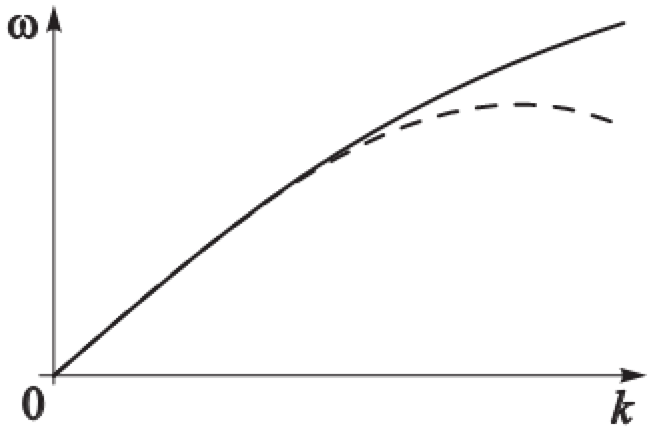
$|x^{n+1} - x^n| < \varepsilon$ shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida

$|f(x^{n+1})| < \varepsilon$ va $|x^{n+1} - x^n| < \varepsilon$ shartlar bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta’kidlaymizki, bir tomonlama usullar qo‘llanilayotganda ko‘proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

1.2-§. Statsionar chiziqli bo’lmagan to’lqinlar harakati. Modifikatsiyalashgan Korvega-de Vriza tenglamasi

Yuqori chastotali sohada dispersiya bilan konservativ muhitni qaraylik. Uzun to'lqinli chegarada (k kichik) $\omega(k)$ning dispersiya nisbatlarini Teylor qatoriga yoyish mumkin va kengaytmani ikkita had bilan cheklaymiz (1.1-rasm)

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 + \ldots . \quad (1.1)$$



1.1-rasm. Yuqori chastotali dispersiyaga ega bo'lgan muhitning dispersiya xarakteristikasi (uzluksiz egri chiziq) va (1.1) bilan approksimatsiyasi (shtrixli chiziq)

Dispersiya qonuni (1.1) ga mos keladigan chiziqli tenglama quyidagi shaklga ega

$$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

c_0 tezlik bilan harakatlanuvchi koordinatalar tizimiga o'tib (1.2) tenglamai

$$u_t + uu_x = 0$$

chiziqli bo‘lmagan tenglama bilan birlashtirib, quyidagi Korteveg-de Vriza (Kordevega-de Vriza) tenglamalaridan biriga kelinadi

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \qquad (1.3)$$

bu yuqori chastotali dispersiyali muhitda kuchsiz nochiziqli uzun to‘lqinli tebranishlar evolyutsiyasini tavsiflaydi. KdV tenglamasi ko‘plab fizik tizimlarni o‘rganishda namoyon bo'ladi, masalan, sayoz suvdagi gravitatsiya to‘lqinlari, plazmadagi ion-akustik to‘lqinlar, aylanma suyuqlikdagi Rossbi to‘lqinlari, chiziqli bo‘lmagan elementlarni o‘z ichiga olgan elektr zanjirlaridagi to‘lqinlar va boshqalar.

Kubik chiziqli bo‘lmagan holda

$$v_{ph} + c_0 + a_1 u + a_2 u^2 + ...$$

(1.2) tenglamaning nochiziqli analogi quyidagi tenglamadan iborat bo‘ladi

$$u_t + c_0 u_x + a_1 uu_x + a_2 u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \ldots$$

Yangi $u^{'} = \sqrt{a_2 \cdot (u + a_1 / 2 \cdot a_2}$ o‘zgaruvchini kiritish orqali quyidagiga ega bo’lamiz:

$$u^{'}{}_t + (c_0 - \frac{a_1}{4a_2}) \cdot u'_x + (u^{'})^2 u^{'}{}_x + \beta u^{'}{}_{xxx} = 0.$$

Tezlik bilan harakatlanuvchi $(c_0 - \frac{a_1}{4a_2})$ mos yozuvlar tizimiga o‘tamiz va shtrixlarni inobatga olmay, modifikatsiyalangan Korteveg-de Vriza tenglamasiga kelamiz.

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \qquad (1.4)$$

Kordevega-de Vriza tenglamasini to‘g‘ri va qarama-qarshi yo'nalishda tarqalishga imkon beruvchi tizimlarga umumlashtiramiz. Dispersiya munosabatini kvadratga keltiramiz (1.1):

$$\omega^2 = (u_t k - \beta k^3)^2 \approx c_0{}^2 k^2 - 2c_0 \beta k^4 + ... \qquad (1.5)$$

Dispersiya qonuni (1.6) ga mos keladigan chiziqli tenglama quyidagidan iborat:

Bu yerga

$$u_{tt} - c_0{}^2 u_{xx} - 2ac_0(uu_x)_x = 0$$

tenglamadan chiziqli bo‘lmagan hadni qo‘shib, $\begin{aligned} u^{'} &= 2ac_0 u, \\ \beta^{'} &= 2c_0\beta \end{aligned}$

o‘zgartirishni amalga oshirib, shtrixlarni qoldirib, quyidagiga ega bo’lamiz

$$u_{tt} - c_0{}^2 u_{xx} - (uu_x)_x + \beta u_{xxxx} = 0 \qquad (1.6)$$

Bu tenglama **Bussinesk tenglamasi** deb ataladi. [5-7]

Dispersiya, dissipatsiya kabi, to‘lqinlarning uzilishining oldini oladi. Fizik jihatdan, bu turli xil spektral komponentlarning turli tezliklarda tarqalishi bilan bog'liq bo‘lib, bu cheksiz tez profil o'zgarishlarining paydo bo‘lishiga olib keladigan chiziqli bo'lmagan effektlarning to‘planishini cheklaydi [8-10]. Buni spektral yondashuv yordamida tushuntiramiz.

$$\mathrm{u} = \varepsilon \mathrm{u}^{(1)} + \varepsilon^{(2)} u^{(2)} + \varepsilon^{(3)} u^{(3)}$$

Ko‘phadni (1.3) Kordevega-de Vriza tenglamasiga qo‘yib, ε tartibida quyidagini olamiz

$$u^{(1)}{}_t = -\beta u_{xxx}{}^{(1)}$$

Bu tenglamani

$$u(x, t=0) = \varepsilon a \sin(kx)$$

boshlang’ich shart bilan yechib, quyidagini topamiz

$$u^{(1)} = a \sin(kx + \beta k^3 t)$$

Bundan tashqari, ε^2 tartib hadlarini inobatga olib, quyidagiga ega bo’lamiz

$$u_t^{(1)} = -u^{(1)} u_x{}^{(1)} - \beta u^2{}_{xxx} = -\frac{a^2 k}{2} \sin(2kx + 2\beta k^3 t) - \beta u^{(2)}{}_{xxx} \qquad (1.7)$$

Tenglamaning yechimini $u^{(2)} = v_1 + v_2$ ko‘rinishda qidiramiz, bu yerda

$v_1 - \cos(2kx + 2\beta k^3 t)$ ga proporsional bo‘lgan bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning alohida yechimini almashtirib topamiz.

$$v_1 = -\frac{a^2}{12\beta k^2} \cos(2kx + 8\beta k^3 t)$$

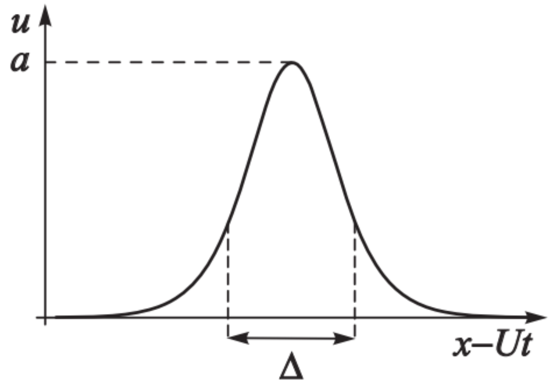
Bir jinsli v_2 tenglamaning yechimini shunday tanlaymizki, $u^{(2)}(t=0)=0$ boshlang‘ich sharti qanoatlantiriladi

$$v_2 = \frac{a^2}{12\beta k^2}\cos(2kx + 8\beta k^3 t)$$

Shunday qilib, biz natijada quyidagilarga ega bo’ldik:

$$u^{(2)} = -\frac{a^2}{6\beta k^2}\sin(3\beta k^3 t)\sin(2kx + 5\beta k^3 t),$$

ya'ni garmonika amplitudasi vaqti-vaqti bilan vaqtga bog‘liq ekanligini anglatadi.



1.2-rasm. Kortevega-de Vriza tenglamasining solitoni

Sekulyarlikning yo‘qligi yana to‘lqin uzilishi sodir bo‘lmasligini ko‘rsatadi. Chiziqlimaslik va dispersiya o‘rtasidagi raqobat statsionar to‘lqinlarning paydo bo'lishiga olib keladi, ular orasida yakka to‘lqinlar yoki solitonlar ko‘rinishidagi yechimlar alohida muhim rol o‘ynaydi[10-14]. Kordevega-de Vriza solitonining ko'rinishi 1.2-rasmda ko'rsatilgan. Keling, (1.3) tenglamadagi chiziqli bo‘lmagan atama dispersivlik bilan muvozanatlangan bo‘lishi kerak deb faraz qilib, uning xarakterli parametrlarini baholaylik:

$$\frac{u^2}{2} \sim -\beta u_{xx} \tag{1.8}$$

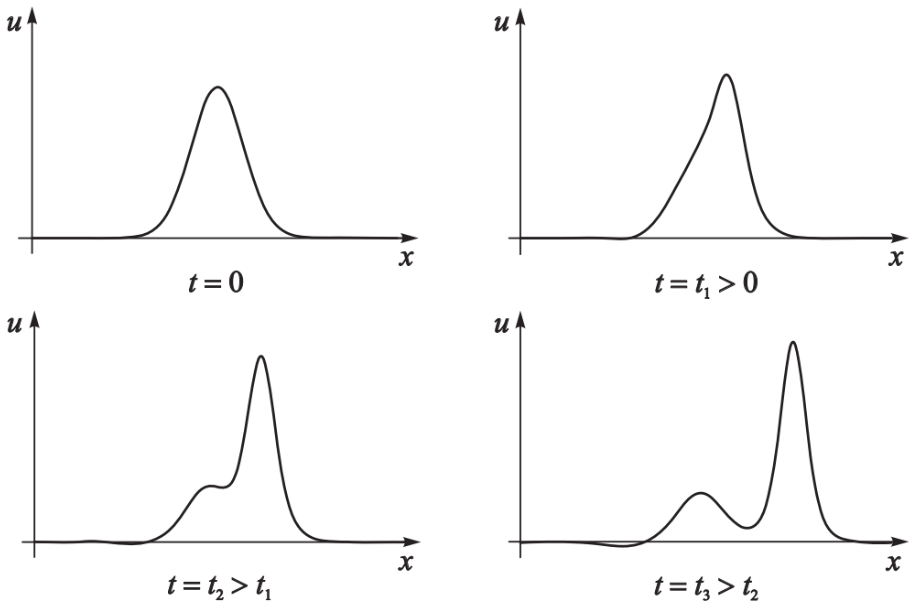
Biz a soliton amplitudasini va Δ xarakterli kenglikni kiritamiz. Keyin,

$$\frac{u^2}{2} \sim \frac{\beta a}{\Delta^2}$$

munosabatlaridan kelib chiqqan holda, biz solitonlar parametrlari orasidagi aloqaga ega bo‘lamiz

$$\frac{a\Delta^2}{2\beta} = const$$

Oxirgi nisbatdan kelib chiqadiki, soliton qanchalik baland bo‘lsa, u shunchalik tor bo'ladi.



1.3-rasm Solitonlar hosil bo‘lishi bilan tugaydigan dispersiya bilan chiziqli bo‘lmagan muhitda dastlabki buzilishlar evolyutsiyasi.

1.3-rasmda Kortevega-de Vriza tenglamasi doirasida dastlabki buzilish evolyutsiyasi ko‘rsatilgan. Bunday holda, burilish to‘xtaydi va bir yoki bir nechta solitonlarning shakllanishi sodir bo‘ladi, ularning soni dastlabki shartlar bilan belgilanadi.

Past chastotali dispersiyaga ega bo‘lgan muhitni, masalan, dispersiya munosabatini

$$\omega^2 = \omega^2{}_0 + c^2{}_0 k^2 . \qquad (1.9)$$

bilan tavsiflash mumkin (1.4 - rasm).

Dispersiya qonuni (1.9) Klein–Gordon–Fok tenglamasiga mos keladi:

$$u_{tt} - c^2{}_0 u_{xx} + \omega^2{}_0 u = 0\,.$$

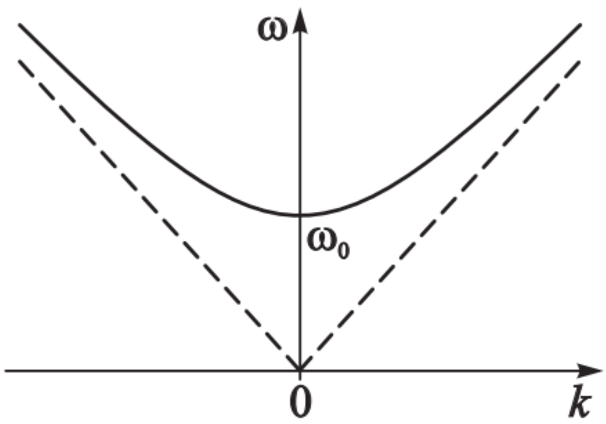
Bu, xususan, to‘lqinning tabiiy chastotali ω_0[1, 10] chiziqli osilatorlar zanjiri muhitida tarqalishini tavsiflaydi.

Ushbu tenglamaning chiziqli bo‘lmagan analogini osilatorlarni chiziqli bo‘lmagan deb, ($\omega_0 = \omega_0(u)$) ni hisoblash orqali olish mumkin. Umumiy holda, biz chiziqli bo‘lmagan Klein- Gordon tenglamasiga ega bo'lamiz

$$u_{tt} - c^2{}_0 u_{xx} + F(u) = 0$$

bu yerda $F(u)$-qandaydir chiziqli bo‘lmagan funksiya. Asosan $F(u)$=$\omega_0^2 \sin u$ holati alohida qiziqish uyg‘otadi:

$$u_{tt} - c^2{}_0 u_{xx} + \omega^2{}_0 \sin u = 0 \qquad (1.10)$$



1.5-rasm. Past chastotali mintaqada dispersiyali muhit uchun dispersiya diagrammasi.

(1.10) tenglama Sin-Gordon tenglamasi deb ataladi. Bu fizikaning ko‘plab sohalarida juda muhim rol o‘ynaydi, chunki u kristallardagi dislokatsiyalar dinamikasini, ferromagnetikadagi chegara devorlarining harakatini, Jozefsonning taqsimlangan kontaktlaridagi to‘lqinlarni, ikki darajali zarrachalar muhitida Ultra qisqa lazer impulslarining tarqalishini va boshqalarni aniqlaydi. [15]

Byurgers tenglamasi

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

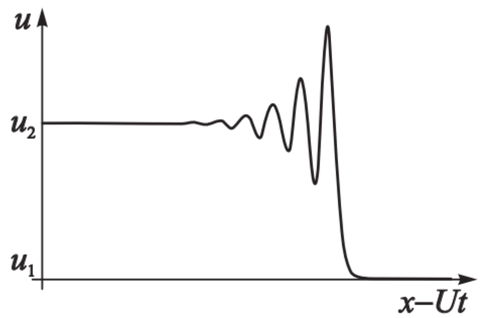
va (1.3) tenglamalarni birlashtirib, biz Korteveg–de Vriza–Burgers tenglamasi (KdVB) deb nomlangan yuqori chastotali mintaqada dissipatsiya va dispersiyaga ega bo‘lgan muhitlar uchun mos etalon tenglamaga kelamiz

$$u_t + uu_x - \beta u_{xxx} = \nu u_{xx} \quad (1.11)$$

Quyidagi chegaraviy shartlari

$$u = \begin{cases} u_1 & x \to \infty \\ u_2 > u_1 & x \to -\infty \end{cases}$$

bo'lgan (1.11) tenglamada statsionar zarba to‘lqinlari shaklida yechimlar mavjud. Eng qiziqarli holatda, dispersiv va dissipativ ta’sirlar bir xil tartibda bo‘lsa, bu to‘lqinlar solitonlar ketma-ketligiga o‘xshash tebranuvchi old frontga ega (1.6-rasm). Ushbu turdagi zarba to‘lqinlari, xususan, plazmadagi magnetosonik va alfven zarba to‘lqinlarini o‘z ichiga oladi [11].



1.6-rasm. Kortevega-de Vriza–Burgers tenglamasining statsionar zarba to'lqini.

Statsionar chiziqli bo‘lmagan to‘lqinlar harakati

Chiziqli bo‘lmagan to‘lqin tenglamalarini o'rganishda birinchi qadam sifatida yechimlar odatda, shaklini o‘zgartirmasdan doimiy tezlikda harakatlanadigan, ya’ni statsionar yugiruvchi to‘lqinlar shaklida ko‘rib chiqiladi.

Matematik jihatdan bu yechimlar *x* va *t* kombinatsiyasida $\xi = x - Ut$

ga bog‘liq bo‘lib, bu yerda U konstanta - to‘lqin tezligidir. Bir tomondan, statsionar to‘lqinlarga bo‘lgan qiziqish hususiy hosilali differensial tenglamalarni oddiy differensial tenglamalarga keltirilishi bilan bog‘liq bo‘lib, ba’zi hollarda analitik tarzda yechish mumkin. Boshqa tomondan, solitonlar, statsionar zarba to‘lqinlari va boshqalar kabi ba’zi statsionar yechimlar nazariy jihatdan chiziqli bo‘lmagan muhitning o‘ziga xos rejimlarida juda muhim rol o‘ynaydi.

Shunday qilib, biz (1.3) Kordevega-de Vriza tenglamasining yechimlarini $u = u(\xi), \xi = x - Ut$ shaklida izlaymiz, bu yerda U=const. U holda (1.3) tenglama

$$\beta u''' + (\frac{u^2}{2} - Uu)' = 0 \qquad (1.12)$$

shaklini oladi, bu yerda shtrixlar ξ bo‘yicha hosilani bildiradi. (1.12) tenglamani bir marta integrallab, biz konservativ chiziqli bo‘lmagan osilator tenglamasiga ega bo‘lamiz[2, 10],

$$u'' = -\frac{dW}{du} \qquad (1.13)$$

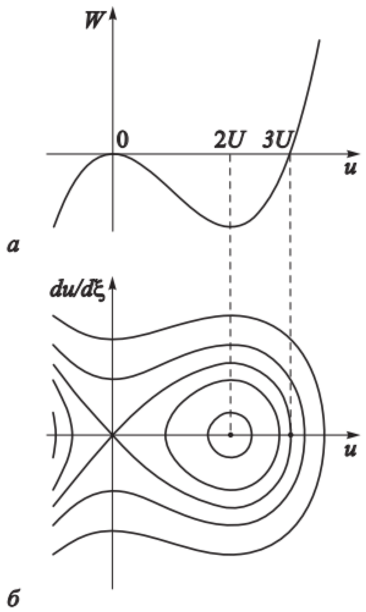
potentsial energiya quyidagiga teng

$$W = -\frac{1}{\beta}(C_u + \frac{Uu^2}{2} - \frac{u^3}{6}) = 0$$

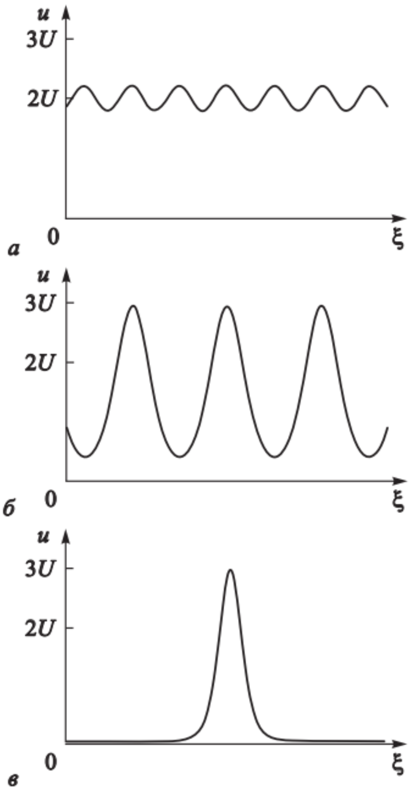
bu yerda C — integral doimiysi. Ushbu funksiya *dW/du=0* tenglama bilan aniqlangan nuqtalarda ikkita ekstremumga ega. Umumiylikni cheklamasdan, biz C=0 ni qo‘yishimiz mumkin, u holda quyidagiga ega bo‘lamiz

$$W = -\frac{1}{2\beta}(Uu^2 - \frac{u^3}{3}) = 0 \qquad (1.14)$$

va u=0 hamda u=2U ekstremal nuqtalar. *W(u)* ning bog‘liqligi (1.7a)-rasmda, (1.13) osilatorning fazaviy portreti (1.7b) - rasmda keltirilgan. Shunday qilib, ikkita muvozanat holati mavjud, ulardan biri (u=0) egar, ikkinchisi u=2U markazdir.



(1.7-rasm) Kordevega-de Vriza tenglamasining statsionar yechimlari uchun potensial energiya (a) va faza portreti (b)



(1.8- rasm) Kortevega-de Vriza tenglamasining statsionar yechimlarining har xil turlari: a - kvazigarmonik davriy to‘lqin; b-knoidal to‘lqin; v-soliton

Faza portretini o‘rganish statsionar yechimlarning mumkin bo'lgan turlarini sifat jihatidan tahlil qilishga imkon beradi. Albatta, harakat chegaralangan bo‘lgan separatris halqa ichida yotgan traektoriyalargina fizik ma’noga ega. Barqaror muvozanat holatiga yaqin joyda osilatorning tebranishlari kuchsiz chiziqli emas, shuning uchun yechim kvazigarmonik statsionar to‘lqindan iborat (1.8a-rasm). Separatris yaqinida harakat kuchli chiziqli bo‘lmagan davriy to‘lqinlar xarakteriga ega (1.8b-rasm), Kortevega va De Vriz knoidal deb nomlanadi. Va nihoyat, separatris bo'ylab harakatlanish yakka to‘lqin — soliton shaklida yechimga to‘g‘ri keladi (1.8v-rasm). Solitonning amplitudasi aniq $a = 3U$, ya’ni soliton qanchalik tez harakat qilsa, u shunchalik yuqori bo'ladi.

Separatorli halqa gomoklinik yoki ikkilamchi asimptotik traektoriya deb ataladi [2, 10], ikkala tomonda bir xil chegaraga (muvozanat holatiga) olib keladi

($\xi \to \pm\infty$) Egar nuqtasiga cheksiz uzoq yaqinlashish va undan uzoqlashish solitonning cheksiz "dumlari" ga to‘g‘ri keladi.

Statsionar yechimlarning aniq shaklini topamiz. (1.13) tenglamaning integrali energiya saqlanish qonunini beradi

$$\frac{(u')^{21}}{2} = \varepsilon - W(u) \qquad (1.15)$$

bu yerda— ε osilatorning umumiy energiyasining ma’nosiga ega bo'lgan integral doimiysi.

Bu yerdan

$$u' = \pm\sqrt{2\varepsilon - \frac{u^3}{3\beta} + \frac{Uu^2}{\beta}}\,. \qquad (1.16)$$

≪ +≫ belgisi yuqori yarim tekislikdagi harakatga mos keladi,<<->> belgisi pastki qismida. Quyidagi boshlang‘ich shartlarni qaraymiz:

$u(0) = u_0, u'(0) = 0$

U holda

$$\varepsilon = -\frac{1}{2\beta}(Uu^2 - \frac{u_0^3}{3})$$

bundan (1.16) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\sqrt{\beta}u' = \pm\sqrt{U(u^2 - u_0^2) - \frac{u^3 - u_0^3}{3}}.$$

.

Ildiz osti ifodani ko‘phadlarga yoyib, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\sqrt{3\beta}u' = \sqrt{(u_0 - u\ \ )(u - u_1)(u - u_2)}. \qquad (1.17)$$

bu yerdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$u_{1.2} = \frac{1}{2}[3U - u_0 \pm \sqrt{3(U + u_0)(3U - u_0)}]$$

Osilatorning harakati $u_1 < u < u_0$ mintaqada sodir bo'ladi, shuning uchun (1.17) tenglamada ildizostidagi ifoda doimiy manfiy emas. Ushbu tenglamaning integrali quyidagini beradi:

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u_0-u)(u-u_1)(u-u_2)}} \qquad (1.18)$$

u funksiya u_1 dan u_0 ga o‘zgarganligi sababli yechimni quyidagicha ifodalaymiz

$$u = u_1 + a\cos^2\varphi \qquad (1.19)$$

bu yerda $u_0 - u_1 = a$. Keyin oddiy o‘zgarishlardan so'ng (1.18) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\xi}{\sqrt{3\beta}} = \frac{2}{\sqrt{(u_0-u_2)}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (1.20)$$

bu yerda $k^2 = (u_0-u_1)/(u_0-u_2)$. (1.20)

tenglama ning o‘ng tomonidagi integral moduli k bo‘lgan birinchi turdagi $F(\varphi;k)$ to‘liq bo‘lmagan elliptik integraldir [42]. Shunday qilib, oshkormas yechim quyidagicha ko’rinishda bo’ladi:

$$\xi = \sqrt{\frac{12\beta}{u_0-u_2}F(\varphi,k)}. \qquad (1.19)$$

munosabatni hisobga olib, u uchun yechimning yakuniy shakliga kelamiz, u ifoda Yakobi elliptik funksiyalari bilan ifodalanadi

$$\begin{aligned} \varphi &= am\left(\sqrt{\frac{u_0-u_2}{12\beta}}\xi;k\right), \\ u &= u_1 + acn^2\left(\sqrt{\frac{u_0-u_2}{12\beta}}\xi;k\right). \end{aligned} \qquad (1.21)$$

bu yerda $am(x,k)$ – Yakobi amplitudasi $F(\varphi,k)$ funksiyaning teskari funksiyasi), $cn(x;k) = \cos\big(am(x;k)\big)$ - Yakobi elliptik kosinusi [42] - knoida. Shuning uchun bu to‘lqinlar knoidal deyiladi. Haqiqiy funksiya cn argument davriy $4K(k)$ bilan davriy bo'lib,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

bu yerda 1-turdagi to'liq elliptik integralidir. Shunday qilib, (1.21) yechim amplitudasi a va uzunligi

$$\lambda = 4\sqrt{\frac{3\beta}{u_0 - u_2}K(k)}$$

bo'lgan davriy to‘lqindir.

Chiziqli chegarada ($a \to 0$) elliptik funksiya k moduli ham nolga intiladi. Bu holat 1.7a-rasmdagi potensial quduq tubiga yaqin joylashgan zaif chiziqli bo‘lmagan tebranishlarga to‘g‘ri keladi, bu yerda $u_{0.1} \approx 2U \pm a/2. u_2 - U$. ekanligini topish qiyin emas. Shunday qilib (1.20) munosabat

$$u \approx u_1 + acn^2(\sqrt{\frac{U}{4\beta}}\xi;0) = 2U + \frac{a}{2}\cos(\sqrt{\frac{U}{\beta}}\xi)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Boshqa chegaralovchi $k \to 1 \cdot (u_{1,2} \approx 0, u_0 \approx 3U$ holatda biz soliton ko‘rinishidagi yechimni olamiz

$$u = a\sec h^2(\xi/\Delta) \qquad (1.22)$$

bu yerda $\Delta = \sqrt{12\beta/a}$ - solitonning xarakteristik kengligi va $a = 3U$ - uning amplitudasi. Yechim profili 1.8a-rasmda ko‘rsatilgan. Shunday qilib, soliton qanchalik baland bo‘lsa, u shunchalik torroq bo‘ladi.

Modifikatsiyalashgan Kortevega-de Vriza tenglamasi

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \qquad (1.23)$$

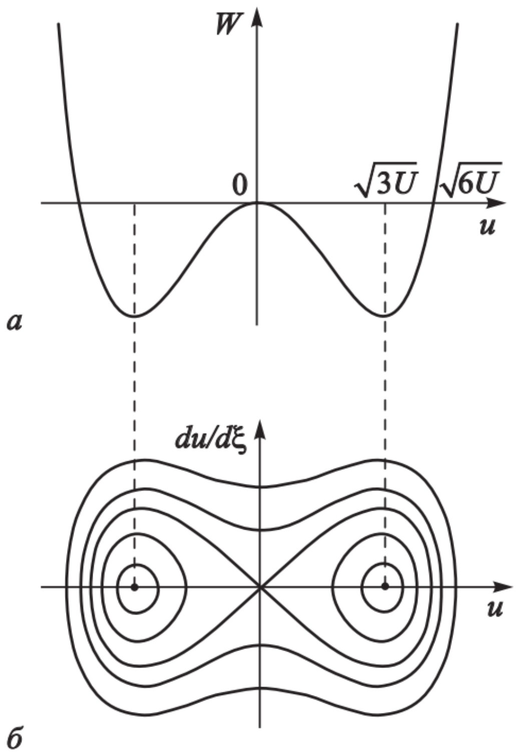
kubik chiziqli bo‘lmagan muhit uchun mos etalon tenglamadir. Biz statsionar to‘lqinlar ko‘rinishidagi yechimlarni o‘rganamiz. (1.23) tenglama quyidagi ko‘rinishga keltiriladi

$$\beta u''' + (\frac{u^3}{3} - Uu)' = 0$$

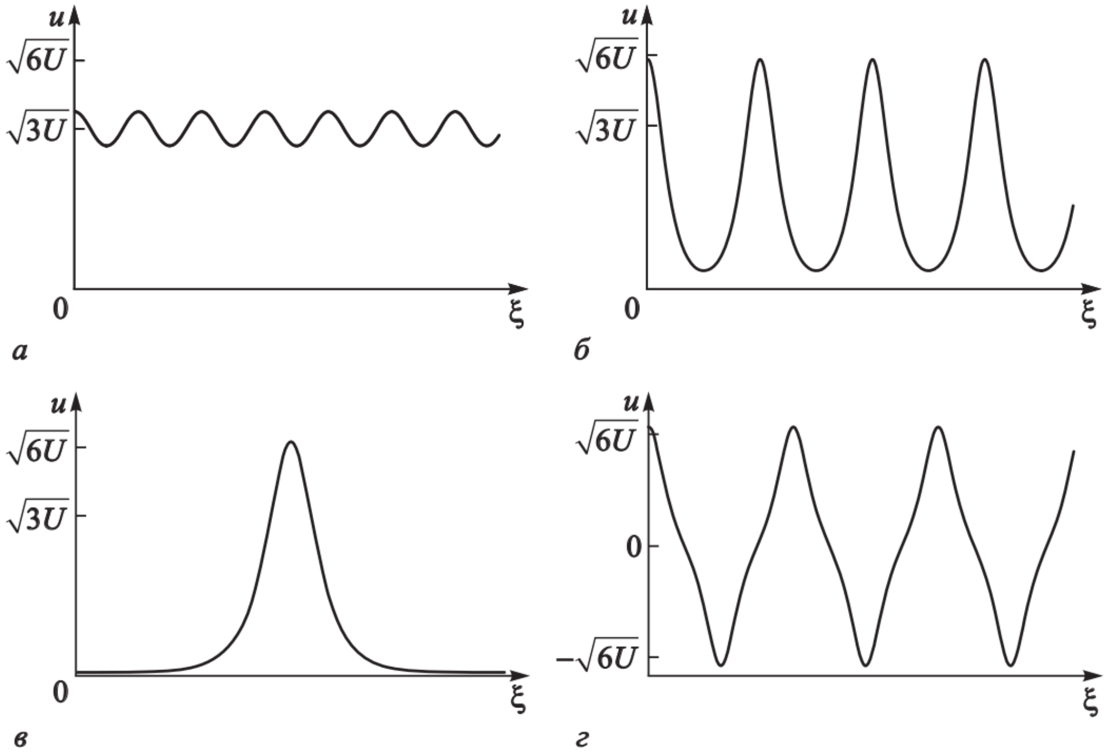
Olingan munosabatning bir karrali integrali potensial energiyaga ega chiziqli bo‘lmagan osilator tenglamasini beradi

$$W = -\frac{1}{2\beta}(Uu^2 - \frac{u^4}{6})\,. \qquad (1.24)$$

Bu yerda yana integral konstantasi nolga teng qilib tanlanadi. Potensial quduqning shakli va osilatorning fazali portreti 1.9a,b-rasmda ko‘rsatilgan. Bu holda, shubhasiz, ikki turdagi solitonlar uchrashi mumkin: amplitudasi (±) ga teng bo'lgan musbat va manfiy qutblilik. Separator halqalari ichidagi traektoriyalar Kordevega-de Vriza tenglamasining mos yechimlariga o'xshash davriy kvazigarmonik yoki knoidal to'lqinlarga mos keladi (1.10a,b-rasm). Separatorli halqalardan tashqaridagi traektoriyalar yechimlarni o'zgaruvchan davriy to'lqinlar shaklida tasvirlaydi, ba’zan esa o‘ta chiziqli deb ataladi (1.10d-rasm). Kvadrat nochiziqli osilatorga kelsak, bu yechimlarning barchasini elliptik funksiyalar bilan ifodalash mumkin [2, 8-bob]. Biroq, biz yechimning soliton shaklidagi aniq shaklini topish bilan cheklanamiz.



1.9-rasm. Modifikatsiyalashgan Kordevega-de Vriza tenglamasining statsionar yechimlari uchun potensial quduq shakli (1.24) (a) va fazali portret (b).



1.10-rasm. Modifikatsiyalashgan Kordevega-de Vriza tenglamasining statsionar yechimlarining har xil turlari: a - kvazigarmonik davriy to‘lqin $\varepsilon \approx -\dfrac{3U^2}{4\beta}$); b - knoidal to‘lqin($\varepsilon \le 0$); c – soliton ($\varepsilon = 0$); d – o‘ta chiziqli bo‘lmagan to'lqin ($\varepsilon \le 0$).

1.9-rasmda (1.15) tenglamadagi soliton mos kelishi ko‘rsatilgan. U ifodaga $\varepsilon = 0$ (1.24) munosabatni qo‘yib,

$$u' = \pm\sqrt{\frac{u^2}{6\beta}(6U - u^2)}$$

ekanligini topamiz. Ushbu tenglamani integrallash va aniqlik uchun musbat qutblilikning solitonligini hisobga olgan holda, biz

$$\frac{\xi}{\sqrt{6\beta}} = \int \int_{\sqrt{6U}}^{u} \frac{du}{u\sqrt{6U - u^2}}$$

ni olamiz, undan oshkormas yechim kelib chiqadi:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\beta}} = -\frac{1}{\sqrt{U}} \ln \frac{\sqrt{6U} + \sqrt{6U - u^2}}{u}$$

Tenglamani *u* ga nisbatan yechib, biz quyidagiga ega bo‘lamiz

$$u = a\,\mathrm{sec}h(\xi / \Delta) \qquad (1.25)$$

bunda $a=\sqrt{6U}, \Delta=\sqrt{6U}/a$ Kordevega-de Vriza tenglamasiga kelsak, solitonning amplitudasi qanchalik katta boʻlsa, uning kengligi va tezligi shunchalik katta boʻladi, garchi bu parametrlar orasidagi bogʻliqlik Kordevega-de Vriza tenglamasidan biroz farq qiladi. E'tibor bering, $a\Delta = const$ boʻlgani uchun barcha mKordevega-de Vriza solitonlarning maydoni bir xil.

Bussinesk tenglamasi

$$u_{tt} + c^2 u_{xx} + uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0 \qquad (1.26)$$

Kordevega-de Vriza tenglamasining ikki toʻlqinli varianti boʻlib, toʻlqinlarning ham oldinga, ham qarshi yoʻnalishda tarqalishiga imkon beradi. Uning statsionar yechimlari

$$\beta u^{iv} + (\frac{u^2}{2} + (c^2 - U^2)u)'' = 0,$$

tenglama bilan tavsiflanadi, bu ikki karrali integraldan keyin potensial energiya

$$W = -\frac{1}{2\beta}((U^2 - c^2)u^2 - \frac{u^3}{3} \qquad (1.27)$$

boʻlgan (1.13) tenglamani beradi. Potensial energiya 1.7-rasmdagiga oʻxshash shaklga ega boʻlishi uchun

$$U^2 > c^2, \qquad (1.28)$$

tengsizlik bajarilishi kerak, ya’ni soliton tezligi chiziqli toʻlqinlarning tarqalish faza tezligidan katta boʻlishi kerak. Darhaqiqat, (1.26) tenglamadan chiziqli yaqinlashishdan

$$v^2{}_{ph}(k) = c^2 - \beta k^2 \le c^2$$

olish oson. Koʻrinib turibdiki, Kordevega-de Vriza tenglamalari (1.3) va mKordevega-de Vriza tenglamalari (1.23) oʻxshash xususiyatga ega bo'lib, ular uchun $v_{ph} = -\beta k^3$ va solitonlar musbat yoʻnalishda harakat qiladi. Solitonlar chiziqli toʻlqinlar bilan bir xil tezlikda tarqala olmaydi, degan umumiy fikr mavjud. Ushbu muammoning batafsil tahlili [82] da keltirilgan, bunda $U = v^2{}_{ph}(\omega)$ shart ω chastotada Cherenkov rezonansining sharti sifatida talqin qilinadi, bunda solitonlar beqaror boʻlib qoladi va oʻz energiyasini ushbu chastotada toʻlqinlarga beradi.

Shart (1.28) bajarilganda (1.27) ifoda (1.14) koeffitsientlargacha mos keladi. Yechimni

$$u = a\sec h^2(\xi/\Delta),$$

soliton shaklida yozishimiz mumkin, bu yerda $a = 3(U^2 - c^2), \Delta^2 = 12\frac{\beta}{a}$. Solitonlar Kordevega-de Vriza tenglamasining (1.22) solitonlar bilan mos keladi, lekin ular ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri, ham qarama-qarshi yo‘nalishda tarqalishi mumkin. Biroq, Bussinesk tenglamasining solitonlariga biroz ehtiyotkorlik bilan munosabatda bo'lish kerak, chunki $(\beta > 0)$ uchun to‘lqin raqamlari $k^2 > \frac{c^2}{\beta}$ bo‘lgan chiziqli tebranishlar barqaror emas. Anomaliyali dispersiyali (b < 0) muhitni hisobga olgan holda turg‘unsizlikdan qutulish mumkin. Biroq, bu holatda ham, solitonlar juda o'ziga xos xatti-harakatni namoyish etadilar, uni to‘liq tahlil qilish teskari tarqalish usuli asosida amalga oshirish mumkin [83]. Xususan, ma’lum bo'lishicha, parametrlarning ma’lum qiymatlarida ular kichikroq amplitudali ikki solitonga parchalanishi mumkin va o‘zaro ta’sirlashganda ular singulyarlik hosil bo‘lishi bilan birlashishi mumkin.

Dispersiya va dissipatsiyali muhitdagi to‘lqinlarni ko‘rib chiqaylik. Bu holat Kordevega-de Vriza-Burgers tenglamasi bilan tavsiflanadi

$$u_t + uu_{xx} + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx} \qquad (1.19)$$

(1.19) tenglamaning statsionar yechimlari uchun (1.13) o‘rniga manfiy ishqalanishli chiziqli bo‘lmagan osilator tenglamasini olamiz

$$\tilde{u}'' - \frac{\nu}{\beta}\tilde{u}' = -\frac{dW}{du}, \qquad (1.20)$$

bunda $W(u)$ (1.14) tenglama bilan aniqlanadi. Osilator (1.20) hali ham ikkita muvozanat holatiga ega: $u_1 = 0$, bu egar va $u_2 = 2U$. Biz turg’unlik uchun oxirgi muvozanat holatini tekshiramiz. $\tilde{u} = 2U + \tilde{u}, |\tilde{u}| << 2U$ deb faraz qilib (1.20) tenglamani chiziqlashtiramiz:

$$\tilde{u}'' - \frac{\nu}{\beta}\tilde{u}' + \frac{U}{\beta}\tilde{u} = 0$$

Yechimni $\tilde{u} \sim \exp(\lambda\xi)$ ko'rinishda qidirib, quyidagi xarakteristik tenglamani olamiz

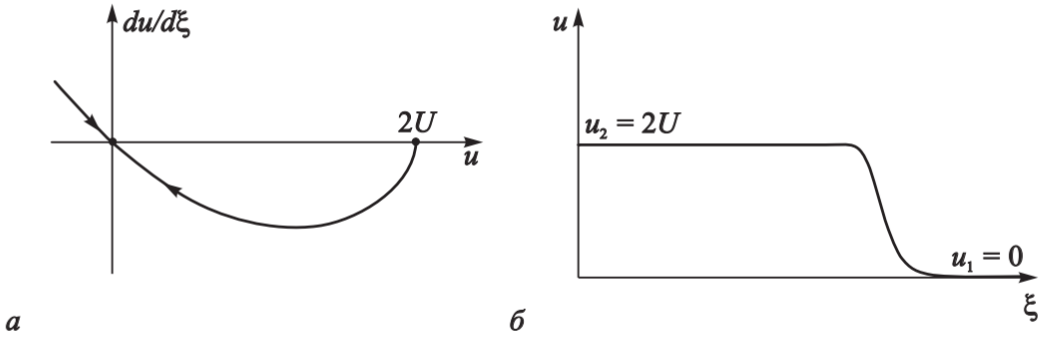
$$\lambda^2 - \frac{v}{\beta}\lambda + \frac{U}{\beta} = 0,$$

uning ildizlari

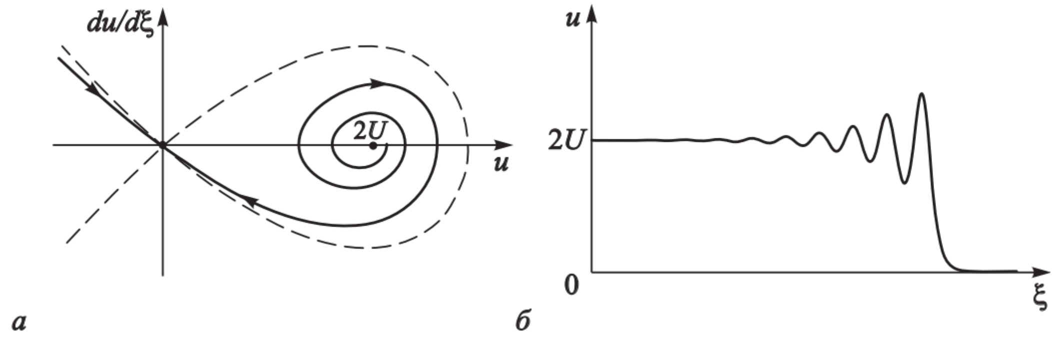
$$\lambda_{\pm} = \frac{v}{2\beta} \pm \sqrt{(\frac{v}{2\beta})^2 - \frac{U}{\beta}}$$

$v^2 < 4\beta U$ uchun $\lambda_{\pm}$ ildizlar haqiqiy, u_2 muvozanat holati esa noturg‘un tugundir. Ushbu holat uchun fazali portret va to'lqin profili 1.11a,b-rasmda ko‘rsatilgan. Osilator $\xi \to \infty$ da noturg‘un muvozanat holatidan boshlanadi, $u_1 = 0$ egar nuqtasiga $\xi \to \infty$ da yaqinlashadi. Yechim Burgers tenglamasining statsionar zarba to‘lqiniga o‘xshash zarba to‘lqinidir. Shunday qilib, bu holda dissipativ effektlar ustunlik qiladi va dispersiyaning mavjudligi sifat o‘zgarishlariga olib kelmaydi.

$v^2 < 4\beta U$ bo‘lganda boshqa holat rivojlanadi. Bu holda λ_2 murakkab va muvozanat holati u_2 noturg’un fokus hisoblanadi. Yechim solitonlar ketma-ketligiga o‘xshash tebranuvchi yetakchi qirrali statsionar zarba to‘lqinidir (1.12-rasm). Ushbu turdagi zarba to‘lqinlari plazmada kuzatiladi, ular to‘qnashuvsiz deb ataladi (tarqalish zarrachalarning to‘qnashuvi emas, balki boshqa mexanizmlar tomonidan sodir bo‘lishining belgisi sifatida). Bularga, xususan, ion-akustik va magnittovushli zarba to‘lqinlari kiradi [11, 13]. Ularni dastlab R.Z. Sagdeev 1960-yillarda tadqiq qilgan. Bundan tashqari, tebranish jabhalari bilan zarba elektromagnit to‘lqinlar turli chiziqli bo'lmagan uzatish liniyalarida kuzatiladi [84]. Zaif dissipatsiya holatida zarba to‘lqinining yetakchi old qismining shakli (1.22) solitonga yaqin bo’ladi.



1.11-rasm. (a) (1.20) Osilatorning faza portreti va (b) $v^2 > 4\beta U$ uchun KdV-Burgers tenglamasining statsionar zarba to'lqini profili



1.12-rasm. (a) (1.20) Osilatorning fazali portreti va (b) $v^2 < 4\beta U$ da Kordevega-de Vriza-Burgers tenglamasining statsionar zarba to'lqinining profili.

Yechimning orqa tomonida garmonik tebranishlar eksponensial ravishda o'sib borayotgani aniq

$$u \approx 2U + C\exp(\frac{v\xi}{2\beta})\cos(\sqrt{\frac{4\beta U - v^2}{2\beta}}\xi$$

E’tibor bering, ikkala holatda ham zarba to‘lqinining tezligi Burgers tenglamasi bilan bir xil munosabat bilan $u\ \xi \to \pm\infty$ ga moyil bo'lgan qiymatlarga bog‘liq,

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

1.3-§. Ayirmali sxema hamda spektral-to‘r metodlari bo‘yicha olib borilgan ilmiy tadqiqot ishlari tahlili

Kvazichiziqli temperaturaviy jarayonlarni sonli yechishga mo‘ljalangan ayirmali metodlar akademik A.A. Самарский va uning shogirdlari tomonidan yaratilgan. Xuddi shuningdek, bunday metodlar akademik Н.Н.Яненко va uning ilmiy maktabi olimlari tomonidan ishlab chiqilgan.

Ushbu olimlarning ishlarida kvazichiziqli temperaturaviy jarayonlarning ayrim xususiy yechimlari tuzilgan, yuguruvchi to‘lqinlar ko‘rinishidagi yechimlar uchun analitik formulalar hamda issiqlik oqimini tavsiflovchi formulalar chiqarilgan. Ushbu yechimlarni maxsus hollarda, masalan, boshlang‘ich temperatura nolga teng bo‘lganda va maxsus chegaraviy rejim tanlanganda tuzish imkoniyatlari mavjud ekanligi ko‘rsatilgan. Issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsientining chiziqli emasligi, yangi fizik effektlarga olib kelish mumkinligi, ular orasida eng asosiysi-issiqlikning chekli tezlik bilan tarqalishidan iborat ekanligi yuqorida keltirilgan ishlarda ta’kidlab o‘tilgan. Ularda kvazichiziqli masalalarni sonli yechishda ayirmali metodlarning iteratsiyaga asoslangan variantlaridan foydalanish maqsadga muvofiq ekanligi keltirilgan.

Xuddi shuningdek, kvazichiziqli masalalarning yechimlarini tadqiq etishga bag‘ishlangan bir qator ilmiy-tadqiqot ishlari mavjud. Ularning tahliliga to‘xtalib o‘tamiz. Maqola [25] da boshlang‘ich nolga teng energiyali kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi yechimidagi uzilishi (portlash) to‘g‘risidagi ma’lumotlar berilgan. Kvazichiziqli parabolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning qo‘yilishi [26] ishda keltirilgan. Kvazichiziqli parabolik tenglamalar sinfi uchun boshqarishining sezgirmas elementlari haqidagi ma’lumotlar [27] da bayon qilingan. Chiziqli bo‘lmagan chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan kvazichiziqli masalalar yechimlarining asimptotik avtomodel tabiati [28] ishda tadqiq etilgan. Maqola [29] da kvazichiziqli parabolik masalalarning juda kuchsiz yechimlari uchun chegaraviy yuqori integrallanuvchanlikka oid tadqiqot natijalari bayon etilgan.

Kvazichiziqli parabolik masalalar yechimlari chegaralanganligining asoslanishi maqola [30] da berilgan. Singulyar so‘ndiruvchi hadga ega bo‘lgan kvazichiziqli masala yechimining to‘liq so‘nishiga bag‘ishlangan tadqiqotlarda keltirilgan.

Birinchi tartibli hadlar bilan bog‘liq ravishda chiziqlimaslikka ega bo‘lgan kvazichiziqli parabolik masalalar kuchsiz yechimlarining global mavjudligi [31] ishda qaralgan.

Maqola [32] da fazoviy yutilishlarga ega bo‘lgan chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayoni matematik modeli tadqiq etilgan. Maqolada bir qator fizik tabiatga ega masalalar: chiziqli bo‘lmagan kvant mexanikasi, chiziqli bo‘lmagan elektrodinamika va optika, chiziqli bo‘lmagan plazmalar nazariyasi, chiziqli bo‘lmagan akustika, chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik xususiy hosilali chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalarga olib kelishi ta’kidlangan. Chiziqsiz issiqlik o‘tkazuvchanlik matematik modelining turli modifikatsiyalariga oid ma’lumotlar maqola [33] da keltirilgan. Maqola [34] da kinetik nazariyaga asosan issiqlikning chekli tezlik bilan tarqalishi jarayoni o‘rganilgan. Maqolada ushbu muammo bilan taqsimot funksiyasining muvozanatga erishish chekli vaqti o‘rtasidagi o‘zaro bog‘liqlik o‘rnatilgan. Issiqlik uzatish, maydonlar nazariyasi masalalari va qisilmaydigan suyuqlik oqimlarini chekli elementlar usuli bilan tadqiq etishi masalalari [35] da keltirilgan. Ushbu tadqiqot ishida aksariyat hollarda chekli elementlar usulining qattiq jismlar va konstruksiyalardagi kuchlanishlarni hisoblashga oid masalalarni yechishga tadbiq etilganligi, ammo, hozirgi vaqtda chekli elementlar usuli issiqlik uzatish nazariyasi, maydonlar nazariyasi va suyuqliklar oqimi masalalarini yechishda keng miqyosda qo‘llanilayotganligi xususida to‘xtalib o‘tilgan. Maqola [36] da statsionar maydonlar (issiqlik o‘tkazuvchanlik, elektrik potensial suyuqliklar oqimi va boshqalar) haqidagi masalalar qaralgan. Unda muhandislik amaliyotida uchraydigan bir qancha masalalar: issiqlik o‘tkazuvchanlik, g‘ovak muhitlar orqali filtiratsiya, ideal suyuqliklarning uyurmasiz oqimi, elektrik (yoki magnit) potensialining taqsimlanishi, prizmasimon sterjenlarning buralishi, prizmasimon balkalarning egilishi, tayanch sirtlarning moylanishi va boshqalar keltirilgan. Maqola [37] da gradient nochiziqlilikka ega bo‘lgan chiziqli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasining yechimi asimtotikasiga oid tadqiqot natijalari bayon qilingan.

Yuqorida keltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari tahlilidan ko‘rinadiki, kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini yechishda qo‘llaniladigan asosiy metod bu chekli ayirmali metodlardan iborat. Shu sababli, chekli ayirmali metodlarga muqobil bo‘lgan yuqori aniqlik va samaradorlikni ta’minlaydigan metodlar yaratish bo‘yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borish zaruriyati paydo bo‘ladi. Bu o‘z navbatida kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasining ayirmali metodlar bilan olingan yechimi tabiatini o‘rganishida yechimni taqqoslash matematik apparati sifatida o‘ta muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

1-bob bo‘yicha xulosalar

Ushbu bobda:

-Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar haqida tushunchaga asoslab berildi va uni algebraik va trasendent tenglamalar yordamida,ularni yechishning geometrik talqinini tushuntirib berildi.

- Statsionar chiziqli bo‘lmagan to‘lqinlar harakati tadqiq qilindi;
- Modifikatsiyalashgan Kortevega-de Vriza tenglamasi va uning sifat xossalari tadqiq etildi;

II BOB. KORTEVEGA-DE VRIZA TENGLAMASINI SPEKTRAL METOD BILAN SONLI HISOBLASH

Ushbu bobda differensial masala qo‘yiladi, Chebishev ko‘phadlari va ularning xossalari o‘rganildi, Kortevega-de Vriza tenglamasi spektral metodi bilan sonli modellashtirish masalalari keltiriladi. Kortevega-de Vriza tenglamasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala spektral metodi bilan sonli modellashtiriladi.

2.1-§. Differensial masalaning qo‘yilishi

Kortevega-de Vriza tenglamasi uchun quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala qaraladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u\frac{\partial u}{\partial x}, a < x < b, \tag{2.1}$$

$$u(a,t) = 0, \quad u(b,t) = 0, \quad u'(a,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.3}$$

bunda (2.1) uchinchi tartibli hususiy hosilalali differensial tenglama, (2.2) chegaraviy shartlarni hamda differensial tenglama uchinchi tartibli bo‘lganligi sababli birinchi tartibli hosilaning mavjudligi shartini, (2.3) boshlang‘ich shartni ifodalaydi.

Agar tenglama (2.1) da chiziqsiz had inobatga olinmasa, uchinchi tartibli evolyutsion tenglama uchun quyidagi boshlang`ich-chegaraviy masala qo‘yiladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, a < x < b, \tag{2.4}$$

$$u(a,t) = 0, \quad u(b,t) = 0, \quad u'(a,t) = 0, \tag{2.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.6}$$

Agar tenglama (2.1) da uchinchi tartibli hususiy hosila oldidagi β nolga teng bo`lsa, urinma tenglamasiga kelinadi.

2.2-§. Chebishev ko‘phadlari

Ushbu paragrafda spektral va spektral-to‘r metodlarida bazis funksiyalari sifatida qo`llaniladigan Chebishev ko‘phadlarining asosiy xossalari, ular uchun rekurrent formulalar, ko‘phadlarning nollari, Chebishev ko‘phadlari qatorini hisoblash, qatorlarni differensiallash va integrallash formulalari keltirilgan. Ular spektral - to‘r metodini tuzishda bazis bo‘lib xizmat qiladi.

Chebishev ko‘phadlari $-1 \le x \le 1$ kesmada quyidagi ifoda yordamida aniqlanadi

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ n = 0,1,2,...., \tag{2.7}$$

bunda $0 \le \theta = \arccos x \le \pi$. Ma’lum bo‘lgan ushbu trigonometrik ayniyatlardan

$$T_{n+1}(x) = \cos(n\theta \pm \theta) = \cos n\theta \cos\theta \mp \sin n\theta \sin\theta, \tag{2.8}$$

quyidagi rekurrent munosabat kelib chiqadi

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \ n \ge 1. \tag{2.9}$$

Munosabat (2.7) dan $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ ekanligini ko‘rish mumkin va bu holda (2.9) dan

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \ n = 1,2,3,... \tag{2.10}$$

hosil qilinadi, tenglik (2.10) dan turli tartibli Chebishev ko‘phadlarni hosil qilish mumkin

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1\\
&T_1(x) = x\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Bu ko‘phadlar yordamida aniqlangan funksiyalar n ning qiymatiga qarab juft yoki toq bo‘ladi [90], ya’ni

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x). \tag{2.11}$$

Munosabat (2.9) ning $k-1, k$ dagi kombinatsiyasini tuzib, juft yoki toq ko‘phadlar uchun alohida rekurrent formulalar hosil qilinadi, ya’ni

$$T_{n+2}(x) - (4x^2 - 2)T_n(x) + T_{n-2}(x) = 0. \tag{2.12}$$

Yuqorida keltirilgan munosabatlardan ko‘phadlarning ba’zi umumiy xossalarini chiqarish mumkin:

$$-1 \le T_n(x) \le 1, \quad -1 \le x \le 1, \tag{2.13}$$

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \tag{2.14}$$

$$T_n(0) = \begin{cases} 0, n = 1,3,5 \\ 1, n = 0,4,8 \\ -1, n = 2,6,10 \end{cases}. \tag{2.15}$$

$T_n(x_k) = 0$ bo‘lganda, agar $\cos(n\theta_k) = 0$, bundan $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ ekanligi aniqlanadi, ya’ni ko`phadlarning noli $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ nuqtalarda joylashgan. Chebishev ko‘phadlari o‘zining ekstremal qiymatlari $T_n(x_j) = \pm 1$ ga $\cos(n\theta_j) = \pm 1$ da erishadi, bundan $x_j = \cos\dfrac{\pi j}{n}, j = 0,1,\dots,n$ va $T_n(x_j) = (-1)^j$ ekanligi kelib chiqadi. Chebishev ko‘phadlari qatori $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x)$ quyidagi algoritm asosida hisoblanadi:

$$B_{N+1} = 0,$$

$$B_N = a_n,$$

$$B_k = a_k + 2xB_{k+1} - B_{k+2}, k = N-1,\dots,1,$$

$$f(x) = a_0 - B_2 + B_1 x\,,$$

bu algoritm asosida hisoblash turg‘un bo‘ladi. Chebishev ko‘phadlari qatorini differensiallash algoritmi, ya’ni

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k^{(1)} T_k(x)$$

esa ushbu ko‘rinishda bo`ladi.

$$a_N^{(1)} = 0,$$

$$C_{k-1} a_{k-1}^{(1)} = l_{k+2} a_{k+1}^{(1)} + 2k a_k\,, k = N, \ldots, 1\,,$$

bunda $f'(x)$ yuqoridagi algoritm asosida topiladi.

So‘ngra Chebishev ko‘phadlarini integrallash algoritmi qaraladi

$$F(x) = \int f(x)dx\,,$$

bunda

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N+1} A_k T_k(x)\,,$$

bunda A_0 -ixtiyoriy integrallash o‘zgarmaslari bo‘lib, ular quyidagicha aniqlanadi

$$A_k = \frac{(c_{k-1} a_{k-1} - a_{k+1})}{(2k)}, k = 1, \ldots, N-1,$$

$$A_k = \frac{a_{k-1}}{(2k)}, k = N_0; N-1.$$

2.3-§. Kortevega-de Vriza tenglamasini spektral metod va uni qo‘llash usullari.

Differensial masala (2.1)-(2.3) ni sonli modellashtirish uchun spektral metodni qo‘llaymiz. Buning uchun differensial masala (2.1)-(2.3) ning taqribiy yechimi birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida izlanadi:

$$u(y)=\sum_{n=0}^{N} a_n T_n(y),\ \ T_n(y)=\cos(n\cdot \arccos y), \qquad (2.16)$$

bunda $T_n(y)$ – Chebishev ko‘phadlari, N – esa taqribiy yechimni $[a,b]$ kesmada approksimatsiyalash uchun foydalaniladigan ko`phadlar sonini bildiradi. Kesma $[a,b]$ da $(N+1)$ ta kollokatsiya nuqtalari mavjud bo`lib, ular Chebishev ko‘phadlarining tugunlaridan iborat:

$$y_l=\cos(\pi\, l/N),\ \ l=0,1,\ldots,N\,.$$

Qator (2.16) dagi a_m koeffitsientlar $u(y_l)$ funksiyaning qiymatlari orqali ushbu teskari Chebishev almashtirishi [77: 71-b.] orqali aniqlanadi:

$$\begin{gathered} a_m=\frac{2}{Nc_m}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{c_l}u(y_l)T_m(y_l), \quad m=0,1,\ldots,N, \\ c_0=c_N=2,\ c_m=1, \qquad agar m\neq 0,N. \end{gathered} \qquad (2.17)$$

Keyingi bayonni soddalashtirish maqsadida qatorlar (2.16) va (2.17) ushbu matritsali ko`rinishda yoziladi:

$$v=Ta, \qquad (2.18)$$

$$a=T^{*}v, \qquad (2.19)$$

bunda $a=\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_N\}$ – koeffitsientlar vektori, T va T^{*} – o‘lchamlari $(N+1)\times(N+1)$ bo‘lgan kvadrat matritsalar:

$$T = \begin{bmatrix} T_0(y_0) & T_1(y_0) & \cdots & T_{N-1}(y_0) & T_N(y_0) \\ T_0(y_1) & T_1(y_1) & \cdots & T_{N-1}(y_1) & T_N(y_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ T_0(y_{N-1}) & T_1(y_{N-1}) & \cdots & T_{N-1}(y_{N-1}) & T_N(y_{N-1}) \\ T_0(y_N) & T_1(y_N) & \cdots & T_{N-1}(y_N) & T_N(y_N) \end{bmatrix},$$

$$T^* = \begin{bmatrix} \frac{T_0(y_0)}{4} & \frac{T_0(y_1)}{2} & \cdots & \frac{T_0(y_{N-1})}{2} & \frac{T_0(y_N)}{4} \\ \frac{T_1(y_0)}{2} & T_1(y_1) & \cdots & T_1(y_{N-11}) & \frac{T_1(y_N)}{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{T_{N-1}(y_0)}{2} & T_{N-1}(y_1) & \cdots & T_{N-1}(y_{N-1}) & \frac{T_{N-1}(y_N)}{2} \\ \frac{T_N(y_0)}{4} & \frac{T_N(y_1)}{2} & \cdots & \frac{T_N(y_{N-1})}{2} & \frac{T_N(y_N)}{4} \end{bmatrix},$$

hamda v – vektor va uning komponentalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$v \equiv \{u(y_0), u(y_1), u(y_2), \ldots, u(y_N)\}. \tag{2.20}$$

Xuddi shu tariqa y_l diskret kollokatsiya tugunlarida birinchi va uchinchi fazoviy hosila quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Tb, \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = Te, \tag{2.21}$$

b va e vektorlar komponentalari a vektor komponentalari orqali quyidagi qatorlar bilan aniqlanadi [90]:

$$c_m b_m^{(j)} = 2 \sum_{\substack{p=m+1 \\ p \equiv m (\mathrm{mod}\ 2)}}^{N} p a_p^{(j)}, \ m \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M, \tag{2.22}$$

$$c_m e_m^{(j)} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{p=m+1 \\ p+m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)}}^{N} p\left((p^2 - 1^2) - 2(p^2+1)m^2 + m^4\right) a_p^{(j)}, \ m \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M, \tag{2.23}$$

bunda $a \equiv b(\mathrm{mod}\, 2)$ belgilash $(a-b)/2$ ifoda butun qiymat qabul qilishini anglatadi.

Formulalar (2.22) va (2.23) ni matritsali ko‘rinishda yozish mumkin

$$b = Ra\,, e = Pa\,, \tag{2.24}$$

bunda R va P–o‘lchamlari $((N+1)M)\times((N+1)M)$ bo‘lgan blokli-diagonalli kvadrat matritsalardir.

Formula (2.24) ni mos ravishda (2.21) ga qo‘yib va munosabat (2.19) ni inobatga olgan holda fazoviy hosilalarning approksimatsiyasiga ega bo‘linadi:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \hat{B}v\,, \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = \hat{A}v\,, \tag{2.25}$$

bunda $\hat{A}$ va $\hat{B}$ o`lchamlari $((N+1)M)\times((N+1)M)$ bo‘lgan blokli-diagonalli kvadrat matritsalardir. $\hat{A}$ va $\hat{B}$ matritsalar quyidagi tartibda hisoblanadi:

$$\hat{A} = TPT^*,\ \hat{B} = TRT^*. \tag{2.26}$$

Xuddi shuningdek, yordamchi $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ matritsalarni ham kiritiladi:

$$\tilde{A} = \beta\hat{A},\ \tilde{B} = \hat{B}. \tag{2.27}$$

Differensial tenglama (2.1) ni faqat $(l = 1,...,N-1)$ ichki kollokatsiya nuqtalarida, shartlar (2.2) ni esa intervalning chegaraviy nuqtalarida yozish orqali quyidagi sistemaga kelinadi:

$$\frac{dS}{dt} = -Av - v \cdot Bv\,, \tag{2.28}$$

bunda nuqta belgisi ikkita vektorning komponentalari bo‘yicha ko‘paytmasini anglatadi, S orqali uzunligi $N+1$ ga teng bo‘lgan vektor belgilangan:

$$S \equiv \{0, u(y_1), u(y_2), ...u(y_{N-1}), 0\},$$

$A,\ B$ matritsalar $(N+1)\times(N+1)$ o‘lchamga ega bo‘lib, ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-10} & a_{N-11} & \cdots & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1N-1} & b_{1N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{N-10} & b_{N-11} & \cdots & b_{N-1N-1} & b_{N-1N} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

,

bunda A va B matritsalarning $a_{ij}, b_{ij}, (i \neq 0, N)$ elementlari, $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ matritsalarning $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij}, (i \neq 0, N)$ mos elementlariga teng.

Tenglamalar sistemasi (2.28) “differensial-algebraik” tenglamalardan iborat bo`lib, unda $N-1$ ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi (2.28) va 2 ta chiziqli algebraik shartlar (2.2) mavjud, noma’lumlar soni ham tenglamalarning umumiy soniga teng bo`lib, $N+1$ tani tashkil etadi.

Shunday qilib, oddiy differensial tenglamalar sistemasidan iborat bo`lgan tenglama (2.28) ni bir qadamli Runge-Kutta hamda ko‘p qadamli Adams-Beshfort metodlarini birgalikda qo`llash orqali yechish mumkin.

2-bob bo‘yicha xulosalar

Ushbu bobda:

- Kortevega-de Vriza tenglamasi uchun differensial masala qo‘yildi;
- Qo‘yilgan differensial tenglamani sonli modellashtirishda Chebishev ko‘phadlaridan foydalanildi;
- Kortevega-de Vriza tenglamasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala spektral metod bilan sonli modellashtirildi;

III BOB. BO‘LAKLI UZLUKLI O‘ZGARMAS KOEFFISIENTLI KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK MASALASINI SONLI MODELLASHTIRISH

Ushbu bobda berilgan sohada bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi ayirmali usullar va spektral-to‘r usuli bilan sonli modellashtirilgan. Mazkur bobda dastlab differensial masala qo‘yilgan. Qo‘yilgan masalani sonli modellashtirish uchun ayirmali sxemalar hamda spektral-to‘r usullari assosida sonli yechish algoritmi ishlab chiqilgan, algoritmga mos dasturiy ta’minot tuzilgan, olingan sonli natijalar tahlil etilgan. Hosil bo‘lgan “differensial-algebraik” tenglamalar sistemasini ikkita avtonom sistemalarga keltirish uchun chiziqli xosmas almashtirishlar qo‘llanilgan. Usullarning hisoblash algoritmlari ishlab chiqilgan, C++ dasturlash tilida tuzilgan dastur asosida harakterli parametrlarning turli qiymatlarida keng qamrovli hisoblash tajribalari o‘tkazilgan, olingan sonli natijalar va ularning tahlili keltirilgan.

3.1-§. Differensial masalaning qo‘yilishi

Bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffitsientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy masala qo‘yilgan bo‘lsin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \; a < x < b, \; 0 \le t \le T, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, \\ u(b,t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3.3}$$

Kelgusida spektral-to‘r metodini qo‘llashda differentsial masala (2.1) ning quyidagi ko‘rinishda yozilishidan foydalaniladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial k(x)}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

[a,b] kesmaga to‘r kiritamiz: $\varpi_h=\left\{x_i=ih, i=0,1,2,...,N,\ h=\frac{b-a}{N}\right\}$ hamda tenglama koeffitsienti k(x) –qaralayotgan to‘r bo‘laklarida turli o‘zgarmas k_i qiymatlarni qabul qilsin va bunda

$$k(x)=\begin{cases} k_1, x_0<x<x_1, \\ k_2, x_1<x<x_2, \\ k_3, x_2<x<x_3, \\ .... \\ k_M, x_{M-1}<x<x_M, \end{cases}$$

qiymatlarga ega bo‘lsin.

3.2-§. Ayirmali sxemalar

Ushbu paragrafda boshlang‘ich-chegaraviy masala (3.1)-(3.3) ni chekli ayirmalar usuli bilan sonli yechish qaraladi.

Qaralayotgan

$$D=\{a\le x\le b,\ 0\le t\le T\}$$

sohada ayirmali to‘r quyidagicha kiritiladi:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\left\{(x_i,t_j),\ \begin{matrix} x_i=ih\ ,i=0,1,2,...,\ N, \quad h=(b-a)/N, \\ t_j=j\tau,\ j=0,1,2,...,M\ ,\tau=T/M \end{matrix}\right\}.$$

Masala (3.1)-(3.3) sof oshkormas ayirmali sxema yordamida approksimatsiya qilinadi. Natijada differensial masala (3.1)-(3.3) ga mos quyidagi ko‘rinishdagi ayirmali masala qo‘yiladi:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[\frac{k_{l+1}+k_i}{2}\frac{y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}}{h}-\frac{k_i+k_{i-1}}{2}\frac{y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}}{h}\right],\ \begin{matrix} i=1,2,...N-1, \\ j=0,1,...M-1, \end{matrix} \tag{3.4}$$

$$y_0^{j+1}=0,\ y_N^{j+1}=0,\ j=0,1,...M-1, \tag{3.5}$$

$$y_i^0=u_0(x_i),\ i=0,1,...N. \tag{3.6}$$

Ayirmali masala (3.4)-(3.6) ni yechishda progonka usulini qo‘llash uchun tenglama (3.4) quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$Ay_{i-1}^{j+1}-Cy_i^{j+1}+By_{i+1}^{j+1}=-F_i, \tag{3.7}$$

bunda

$$A=\frac{(k_i+k_{i-1})\tau}{2h^2},\ B=\frac{(k_{i+1}+k_i)\tau}{2h^2},\ C=1+\frac{((k_{i+1}+k_i)+(k_i+k_{i-1}))\tau}{2h^2},\ F_i=y_i^j;$$

ayirmali tenglama (3.7) ni, shartlar (3.5)-(3.6) bilan progonka usulini qo‘llash orqali sonli yechiladi.

Progonka metodi algoritmi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned}\overset{(\to)}{\alpha}_{i+1}&=\frac{B}{C-A\alpha_i},\\ \overset{(\to)}{\beta}_{i+1}&=\frac{A\beta_i+F_i^j}{C-A\alpha_i},\ i=1,2,...,N-1,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}y_N^{j+1}&=0,\\ y_i^{j+1}&=\alpha_{i+1}y_{i+1}^{j+1}+\beta_{i+1},\ i=N-1,...1,0,\ j=0,1,...,M-1,\end{aligned} \tag{3.9}$$

Progonka koeffitsientlari uchun boshlang‘ich qiymatlarni topish ifoda (3.8) ga $i=0$ ni qo‘yib quyidagi tenglama hosil qilinadi:

$$y_0^{j+1}=\alpha_1y_1^{j+1}+\beta_1. \tag{3.10}$$

Tenglama (3.10) ni chegaraviy shart (3.5) bilan taqqoslab, α_1 va β_1 uchun quyidagi ifodalar hosil qilinadi:

$$y_0^{j+1}=\alpha_1y_1^{j+1}+\beta_1=0,\ \alpha_1=0,\ \beta_1=0. \tag{3.11}$$

ifoda (3.8) progonka usulining to‘g‘ri yo‘li, ifoda (3.9) esa progonka usulining teskari yo‘lidan iborat.

3.3-§. Spektral-to‘r metodi

Qaralayotgan sohada bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffitsienti issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun qo‘yilgan differensial masala (3.1)-(3.3) ni yechish uchun spektral-to‘r metodi qo‘llaniladigan $[a,b]$ integrallash intervalida to‘r kiritilgan, ya’ni ushbu kesma M ta turli elementlarga bo‘lingan:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{M-1}, x_M],$$

bunda $x_0 = a$, $x_M = b$. Differensial masala (3.1)-(3.3) ning taqribiy yechimini birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida ifodalash uchun qaralayotgan $[a,b]$ kesmaning har bir $[x_{j-1}, x_j]$ elementini $[-1,1]$ kesmaga akslantirish uchun quyidagi o‘zgaruvchini almashtirish formulasidan foydalaniladi:

$$x_j = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y, \tag{3.12}$$

bunda $m_j = x_j + x_{j-1}$, $l_j = x_j - x_{j-1}$–to‘rning j–elementi uzunligi, hamda $y \in [-1,1]$. Kiritilgan to‘rning har bir elementida qaralayotgan differensial masala (3.1)-(3.3) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_j \left(\frac{2}{l_i} \right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \; i = 1,2,\ldots,M, \; j \geq 2 \tag{3.13}$$

$$u_i(1) = u_{i+1}(-1), \; i = 1,2,\ldots,M-1, \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{l_i} \frac{\partial u_i}{\partial y}(1) = \frac{1}{l_{i+1}} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y}(-1), \; i = 1,2,\ldots,M-1, \tag{3.15}$$

$$u_0(-1) = u_M(1) = 0, \tag{3.16}$$

$$u_i(x,0) = u_0\left(\frac{m_i}{2} + \frac{l_i}{2}y,0\right),\ \ i = 1,2,\ldots,M, \tag{3.17}$$

bunda tenglama (3.14)-(3.15) lar o‘zaro qo‘shni bo‘lgan to‘r elementlari chegaralarida taqribiy yechim va uning birinchi tartibli hosilasining uzluksizligi shartini, tenglama (3.16) chegaraviy shartlarni, tenglama (3.17) esa boshlang‘ich shartlarni aniqlaydi. Boshlang‘ich shartlar kelgusi tadqiqot bayoni uchun prinsipial ahamiyatga ega emas, shu sababdan, alohida qaralmaydi.

Tenglamalar sistemasi (3.14)-(3.16) ning taqribiy yechimi quyidagi formula asosida birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari qatori ko‘rinishida izlanadi

$$u_j(y) = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(j)} T_n(y),\ \ T_n(y) = \cos(n \cdot \arccos y), \tag{3.18}$$

bunda $T_n(y)$ – birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari, N –esa taqribiy yechimni j –to‘r elementida approksimatsiyalash uchun qo‘llaniladigan ko‘phadlar sonini anglatadi. Kiritilgan to‘rning M ta elementlaridan har birida $(N+1)$ ta birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlari tugunlari, ya’ni kollokatsiya nuqtalari mavjud bo‘ladi:

$$y_i = -\cos(\pi i/N),\ i = 0,1,\ldots,N\ .$$

Ifoda (3.18) dagi $a_m^{(j)}$ koeffitsientlar $u_j(y_i)$ funksiyaning qiymatlaridan foydalanib ushbu teskari Chebishev almashtirishi orqali aniqlanadi

$$\begin{aligned} a_m^{(j)} &= \frac{2}{Nc_m}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{c_i}u_j(y_i)T_m(y_i), && m = 0,1,\ldots,N, \\ & && j = 1,2,\ldots,M, \\ c_0 &= c_N = 2,\ c_m = 1, && agar\, m \neq 0, N. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Keyingi bayonni soddalashtirish maqsadida formulalar (3.18) va (3.19) ushbu matritsali ko‘rinishda ifodalanadi:

$$v = Ta, \tag{3.20}$$

$$a = T^{*} v, \tag{3.21}$$

bunda $a = \{a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, ..., a_N^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, ..., a_N^{(2)}, ..., a_0^{(M)}, a_1^{(M)}, ..., a_N^{(M)}\}$–koeffitsientlar vektori, T va T^{*}–o‘lchamlari $((N+1)M) \times ((N+1)M)$ bo‘lgan blokli-diagonalli kvadrat matritsalar:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_M \end{bmatrix}, \qquad T^{*} = \begin{bmatrix} T_1^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_M^{*} \end{bmatrix}.$$

$$T_j = \begin{bmatrix} T_0(y_0) & T_1(y_0) & \cdots & T_{N-1}(y_0) & T_N(y_0) \\ T_0(y_1) & T_1(y_1) & \cdots & T_{N-1}(y_1) & T_N(y_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ T_0(y_{N-1}) & T_1(y_{N-1}) & \cdots & T_{N-1}(y_{N-1}) & T_N(y_{N-1}) \\ T_0(y_N) & T_1(y_N) & \cdots & T_{N-1}(y_N) & T_N(y_N) \end{bmatrix},$$

$$T_j^{*} = \begin{bmatrix} \frac{T_0(y_0)}{4} & \frac{T_0(y_1)}{2} & \cdots & \frac{T_0(y_{N-1})}{2} & \frac{T_0(y_N)}{4} \\ \frac{T_1(y_0)}{2} & T_1(y_1) & \cdots & T_1(y_{N-11}) & \frac{T_1(y_N)}{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{T_{N-1}(y_0)}{2} & T_{N-1}(y_1) & \cdots & T_{N-1}(y_{N-1}) & \frac{T_{N-1}(y_N)}{2} \\ \frac{T_N(y_0)}{4} & \frac{T_N(y_1)}{2} & \cdots & \frac{T_N(y_{N-1})}{2} & \frac{T_N(y_N)}{4} \end{bmatrix},$$

hamda v–vektor $(N+1)M$ uzunlikka ega bo‘lib, komponentalari quyidagicha tuzilmaga ega bo‘ladi:

$$v \equiv \{u_1(y_0)...u_1(y_N), u_2(y_0)...u_2(y_N), u_3(y_0)..., u_M(y_0)...u_M(y_N),\}. \tag{3.22}$$

y_i diskret kollokatsiya tugunlarida ikkinchi tartibli fazoviy hosilalar quyidagicha ifodalanadi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = Td, \tag{3.23}$$

d vektor komponentalari a vektor komponentalaridan foydalangan holda quyidagicha aniqlanadi:

$$c_m d_m^{(j)} = 2 \sum_{\substack{p=m+2 \\ p \equiv m (\mathrm{mod}\, 2)}}^{N} p\left(p^2 - m^2\right) a_p^{(j)}, \ m \geq 0, \quad j = 1, \ldots, M\,, \tag{3.24}$$

bunda $k \equiv l (\mathrm{mod}\, 2)$ belgilash $(k-l)/2$ bo‘linma butun qiymat qabul qilishini anglatadi.

Formula (3.24) matritsali ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi

$$d = Pa, \tag{3.25}$$

bunda P – $\left((N+1)M\right) \times \left((N+1)M\right)$ o‘lchamli blokli-diagonalli kvadrat matritsa:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_M \end{bmatrix},$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 & \ldots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \ldots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & \ldots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Formula (3.25) ni mos ravishda ifoda (3.23) ga qo‘yib munosabat (3.21) ni e’tiborga olib ikkinchi tartibli fazoviy hosilaning approksimatsiyasiga ega bo‘linadi:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \tilde{A} v\,. \tag{3.26}$$

$\hat{A}$–matritsa $\left((N+1)M\right)\times\left((N+1)M\right)$ o‘lchamli blokli-diagonalli matritsa bo‘lib, quyidagi strukturaga ega:

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_M \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_j=\begin{bmatrix} \hat{a}_{00}^{(j)} & \hat{a}_{01}^{(j)} & \cdots & \hat{a}_{0N-1}^{(j)} & \hat{a}_{0N}^{(j)} \\ \hat{a}_{10}^{(j)} & \hat{a}_{11}^{(j)} & \cdots & \hat{a}_{1N-1}^{(j)} & \hat{a}_{1N}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{N-10}^{(j)} & \hat{a}_{N-11}^{(j)} & \cdots & \hat{a}_{N-1N-1}^{(j)} & \hat{a}_{N-1N}^{(j)} \\ \hat{a}_{N0}^{(j)} & \hat{a}_{N1}^{(j)} & \cdots & \hat{a}_{NN-1}^{(j)} & \hat{a}_{NN}^{(j)} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} \begin{matrix} \hat{a}_{00}^{(1)} & \hat{a}_{01}^{(1)} & \cdots & \hat{a}_{0N-1}^{(1)} & \hat{a}_{0N}^{(1)} \\ \hat{a}_{10}^{(1)} & \hat{a}_{11}^{(1)} & \cdots & \hat{a}_{1N-1}^{(1)} & \hat{a}_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{N-10}^{(1)} & \hat{a}_{N-11}^{(1)} & \cdots & \hat{a}_{N-1N-1}^{(1)} & \hat{a}_{N-1N}^{(1)} \\ \hat{a}_{N0}^{(1)} & \hat{a}_{N1}^{(1)} & \cdots & \hat{a}_{NN-1}^{(1)} & \hat{a}_{NN}^{(1)} \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \hat{a}_{00}^{(2)} & \hat{a}_{01}^{(2)} & \cdots & \hat{a}_{0N-1}^{(2)} & \hat{a}_{0N}^{(2)} \\ \hat{a}_{10}^{(2)} & \hat{a}_{11}^{(2)} & \cdots & \hat{a}_{1N-1}^{(2)} & \hat{a}_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{N-10}^{(2)} & \hat{a}_{N-11}^{(2)} & \cdots & \hat{a}_{N-1N-1}^{(2)} & \hat{a}_{N-1N}^{(2)} \\ \hat{a}_{N0}^{(2)} & \hat{a}_{N1}^{(2)} & \cdots & \hat{a}_{NN-1}^{(2)} & \hat{a}_{NN}^{(2)} \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} \hat{a}_{00}^{(M)} & \hat{a}_{01}^{(M)} & \cdots & \hat{a}_{0N-1}^{(M)} & \hat{a}_{0N}^{(M)} \\ \hat{a}_{10}^{(M)} & \hat{a}_{11}^{(M)} & \cdots & \hat{a}_{1N-1}^{(M)} & \hat{a}_{1N}^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{N-10}^{(M)} & \hat{a}_{N-11}^{(M)} & \cdots & \hat{a}_{N-1N-1}^{(M)} & \hat{a}_{N-1N}^{(M)} \\ \hat{a}_{N0}^{(M)} & \hat{a}_{N1}^{(M)} & \cdots & \hat{a}_{NN-1}^{(M)} & \hat{a}_{NN}^{(M)} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$ matritsa quyidagicha hisoblanadi:

$$\hat{A}=TPT^{*}. \tag{3.27}$$

Yuqoridagi belgilashlar asosida $\tilde{A}$ yordamchi matritsa ham kiritiladi:

$$\tilde{A}=k_j L^2 \hat{A},\quad j\geq 2, \tag{3.28}$$

bunda L–diagonal matritsa:

$$
L=\begin{bmatrix}
\frac{2}{l_1} & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & \ddots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & \frac{2}{l_1} & & & & & & & \\
 & & & \frac{2}{l_2} & 0 & 0 & & & & \\
 & 0 & & 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & \frac{2}{l_2} & & & & \\
 & 0 & & & 0 & & \ddots & & 0 & \\
 & & & & & & & \frac{2}{l_M} & 0 & 0 \\
 & 0 & & & 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & \frac{2}{l_M}
\end{bmatrix}.
$$

Differensial tenglama (3.13) ni faqat $(i=1,...,N-1)$ to‘rning ichki kollokatsiya nuqtalarida, uzluksizlik shartlari (3.14) va (3.15) ni to‘rning tugunlarida, ifoda (3.16) ni esa to‘rning chegaraviy nuqtalarida yozish orqali quyidagi “differensial-algebraik” tenglamalar sistemaga kelinadi:

$$\frac{dS}{dt}=Av, \tag{3.29}$$

$$Dv=0, \tag{3.30}$$

bunda S orqali $(N+1)M$ uzunlikka teng bo‘lgan vektor belgilangan:

$$\begin{aligned} S\equiv\{&0,u_1(y_1)..u_1(y_{N-1}),0,0,u_2(y_1)..u_2(y_{N-1}),0,0,\\ &u_3(y_1)...,0,u_M(y_1)..u_M(y_{N-1}),0\}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

A matritsa o‘lchami $((N+1)M)\times((N+1)M)$ ga va D matritsa o‘lchami $2M\times((N+1)M)$ ga teng:

$$
A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_M \end{bmatrix},
$$

$$
A_j=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{10}^{(j)} & a_{11}^{(j)} & \cdots & a_{1N-1}^{(j)} & a_{1N}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-10}^{(j)} & a_{N-11}^{(j)} & \cdots & a_{N-1N-1}^{(j)} & a_{N-1N}^{(j)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A=\begin{bmatrix}
\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{10}^{(1)} & a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1N-1}^{(1)} & a_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-10}^{(1)} & a_{N-11}^{(1)} & \cdots & a_{N-1N-1}^{(1)} & a_{N-1N}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{10}^{(2)} & a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1N-1}^{(2)} & a_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-10}^{(2)} & a_{N-11}^{(2)} & \cdots & a_{N-1N-1}^{(2)} & a_{N-1N}^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{10}^{(M)} & a_{11}^{(M)} & \cdots & a_{1N-1}^{(M)} & a_{1N}^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-10}^{(M)} & a_{N-11}^{(M)} & \cdots & a_{N-1N-1}^{(M)} & a_{N-1N}^{(M)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
D=\left[\begin{array}{ccccc}
1\;0\;0\;0\;0 & 0\;0\;0\;0\;0 & & & \\
0\;0\;0\;0\;1 & -1\;0\;0\;0\;0 & & & 0 \\
x\;x\;x\;x\;x & x\;x\;x\;x\;x & & & \\
 & 0\;0\;0\;0\;1 & -1\;0\;0\;0\;0 & & \\
 & x\;x\;x\;x\;x & x\;x\;x\;x\;x & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 0\;0\;0\;0\;1 & -1\;0\;0\;0\;0 \\
0 & & & x\;x\;x\;x\;x & x\;x\;x\;x\;x \\
 & & & 0\;0\;0\;0\;0 & 0\;0\;0\;0\;1
\end{array}\right].
$$

A matritsaning $a_{ij}^{(k)}\ (k=1,2,...,M, i\neq 0, N)$ elementlari, $\widetilde{A}$ matritsaning $\widetilde{a}_{ij}^{(k)}\ (k=1,2,...,M, i\neq 0, N)$ mos elementlariga teng bo‘ladi. D matritsaning dastlabki va oxirgi qator elementlari shart (3.16) ga ko‘ra, qolgan juft $(l=2j,\ j=2,...,M-1)$–qator elementlari tenglama, (3.14) toq $(l=2j-1,\ j=2,...,M)$–qator elementlari esa tenglama (3.15) koeffitsientlari orqali hisoblanadi.

Tenglamalar sistemasi (3.29)-(3.30) “differensial-algebraik” tenglamalardan iborat, unda $(N-1)M$ ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi (3.29) va $2M$ ta chiziqli algebraik (3.30) shartlar mavjud, noma’lumlar soni $(N+1)M$ tani tashkil etadi. Chiziqli xosmas almashtirishlardan foydalanish orqali (3.29)-(3.30) sistemani to‘rning elementlarida yozilgan kichik tartibli $(N-1)M$ differensial tenglamalar sistemasi, hamda to‘rning bo‘linish nuqtalari va chegaraviy nuqtalarida yozilgan standart $Ax=b$ ko‘rinishdagi algebraik sistemadan iborat bo‘lgan ikkita avtonom sistemaga keltirish mumkin.

Shartlar (3.30) dagi o‘zgaruvchilarni X, Y, V_j va W_j orqali belgilab, ularni yangi erkli o‘zgaruvchilar sifatida belgilab quyidagi tengliklar hosil qilinadi

$$\begin{aligned}
&V_j \equiv u_j(y_N)-u_{j+1}(y_0)=0,\ \ j=1,...,M-1,\\
&W_j \equiv \frac{1}{l_j}\frac{\partial u_j}{\partial y}(y_N)-\frac{1}{l_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial y}(y_0)=0,\\
&j=1,...,M-1,\\
&X \equiv u_0(y_0)=0,\\
&Y \equiv u_M(y_N)=0,
\end{aligned}\tag{3.32}$$

u holda ushbu vektor

$$\begin{aligned}
w=\{&X, u_1(y_1)..u_1(y_{N-1}), V_1, W_1, u_2(y_1)..u_2(y_{N-1}),\\
&V_2, W_2, ..., V_{M-1}, W_{M-1}, u_M(y_1)..u_M(y_{N-1}), Y\},
\end{aligned}\tag{3.33}$$

vektor (3.31) dagi S bilan mos tushadi va w vektor, v vektor bilan quyidagi munosabat orqali bog‘langan bo‘ladi:

$$w = Gv, \tag{3.34}$$

bunda G –o‘lchami $((N+1)M) \times ((N+1)M)$ ga teng bo‘lgan xosmas matritsa

$$G = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & x & x & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & x & x & x & x & x & x & x & x \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

G xosmas matritsaning $j(N+1)$ $(j = 1,...,M-1)$ nomerli satrlari, D matritsaning $2j$ $(j = 1,...,M-1)$ nomerli satrlaridan iborat, G xosmas matritsaning $j(N+1)+1$ $(j = 1,...,M-1)$ nomerli satrlari esa D matritsaning $2j-1$ $(j = 2,...,M)$ satrlari bilan mos bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, quyidagi belgilash kiritiladi:

$$\tilde{H} = AG^{-1}, \tag{3.35}$$

natijada tenglama (2.29) ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\frac{dw}{dt} = \tilde{H}w \tag{3.36}$$

tenglamalar sistemasi (3.36) komponentalari orqali quyidagicha yoziladi

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_1(y_1) \\ \vdots \\ \dot{u}_1(y_{N-1}) \\ 0 \\ 0 \\ \dot{u}_2(y_1) \\ \vdots \\ \dot{u}_2(y_{N-1}) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \dot{u}_M(y_1) \\ \vdots \\ \dot{u}_M(y_{N-1}) \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
\ddots & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \tilde{h}_{ij} & \ddots & \ddots & \tilde{h}_{ij} & \cdots & \tilde{h}_{ij} & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\bullet
\begin{bmatrix} 0 \\ u_1(y_1) \\ \vdots \\ u_1(y_{N-1}) \\ 0 \\ 0 \\ u_2(y_1) \\ \vdots \\ u_2(y_{N-1}) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ u_M(y_1) \\ \vdots \\ u_M(y_{N-1}) \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Shunday qilib, yuqoridagi munosabatdan ko‘rinadiki, oddiy differensial tenglamalar sistemasi (3.29) ni tartibi unga nisbatan kichik bo‘lgan sistemaga keltiriladi, bunda H xosmas matritsa bo‘lib, u $\tilde{H}$ matritsaning nolga teng bo‘lgan satr va ustun elementlarini yo‘qotish orqali hosil qilinadi, uning elementlari w vektorning mos nolga teng elementlariga ko‘paytiriladi; bunday ustunlarning bir nechtasi yuqoridagi ifodada shtrixlash orqali ajratib ko‘rsatilgan.

Bu holda, tenglama (3.36) quyidagi ko‘rinishga keladi

$$
\frac{dr}{dt} = Hr, \tag{3.37}
$$

bunda H o‘lchami $((N-1)M) \times ((N-1)M)$ bo‘lgan matritsa,

$$
r = \{u_1(y_1) \ldots u_1(y_{N-1}), u_2(y_1) \ldots u_2(y_{N-1}), \ldots, u_M(y_1) \ldots u_M(y_{N-1})\}
$$

vektor esa uzunligi $(M(N-1))$ dan iborat vektor, bunda r vektor v vektordan $(j-1)N+1$ va $jN,\ j = 1,2,\ldots,M$ komponentalari mavjud emasligi bilan farqlanadi.

v vektorning yetishmaydigan komponentalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (3.34) ni yechish orqali topiladi.

3.4-§. Hisoblash algoritmi va dasturiy ta'minoti

Differensial masala (3.1)-(3.3) vaqtning $t=0$ qiymatida $u(x,0)=u_0(x)$ boshlang'ich shart bilan hisoblanadi.

Tenglamalar sistemasi (3.37) ning dastlabki $t=\tau,\, t=2\tau$ ikkita vaqt qatlamlaridagi yechimlari to'rtinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan bir qadamli Runge-Kutta metodi orqali topiladi;

Tenglamalar sistemasi (3.37) uchun to'rtinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan Runge-Kutta metodi formulalari quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned}
&k_1^{(1)} = hf_1\left(\overline{u}_n^{(1)}, \ddot{u}_n^{(2)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)}\right),\\
&k_2^{(1)} = hf_2\left(\overline{u}_n^{(1)}, \ddot{u}_n^{(2)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)}\right),\\
&\ldots\\
&k_{(N-1)M}^{(1)} = hf_{(N-1)M}\left(\overline{u}_n^{(1)}, \overline{u}_n^{(2)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&k_1^{(2)} = hf_1\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(1)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(1)}}{2}\right),\\
&k_2^{(2)} = hf_2\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(1)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(1)}}{2}\right),\\
&\ldots\\
&k_{(N-1)M}^{(2)} = hf_{(N-1)M}\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(1)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(1)}}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$k_1^{(3)} = hf_1\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(2)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(2)}}{2}\right),$$
$$k_2^{(3)} = hf_2\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(2)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(2)}}{2}\right),$$
$$\ldots$$
$$k_{(N-1)M}^{(3)} = hf_{(N-1)M}\left(\overline{u}_n^{(1)} + \frac{h}{2}, \overline{u}_n^{(2)} + \frac{k_1^{(2)}}{2}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{k_{(N-1)M}^{(2)}}{2}\right),$$
$$k_1^{(4)} = hf_1\left(\overline{u}_n^{(1)} + h, \overline{u}_n^{(2)} + k_1^{(3)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + k_{(N-1)M}^{(3)}\right),$$
$$k_2^{(4)} = hf_2\left(\overline{u}_n^{(1)} + h, \overline{u}_n^{(2)} + k_1^{(3)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + k_{(N-1)M}^{(3)}\right),$$
$$\ldots$$
$$k_{(N-1)M}^{(4)} = hf_{(N-1)M}\left(\overline{u}_n^{(1)} + h, \overline{u}_n^{(2)} + k_1^{(3)}, \ldots, \overline{u}_n^{((N-1)M)} + k_{(N-1)M}^{(3)}\right),$$
$$\overline{u}_{n+1}^{(1)} = \overline{u}_n^{(1)} + \frac{1}{6}\left(k_1^{(1)} + 2k_1^{(2)} + 2k_1^{(3)} + k_1^{(4)}\right),$$
$$\overline{u}_{n+1}^{(2)} = \overline{u}_n^{2} + \frac{1}{6}\left(k_2^{(1)} + 2k_2^{(2)} + 2k_2^{(3)} + k_2^{(4)}\right),$$
$$\ldots$$
$$\overline{u}_{n+1}^{((N-1)M)} = \overline{u}_n^{((N-1)M)} + \frac{1}{6}\left(k_{(N-1)M}^{(1)} + 2k_{(N-1)M}^{(2)} + 2k_{(N-1)M}^{(3)} + k_{(N-1)M}^{(4)}\right),$$

bunda $n = 0{,}1$.

Tenglamalar sistemasi (3.37) evolyutsion sistemadan iborat. Bunda vaqt bo‘yicha yangi qatlamni hisoblashda quyidagi oshkor sxemadan foydalaniladi

$$\begin{aligned} &r(t+\tau) = r(t) + RQr(t), \\ &R\varphi(t) = \frac{\tau}{12}\left[23\varphi(t) - 16\varphi(t-\tau) + 5\varphi(t-2\tau)\right], \\ &Q = \frac{12}{\tau}\left(e^{H\tau} - E\right)\left(23E - 16e^{-H\tau} + 5e^{-2H\tau}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

bunda Q matritsa sistema (3.37) ustida maxsus almashtirishlar o‘tkazish orqali topiladi. R–uchinchi tartibli Adams-Beshfort sxemasi operatori, E–birlik matritsa, τ–integrallash qadami.

Sxema (3.38) ning qo‘llanilishi Adams-Beshfort sxemasini qo‘llashga nisbatan integrallash qadami τ ga turg‘unlik nuqtai-nazaridan qo‘yiladigan talabni keskin pasaytirishga imkon beradi.

Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib hisoblashlar ketma-ketligini quyidagicha yozish mumkin:

1) qaralayotgan integrallash intervalida to‘r kiritiladi, ya’ni u M ta turli bo‘laklarga bo‘linadi;

1`) qo‘yilgan differensial masala spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalanadi va “differensial-algebraik” sistemaga keltiriladi;

2) Runge-Kutta metodi yordamida dastlabki ikkita vaqt qatlamlaridagi $t=\tau, t=2\tau$ yechimlar topiladi;

3) turg‘unlik talabini susaytirish maqsadida H matritsaga nisbatan bir qator xosmas almashtirishlar o‘tkaziladi;

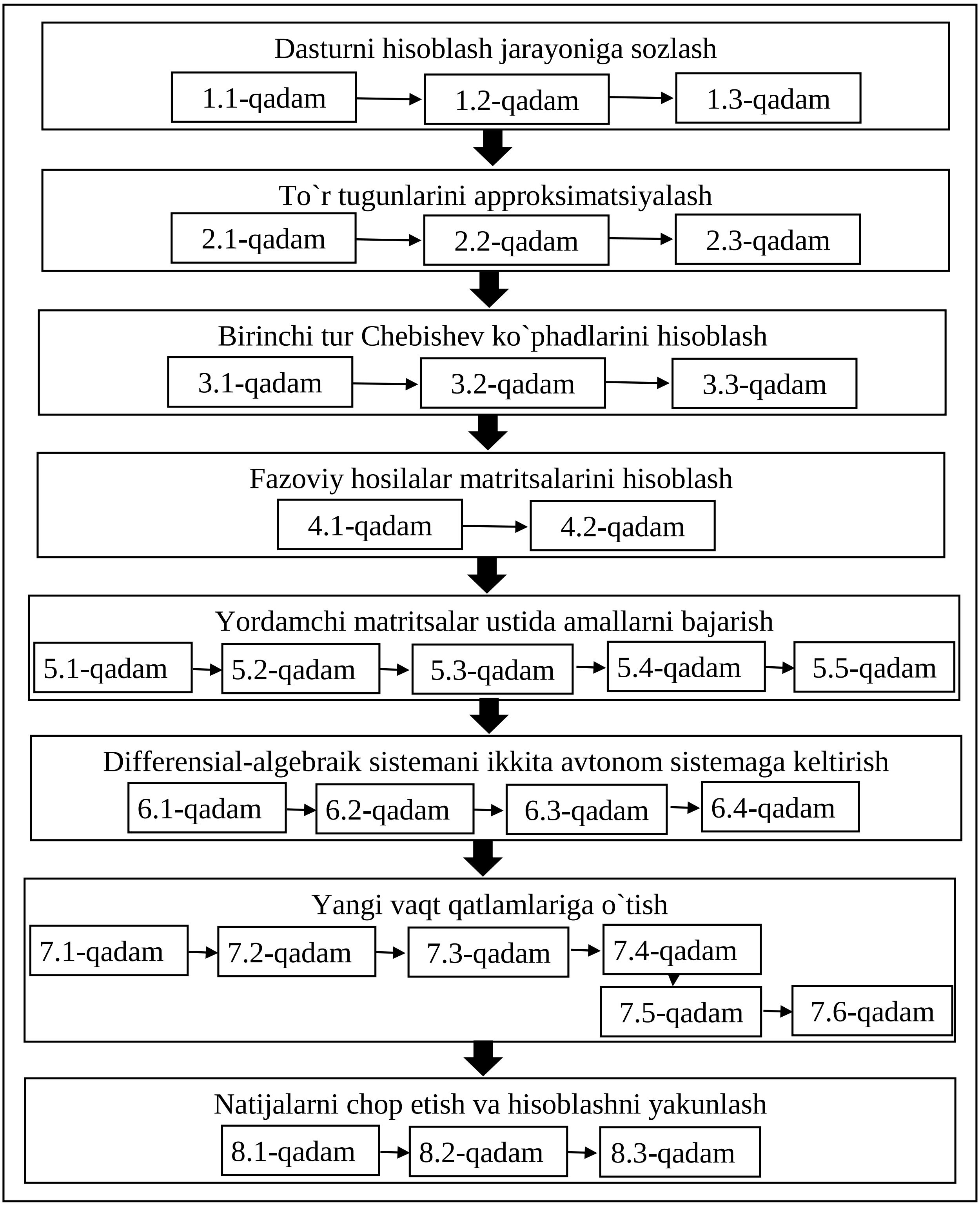
4) oshkor sxema (2.38) dan foydalanilib yangi vaqt qatlami $t+\tau$ ga o‘tish ta’minlanadi;

5) algebraik sistema (3.34) ni yechish orqali v vektor komponentalarining chegaralaridagi elementlar qiymatlari topiladi.

Qaralayotgan sohada yuqori tartibli hosila oldida qovushqoqlik qiymati turlicha bo‘lgan parabolik tenglama uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala (3.1)-(3.3) ni yechishning spektral-to‘r metodi algoritmiga mos C++ dasturlash tilida dasturiy ta’minot yaratilgan.

Dasturni samarador hamda kompyuter xotirasidan unumli va tejamli foydalanish uchun dasturni tuzishda to‘liq dinamik tuzilmadan foydalaniladi.

Quyida spektral-to‘r metodi algoritmi uchun C++ dasturlash tilida tuzilgan dasturiy ta’minot tuzilmasi keltirilgan.



Dasturiy ta’minot tuzilmasidagi bloklardagi qadamlar quyidagi vazifalarni bajaradi:

1. Dasturni hisoblash jarayoniga sozlash.

1.1-qadam. C++ kompilyatori kutubxonasidagi kerakli modullar bilan bog‘lanishni o‘rnatish.

1.2-qadam. Hisoblash natijasi katta miqdordagi matritsa va massivlardan iborat, shu sababli, natijalar bilan ishlash qulay bo‘lishi uchun fayl bilan ishlash moduli <fstream> bilan aloqa o‘rnatiladi hamda ma’lumotni yozish oqimi o‘rnatiladi, ma’lumotlar faylga yoziladi.

1.3-qadam. Dasturda foydalaniladigan o‘zgaruvchi va o‘zgarmaslar e’lon qilinadi.

2. To‘r tugunlarini approksimatsiyalash.

2.1-qadam. Integrallash intervali M ta bo‘lakka bo‘linadi.

2.2-qadam. Integrallash intervalini teng yoki tengmas oraliqqa bo‘lish usuli belgilanadi.

2.3-qadam. Formula (3.12) dan foydalanib to‘rning har bir $[x_{j-1}, x_j]$ elementi $[-1,1]$ kesmaga akslantiriladi.

3. Birinchi tur Chebishev ko‘phadlarini hisoblash.

3.1-qadam. Birinchi tur Chebishev ko‘phadlari tugunlari hisoblab olinadi.

3.2-qadam. formula (3.18) dan foydalanib birinchi tur Chebishev ko‘phadlaridan iborat bo‘lgan T blokli-diagonalli kvadrat matritsa hisoblanadi.

3.3-qadam. formula (3.19) dan foydalanib teskari Chebishev almashtirishlari asosida T^* blokli-diagonalli kvadrat matritsa hisoblanadi.

4. Fazoviy hosilalar matritsalarini hisoblash.

4.1-qadam. formula (3.24) asosida P blokli-diagonalli kvadrat matritsa hisoblanadi.

4.2-qadam. formula (3.27) asosida $\hat{A}$ blokli-diagonalli kvadrat matritsa hosil qilinadi.

5. Yordamchi matritsalar ustida amallar bajarish.

5.1-qadam. To‘r tugunlari uzunliklaridan iborat bo‘lgan L matritsa hosil qilinadi.

5.2-qadam. formula (3.28) bo‘yicha yordamchi $\tilde{A}$ blokli-diagonalli kvadrat matritsa yaratiladi.

5.3-qadam. A blokli-diagonalli kvadrat matritsa hisoblanadi.

3-5 blokda hosil qilingan matritsalar blokli-diagonalli kvadrat matritsalar bo‘lib, hisoblash jarayonini samarali tashkil qilish maqsadida faqat diogonaldagi bloklar bilan ishlanadigan uch o‘lchamli matritsa strukturasi e’lon qilinadi va hisoblash ishlari olib boriladi. Uch o‘lchamli matritsa tuzilmasidan foydalanish $(M-1)\times M$ ta matritsalar bloki bilan hisoblash ishlaridan halos qiladi, bu katta samaradorlikka olib keladi.

5.4-qadam. Uzluksizlik va chegaraviy shartlardan iborat D matritsa hosil qilinadi.

5.5-qadam. Uch o‘lchamli A blokli-diagonalli kvadrat matritsa ikki o‘lchamli strukturadagi matritsaga o‘tkaziladi.

6. Differensial-algebraik sistemani ikkita avtonom sistemaga keltirish.

6.1-qadam. Uzluksizlik va chegaraviy shartlardan iborat D matritsadan foydalanib G matritsa yaratiladi.

6.2-qadam. Teskari G^{-1} matritsa hisoblab olinadi.

6.3-qadam. formula (3.35) asosida H matritsa hisoblanadi.

6.4-qadam. H matritsaning tartibi pasaytiriladi.

7. Yangi vaqt qatlamlariga o‘tish.

7.1-qadam. Differensial masala (3.1)-(3.3) boshlang‘ich shart bilan hisoblanadi.

7.2-qadam. Tenglamalar sistemasi (3.37) ning dastlabki ikkita vaqt qatlamlaridagi yechimlari to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan Runge-Kutta metodi yordamida hisoblanadi.

7.3-qadam. Matritsali eksponenta hisoblanadi.

7.4-qadam. Q matritsa hisoblab olinadi.

7.5-qadam. Formula (3.38) asosida vaqt bo‘yicha 3-qatlamdan boshlab, yangi qatlamlardagi qiymatlar Adams-Beshfort metodi asosida hisoblanadi.

7.6-qadam. Tugunlarning chegaradagi komponentalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (3.34) ni yechish orqali topiladi.

8. Natijalarni chop etish va hisoblashni yakunlash.

8.1-qadam. Barcha olingan hisoblash natijalari faylga yoziladi.

8.2-qadam. Dasturda yaratilgan dinamik o‘zgaruvchilar, massiv va matritsalar hisoblashlar so‘ngida xotiradan o‘chiriladi.

8.3-qadam. Ma’lumotni faylga yozish oqimi yopiladi va hisoblash ishlari tugallanadi.

3.5-§. Hisoblash eksperimenti natijalari va ularning tahlili

Yuqorida ayirmali sxemalar va spektral to‘r metodlari yordamida ishlab chiqilgan algoritm bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffisiyentli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi (3.1)-(3.3) uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalani hisoblashga tadbiq etilgan.

Bu holda qo‘yilgan masalaning boshlang‘ich yechimi ushbu ko‘rinishda qaraladi:

$$u(x,0)=\exp\left[-\frac{k_i x^2}{4t_0}\right], \qquad (3.39)$$

O‘zgarmas t_0 dastlabki taqsimotning yarim uzunligini aniqlaydi: t_0 qanchalik kichik bo‘lsa, u ham shunchalik qisqa bo‘ladi. Sonli hisoblashlar asosan parametrlarning quyidagi qiymatlarida olib borilgan: $t_0=0.15$, $\tau=0.01$. Integrallash intervali $[-1,1]$ deb tanlab olingan. Dastlabki taqsimotning berilgan yarim uzunligi uchun funksiya (3.39) chegaraviy nuqtalarda 10^{-12} aniqlik bilan nolga teng bo‘ladi. Shu sababli, tenglama (3.39) quyidagi chegaraviy shartlar bilan qaraldi:

$$u(\pm 1,t)=0, \qquad (3.40)$$

Hisoblash eksperimenti $k_1=150,\ k_2=200,\ k_3=250,\ k_4=300$ hamda $[-1,1]$ kesma teng oraliqlarga bo‘linganda $N=16$, $N=32$ va $N=64$ tugunlarga ega bo‘lgan ayirmali sxemadan foydalangan holda, xuddi shuningdek bazis funksiyalari (Chebishev ko‘phadlari) soni $N=16$, $N=32$ va $N=64$ ga teng bo‘lgan spektral-to‘r metodi bilan vaqtning $t = 40\tau$ qatlamida olib borilgan, bu yerda τ vaqt bo‘yicha to‘r qadami.

3.1-jadval.

Ayirmali metod, bunda $k_1 = 150, k_2 = 200, k_3 = 250, k_4 = 300$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2429	0.5201	0.7972	0.5155	0.2336
N=32	0.2065	0.3934	0.5748	0.3666	0.1747
N=64	0.2060	0.4105	0.5314	0.3902	0.1654

3.2-jadval.

Spektral-to‘r metodi, bunda $k_1 = 150, k_2 = 200, k_3 = 250, k_4 = 300$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2539	0.4279	0.5261	0.4065	0.2488
N=32	0.2412	0.378	0.4672	0.3623	0.2224
N=64	0.2257	0.3736	0.4474	0.3583	0.2074

Endi issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti k_i to‘r elementlarida quyidagicha tanlanadi: $k_1 = 200,\ k_2 = 300,\ k_3 = 350,\ k_4 = 250$ hamda $[-1,1]$ kesma teng oraliqlarga bo‘lingan holatda hisoblash ekisprementlari olib boriladi.

3.3-jadval.

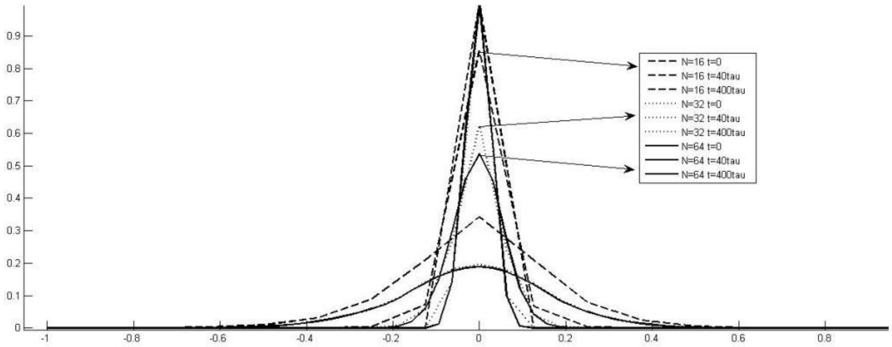
Ayirmali metod, bunda $k_1 = 200,\ k_2 = 300,\ k_3 = 350,\ k_4 = 250$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2286	0.5416	0.8544	0.5398	0.2251
N=32	0.1408	0.3378	0.6223	0.3170	0.1223
N=64	0.1311	0. 3635	0.5367	0.3455	0.1063

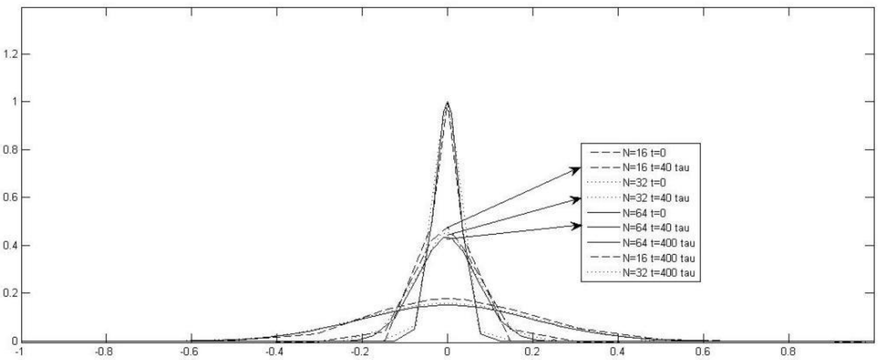
3.4-jadval.

Spektral-to‘r metodi, bunda $k_1 = 200,\ k_2 = 300,\ k_3 = 350,\ k_4 = 250$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2033	0.379	0.4773	0.3483	0.1935
N=32	0.1929	0.3397	0.4571	0.3312	0.1834
N=64	0.1726	0.3379	0.4338	0.3274	0.1616



3.1-rasm. Ayirmali metod bilan turli to‘rlarda va har xil vaqt qatlamlarida hisoblangan yechim.



3.2-rasm. Spektral-to‘r metodi bilan turli sondagi Chebishev ko‘phadlari olinganda va har xil vaqt qatlamlarida hisoblangan yechim.

Qaralayotgan [-1,1] kesma markazida $k_i -$issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti keskin o‘zgaruvchan, ya’ni quyidagicha taqsimlangan bo‘lsin: [-1,-0.2] kesmada $k_1 = 200$, [-0.2,0] kesmada $k_2 = 300$, [0,0.2] kesmada $k_3 = 350$, [0.2,1] kesmada $k_4 = 250$.

3.5-jadval.

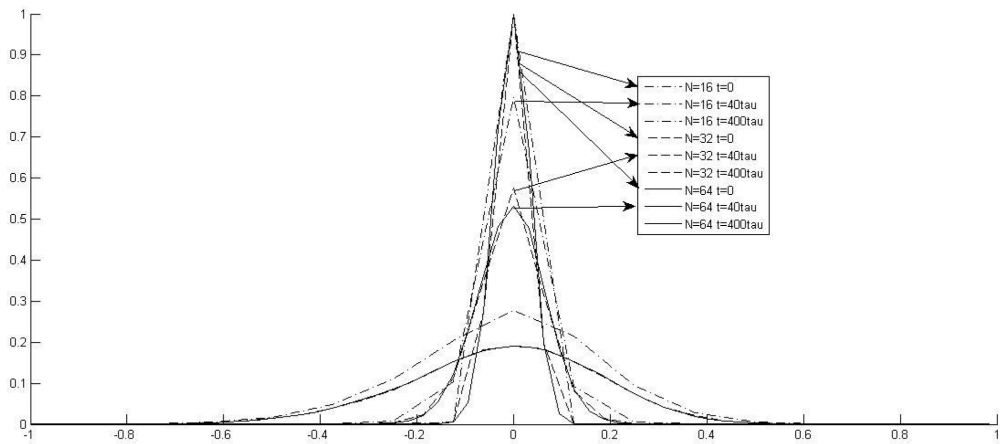
Ayirmali metod, bunda $k_1 = 200$, $k_2 = 300$, $k_3 = 350$, $k_4 = 250$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2282	0.5413	0.8544	0.5395	0.2245
N=32	0.1408	0.3378	0.6223	0.3170	0.1222
N=64	0.1312	0.3635	0.5367	0.3455	0.1062

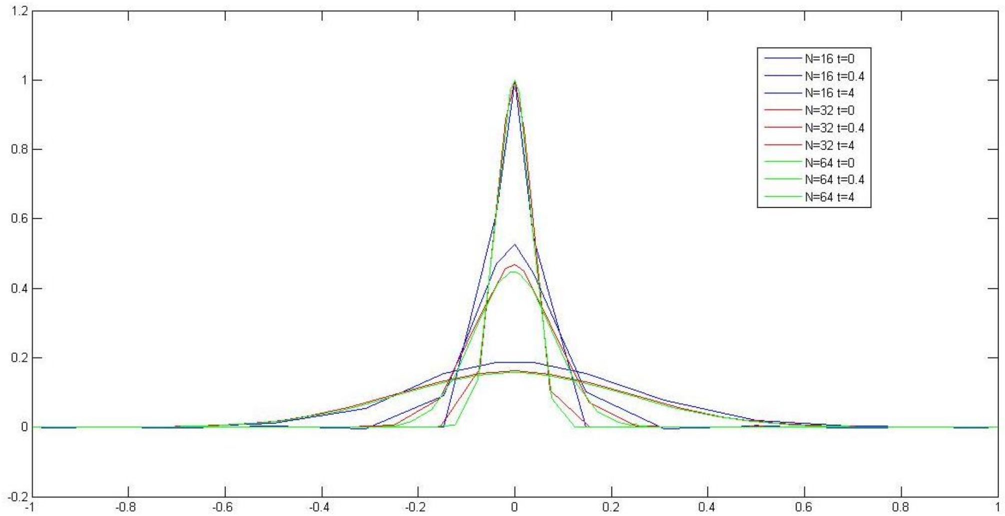
3.6-jadval.

Spektral-to‘r metodi, bunda $k_1 = 200$, $k_2 = 300$, $k_3 = 350$, $k_4 = 250$

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=16	0.2033	0.379	0.4773	0.3483	0.1935
N=32	0.1929	0.3397	0.4571	0.3312	0.1834
N=64	0.1726	0.3379	0.4338	0.3274	0.1616



3.3-rasm. Ayirmali metod bilan turli to‘rlarda va vaqt qatlamlarida olingan yechim.



3.4-rasm. Spektral-to‘r metodi bilan turli sondagi Chebishev ko‘phadlari olinganda va har xil vaqt qatlamlarida hisoblangan yechim.

Yuqoridagi 2.1, 2.3, 2.5 jadvallarda hamda 2.1, 2.3 rasmlarda parametr k_i ning turlicha qiymatlarida keltirilgan natijalar qaralayotgan masalaning ayirmali metod bilan to‘r tugunlari soni $N=16$, $N=32$ va $N=64$ bo‘lganda olingan taqribiy yechimlarining o‘zaro taqqoslanishi keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki, k_i parametrning tanlangan har xil qiymatlarida hamda turli to‘r va vaqt qatlamlarida olingan yechimlarining qiymatlari keskin farqlanadi.

Ayni paytda 2.2, 2.4, 2.6 jadvallarda va 2.2, 2.4 rasmlarda k_i parametrning turli qiymatlarida qaralayotgan masalaning spektral-to‘r metodi bilan Chebishev ko‘phadlari soni $N=16$, $N=32$ va $N=64$ ta bo‘lganda olingan sonli yechimlarining taqqoslash natijalaridan ko‘rinadiki, qo‘yilgan masalaning spektral-to‘r metodi bilan olingan taqribiy yechimlari k_i parametrning tanlangan qiymatlarida deyarli mos tushadi, bu o‘z navbatida kam sonli ko‘phadlardan foydalangan holda yuqori aniqlikka ega bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatdi. Hisoblash ishlari aniqligini yanada oshirish maqsadida spektral-to‘r metodida to‘r tugunlarining umumiy sonini ortirmasdan yechim gradiyenti katta bo‘lgan soha markazida tugunlarini zichlashtiramiz, bu holda spektral-to‘r metodida [-1,1] kesmada to‘r tugunlari quyidagicha tanlab olinadi:

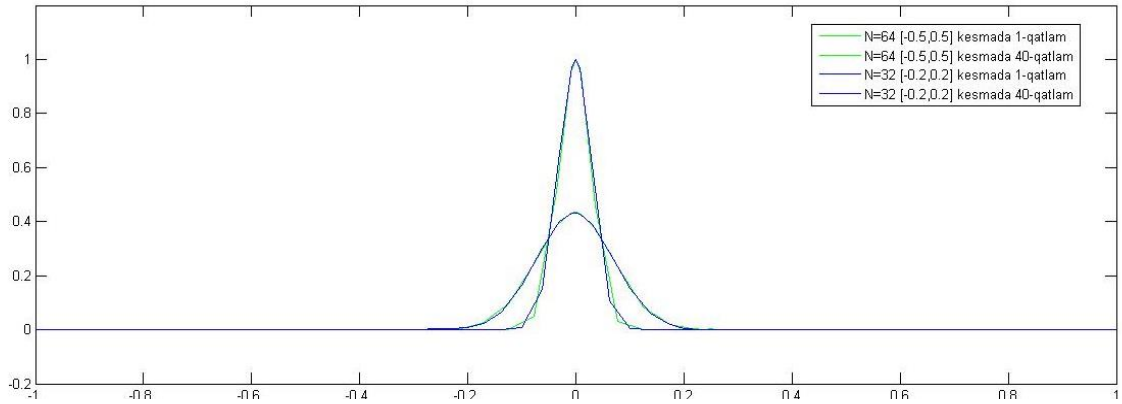
$$[-1,-0.2],\ [-0.2,0],\ [0,0.2],\ [0.2,1]$$

Olingan natijalar quyidagi jadval va grafikda o‘z aksini topgan.

3.7-jadval.

Spektral-to‘r metodi bilan to‘r elementlari markazga tomon zichlashtirilgan ($N = 32$) va zichlashtirilmagan ($N = 64$) holda olingan yechimlar.

	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1
N=32	0.1636	0.3359	0.4306	0.325	0.152
N=64	0.1724	0.3377	0.434	0.3275	0.1614



3.5-rasm. Spektral-to‘r metodida olingan natijalar

Yuqoridagi jadvalda to‘r elementlari soni M=8, Chebishev ko‘phadlari soni N=64 bo‘lgan hamda to‘r elementlari markazga tomon zichlashtirilgan, hamda to‘r elementlari soni M=4, Chebishev ko‘phadlari soni N=32 bo‘lgan holda taqqoslangan. Yuqoridagi 2.5-rasmda keltirilgan natijalardan ko‘rinadiki, $t = 40\tau$ qatlamda olingan taqribiy yechimlar ustma-ust tushadi, bundan to‘r tugunlari yechim gradient katta bo‘lgan markazga tomon zishlashtirilishi aniqlikning 2 martadan ziyodroq ortishini ta’minlashini ko‘rsatadi.

Bu o‘z navbatida spektral-to‘r metodining universal xarakterga ega ekanligini, bunda to‘r elementlari sonini turli uzunlikda hamda ularda yechimni approksimatsiyalash uchun qo‘llaniladigan ko‘phadlar sonini ham turlicha tanlab olish imkoniyati mavjudligini ko‘rsatadi, bunda yechim yuqori aniqlik bilan topiladi.

3-bob bo‘yicha xulosalar

Mazkur bobda:

differensial masala qo‘yildi;

- bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffisientli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini ayirmali usullar bilan sonli modellashtirish masalalari qaraldi;
- bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas koeffisientli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini spektral-to‘r metodi bilan sonli modellashtirish masalalari qaraldi;
- qo‘yilgan masalani sonli modellashtirish uchun ayirmali hamda spektral-to‘r metodi algoritmi ishlab chiqildi, algoritmga mos dasturiy ta’minot yaratildi hamda keng qamrovli hisoblash eksperimenti olib borildi.

XULOSA

Dissertatsiya bo‘lakli uzlukli o‘zgarmas hamda chiziqli bo‘lmagan koeffisientli kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini sonli modellashtirishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Ayirmali hamda spektral-to‘r metodlarining evolyutsion tenglamalar uchun sifat xossalari aniqlangan.

2. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini sonli yechish uchun ayirmali sxemalar va spektral-to‘r metodi qurilgan.

3. Spektral-to‘r metodining yaqinlashishini ta’minlovchi teoremalar isbotlangan va yaqinlashish tezligi baholari olindi.

4. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini sonli yechish va hisoblash eksperimenti natijalarini vizuallashtirish uchun spektral-to‘r metodi algoritmi va dasturiy ta’minoti ishlab chiqilgan.

5. Integrallash intervalida yechim gradienti yuqori bo‘lgan sohalar aniqlangan va ular lokallashtirilgan.

6. Spektral-to‘r metodini qo‘llash natijasida bazis funksiyalari umumiy sonini (Chebishev ko‘phadlari) oshirmasdan, ularni optimal joylashtirish va hisoblashlarning yuqori aniqligi va samaradorligini ta’minlash ko‘rsatilgan.

7. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan yechishda xarakterli parametrlarning turli qiymatlarida keng qamrovli hisoblash eksperimenti o‘tkazilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1978. 591 с.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. 656 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. 415 с.

4. Самарский А.А., Николаев В.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. 589 с.

5. Самарский А.А. Введение в численные методы – М.: Наука, 2005. 288 с

6. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Наука, М. 2005, 480с.

7. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.

8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. 688 с.

9. Яненко Н. Н. О нелинейных уравнениях переменного типа //Записки научных семинаров ПОМИ. – 1980. – Т. 96. – №. 0. – С. 294-301.

10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.

11. Messaoudi S. A. A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy //Journal of mathematical analysis and applications. – 2002. – Т. 273. – №. 1. – С. 243-247.

12. Gol'dman N. L. Boundary value problems for a quasilinear parabolic equation with an unknown coefficient //Journal of Differential Equations. – 2019. – Т. 266. – №. 8. – С. 4925-4952.

13. Liu X. Insensitizing controls for a class of quasilinear parabolic equations //Journal of Differential Equations. – 2012. – Т. 253. – №. 5. – С. 1287-1316.

14. Duan Z. The asymptotic self-similar behavior for the quasilinear heat equation with nonlinear boundary condition //Computers & Mathematics with Applications. – 2009. – Т. 58. – №. 10. – С. 2005-2021.

15. Adimurthi K., Byun S. S. Boundary higher integrability for very weak solutions of quasilinear parabolic equations //Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 2019. – Т. 121. – С. 244-285.

16. Giacomoni J., Sauvy P., Shmarev S. Complete quenching for a quasilinear parabolic equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. – Т. 410. – №. 2. – С. 607-624.

17. Lan D. et al. Quasilinear parabolic equations with first order terms and L1-data in moving domains //Nonlinear Analysis. – 2021. – Т. 206. – С. 112233.

18. Мартинсон Л. К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением //Математическое моделирование.//Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского АА, Галактионова ВА, Курдюмова СП Сборник статей. М.: Наука. – 1986. – С. 279-309.

19. Самариский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.Локализация горения в плазме с эллектронной теплопроводностью. – Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вын. 9, с. 620-624.

20. Berkovsky B. M., Bashtovoi V. G. The finite velocity of heat propagation from the viewpoint of the kinetic theory //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1977. – Т. 20. – №. 6. – С. 621-626.

21. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. — 1024 с.

22. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 542 с.

23. Самариский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Метастабильная локализация тепла в среда с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте: Препр. ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР №103. М., 1977. 87 с.

24. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1986. - №1. – С. 46-50.

25. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Устойчивость двухфазного потока газ – твердые частицы в пограничном слое // Изв РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1987. - №2. – С. 60-64.

26. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Численный метод решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнение на основе неоднородной сплайн – аппроксимации // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Сб. науч. тр. Инс-т. матем. СО РАН. –Новосибрск, 1989. – С. 151-164.

27. Нармурадов Ч.Б., Решение уравнения Орра – Зоммерфельда спектрально –сеточным методом // Докл. АН РУз. – Ташкент, 2001. - №10-11. – С.9-12.

28. Нармурадов Ч.Б. Алгоритм спектрально – сеточного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости пограничного слоя // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2001. - №5-6. – С. 57-60.

29. Нармурадов Ч.Б. Пакет прикиладных программ для решения задачи гидродинамической устойчивости // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2002. - №2. – С.40-43.

30. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость спектрально – сеточного метода // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2003. - №2. – С.64-71.

31. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Решения задачи гидродинамической устойчивост двухфазных потоков спектрально – сеточным методом / Вопросы кибернетики: Сб.науч.тр – Ташкент, ИК АН РУз, 2002. – вып. 168-5-9.

32. Нармурадов Ч.Б. Матричное преобразование в спектрально – сеточном методе // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2003. - №4. – С.9-13.

33. Нармурадов Ч.Б. Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Докл.АН РУз. – Ташкент, 2004.№1. – С.19-26.

34. Нармурадов Ч.Б. Пространсвенная зависимость характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля // Узбекиский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. -№1. – С. 46-48.

35. Нармурадов Ч.Б. Пространсвенная зависимость характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Узбекиский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. -№3. – С. 21-24.

36. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра – Зомерфельда // Математической моделирование. – Москва, 2005. - №9(17). – С. 35-42.

37. Нармурадов Ч.Б. Исследование пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Техника и технология. – Москва, 2007. - №5(23). – С. 48-51.

38. Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопаралельных течений // Математическое моделирование. – Москва, 2007. - №6(19). – С. 53-60.

39. Корпусов М.О. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. — М.: Физический факультет МГУ, 2014. 364 с.

40. Алимов Ш.А. О спектральных разложениях непрерывных функций из классов Соболева // Докл. РАН. – 1976. – № 3(229). – С. 529 – 530.

41. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

42. Нармурадов Ч.Б., Юлдашев Ш.М., Тойиров А.Х. Математическое моделирование нелинейных тепловых процессов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 3(27). — С. 76–89.

43. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. – Т.: «Fan va texnologiya», 2011. – 188 с.

44. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983.

45. Алимов Ш.А., Сафаев С.А. О числе отрицательных собственных значений оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. – Москва, 1993. - №10(29). – С.1843-1846.

46. Методы расчета турбулентных течений / Дж.Ламли, Ж.Матье и др.; под ред А.Д.Хонкина. – М.:Мир, 1984.-464с.

47. Grosch C.E., Salwen H. The stability of steady and timedevelopment plane Poiseuille flow // J.fluid mech. – 1968. -№1(34). –P.177-205.

48. Gottlieb D., Turkel E. On time discretization for spectral methods // Stud.appl.math. – 1980. - №1(63). –P.67-86.

49. Kleiser L. Spectral simulation of laminar-turbulent transition in plane Poiseuille flow and comparison with experiments // Lect. notes phys. – 1982. №170. –P.280-285.

50. Orszag S.A., Patera A.T. Secondary instability of wallbounded shearflows // J.fluid mech. – 1983. №128. –P.347-385.

51. Gottleb D., Lustman L. The Dufort-Francel Chebyshev method for parabolic initial boundary value problems // Compyuters and fluids. -1983. -№2(11). –P.107-120.

52. Bridges T.J.,Morris P.J. Spectral calculations of the spatial stability of nonparallel boundary layers // AIAA paper. -1984.- №487. –P.1-8.

53. Ku H.G., Hatziavramids D. Solutions of the two-dimensional Navier – Stokes equations by Chebyshev expansion methods // Compyuters and fluids. -1985. - №1(13). –P.99-113.

54. Fulton S.R., Taylor G.D. On the Gottlieb-Turkel time filter for Chebyshev spectral methods // J.comput. phys. -1984. №2(55). –P.302-312.

55. Gottlieb D. The stability of pseudospectral-Chebyshev methods // Math.comput. -1981. -№153(36). –P.107-118.

56. Fox L., Parker I.B. Chebyshev polinomials in numerical analysis. – London: Oxford university press, 1968.-205 p.

57. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.:Физматгиз, 1962.-500 с.

58. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. –М.:Наука, 1979. -416 с.

59. Эдвардс Р.Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х т. –М.: Мир, 1985. Т.2. -400 с.

60. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х т. –М.: Мир, 1985. Т.1. -264 с.

61. Toyirov A.Kh., Ziyakulova Sh.A., Tukhtayeva N.R. Approximation of the equation of heat conductivity by spectral-grid methods // EPRA – International Journal of Research and Development. – 2020. – Т. 5. – №. 9. – С. 440-446.

62. Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh., Yuldashev Sh.M. Numerical modeling of nonlinear wave systems by the spectral-grid method //International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. – 2020. – Т. 83. – №. 3. – С. 43-54.

63. Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh. Approximation of the Burgers equation by spectral-grid method // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. – 2020. – Т. 7. – №. 11. – С. 15596-15607.

64. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. В 2 –х т. –М.:Наука, 1977. Т.1-304 с.

65. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. В 2 –х т. –М.:Наука, 1977. Т.2-400 с.

66. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. -664 с.

67. Василенко В.А. Сплайн –функции: теория, алгоритмы, программы. – М.: Наука, 1983. -261 с.

68. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. -320 с.

69. Нармурадов Ч.Б., Тойиров А.Х. Математическое моделирование нелинейных волновых систем // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2018. – № 1(13). – С 21 -31.

70. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

71. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. -304 с.

72. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 2005. – 288 с.

73. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 2007. – 256 с.

74. Нармурадов Ч. Б. Матричное преобразование в спектрально-сеточном методе // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики. – 2003. – №. 4. – С. 9–13.

75. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. –М.: Наука, 1966. -576 с.

76. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. -272 с.

77. Беллман Р. Введение в теория матриц. –М.: Наука, 1976. – 352 с.

78. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнение. – М.: Наука, 1988. -192 с.

79. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 192 с.

80. Ch.B. Normurodov, A.X. Toyirov. Chiziqsiz evolyutsion jarayonlarni spektral-to`r metodi bilan sonli modellashtirish. – Termiz. “Bekshox print servis” nashriyoti, 2021. 112 bet.

81. Нармурадов Ч.Б., Тойиров А.Х., Юлдашев Ш.М. Численное моделирование параболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2020. – № 6(30). – С 68-78.

82. Normurodov Ch.B., Yuldashev Sh.M. Numerical modeling of heat conduction equation with piecemeal intermittent continuous coefficient // Central asian journal of mathematical theory and computer sciences. – 2021. – V. 2. – Issue 12. – P. 17-24.

83. Toyirov A.X., Yuldashev Sh.M., Abdullayev B.P. Numerical modeling the equations of heat conductivity and burgers by the spectral-grid method. // Международная научно-практическая конференция «Наука 2020. Теория и практика.» сборник материалов II. Саратов. 2 апреля 2020. с. 30-31.

84. Toyirov A.X., Yuldashev Sh.M., Abdullayev B.P. Kvazichiziqli issiqlik O‘tkazuvchanlik tenglamasini sonli hisoblash algoritmi. // “Axborot kommunikatsiya texnologiyalari va dasturiy ta’minot yaratishda innovatsion g‘oyalar” respublika ilmiy-texnik konferensiyasining ma’ruzalar to‘plami. Samarqand. 15-16 may 2020 y. b. 46-48.

85. Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh., Yuldashev Sh.M., Xolliev F.B. Mathematical modeling of movement of a viscous incompressible liquid by the spectral-grid method // International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. – 2020. – T. 84. – №. 4. – C. 252-260.

86. Нармурадов Ч. Б., Подгаев А. Г. Сходимость проекционно-сеточного галеркинского метода // Моделирование в механике. – 1989. – №. 4(3). – С. 113–130.

87. Нармурадов Ч. Б. Решение уравнения Орра–Зоммерфельда спектрально-сеточным методом // Докл. АН РУз. – 2001. – №. 10–11. – С. 9–12.

88. Нармурадов Ч. Б. Алгоритм спектрально-сеточного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости пограничного слоя // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики. – 2001. – №. 5–6. – С. 57– 60.

89. Нармурадов Ч. Б. Спектрально-сеточный метод и его применение к задачам гидродинамической устойчивости // Современные проблемы алгоритмизации и программирования: Тез. докл. респ. конф. 5–7 сентября.

90. Normurodov Ch.B., Toyirov A.Kh., Yuldashev Sh.M. Mathematical modeling with the spectral-grid method of the amplitude of the stream function for a plane poiseuille // EPRA – International Journal of Research and Development. – 2020. – T. 5. – №. 9. – C. 423-429.

91. Normurodov Ch.B., Holiyarov E.Ch., Yuldashev Sh.M., Mengto‘rayev F.Z., Mengliyev I.A. Kvazichiziqli tenglamada issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning darajali funksiyasi bo‘lganda oshkormas sxema bilan approksimatsiyalash dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 08366, 2020.

92. Normurodov Ch.B., Yuldashev Sh.M. Kvazichiziqli tenglamada issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning darajali funksiyasi bo‘lganda turli ayirmali sxemalarni taqqoslash dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 08367, 2020.

93. Normurodov Ch.B., Toyirov A.X., Yuldashev Sh.M., Ziyakulova Sh.A. Kvazichiziqli tenglamada issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning darajali funksiyasi bo‘lganda oshkormas iteratsiya sxemasi bilan approksimatsiyalash dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 08368, 2020.

94. Normurodov Ch.B., Toyirov A.X., Yuldashev Sh.M., Mirsaburova U.M. Spektral-to‘r metodi bilan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini yechish dasturiy ta’minoti // O‘zb. Res. Intellektual mulk agentligi. Guvohnoma №DGU 09186, 2020.

ILOVA

ELEKTRON HISOBLASH MASHINALARI UCHUN YARATILGAN DASTURNING RASMIY RO'YXATDAN O'TKAZILGANLIGI TO'G'RISIDAGI

GUVOHNOMA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ADLIYA VAZIRLIGI

№ DGU 32161

Ushbu guvohnoma O'zbekiston Respublikasining "ELEKTRON HISOBLASH MASHINALARI UCHUN YARATILGAN DASTURLAR VA MA'LUMOTLAR BAZALARINING HUQUQIY HIMOYASI TO'G'RISIDA"gi Qonuniga asosan quyidagi elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturga berildi

Bo'lakli-o'zgarmas koeffitsientlarga ega bo'lgan kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik masalasini sonli modellashtirish

(DASTUR NOMI)

Talabnoma kelib tushgan sana: **26.12.2023** (210) Talabnoma raqami: **DGU 202311211**

Huquq egasi(lari): **TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI, UZ; YULDASHEV SHAMSIDDIN MAMARAJABOVICH, UZ; QODIROVA DILNOZA ABDUSALIM QIZI, UZ**

Dastur muallifi(lari): **YULDASHEV SHAMSIDDIN MAMARAJABOVICH, UZ; QODIROVA DILNOZA ABDUSALIM QIZI, UZ**

O'zbekiston Respublikasining Dasturiy mahsulotlar davlat reyestrida 29.12.2023 y. ro'yxatdan o'tkazildi.