MUNDARIJA

KIRISH

a) Mavzuning dolzarbligi:

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi. Zamonaviy ilm-fanning rivojlanishi XX asrlarga kelib fizik modellarga aniqlik kiritishni talab qilib qoldi. Amaliyot talablaridan kelib chiqib yuqori tartibli xususiy xosilsali differensial tenglamalar alohida e’tiborga ega boʻlgan toq tartibli tenglamalar nazariyasiga ehtiyoj kuchaydi.Qisqa toʻlqinlar nazariyasini oʻrganishda va transtovushli tenglama, yani uchinchi tartibli karrali xarakteristikali vaqt boʻyicha olingan ikkinchi tartibli xosilaga ega boʻlgan tenglama muhim ahamiyatga ega.

Hozirgi kungacha mamlakatimiz olimlari tomonidan uchinchi tartibli karrali xarakteristikali vaqt boʻyicha olingan ikkinchi tartibli xosilaga ega boʻlgan tenglamalarni oʻrganishda salmoqli natijalarga erishildi. Xususan L.Katabriga tomonidan qurilgan xosmas integrallar bilan ifodalanuvchi fundamental yechim yordamida chegaraviy masalalar yechildi. Matematika fanlarining ustuvor yoʻnalishlari boʻyicha ayniqsa matematik va funksional analiz, algebra, matematika-fizika tenglamalar, differensial tenglamalar, dinamik sistemalar nazariyasi, geometriya va tapologiya, ehtimollar nazariyasi, matematik statistikasi,va matematik modellashtirish boʻyicha xalqaro standart darajasidagi ilmiy tadqiqotlar olib borish Matematika institutining asosiy vazifasi va yoʻnalishlari etib belgilangan. Xususiy xosilali differensial tenglamalar xususan uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar nazariyasini rivojlantirish qaror ijrosini taminlashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Oʻzbekiston Respublikasining Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi №292 « Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora tadbirlari toʻgʻrisida>>gi qarori [1,2,3]

O‘zbekiston Respublikasining Prezidentining 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-sonli “ Fanlar Akademiyasi faoliyati ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi , 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-sonli “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishda davlat tomonidan qo‘llab quvvatlash, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida” gi, 2017 -yil 20-apreldagidagi PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora tadbirlari to‘g‘risidagi” qarorlari hamda mazkur faoliyatga taalluqli boshqa normativ huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni bajarishda ushbu dissertatsiya ishi muayyan tarzda xizmat qiladi.[1,3]

Tadqiqot obektlari: Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli bir turdagi tenglamalar.

Tadqiqot predmeti: Yuqori (uchinchi) tartibli mayda xadlari mavjud bo‘lgan tenglamaga vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilali model tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalardan iborat.

b) Ishning asosiy maqsadi va natijalari:

Tadqiqotning maqsadi: Qo‘yilgan mavzu bo‘yicha ikkita chegaraviy masala qo‘yilgan bo‘lib, ular uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlash. Yechimning mavjudligini isbotlashga potensiallar usulidan yagonaligida esa energiya integrali usulidan foydalanish.

Tadqiqotning vazifalari: Uchinchi tartibli kichik xadlarga ega bo‘lgan karrali xarakteristikali tenglamaga qo‘yilgan chegaraviy masalalarni tatqiq qilish;

Funksiyalarga qo‘yilgan masalarning korrektligini ko‘rsatish uchun yetarlicha shartlarni aniqlash;

Qo‘yilgan masalalarning korrektligini aniqlash;

Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga qo‘yilgan chegaraviy masalaga Grin Funksiyasini qurish;

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat.Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli bir turdagi tenglamalarni yechish uchun chegaraviy masalalarning qo‘yilishi.Chegaraviy masalalarning yechimining mavjudligi, yagonaligi, turg‘unligi tenglamaning koeffisiyentlari va berilgan funksiyalarga qo‘yilgan shartlar asosida isbotlangan.Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli masalaning trivial yechimlari ko‘rilgan.Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali kichik xadlarga ega bo‘lgan tenglama uchun birinchi, ikkinchi va uchinchi chegaraviy masalaning yechilishi tenglama va chegaraviy shartlar koeffisiyentlari va berilgan funksiyalarga qo‘yilgan shartlar asosida isbotlandi. Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli bir turdagi bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga to‘g‘ri to‘rtburchakka qo‘yilgan birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi va mavjudligi teoremalar asosida isbotlandi.Masalaga mos Grin funksiyasi qo‘yilgan va masala yechimining formulasi Grin funksiyasi yordamida yozilgan. Tadqiqotning amaliy natijalari yechilgan yechim

formulalaridan tabiatdan fizik jarayonlarning sifat ko‘rsatkichlarini aniqlashda va
sonli hisoblashlarda ishlatish mumkin.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Karrali xarakteristikali tenglama uchun A va B masalalar, yechimning mavjudligi va yagonaligi.

Tadqiqot mavzusi bo‘yicha adabiyotlar sharhi (tahlili): Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli tenglamalarni yechish uchun chegaraviy masalalar muammosi bo‘yicha qator akademik, olimlarning ilmiy izlanishlarida o‘z ifodasini topgan manbalardan foydalanildi. To‘xtamurod Jo‘rayev va uning shogirdlari, Mahmud Salohiddinov Salohiddinovich, Shavkat Ayupov Abdullayevich, Zikirov Obidjon Salijonov, Bitsadze,va boshqa olimlar ilmiy izlanishlar olib borganlar.

Tadqiqotda qo‘llanilgan metodikaning tavsifi. Tadqiqot ishida matematik analiz, oddiy differensial tenglamalar,matematik fizika usullaridan foydalanildi.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Ilmiy izlanish natijalarining nazariy ahamiyati ularning matematik fizika tenglamalari nazaryasini yanada rivojlantirishda foydalanilishidan iborat.

Ilmiy izlanish natijalarining amaliy ahamiyati yuqori (uchinchi) tartibli karrali xarakteristikali tenglamaning vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lgan tenglamalari bilan ifodalanuvchi mexanik, fizik amallar, jarayonlar va hodisalarga tatbiq etishdan iborat.

Ish tuzilmasining tavsifi:

Ushbu tadqiqot ishi kirish, _3 ta_ bob, _8 ta_paragraf, xulosa va tavsiyalar, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati hamda ilova qismlardan tuzilgan.

Ishning kirish qismida mavzuning dolzarbligi, ishning maqsadi, ilgari surilgan ilmiy faraz, vazifalari, tadqiqotda qo‘llanilgan metodikalar, tadqiqotning yangiligi, ishning nazariy va amaliy ahamiyati haqida qisqacha ma’lumotlar berilgan.

Tadqiqotning natijalarining Aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 2 ta "respublikada ilmiy va ilmiy-amaliy anjumanida": Samanqandda o'tkazilgan "International Conference Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics" va Termizda o'tkazilgan "Algebra va analizning dolzarb masalalari" mavzusidagi konferensiyalarda maruza qilingan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi xalqaro konferensiyalarda ilmiy natijalari e'lon qilingan.

I BOB. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI HAQIDA UMUMIY TUSHUNCHA.

1.1-§. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI VA ULARNING TIPLARI.

Matematik fizika tenglamalariga izoh berar ekanmiz ana shunday fizik xodisalarning matematik tilidagi ta’rifi hisoblanadi Nazariy fizika bilan shug‘ullanuvchilar ham Karrali Xarakteristikali uchinchi tartibli bir turdagi tenglamalarni yechish uchun chegaraviy masalalar mavzusi bilan anchagina tanish. Chunki, nurlanish va boshqa ko‘pgina qonunlarida keng tatbig‘ini ko‘rishimiz mumkin. Tadqiqot ishida ilmiy bilimlarning yetarliligi keng ta’sir qiladi. Matematikada masala yechimlarini muhokama qilish va isbotlash muhim o‘rinni egallaydi. Shu jumladan fizika fanida ham asosiy rolni egallaydi. Matematikada fizik jarayonlarni real (kundalik) hayot bilan bog‘lab, ular o‘rtasidagi munosabatlar o‘rganiladi. Biz nafaqat fizika balki barcha sohalarda matematika fani juda zarurdir. Tadqiqot ishida bizga ko‘pgina matematik fanlar yordamga keldi shu jumladan oddiy differensial tenglamalar, matematik analiz, statistika, funksional analiz va boshqa fanlar. [4] Fizika tenglamalarini matematik ishoralar, belgilar ,va o‘zgaruvchilar bilan ifodalaymiz. O‘tgan asrning 50-60-yillariga kelib matematikafizika tenglamalari jadal rivojlandi. Unga juda ko‘plab olimlarimiz, tadqiqotchilarimiz hissasi beqiyosdir. To‘xtamurod Jo‘rayev, Maxmud Salohiddinov, S. Abdinazarov, A. Berdishev, B. Jo‘rayev va ularning shogirdlari tomonidan matematika fizika tenglamalari faniga ayniqsa uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalarni yechish unga chegaraviy masalalar qo‘yish bo‘yicha salmoqli ishlar qilishdi. Matematik fizika tenglamasini qarayotganimizda eng avvalo unga masala qo‘yinb so‘ngra uni yechish maqsadida chegaraviy shartlar qo‘yamiz. Qo‘yilgan masalaning yechimining yagonaligi, mavjudligi va turg‘unligi ko‘rsatish va isbotlash matematik fizika tenglamalarining muhim xususiyati hisoblanadi. Matematik fizika tenglamalari matematikaning boshqa bo‘limlari bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining bir qismi hisoblanadi. Xususiy hosilali differensial tenglamaning har biri , cheksiz ko‘p xususiy yechimga ega bo‘ladi xuddi oddiy differensial tenglamalardek. Fizik masala yechayotganimizda yechimlardan masalaning tenglamasini qanoatlantiradigan yechimni ajratib olishimiz zarur. Chegaraviy masalalar deb qo‘llayotgan qo‘shimcha shartlarni, Koshi masalasi deb boshlang‘ich shartlarga aytamiz.[4,5]

Qachonki matematika fizika tenglamalarining yechimi mavjud, yagona va uzluksiz bo‘lsa masala korrekt qo‘yilgan deyiladi.

Matematik fizika masalasining yechimi mavjud, yagona va berilgan shartlar bo‘yicha uzluksiz bo‘lsa, (ya’ni masala shartlarining kichik o‘zgarishi natijasida yechim ham o‘zgarsa), masala korrekt qo‘yilgan deyiladi.[7]

Korrekt qo‘yilgan masala deb to‘g‘ri qo‘yilgan masalaga aytiladi. Matematik fizikaning korrekt qo‘yilgan masalalarini topish va ularni aniq yoki taqribiy yechimlarini tuzish ularni hal qilish haqiqiy matematiknin g ishining asosiy mazmunini kasb etadi. Matematik fizika tenglamalari biror fizikaviy tenglama uchun unga korrekt masala qoyish, uning aniq yechimini topishi uni uzil kesil hal qilishi zarur,bu uning asosiy mazmun mohiyatini tashkil etadi.[8]

Hozirgi kunda to‘gri usullar deb atalgan taqribiy yechish usullaridan keng foydalanilmoqda.Uning qulayligi shundaki berilgan masala oddiy algebraic tenglamalar sistemasiga olib kelinadi. Unda hozirgi kunda esa EHMda juda keng qo‘llanilyapti. Berilgan masalalrni yechishda matematik fizika tenglamalarining ko‘pgina qulay usullaridan foydalanamiz masalan potensiallar,Furye va boshqalar. To‘xtamurod Jo‘rayev kabi ustozlarimiz bu bo‘yicha salmoqli ishlar qilib o‘z hissasini qo‘shgan .[9]

To‘xtamurod Jo‘rayevich Jo‘rayev-(1934-2009) atoqli matematik olim, professor,fizika-matematika fanlar doktori, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi haqiqiy azosi, Turkiyaning Otaturk nomidagi Xalqaro madaniyat va bilimlar akademiyasi kuchli akademigi Fan, ta’lim sanoat va san’at akademiyasining akademigi (AQSH), O‘zbekistonda xizmat ko‘rsatgan fan arbobi, Beruniy nomidagi Respublika Davlat mukofoti laureti, 1996-yil “Do‘stlik” ordeni bilan 1999-yil “Mehnnat shuhrati” ordeni bilan taqdirlangan.

T.J.Jo‘rayev xususiy hosilali differensial Tenglamalar Sohasida katta ilmiy maktab yaratgan salohiyatli mutaxassis hisoblanib, respublikada fan va oliy ta’limning tashkilotchisi, O‘zbekistonda matematik tadqiqotlarning aralash va aralash qo‘shma tipdagi, elliptik, giperbolik tipdagi tenglamalar nazariyasi yo‘nalishidagi jahonga taniqli ilmiy maktabning barpo etilishi yuksalishiga kata hissa qo‘shgan.[10]

Matematika fani O‘quvchi yoshlarning mantiqiy teran fikrlash qobiliyatini o‘stiradi. Asosan biz matematik fizizk tenglamalarining uchta tipidan foydalanamiz bular elliptik, giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar. Ular yechish uchun integrallar nazariyasi usuli hamda O‘zgaruvchilarni almashtirish usullarini ko‘p ishlatamiz. Shu sababdan bu fanni o‘zlashtirish uchun matematik analiz, oddiy differensial tenglamalar,funksional analiz fanini chuqurroq bilishni talab etadi.

Matematika fizika tenglamalarining asosiy vazifasiga berilgan tenglamalarning turini aniqlab kanonik ko‘rinishga keltirib , berilgan tenglamaning turini aniqlab unga to‘g‘ri chegaraviy shart qo‘yilishi, masalani to‘gri qo‘yilishi, kabilarni o‘z ichiga oladi.[4]

Matematik fizika tenglamalarining tiplari

Hayotimizda uchraydigan ba’zi fizikaviy va texnikaviy masalalarini yechish xususiy hosilali differensial tenglamalarga olib keladi. Biz bunda ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalardan foydalanib yechim topamiz. Matematik fizika tenglamalari asosan to‘rtta tipga ajraladi. Bular giperbolik, parabolik, elliptik va aralash tipdagi tenglamalarga ajraladi.

$u=u(x,y)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun quyidagi misollarda qaraymiz.

1. Giperbolik tipdagi tenglamalar:

Fizikaning tebranish jarayonlariga bog‘liq bo‘lgan masalalar giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadi. Bu tipdagi tenglamalar ya’ni giperbolik tipdagi tenglamalarning eng sodda ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.[8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a=const, \tag{1.1.1}$$

Bu tenglama odatda tor tebranish tenglamasi yoki to‘lqin tarqalish tenglamasi deb ataladi. Bir jinsli bo‘lganda (1.1.1) tenglama ko‘rinishida, bir jinsli bo‘lmagan holda esa $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Biz torda to‘lqin tebranish tenglamasini qarayotganimizda torda ko‘ndalang to‘lqin tebranishini kuzatish, diffuziya hodisasida gaz molekulalarining tebranishlarini, sterjenning bo‘ylama tebranishlarini, elektr zaryadlarining tebranisharini va boshqalarini kuzatamiz. Giperbolik tipdagi tenglamalarga shu kabi eng soda misollar kiradi. Shuni qo‘shimcha qilishimiz kerakki, giperbolik tipdagi tenglamalarga Byurgers tenglamasi, Eylerning nostatsionar tenglamalari, elastiklik nazariyasi tenglamasi va yana boshqa misollar kiradi.

Tenglamaning xarakteristikalari. Uch o‘lchovli masalalar uchun xarakteristika sirtlari yoki ikki o‘lchovli masalalar uchun xarakteristika chiziqlari odatda Max konusi bilan mos tushadi.

Sodda misolni qaraylik: Bir o‘lchovli to‘lqin tenglamalari uchun xarakteristikalar. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bir o‘lchovli to‘lqin tenglamasi. Uning umumiy yechim quyidagicha: u(x,t) $=u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$. Bunda x±ct = const xarakteristikalar o‘zgarmas fazali nuqtalarning ko‘chishini ifodalaydi. Xulosa qilib aytganda, xarakteristikalar – bu tekislikda dt dx(t) = a (u(t,x(t)) tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqlardir. Agar u(t,x) yechim differensiallanuvchan bo‘lsa, u holda u xarakteristikalar bo‘ylab o‘zgarmas bo‘ladi. Agar Koshi masalasining yechimi differensiallanuvchan bo‘lsa, u holda oshkormas ko‘rinishda beriladi.

2. Parabolik tipdagi tenglamalar:

Parabolik tipdagi tenglamalar asosan issiqlik tarqatish, diffuziya hodisalari shuningdek ko‘plab fizikaviy jarayonlarda uchraydi. Parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi.[4]

Bir jinsli bo‘lganda $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dek, (1.1.2)

Bir jinsli bo‘lmaganda $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$+f(x,t)

ko‘rinishlarda bo‘ladi. Bu tenglama odatda issiqlik tarqalish tenglamasi deb ataladi.

Biz hayotda kesmada issiqlik tarqalish juda ko‘p uchratganmiz. Bularga suyuqliklarda issiqlik tarqalishi, gazlarda issiqlik tarqalishi, gaz filtratsiyasi va boshqa ko‘pgina hodisalar.[5]. Bu tenglamani tekshirishga issiqlik tarqalishi jarayonini kuzatish ehtimollar nazariyasining ba’zi bir masalalari olib keladi. Parabolik ko‘rinishdagi eng sodda tenglamalarga shular kiradi.

3. **Elliptik tipdagi tenglamalar:**

Elliptik tipdagi tenglamalar odatda vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydigan fizik jarayonlardagi masalalarni o‘rganamiz.Eng sodda elliptik tipdagi tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1.1.3)$$

Bu tenglama odatda Laplas tenglamasi deb ataladi.

Biz Laplas tenglamasini tekshirish jarayonida magnit va elektr maydon haqidagi o‘rganish vaqtida statsionar issiqlik holatini tekshirish, diffuziya hodisasi gidrodinamika masalalari va boshqa ko‘pgina masalalarni yechishda ishlatamiz. Bular elliptik tipdagi tenglamalar hisoblanadi.[4,5,6]

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni tiplarga ajratish

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deb ikki o‘zgaruvchi x va y ga bog‘liq u = u (x,y) funksiya va uning birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari orasidagi quyidagi munosabatga aytiladi:

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0$$

Agar tenglama quyidagicha yozilsa:

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F_1(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0 \qquad (1.1.4)$$

u yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi.

Bu yerda a_{ij} koeffitsientlar x va y larning funksiyalari.

Agar tenglama barcha tartibli hosilalariga nisbatan va u(x,y) ga nisbatan chiziqli, ya’ni

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + b_1u'_x + b_2u'_y + cu + f = 0 \qquad (1.1.5)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, tenglama chiziqli deyiladi, Bunda a_{ij}, b_i, c va f lar faqat x va y larning funksiyalaridir. Agar ular x va y larga bog‘liq bo‘lmasalar, bu holda tenglama o‘zgarmas koeffitsientli deyiladi. Agar f = 0 bo‘lsa, u holda tenglama bir jinsli deyiladi. Teskarisi mavjud bo‘lgan quyidagi

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

almashtirishlar orqali biz oldingiga ekvivalent yangi tenglama hosil qilamiz. Bunda quyidagi savol tug‘iladi: ξ va η larni qanday tanlaganda bu o‘zgaruvchilarga nisbatan tenglama yetarlicha soddaroq ko‘rinishga ega bo‘ladi?

(1.1.4) Tenglamaga nisbatan bu savolga javob qidiramiz: Hosilalarni yangi o‘zgaruvchilarga o‘tkazsak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x \\
u'_y &= u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y \\
u''_{xx} &= u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx} \\
u''_{xy} &= u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \xi''_{xy} \\
u''_{yy} &= u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy}
\end{aligned} \tag{1.1.6}
$$

(1.1.6) da hosilalarning qiymatlarini (1.1.4) tenglamaga qo‘yib quyidagini olamiz:

$$\bar{a}_{11} u''_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u''_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u''_{\eta\eta} + \bar{F} = 0 \tag{1.1.7}$$

Bunda $\bar{a}_{11} = a_{11} \xi'^2_x + 2a_{12} \xi'_x \xi'_y + a_{22} \xi'^2_y$

$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi'_x \eta'_x + a_{12} (\xi'_x \eta'_y + \eta'_x \xi'_y) + a_{22} \xi'_y \eta'_y$

$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta'^2{}_x + 2a_{12} \eta'_x \eta'_y) + a_{22} \eta'^2_y$

$\bar{F}$ esa ikkinchi tartibli hosilalarga bog‘liq emas. ξ va η ni shunday tanlaymizki, $\bar{a}_{11} = 0$ bo‘lsin. Shu munosabat bilan quyidagi birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$a_{11} z'^2_x + 2a_{12} z'_x z'_y + a_{22} z'^2_y = 0 \tag{1.1.8}$$

$z = \varphi(x, y)$ - bu tenglamaning birorta xususiy yechimi bo‘lsa. $\xi = \xi\,(x,y)$ deb olsak, $\bar{a}_{11}$=0 bo‘ladi. Shu holda yangi o‘zgaruvchilarni tanlash masalasi (1.1.8) tenglamani yechish bilan bog‘liq bo‘ladi.

Lemma:

1). Agar z=φ (x,y) funksiya

$$a_{11} z'^2_x + 2a_{12} z'_x z'_y + a_{22} z'^2_y = 0$$

tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, u holda φ (x,y)=C munosabat

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dxdy + a_{22} dx^2 = 0 \tag{1.1.9}$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy integrali bo‘ladi.

2). Agar φ (x,y)=C munosabat (1.1.9) tenglamaning integrali bo‘lsa, u holda z=φ(x,y) funksiya (1.1.8) tenglamani qanoatlantiradi. (1.1.9) tenglama (1.1.4) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi, uning integrallari uning xarakteristikalari deyiladi.

$\xi=\varphi$ (x,y) deb olib, (bu yerda φ (x,y)=C (1,6) tenglamaning umumiy integrali), biz (1.1.7) tenglamadagi $u''_{\xi\xi}$ oldidagi koeffitsientni nolga tenglaymiz. Agar Ψ (x,y)=C (1.1.9) tenglamaning boshqa φ (x,y) ga bog‘liq bo‘lmagan umumiy integrali bo‘lsa, u holda $\eta=\Psi$ (x,y) deb olib, (1.1.7) dagi $u''_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientni ham nolga tenglaymiz.[11]

(1.1.9) tenglama quyidagi ikki tenglamaga ajraladi:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (1.1.10), \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

(1.1.11)

Ildiz ostidagi ifodaning ishorasi (1.1.4) - tenglamaning tipini aniqlaydi;

M(x,y) nuqtada biz (1.1.4) tenglamani :

-agar M(x,y) nuqtada $a_{12}^2-a_{11},a_{22}$>0 bo‘lsa, giperbolik tipdagi tenglama,

-agar M(x,y) nuqtada $a_{12}^2-a_{11},a_{22}$<0 bo‘lsa, elliptik tipdagi tenglama,

-agar M(x,y) nuqtada $a_{12}^2-a_{11},a_{22}$=0 bo‘lsa, parabolik tipdagi tenglama deymiz.

Berilgan tenglama turli sohadagi turlicha nuqtalarda tenglama turlicha tipda bo‘lishi mumkin. Barcha nuqtalarida tenglama bir xil tipda bo‘lgan G sohani qaraymiz. G ning har bir nuqtasidan ikkita xarakteristika o‘tadi; giperbolik tipdagi tenglama uchun xarakteristikalar haqiqiy va turlicha, elliptik tipdagi tenglamalar uchun kompleks ko‘rinishda va turlicha, parabolik tipdagi tenglamalar uchun ikkala xarakteristikalar haqiqiy va bir xil.

Bu hollarni qaraymiz :

1. Giperbolik tip: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ >0 va (1.1.10) va (1.1.11) ning o‘ng tarafi haqiqiy va har xil. Ularning umumiy integrallari φ (x,y)=C va Ψ (x,y)=C lar haqiqiy xarakteristikalar oilasini aniqlaydilar. Agar $\xi=\varphi$ (x,y) va $\eta=\Psi$ (x,y) deb olsak, (1.1.7) dagi $\bar{a}_{11}$ va $\bar{a}_{22}$ koeffitsientlar nolga teng bo‘ladi va $u''_{\xi\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo‘lish natijasida quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$u''_{\xi\eta} = \phi$, bu yerda $\phi = -\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$;

Giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishi mana shu holda bo‘ladi. Asosan kanonik ko‘rinishning boshqa formasidan foydalaniladi, ya’ni $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ deb olsak, $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$ bo‘ladi (bu yerda α va β lar yangi o‘zgaruvchilar). U holda:

$$u'_\xi = \frac{1}{2}(u'_\alpha + u'_\beta), \qquad u'_\eta = \frac{1}{2}(u'_\alpha - u'_\beta), \; u''_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u''_{\alpha\alpha} - u''_{\beta\beta}).$$

Natijada $u''_{\alpha\alpha} - u''_{\beta\beta} = \phi_{1,} \qquad (\phi_1 = 4\phi)$.

2. Parabolik tip; $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$=0, (1.1.10) va (1.1.11) tenglamalar bir xil va biz (1.1.9) tenglama uchun bitta umumiy φ (x,y) =C integralga ega bo‘lamiz. Bu holda biz $\xi = \varphi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ deb olamiz.

Bunda $\eta=\eta$(x,y) - ixtiyoriy φ (x,y) ga bog‘liq bo‘lmagan funksiya.

(ya’ni $J = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0$)

O‘zgaruvchilarni shu tariqa tanlaganimizda $\bar{a}_{11}$ koeffitsient uchun

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x'^2 + 2a_{12}\xi_x'\xi_y' + a_{22}\xi_y'^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x' + \sqrt{a_{22}}\xi_y')^2 = 0,$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, chunki $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Bundan esa

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x'\eta_x' + a_{12}(\xi_x'\eta_y' + \xi_y'\eta_y') + a_{22}\xi_y'\eta_y' =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x' + \sqrt{a_{22}}\xi_y')\cdot(\sqrt{a_{11}}\eta_x' + \sqrt{a_{22}}\eta_y') = 0.$$

(1.1.7) tenglamani $u_{\eta\eta}$ oldidagi koeffitsientga bo‘lib, parabolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishiga kelamiz:[12]

$$u_{\eta\eta}'' = \phi, \qquad (\phi = -\frac{\bar{F}}{a_{22}}).$$

3. Elliptik tip: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$<0 va (1.1.10) , (1.1.11) larning o‘ng tomonlari kompleks ko‘rinishda. Xarakteristikalar kompleks va qo‘shma kompleks ko‘rinishda $(\varphi(x,y) = \overline{\psi(x,y)})$ bo‘ladi hamda[12]

$$\xi = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \psi(x,y)) = \operatorname{Re}\varphi(x,y).\text{va } \eta = \frac{1}{2i}(\varphi(x,y) - \psi(x,y)) = \operatorname{I\overline{m}}\varphi(x,y),$$

deb olamiz.

U holda (1.1.7) tenglamada $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ va $\bar{a}_{12} = 0$ ni hosil qilamiz.

(1.1.7) ni $u_{\xi\xi}''$ oldidagi koeffitsientga bo‘lib quyidagiga kelamiz:

$$u_{\xi\xi}'' + u_{\eta\eta}'' = \phi, \qquad (\phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}).$$

Shunday qilib $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ifodaning ishorasiga qarab quyidagi kononik tenglamalarga ega bo‘lamiz:

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$>0 da $u_{xx}'' - u_{yy}'' = \phi$ yoki $u_{xy}'' = \phi$ (giperbolik tip);

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$<0 da $u_{xx}'' + u_{yy}'' = \phi$ (elliptik tip);

- $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$=0 da $u_{xx}'' = \phi$ yoki $u_{yy}'' = \phi$ (parabolk tip);

Yuqorida ko‘rilgan (1.1.4) tenglamani kanonik ko‘rinishga keltirish metodi va uni yechish metodi xarakteristikalar metodi deyiladi. [11]

Endi yuqoridagi ma’lumotlarga oid misollar ko‘ramiz.

1-misol

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad xy\neq 0$$

ko‘rinshdagi tenglamani kanonik (sodda) ko‘rinishiga keltiring.

Yechish.

Bu yerda $a_{11}=x^2, a_{12}=0, a_{22}=-y^2$ bo‘lib, $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2>0$. Demak, tenglamamiz giperbolik tip ekan.

Misolning xarakteristik tenglamasi $x^2dy^2-y^2dx^2=0$ yoki $(xdy+ydx)(xdy-ydx)=0$ ko‘rinishda bo‘ladi va undan ikkita differensial tenglamadan hosil bo‘ladi, ularning o‘zgaruvchilarini ajiratib, $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0, \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi, ularni integrallab $\ln y+\ln x=\ln c_1$ va $\ln y-\ln x=\ln c_2$ yoki $xy=c_1$ va $\frac{y}{x}=c_2$ ga ega bo‘lamiz, va $\zeta=xy, \eta=\frac{y}{x}$ almashtirishlarni amalga oshirib, eski o‘zgaruvchilar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarni yangi o‘zgaruvchilar orqali olamiz. [12]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta};\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial u}{\partial \zeta})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta})=$$

$$y(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x})-\frac{y}{x^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x})+$$

$$\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta} = y(y\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}) - \frac{y}{x^2}(y\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta} =$$
$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}) + \frac{1}{x}(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - larning bu qiymatlarini berilgan differensial tenglamaga qo‘yamiz va uni soddalashtirib, quyidagi kanonik tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$x^2(y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \ y^2(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}) = 0$$

yoki $-4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, yoki $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

bundan $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{1}{2\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, ekanligi kelib chiqadi.

2-misol

$$\sin^2 x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\sin x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

ko‘rinshdagi tenglamani kanonik (sodda) ko‘rinishga keltiring.

Yechish:

Bu yerda $a_{11} = \sin^2 x,\quad a_{12} = -y\sin x,\quad a_{22} = y^2$ bo‘lib,

$a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 \cdot \sin^2 x - y^2 \cdot \sin^2 x = 0.$ Demak, tenglama parabolik tip ekan. Xarakteristik tenglamasini tuzamiz va u quyidagi ko‘rinishga ega:

$\sin^2 x\cdot dy^2+2y\cdot\sin x\cdot dxdy+y^2\cdot dx^2=0,$ yoki $(\sin x\cdot dy+ydx)^2=0.$

Yuqoridagi olingan natijadan $\sin x\cdot dy+ydx=0.$ tenglamaning o‘zgaruvchilarini ajratib, $\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\sin x}=0.$ tenglamani hosil qilamiz. Va uni integrallab quyidagi

$\ln y+\ln tg\frac{x}{2}=\ln C,$ yoki $y\cdot tg\frac{x}{2}=C$ yechimga ega bo‘lamiz.

Bu yechimlarni yangi o‘zgaruvchilarga almashtiririb olamiz: $\xi=y\cdot tg\frac{x}{2},\qquad \eta=y$

bu yangi o‘zgaruvchilardan esa quyidagilarni hosil qilamiz

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=tg\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\cdot tg\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot=$$
$$=\frac{1}{4}y^2\sec^4\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=tg\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$
$$=tg^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2tg\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}=$$
$$=\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\right)+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}.$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ larning qiymatlarini yechayotgan differensial

tenglamamizga qo‘yamiz:

$$\frac{1}{4}y^2\sec^4\frac{x}{2}\cdot\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial\xi}-$$

$$-y^2\sec^2\frac{x}{2}\sin x\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\right)-y\sec^2\frac{x}{2}\sin x\frac{\partial z}{\partial\xi}+$$

$$+y^2\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\right)=0.$$

Bu almashtirishlardan so‘ng, $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}$ va $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$ -larni o‘z ichiga olgan hadlar o‘zaro qisqaradi va tenglama soddaroq ko‘rinishga keladi:

$$\frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial\xi}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}-y\sec^2\frac{x}{2}\sin x\frac{\partial z}{\partial\xi}=0,\ \text{yoki}\quad y\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\sin x\frac{\partial z}{\partial\xi},$$

Lekin $\sin x=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta}$, bo‘lganligi uchun

$\sin x=\dfrac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Natijada $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\dfrac{\partial z}{\partial\xi}$. ko‘rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo‘lamiz.

3-misol

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

ko‘rinshdagi tenglamani kanonik (sodda) ko‘rinishga keltiring.

Yechish:

Bu yerda

$a_{11}=1,\quad a_{12}=-1,\quad a_{22}=2,$ bo‘lib, $a_{12}^{\ 2}-a_{11}a_{22}=-1<0.$

Demak tenglamamiz elliptik tip ekan. Xarakteristik tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$dy^2 + 2\cdot dxdy + 2\cdot dx^2 = 0,$ yoki $y'^2 + 2y' + 2 = 0.$ Bu tenglamani birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechamiz $y' = -1 \pm i;$ Bundan ikkita kompleks yechimlarni hosil qilamiz: $y + x - ix = C_1$ i $y + x + ix = C_2$.

Yangi o‘zgaruvchilarga almashtiramiz: $\xi = y + x, \quad \eta = x;$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dy} + \frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dy} = \frac{dz}{d\xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Differensial tenglamaga xususiy hosilalarning topilgan ifodalarini qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz: va u quyidagicha ko‘rinishdagi kanonik tenglamaga keladi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0.$$

ya’ni

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

1.2-§. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINING TATBIQLARI.

Mustaqillikka erishganimizdan yoshlarni bilimli, malakali, iqtidorli va o‘z ishining mutaxassisi etib tarbiyalash maqsadida ta’lim tizimida hozirgacha izchil rivojlanish bo‘lyapti. Ushbu tadqiqotning mavzusiga oid barchha adabiyotlarni to‘plash, tahlil qilish jarayonida shu nrsani angladimki tabiatdagi barcha sohalarda uchraydigan jarayonlarni matematika fizik tenglamalari orqali ifodalasa va unga yechim topsa bularkan.

Matematika fizika tenglamalarining tabiiy fanlarning har xila sohalarida uchraydigan jarayonlarida ham ko‘rish mumkin:masalan yoz mavsumida hasharotlarning qaysidur bir turi uzi yashash tarzida qulay muhitda yashasa,uni taqribiy o‘lim vaqtini bilgan holda urchish va kupayish qonuni topish. Va shunga o‘xshash ko‘plab misollarni keltirish mumkin.

Matematik fizika tenglamalari asosiy masalalarining qo‘yilishi:

Кoshi masalasi, chegaraviy masalalar, aralash masalalar.

Fizik jarayonlarni matematik tilda yozish uchun avvalo masala qo‘yilishi shart, ya’ni jarayonni bir qiymatli aniqlab beruvchi shartlar bayon qilinishi kerak. Oddiy differensial tenglamalar va ayniqsa xususiy hosilali differensial tenglamalar umuman olganda cheksiz ko‘p yechimga ega.

Shuning uchun fizik masala xususiy hosilali differensial tenglamalarga olib kelinadigan holda, jarayonni bir qiymatli aniqlash uchun tenglamaga ba’zi bir qo‘shimcha shartlar qo‘yiladi. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo‘lgan holda, yechim boshlang‘ich shartlar orqali aniqlanishi mumkin, ya’ni argumentning boshlang‘ich qiymatiga mos keluvchi funksiyaning va uning birinchi hosilasining qiymatlari beriladi (Кoshi masalasi).

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun ham turli ko‘rinishdagi qo‘shimcha shartlar qo‘yilishi mumkin.

Eng avvalo quyidagi sodda masalani qaraymiz: uchlari mahkamlangan torning ko‘ndalang tebranishi masalasi; Bu masalada u(x,t) deb torning OX o‘qidan chetlanishini qaraymiz. Agar torning uchlari $0 \le x \le \ell$ kesmaning uchlarida mahkamlangan bo‘lsa, u holda quyidagi «chegaraviy shartlar» bajarilishi zarur

$$u(0,t) = 0, u(\ell, t) = 0 \qquad (1.2.1)$$

Tor tebranishi uning $t = t_0$ vaqtdagi boshlang‘ich formasiga va tezlik taqsimlanishiga bog‘liq bo‘lganligi sababli quyidagi “boshlang‘ich shart»lar berilishi zarur:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x) \\ u'_t(x, t_0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

Shunday qilib, qo‘shimcha shartlar «chegaraviy» va «boshlang‘ich» shartlardan iborat bo‘ladi, bunda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bu shartlar tor tebranishi jarayonini, ya’ni

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} \qquad (1.2.3)$$

tenglama uchun (1.2.1), (1.2.2) chegaraviy masala yechimini to‘liq aniqlab beradi. Boshqa ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar ham berilishi mumkin. (1.2.1) chegaraviy shartlar birinchi tur shartlar deb ataladi. u(x,t) funksiyaning x bo‘yicha hosilasi $u'_x(x,t)$ ga qo‘yilgan chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} u'_x(0,t) = 0 \\ u'_x(\ell, t) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

ikkinchi tur chegaraviy shartlar deb ataladi. Agar chegaraviy shartlar u(x,y) ning o‘zining qiymatlariga va uning hosilasi $u'_x(x,t)$ ga qo‘yilgan bo‘lsa:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)_{x=0} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)_{x=\ell} = 0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

uchinchi tur chegaraviy shartlar deb ataladi. (1.2.1) - (1.2.5) shartlardan tashqari, bundan so‘ng uchta asosiy tur chegaraviy shartlar haqida gapiramiz:

- birinchi tur chegaraviy shart: $u(0,t) = \mu(t) -$ berilgan rejim,

- ikkinchi tur chegaraviy shart: $u'_x(0,t) = \nu(t) -$ berilgan kuch,

-uchinchi tur chegaraviy shart: $u'_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)] -$ elastik mahkamlanish.

Xuddi shunday torning ikkinchi uchi $x = \ell$ ga ham chegaraviy shartlar qo‘yiladi. Agar $\mu(t)$, $\nu(t)$, va $\theta(t)$ lar nolga teng bo‘lsa, u holda bu shartlar bir jinsli deb ataladi. Endi $u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t)$ tenglama uchun birinchi chegaraviy masalani keltiramiz: $0 \le x \le \ell$ va t $\ge$ 0 sohada aniqlangan va

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < \ell, \qquad t > 0.$$

tenglamani,

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \qquad t \ge 0$$

chegaraviy shartlarni va

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le \ell.$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi u(x,y) funksiyani topish masalasi.

Agar torning uchlari uchun ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy shartlarni olsak, bularga mos keluvchi masalalar ikkinchi yoki uchinchi chegaraviy masalalar deb ataladi. Agar x=0 va x=ℓ lardagi chegaraviy shartlar turlicha tiplarga mansub bo‘lsa, u holda aralash chegaraviy masalalarga kelamiz.

Agar bizni kichik vaqt oralig‘idagi torning o‘zgarishi qiziqtirsa, u holda chegaraning ta’siri kam bo‘ladi va to‘liq masala o‘rniga cheksiz uzunlikdagi tor uchun boshlang‘ich shartlar ostidagi chegaraviy masalalar qaraladi:

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0.$$

tenglamaning

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \qquad -\infty < x < \infty$$

boshlang‘ich shartlarga bo‘ysunuvchi yechimini topish masalasi. Bu masala Кoshi masalasidir.

Matematik fizika masalalari qo‘yilishining korrektligi.

Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar ko‘p hollarda vaqt o‘tishiga bog‘liq bo‘ladigan jarayonlarni o‘rganishda uchraydi. Bular tebranish tenglamalari, elektr to‘lqinlarining tarqalishi tenglamalari va diffuziya tenglamalaridir. Bir o‘lchamli holda doimo bitta koordinata x va vaqt t ishtirok etadi.

Shuning uchun bu tiplarning kanonik tenglamalari odatda quyidagicha yoziladi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cu = g(x,t) \quad \text{(giperbolik tip)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t) \quad \text{(parabolik tip)}$$

Bunday tenglamalarga keltiruvchi masalalar uchun qo‘shimcha shartlar boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga ajratiladi.

Boshlang‘ich shartlar, biz ko‘rdikki, izlanayotgan funksiya u – ning va uning hosilasining (giperbolik holda) t=0 dagi qiymatini berishdan iborat. Bu masalalarning chegaraviy shartlari u(x,t) noma’lum funksiyaning koordinatalari o‘zgaradigan interval chegaralaridagi qiymatlarini berishdan iborat.

Agar kechayotgan jarayon tenglamasida x koordinata cheksiz oraliqda o‘zgarsa, u holda chegaraviy shart bo‘lmaydi va faqatgina boshlang‘ich shartlarga ega masala hosil bo‘lib, bu masalani Koshi masalasi deyiladi.

Agar masala chekli oraliqda qo‘yilgan bo‘lsa, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar beriladi va bu holda aralash masala haqida gap yuritiladi. Elliptik tipdagi tenglamalar statsionar jarayonlarni o‘rganishda yuzaga keladi.

t vaqt bu tenglamalarga kirmaydi va ikkala bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar nuqtaning koordinatalaridan iborat bo‘ladi.

Bu tipdagi masalalar uchun faqatgina chegaraviy shartlar qo‘yiladi, ya’ni sohaning chegarasida noma’lum funksiyaning holati ko‘rsatiladi. Bular noma’lum funksiyalarning qiymati berilgan Dirixle masalasi, noma’lum funksiyaning normal bo‘yicha hosilasining qiymati berilgan Neyman masalasi, va nihoyat soha chegarasida funksiyaning chiziqli kombinatsiyasi va uning normal bo‘yicha hosilasi berilgan masalalardir.

Matematik fizika masalalarida o‘rganilayotgan jarayon xarakteriga javob beruvchi yagona yechimini topish uchun, u yoki bu konkret masalalarda qanday qo‘shimcha shartlar qo‘yilishi lozimligini, aynan fizik mushohadalar ko‘rsatadi. Bundan tashqari, shuni ko‘zda tutish lozimki, tenglama jarayonning muhimroq tomonlarini aks ettiradi.

Fizik masalalarda boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga kiruvchi funksiyalar tajriba natijalariga ko‘ra topiladi. Shunday qilib, yechim qaralayotgan barcha sohalarda masala shartlarining yetarlicha kichik o‘zgarishlari uning yechimlarining ham kichik o‘zgarishiga olib kelishi muhimdir. Bu holda masalaning boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga nisbatan turg‘unligi to‘g‘risida gapiriladi.

Barcha biz ko‘rgan masalalar yagona yechimga ega bo‘lib, boshlang‘ich ma’lumotlarga ko‘ra turg‘un masalalar tipiga kiradi. Aytish mumkinki, bu masalalar korrekt qo‘yilgan. Yani, 1) yechim mavjud, 2) yechim yagona, 3) yechim turg‘undir.

1.3-§. KARRALI XARAKTERISTIKALI TENGLAMALAR HAQIDA TUSHUNCHA.

No klassik tenglamalarning yana bir turi berilgan tenglama faqat karrali xarakteristikalarga ega bo‘ladi. Ya’ni tenglama tartibiga qarab, bir xil xarakteristikalarga ega bo‘ladi. Bu ko‘rinishdagi tenglamalarning umumiy ko‘rinishi

$$\frac{\partial^P u}{\partial x^P} + (-1)^n \frac{\partial^q u}{\partial y^q} + F\left(x, y, u, \frac{\partial^{(P-1)} u}{\partial x^{P-1}}, \dots, \frac{\partial^{(q-1)} u}{\partial y^q}\right) = 0 \qquad (1.3.1)$$

Bu yerda p va q natural sonlar bo‘lib, p>q . Agar uning xarakteristik tenglamasini olsak $(\frac{dy}{dx})^p$=0, y=C, p karrali xarakteristika bo‘ladi, C=const. Bu tenglamaning asosiy xususiyati shundan iboratki, u biror operatorlar bilan ajralmaydi.[6]

Bu tenglamaning eng sodda holi

$$U_{xxx} - U_y = f(x, y, U, U_x, U_{xx}) \qquad (1.3.2)$$

Bu tenglama bilan o‘tgan asrning 60-yillarida Italiyalik matematik L.Kattabriga shug‘ullanib, eng soda klassik masalalar korrektligini ko‘rsatdi. Asosiysi shundaki bu tenglamaning xususiy holi bo‘lgan “Kortevig-ge. Фris-Бюргes” tenglamasi:[10]

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \propto \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (1.3.3)$$

Chiziqli bo‘lmagan to‘lqin tarqalishining ba’zi sohalarda xossalarini o‘rganishda qo‘llaniladi. Bu sohani rivojlantirishda Italiyalik matematik Pinining ham o‘z o‘rni bor Kattabriga va Pinilar karrali xarakteristikali tenglamalar uchun har xil lokal masalalar qo‘yib avval berilgan tenglama uchun fundamental yechimlar qurib ularni argumentning qiymatlariga aniq baholarini berib, qo‘yilgan masala yechimini ular orqali tuzilgan potensiallar orqali ifodalashgan.[20]

O‘tgan asrning 70-yillarida bu soha O‘zbek matematiklari tomonidan eng sodda hollari chuqurlashtirilgan holda o‘rganilib boshlandi. Ya’ni soha cheksiz va shartlar nolokal bo‘lganda mazkur yo‘nalish rivojlantirgan akademik T.J.Jo‘rayev va uning shu sohadagi iqtidorli shogirtlari Y.Ergashev va S.Abdinazarovning hissalari beqiyosdir

O‘tgan asrning 80-yillaridan professor C. Abdinazarov va uning o‘quvchilari bu sohada salmoqli ishlar qilishdi. Agar berilgan (1.3.1) tenglamada p juft q=1 bo‘lsa, u yuqori tartibli parabolik tipda bo‘lib, u yetarlicha yaxshi o‘rganilgan. Professor S. Abdinazarov birinchi bo‘lib:[10,20]

$$\frac{\partial^P u}{\partial x^P} + (-1)^n \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0 \qquad (1.3.4)$$

p>q tenglama uchun fundamental yechimlar qurib ularning argumentlarining cheksizliklardagi baholarini berdi. Bu ishlardan keyin qator, har xil lokal va nolokal masalalar potensiallar usuli bilan ularning korrektligi masalasi qilindi.

Shu bilan birgalikda

$$\frac{\partial^P u}{\partial x^P} + (-1)^n \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = \mathrm{F}(x, y, u, U_x, U_{xx})$$

Nochiziqli tenglama yoki chegaraviy shartlar nochiziqli bo‘lgandagi masalalar o‘rganilmoqda. O‘tgan asrning boshlarida nemis matematigi H.Blok (1.3.1) tenglamaning xususiy holi bo‘lgan:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.3.5)$$

Sodda tenglamani o‘rganib, uning uchun klassik chegaraviy masalalarning korrektligi masalasini o‘rgandi. U bu tenglamalar uchun fundamental yechimlar topib, ularning aniq baholarini berdi. O‘tgan asrning 90-yillaridan keyin professor S. Abdinazarov

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{F}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}) \qquad (1.3.6)$$

Tenglama bilan shaxsan shug‘ullandi. (1.3.6) tenglama chiziqli va chiziqli bo‘lmagan hollarini hisobga olib,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y) \qquad (1.3.7)$$

Tenglama uchun har xil lokal va nolokal chegaraviy masalalar taklif qilib, ularning yechish usullarini ko‘rsatib berdi.Buning uchun Grin funksiyasi usulidan foydalanib masalalar yechimlarini aniqlashni integral tenglamalar nazaryasiga olib kelish usuli ko‘rsatildi. Keyingi yillarda S. Abdinazarovning shogirtlari bu ishni davom etdirishmoqda.

Jumladan bajarilgan magistrlik ishi ham (1.3.7) tenglama uchun qo‘yilgan nolokal masalani yechishga bag‘ishlangan.

I bob bo‘yicha xulosa.

Mazkur bob 3 ta paragrifga bo‘lingan bo‘lib, 1- paragrifda biz matematik fizika tenglamalari haqida tushunchalarga ega bo‘lamiz, ya’ni matematika fizika tenglamalari nima ekanligi, qayerlarda ishlatilishi, nima uchun kerakligi, ular qanaqa tiplarga ajralishi va o‘sha tiplarga oid bo‘lgan misollarni ko‘rishimiz mumkin.

2-paragrifda matematik fizika tenglamalari tatbiqlarini keltirilgan. Ya’ni matematik fizika tenglamalari kundalik hayotimizda uchraydigan har qanday sohada nazariy va amaliy ahamiyatga ega ekanligi, fan, texnika, mexanika, fizika va boshqa sohalarda uchraydigan turli jarayonlar matematik fizika tenglamalari orqali ifodalanashi keltirilgan.

3-paragrifda esa karrali xarakteristikali tenglama qanday tenglama ekanligi, bu sohada dunyo olimlari nima ishlar qilgani, o‘zbek olimlari qanday xissa qo‘shganligi keltirilgan.

II BOB. ASOSIY QISM

2,1-§. UCHINCHI TARTIBLI NOKLASSIK TENGLAMA UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI TEKSHIRILGAN.

A MASALANING QO'YILISHI.

A masala: **Annotatsiya.** Bajarilgan ishda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir turdagi tenglama uchun chegaraviy masala yechimining mavjudlik va yagonaligi tekshirilgan.

Masalaning qo'yilishi. Quyidagi tenglamani qaraymiz.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial y^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) \qquad (2.1.1)$$

Agar (2.1.1) tenglamada $b(x,y) \in C^{3,1}(\bar{D})$ bo'lsa

$$u(x,y) = v(x,y)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^y b(x,t)dt\right)$$

akslantirish yordamida umumiylikni buzmagan holda

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x,y) \qquad (2.1.2)$$

tenglamaga kelish mumkinki tekshirish davrida (2.1.1) ning o'rniga (2.1.2) dan foydalanish mumkin. (2.1.2) tenglama uchun $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ sohada quyidagi masalani qaraymiz. D sohada (2.1.2) tenglamaning shunday regulyar yechimi $u(x,y) \in C^{2,1}(\bar{D} \cap C^{3,2}(D)$ topilsinki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$a_0(x)u(x,0) + a_1(x)u(x,1) = \varphi_0(x) \quad 0 \le x \le 1 \qquad (2.1.3)$$

$$\beta_0(x)u_y(x,0) + \beta_1(x)u_y(x,1) = \varphi_1(x) \quad 0 \le x \le 1 \qquad (2.1.4)$$

$$\gamma_0(y)u(0,y) + \gamma_1(y)u_x(1,y) = \mu_0(y) \quad 0 \le y \le 1 \qquad (2.1.5)$$

$$u_x(0,y) = \mu_1(y) \quad 0 \le y \le 1 \qquad (2.1.6)$$

$$u_{xx}(1,y) = \mu_2(y) \quad 0 \le y \le 1 \qquad (2.1.7)$$

Bu yerda $a_i(x,y)$, $b(x,y)$, $f(x,y)$, $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 0,1)$, $\mu_j(x)$ $(j = 1,2)$ berilgan o'z argumentining uzluksiz funksiyalaridir. Shu bilan birga $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 \neq 0$

Bu masala [2] da tekshirilgan masaladan (2.1.2), (2.1.6), (2.1.7) shartlari bilan farq qiladi.

Teorema: Agar $a_i(x,y) \in C^{i,0}(D)$, $a_1(x,y) \le 0$, $a_0 + \frac{1}{2}a_2(x,x) \ge 0$ $\alpha_0 \cdot \alpha_0 \le 0$ $\beta_0 \cdot \beta_0 \le 0$ $\gamma_0 \cdot \gamma_0 \le 0$ bo'lsa u holda qo'yilgan (2.1.2)-(2.1.7) masala yagona yechimga egadir.

Yechim yagonaligi energiya integrali usuli bilan isbotlangan. Mavjudlik teoremasi Grin funksiyasini qurish yordamida integral tenglamalar sistemasiga keltirilib, isbotlangan yagonalik teoremasiga asosan yagona yechim mavjudligi tasdiqlanadi.

B MASALANING QO'YILISHI.

KARRALI XARAKTERISTIKALI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA.

B masala: Bajarilgan ishda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir turdagi tenglama uchun chegaraviy masala yechimining mavjudlik va yagonaligi tekshirilgan.

Karrali xarakteristikali tenglamalar bilan o'tgan asrning boshlarida shug'ullanib boshlanilgan. Bu sohada Italiya matematiklari Katabriga, Pinilar 1950-yillardan keyin yaxshi natijalarga erishishgan. Ular asosan

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}+(-1)^n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\dots,\frac{\partial^{p-1}u}{\partial y^{p-1}},\dots,\frac{\partial^{q-1}u}{\partial q-1}),\quad p>q \qquad (2.1.8)$$

tenglamalar va ularga qo'yiladigan sodda chegaraviy masalalar, ularning korrektligi hamda tenglamaning fundamental yechimlari va uning hossalari bilan shug'ullanishgan.

Biz quyida bu sohaning asosiy davomchilari bo'lgan akademik T.D. Jo'rayev va professor S. Abdinazarov tekshirib tegishli natijalar olgan.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \qquad (2.1.9)$$

tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz:

Masalaning qo'yilishi. (2.1.9) tenglamani qaraymiz. Umumiylikni buzmagan holda

$$u(x,y)=v(x,y)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^y b(x,t)dt\right)$$

akslantirish yordamida (2.1.9) tenglama

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=f(x,y) \qquad (2.1.10)$$

ko'rinishiga keltirish mumkin. $b(x,y)\in C^{3,1}(\bar{D})$ shart bajarilishi talab qilinadi. Shuning uchun (2.1.9) ning o'rniga (2.1.10) ni tekshirish mumkin.

Masalaning qo'yilishi. (2.1.10) tenglamaning $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$ sohadagi $u(x,y)\in C^{2,1}(\bar{D}\cap C^{3,2}(D)$ sinfdan shunday yechimni topingki u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(x,0)+\alpha(x)u_y(x,0)=p_0(x)\ \ 0\le x\le 1 \qquad (2.1.11)$$

$$\beta_0(x)u(x,1)+\beta_1(x)u_y(x,1)=p_1(x)\ \ 0\le x\le 1 \qquad (2.1.12)$$

$$u(0,y)+\gamma_0(y)u_{xx}(0,y)=p_2(y)\ \ 0\le y\le 1 \qquad (2.11.13)$$

$$\delta_0(y)u(1,y)+\delta_1(y)u_{xx}(1,y)=p_3(y)\ \ 0\le y\le 1 \qquad (2.1.14)$$

$$u_x(1,y)=p_4(y)\ \ 0\le y\le 1 \qquad (2.1.15)$$

Bu yerda $\alpha_0(x)$ $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$, $\gamma_0(y)$, $\delta_0(y)$, $\delta_1(y)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(y)$, $p_3(y)$, $p_4(y)$o'z argumentining uzluksiz funksiyalaridir.

Masala yechimining yagonaligi energiya integrali usulida isbotlangan. Mavjudlik teoremasini isbotlashda: $\delta_0^2 + \delta_1^2 \neq 0,\ \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0, \gamma_0(y) \neq 0, \alpha_0(x) \neq 0$ deb olinadi.

Masala yechimining mavjudligini isbotlashda avval

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y)$$

tenglama uchun Grin formulasi qurilib u orqali Fredgolm 2-tur integral tenglamasiga keltiriladi. Echim yagonaligidan mavjudligi kelib chiqadi.

2.2-§. MASALA YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA TEOREMA.

YAGONALIK TEOREMASI:

Faraz qilaylik (2.1.1) tenglama uchun $a_i(x,y) \in C^{i,0}(\overline{D})$, $a_2(x,y) \leq 0, a_0 - \frac{1}{2}a_{1x} + \frac{1}{2}a_{2xx} \equiv C(x,y) \geq 0$ va quyidagi shartlardan biri bajarilsa:

1) Agar $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0 \neq 0$ bo‘lsa,

$\alpha_0\alpha_1 \geq 0, \beta_0\beta_1 \leq 0, \gamma_0\gamma_1 \leq 0, \gamma_0\gamma_2 \geq 0, \delta_0\delta_1 \leq 0,\ (-1)^i\big(a_1(i,y) - a_{2x}(i,y)\big) \geq 0\ \ i = 0,1, -1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0}a_2(0,y)$; bo‘lganda

2) Agar $\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_1 \neq 0$ bo‘lib, $\alpha_0\alpha_1 \leq 0, \beta_0\beta_1 \geq 0, \delta_0\delta_1 \leq 0, \gamma_0\gamma_2 \geq 0$,

$-1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - a_2(0,y) \leq 0, (-1)^i[a_1(i,y) - a_{2x}(i,y) + i] \geq 0\ \ i = 0,1.$

U holda A masalaning yechimi yagonadir. Yuqorida biz faqat ikkinchi holni tekshirmoqchimiz, lekin berilgan funksiyalarga qo‘yiladigan har xil talablar bilan to‘rli masalalar hosil qilishimiz mumkin.

TEOREMA ISBOTI: Teoremaning isbotini *1-hol* uchun keltiramiz. *2-hol* va qolgan holatlar uchun shu yo‘l bilan isbotlanadi. Teoremaning isbotini energiya integrali usulida isbotlaymiz. Berilgan masala uchun bir jinsli masala qaraymiz va uning trevial yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Bir jinsli masalaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$L(u) = 0 \qquad (2.2.1)$$

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1 u_y(x,0) = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1 \qquad (2.2.2)$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1 \qquad (2.2.3)$$

$$\gamma_0(y)u(0,y) + \gamma_1(y)u_y(0,y) + \gamma_2(y)u_{xx}(0,y) = 0, \qquad (2.2.4)$$

$$\delta_0(y)u(1,y) + \delta_1(y)u_{xx}(1,y) = 0, \qquad (2.2.5)$$

$$u_x(1,y) = 0\ \ \ 0 \leq y \leq 1, \qquad (2.2.6)$$

Uning yechimi $u(x,y) \equiv 0$ ekanini ko‘rsatamiz.

$uL(u) = 0$ ayniyatni qaraymiz va uni D soha bo‘yicha integrallab quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\iint\limits_{(D)} u\left(\frac{\delta^3 u}{\delta x^3} - \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + a_2(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + a_1(x,y)\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + a_0 u(x,y)\right)dxdy = 0$$

Bu ayniyatda tegishli almashtirishlar bajarib quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\iint_{(D)}\left(u_y^2 - a_2 u_x^2 + Cu^2\right)dxdy - \int\limits_0^1 \left(uu_y\right)_{y=1} dx + \int\limits_0^1 \left(uu_y\right)_{y=0} dx$$

$$+\int\limits_0^1 \left[uu_{xx} + a_2 uu_x - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_{2x})u^2\right]_{x=1} dy$$

$$-\int\limits_0^1 \left[uu_{xx} + a_2 uu_x - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_{2x})u^2\right]_{x=0} dy = 0$$

$(2.2.2) - (2.2.5)$ bir jinsli sharlardan va

$$kab \geq \frac{k}{2}(a^2 + b^2)\,, \qquad k < 0$$

munosabatdan foydalansak natijada

$$\iint_D\left(u_y^2 - a_2 u_x^2 + Cu^2\right)dxdy + \int_0^1 \left[\frac{\beta_0(x)}{\beta_1(x)}u^2(x,1) - \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_1(x)}u^2(x,0)\right]dx +$$

$$\int_0^1 \left\{\left[\frac{1}{2}a_1(1,y) - \frac{1}{2}a_{2x}(1,y) - \frac{\delta_0(y)}{\delta_1(y)}\right]u^2(1,y) + \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_2(y)} - a_2(0,y) + \right.\right.$$

$$\left.1\right]u_x^2(0,y) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_2(y)} - a_2(0,y) - a_1(0,y) + a_{2x}(0,y) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_{2(y)}}\right)\right]u^2(0,y)\right\}dy \leq 0 \qquad (2.2.7)$$

Yagonalik teoremasining shartlariga asosan (2.2.7) tengsizlikning chap tomonidagi barcha hadlari musbat bo‘lib, u faqat $u(x,y) \equiv 0$ bo‘lgandagina o‘rinlidir. Ya’ni $U_1(x,y) \equiv U_2(x,y)$

Bu esa masala yechimining yagonaligini isbotlaydi.

II bob bo‘yicha xulosa.

II bobda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir turdagi tenglama uchun A va B masalalar qo‘yilishi keltirilgan va ular yechimlarining yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan. Teoremalarni isbot qilishda bir jinsli masalalar qaralib, energiya integrali usulidan foydalanilgan. Hosil qilingan bir jinsli masalaning trivial yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan. Biz bu bobni 2 ta paragrifga bo‘lganmiz, 1-paragrifda A va B chegaraviy masalalarni qo‘yganmiz.

2-paragrifda esa masala yechimining yagonaligi haqida teorema keltirilgan, va bu teoremaning isboti energiya integrali usulida keltirilgan. Energiya integrali usulida bir jinsli masalani olib, uning aynan 0 ga teng bo‘lgan yagona yechimini topishdan iborat. Buning uchun biz $uL(u) = 0$ ayniyatni qaraymiz va uni D soha bo‘yicha integrallab faqat musbat hadlarga ega bo‘lamiz. Musbat hadlar yig‘indisi esa hech qachon manfiy bo‘lmaydi, ammo 0 ga teng bo‘lishi mumkin. Bizga esa aynan 0 ga teng bo‘lgan yechimi kerak bo‘ladi. Anashu 0 ga teng bo‘lgan yechim yagona yechim hisoblanadi.

III BOB. MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI.

3.1-§. YORDAMCHI MASALA UCHUN GRIN FUNKSIYASI.

A masala yechimining mavjudligini isbotlashda, quyidagi yordamchi masalani ko‘rib chiqib, umumiy yechimni topish kerak.

$u(x,y)\epsilon C^{2,1}(\overline{D}) \cap C^{3,2}(D)$, yechim D sohada berilgan bo‘lsin ,

$$L_0(u) = g(x,y) \qquad (3.1.1),$$

tenglamalar esa (3.1.2) va (3.1.3) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

$$u_y(x,0) = h_0(x),\; u_y(x,1) = h_1(x),\;\; 0 \le x \le 1, \qquad (3.1.2)$$

$$u_{xx}(0,y) = P_0(y),\; u_{xx}(1,y) = P_1(y),\;\; u_y(1,y) = P_2(y). \qquad (3.1.3)$$

(3.1.1) - (3.1.3) masalalar uchun Grin funksiyasini tuzamiz.[13]

Bunda quyidagilar hosil bo‘ladi

$$\varphi L_0(\psi) - \psi M_0(\varphi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi\right),$$

Bu yerda $M_0 = -\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ - operator, L_0 operator bilan birlashtirilgan. φ va ψ – yetarlicha silliq funksiyalar.

D sohada integrallaymiz va quyidagilarga ega bo‘lamiz[14]

$$\iint_{(D)} [\varphi L_0(\psi) - \psi M_0(\varphi)] d\xi d\eta = \int_0^1 [\left(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi\right)_{\xi=1}$$
$$- \left(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi\right)_{\xi=0}] d\eta - \int_0^1 [\left(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi\right)_{\eta=1}$$
$$- \left(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi\right)_{\eta=0}] d\xi. \qquad (3.1.4)$$

[15] ma’lumki, $L_0(u) = 0$ (3.1.5)

Tenglamaning fundamental yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$U(x,y,\xi,\eta)=|y-\eta|^{\frac{1}{3}} f(t),\ \ V(x,y,\xi,\eta)=|y-\eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \tag{3.1.6}$$

Bu yerda

$$f(t)=|t|^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\frac{3}{2}\int_t^{+\infty}\tau^{\frac{-3}{2}}f^*(\tau)d\tau+c^+, bunda\ \ t>0,\\ \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{t}\tau^{\frac{-3}{2}}f^*(\tau)d\tau+c^-, bunda\ \ t<0,\end{cases} \tag{3.1.7}$$

$$\varphi(t)=\frac{3}{2}|t|^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{t}\tau^{\frac{-3}{2}}\varphi^*(\tau)d\tau+c, bunda\ \ t<0, \tag{3.1.8}$$

$$f^*(t)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}+\lambda t\right)d\lambda,\ \ -\infty<t<+\infty,$$

$$\varphi^*(t)=\int_0^{+\infty}\left[\exp\left(\lambda t-\lambda^{\frac{3}{2}}\right)+\exp\left(-\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}+\lambda t\right)\right]d\lambda,\ \ t<0,$$

$$t=(x-\xi)\,|y-\eta|^{\frac{-2}{3}},\ \ c^{\pm},\ \ \text{c-const},$$

va quyidagi munasabatlar o‘rinli:

$$f''(t)+\frac{2}{3}tf^*(t)=0,\ \ \varphi''(t)+\frac{2}{3}t\varphi^*(t)=0; \tag{3.1.9}$$

$$f^{(k)}(0)=\frac{3}{1-2k}f^{*(k)}(0),\ \ \varphi^{(k)}(0)=\frac{3}{1-2k}\varphi^{*(k)}(0),\ \ k=0,1,2,\ldots \tag{3.1.10}$$

$$\lim_{|t|\to\infty}|t|^{\frac{5}{2}}f^*(t)=\lim_{|t|\to\infty}|t|^{\frac{5}{2}}\varphi^*(t)=0; \tag{3.1.11}$$

$$U_y=-U_\eta=U^*\mathrm{sign}(y-\eta),\ \ \ V_y=-V_\eta=V^*\mathrm{sign}(y-\eta); \tag{3.1.12}$$

$$\lim_{\eta\to y}\int_a^b U^*(x,y,\xi,\eta)\,U(\xi,\eta)d\xi=\begin{cases}\pi\, U(x,y),\ \ agar\ x\epsilon[a,b];\\ \quad 0,\ \ agar\ x\bar{\epsilon}[a,b];\end{cases} \tag{3.1.13}$$

bunda

$$U^*(x,y,\xi,\eta)=|y-\eta|^{\frac{-2}{3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2}{3}}}\right),$$

$$V^*(x,y,\xi,\eta)=|y-\eta|^{\frac{-2}{3}}\varphi^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2}{3}}}\right),\ x<\xi.[16]$$

U(x, y,ξ,η), V(x, y,ξ,η), funksiyalar uchun ∀(x,y)≠(ξ,η) da quyidagilar o‘rinli:

$$\left|\frac{\partial^{h+k}U}{\partial x^h\partial y^k}\right|<C|y-\eta|^{-\frac{2h+3k-1}{3}}\begin{cases}\left(\frac{|x-\xi|}{|y-\eta|^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{1}{2}[2h+3k-1+\frac{3}{2}(1-(-1)^k)]}, & t\to-\infty \text{ da;}\\ \exp\left(-c\frac{|x-\xi|^3}{|y-\eta|^2}\right), & t\to+\infty \text{ da;}\end{cases}\qquad(3.1.14)$$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}V}{\partial x^h\partial y^k}\right|<C|y-\eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}}\ |x-\xi|^{-\frac{1}{2}[2h+3k-1+\frac{3}{2}(1-(-1)^k)]};\qquad(3.1.15)$$

t=(x-ξ) $|y-\eta|^{\frac{-2}{3}}\to-\infty\ da,\quad C\ qachonki,\ \ c=const>0.$

[17] dan, quyidagi munosabatlar mavjudligini isbotlash oson.

a) ∀x≠ξ uchun

$$\lim_{\eta\to y}\frac{\partial^m U}{\partial x^m}=K_1|x-\xi|^{\frac{1}{2}-m},\qquad(3.1.16)$$

a) ∀x<ξ uchun

$$\lim_{\eta\to y}\frac{\partial^m V}{\partial x^m}=K_2|x-\xi|^{\frac{1}{2}-m},\qquad(3.1.17)$$

v) ∀y≠η uchun

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\{U,V\}\right|<K_3|y-\eta|^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}m},\quad K_i\text{=const, i=1,2,3;}\qquad(3.1.18)$$

g) $\lim\limits_{\substack{\xi\to x\\ \eta\neq y}}\begin{cases}U_y(x,y,\xi,\eta)\\ V_y(x,y,\xi,\eta)\end{cases} = \begin{cases}f^*(0)\\ \varphi^*(0)\end{cases} \quad |y-\eta|^{\frac{-2}{3}}$ sign(y-η), (3.1.19)

d) $\lim\limits_{\substack{\xi\to x\\ \eta\neq y}}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\begin{cases}U(x,y,\xi,\eta)\\ V(x,y,\xi,\eta)\end{cases} = \begin{cases}f^{(m)}(0)\\ \varphi^{(m)}(0)\end{cases} \quad |y-\eta|^{\frac{1-2m}{3}}$, (3.1.20)

bu yerda m=0,1,2, $f^{(m)}(0)\ va\ \varphi^{(m)}(0)$ lar (3.1.10) formulalardan hisoblangan.[18]

Endi (3.1.4) formuladan $V(x,y,\xi,\eta)\ ning,$ φ funksiyasini olamiz. Bu yerda (ξ,η) lar uchun ∀(x,y)≠ (ξ,η)

$M_0(v) \equiv -V_{\xi\xi\xi}$-$V_{\eta\eta}$=0, (3.1.21)

(3.1.9) tenglamaning umumiy yechimi u(x,y) ni, Ψ sifatida olamiz.

(3.1.4) tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz

$$\iint_{(D)} V(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int_0^1 \left(VU_{\xi\xi} - V_\xi U_\xi + V_{\xi\xi}U\right)_{\xi=1} d\eta$$
$$-\int_0^1 \left(VU_{\xi\xi} - V_\xi U_\xi + V_{\xi\xi}U\right)_{\xi=0} d\eta - \int_0^1 \left(VU_\eta - V_\eta U\right)_{\eta=1} d\xi$$
$$+\int_0^1 \left(VU_\eta - V_\eta U\right)_{\eta=0} d\xi. \qquad (3.1.22)$$

Endi quyidagi integralni ko‘rib chiqamiz

J=$\int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=1} d\xi$-$\int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=0} d\xi = \int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=y-0} d\xi - \int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=0} d\xi + \int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=1} d\xi - \int_0^1 (V_\eta U)_{\eta=y+0} d\xi.$

(3.1.12), (3.1.13) ni hisobga olgan holda, quyidagilarni hosil qilamiz.[19]

J=$\int_0^1 V_y(x,y,\xi,0)u(\xi,0)d\xi$-$\int_0^1 V_y(x,y,\xi,1)u(\xi,1)d\xi - 2\pi u(x,y).$

Keyin (3.1.22) tenglikdan

$$2\pi u(x,y)=\int_0^1\{\left(VU_{\xi\xi}-V_\xi U_\xi+VU_{\xi\xi}\right)_{\xi=1}-\left(VU_{\xi\xi}-V_\xi U_\xi+VU_{\xi\xi}\right)_{\xi=0}\}d\eta+$$
$$+\int_0^1\{\left(V_\eta U-VU_\eta\right)_{\eta=1}-\left(V_\eta U-VU_\eta\right)_{\eta=0}\}d\xi-$$
$$-\iint_{(D)}V(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.1.23)$$

Bunda $W(x,y,\xi,\eta)$ - (3.1.21) tenglamaning umumiy yechimi. U(x,y) - (3.1.1) tenglamaning umumiy yechimi. [20]

Faraz qilaylik (3.1.4) tenglamada φ=$W(x,y,\xi,\eta)$. Ψ=U(ξ,η)

$$O=\int_0^1\{\left(WU_{\xi\xi}-W_\xi U_\xi+W_{\xi\xi}U\right)_{\xi=1}-\left(WU_{\xi\xi}-W_\xi U_\xi+W_{\xi\xi}U\right)_{\xi=0}\}d\eta+$$
$$\int_0^1\{\left(W_\eta U-WU_\eta\right)_{\eta=1}-\left(W_\eta U-WU_\eta\right)_{\eta=0}\}d\xi-$$
$$\iint_{(D)}W(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.1.24)$$

(3.1.23) va (3.1.24) topilmalardan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$2\pi u(x,y)=\int_0^1\{\left(GU_{\xi\xi}-G_\xi U_\xi+G_{\xi\xi}U\right)_{\xi=1}-\left(GU_{\xi\xi}-G_\xi U_\xi+\right.$$
$$\left.G_{\xi\xi}U\right)_{\xi=0}\}d\eta+\int_0^1\{\left(G_\eta U-GU_\eta\right)_{\eta=1}-\left(G_\eta U-GU_\eta\right)_{\eta=0}\}d\xi-$$
$$-\iint_{(D)}G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.1.25)$$

G(x,y,ξ,η)=V(x,y,ξ,η)-W(x,y,ξ,η) bo‘lib, qo‘yilgan masalaning Grin funksiyasidir.

Agar W(x,y,ξ,η) – (3.1.21) tenglamaning regulyar yechimi bo‘lsa, u holda quyidagilar o‘rinli.[21]

$$(W_\eta)\big|_{\eta=i}=(V_\eta)\big|_{\eta=i}, \qquad (3.1.26)$$

$$(W_\xi)\big|_{\xi=0}=(V_\xi)\big|_{\xi=0},\ (W_{\xi\xi})\big|_{\xi=i}=(V_{\xi\xi})\big|_{\xi=i}, \quad i=0;1; \qquad (3.1.27)$$

(3.1.25) formulalardan esa quyidagilarga ega bo‘lamiz

$$2\pi u(x,y)=\int_0^1\{\left(GU_{\xi\xi}-G_\xi U_\xi\right)_{\xi=1}-\left(GU_{\xi\xi}\right)_{\xi=0}\}d\eta+\int_0^1\{\left(GU_\eta\right)_{\eta=0}-$$

$$\left(GU_\eta\right)_{\eta=1}\}d\xi-\iint_{(D)}G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.1.28)$$

G(x,y,ξ,η) funksiya (3.1.1)-(3.1.3) larning Grin funksiyasi deb ataladi.

3.2-§. MAVJUDLILIK TEOREMASI.

Endi (3.1.21) tenglama va (3.1.26), (3.1.27) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $W(x,y,\xi,\eta)$ funksiya mavjudligini isbotlaylik. Buning uchun $G(x,y,\xi,\eta)$ Grin funksiyasiyasining mavjudligini isbotlaymiz.

(3.1.21), (3.1.26), (3.1.27) masalalarning yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz

$$W(x,y,\xi,\eta)=\int_0^1[V(t,0;\xi,\eta)\tau_0(x,y,t)d\xi+V(t,1,\xi,\eta)\tau_1(x,y,t)]dt+$$
$$\int_\eta^y[V(0,z;\xi,\eta)\vartheta_0(x,y,z)+V(1,z,\xi,\eta)\vartheta_1(x,y,z)+$$
$$+V(0,z,\xi,\eta)\vartheta_2(x,y,z)]dz, \qquad (3.2.1)$$

τ_i(i=0;1) va ϑ_i(i=0,1,2) – hozircha no‘malum funksiyalar.

(3.1.9), (3.1.12) larni hisobga olgan holda quyidagilarni hosil qilamiz

$$\int_{-\infty}^0 f^*(t)dt=\frac{2\pi}{3},\quad \int_0^{+\infty} f^*(t)dt=\frac{\pi}{3},\quad \int_{-\infty}^0 \varphi^*(t)dt=0,$$

$$\lim_{\eta\to i}\int_0^1 V_\eta^*(t,i,\xi,\eta)\,\tau_i(x,y,t)dt=(-1)^i\pi\tau_i(x,y,\xi), \qquad (3.2.2)$$

$$\lim_{\xi\to 0}\int_\eta^y \begin{cases} V_{\xi\xi}(0,z,\xi,\eta)\vartheta_0(x,y,z) \\ V_{\xi\xi}(0,z,\xi,\eta)\vartheta_2(x,y,z)\end{cases} dz=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}\vartheta_0(x,y,\eta) \\ 0,\end{cases}, \qquad (3.2.3)$$

$$\lim_{\xi\to 1}\int_\eta^y V_{\xi\xi}(1,z,\xi,\eta)\vartheta_1(x,y,z)dz=\left(-\frac{\pi}{3}\right)\vartheta_1(x,y,\eta), \qquad (3.2.4)$$

(3.2.1) ni (3.1.26), (3.1.27) chegaraviy shartlarga qo‘yib, shu jumladan (3.2.2) – (3.2.4) larni hisobga olgan holda, τ_i, ϑ_i (i=0;1;i=0,1,2) noma’lum fuksiyalar uchun integral tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

$$\pi\tau_0(x,y,\xi)+\int_0^1 V_\eta(t,1,\xi,0)\tau_1(x,y,t)dt+\int_0^y[V_\eta(0,z,\xi,0)\vartheta_0(x,y,z)+V_\eta(1,z,\xi,0)\vartheta_1(x,y,z)+V_\eta(0,z,\xi,0)\vartheta_2(x,y,z)]dz=V_\eta(x,y,\xi,0) \quad (3.2.5)$$

$$\pi\tau_1(x,y,\xi)-\int_0^1 V_\eta(t,0,\xi,1)\tau_0(x,y,t)dt+\int_y^1[V_\eta(0,z,\xi,1)\vartheta_0(x,y,z)+V_\eta(1,z,\xi,1)\vartheta_1(x,y,z)+V_\eta(0,z,\xi,1)\vartheta_2(x,y,z)]dz=V_\eta(x,y,\xi,1), \quad (3.2.6)$$

$$\frac{2\pi}{3}\vartheta_0(x,y,\xi)+\int_1^y V_{\xi\xi}(1,z,0,1)\vartheta_1(x,y,z)dz+\int_0^1[V_{\xi\xi}(t,0,0,\eta)\tau_0(x,y,t)+V_{\xi\xi}(t,1,0,\eta)\tau_1(x,y,t)]dt=V_{\xi\xi}(x,y,0,\eta), \quad x>0, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\pi}{3}\vartheta_1(x,y,\eta)-\int_0^1\big[V_{\xi\xi}(t,0,1,\eta)\tau_0(x,y,t)+V_{\xi\xi}(1,1,1,\eta)\tau_1(x,y,t)\big]dt-\int_\eta^y[V_{\xi\xi}(0,z,1,\eta)\vartheta_0(x,y,z)+V_{\xi\xi}(0,z,1,\eta)\vartheta_1(x,y,z)]dz=V_{\xi\xi}(x,y,1,\eta), \quad (3.2.8)$$

$$\int_\eta^y\left[f'(0)(z-\eta)^{\frac{-1}{3}}\vartheta_0(x,y,z)+\varphi'(0)(z-\eta)^{\frac{-1}{3}}\vartheta_2(x,y,t)+V_\xi(1,z,0,\eta)\vartheta_1(x,y,z)\right]dz+\int_0^1[V_\xi(t,0,0,\eta)\tau_0(x,y,t)+V_\xi(t,1,0,\eta)\tau_1(x,y,t)]dt=V_\xi(x,y,0,\eta), \quad (3.2.9)$$

$U(x,y,\xi,\eta)$ va $V(x,y,\xi,\eta)$ funksiyalarning xossalaridan kelib chiqadiki (3.2.5)-(3.2.9), $\tau_i(x,y,\xi)$ (i=0;1), $\vartheta_j(x,y,\eta)$ (j=0,1,2), sistemaning yechimlari ∀(x≠ξ, y≠η)∈D sohada uzluksiz va ular uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi.[20]

$$\left|\tau_i(x,y,\xi)\right| < C\begin{cases} \left|y-i\right| * \left|x-\xi\right|^{\frac{-5}{2}} & ,agar \quad x>\xi \\ \left|y-i\right|^{\frac{-2}{3}}\exp\left(-c\frac{\left|x-\xi\right|^3}{\left|y-i\right|^2}\right), & agar \;\; x<\xi \end{cases},$$

$$\lim_{\xi\to x}\tau_i(x,y,\xi) = 0\left(\left|y-i\right|^{\frac{-2}{3}}\right), \quad i=0;1, \qquad 0<y<1;$$

$$\left|\vartheta_k(x,y,\eta)\right| < Cx^{\frac{-3}{2}}, \qquad \text{bunda } \forall x\neq 0,\ k=0;2;$$

$$\left|\vartheta_1(x,y,\eta)\right| < \frac{C}{\left|y-\eta\right|}\exp\left(-c\frac{\left|x-1\right|^3}{\left|y-\eta\right|^2}\right)$$

Amalda

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \eta\neq y}} V_\xi(x,y,\xi,\eta) = -\frac{2}{3}\lim_{t\to 0} t f^*(t) = 0,$$

bizda

$$\lim_{\substack{x\to i\\ y\neq\eta}} \vartheta_\xi(x,y,\eta) = 0\left(\left|y-\eta\right|^{\alpha}\right), \tag{3.2.10}$$

$0<\alpha<1$, i=0,1, k=0,1,2, bor.

(3.1.14) va (3.1.15) munosabatlar, $G(x,y,\xi,\eta)$ Grin funksiyasi uchun amal qilishni ko‘rsatadi.

3.3-§. QO'YILGAN UMUMIY MASALA YECHIMI.

Avval (3.1.1) tenglamani ko'rib chiqamiz.

$U_y(x,0) = \tau_0(x),\ \ U_y(x,1) = \tau_1(x), \quad 0\leq x\leq 1,$ (3.3.1)

$U_{xx}(0,y) = \vartheta_0(y),\ \ U_{xx}(1,y) = \vartheta_1(y),\ 0\leq y\leq 1,$

U holda (3.3.1) va $U_x(1,y) = P_2(y)$ shartlarni qanoatlantiruvchi (3.1.1) tenglamaning U(x,y) yechimini quyidagi formula bilan topiladi.

$2\pi u(\mathrm{x,y}) = \int_0^1 [G(x,y,1,\eta)\vartheta_1(\eta) - G(x,y,0,\eta)\vartheta_0(\eta)]d\eta +$

$\int_0^1 [G(x,y,\xi,0)\tau_0(\xi) - G(x,y,\xi,1)\tau_1(\xi)]d\xi - \bar{F}(x,y)$ (3.3.2)

qachonki

$\bar{F}(x,y) = \int_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)p_2(\eta)\,d\eta + \iint_{(D)} G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta$

2- holatdagi 1- teorema shartlariga muvofiq (2.1.3)-(2.1.6) ga (3.3.2) ni qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz.

$\tau_0(x) + \sum_{i=0}^{1} \int_0^1 [K_{0i}(x,\xi)\tau_i(\xi)\,d\xi + Q_{0i}(x,\eta)\vartheta_i(\eta)\mathrm{d}\eta] = F_0(x),$ (3.3.3)

$\tau_1(x) + \sum_{i=0}^{1} \int_0^1 [K_{1i}(x,\xi)\tau_i(\xi)\,d\xi + Q_{1i}(x,\xi)\vartheta_i(\eta)\mathrm{d}\eta] = F_1(x),$ (3.3.4)

$\vartheta_0(y) + \sum_{i=0}^{1} \int_0^1 [K_{2i}(y,\xi)\tau_i(\xi)\,d\xi + Q_{2i}(y,\eta)\vartheta_i(\eta)\mathrm{d}\eta] = F_2(y),$ (3.3.5)

$\vartheta_1(y) + \sum_{i=0}^{1} \int_0^1 [K_{3i}(y,\xi)\tau_i(\xi)\,d\xi + Q_{3i}(y,\eta)\vartheta_i(\eta)\mathrm{d}\eta] = F_3(y),$ (3.3.6)

Bu yerda:

$$K_{0i}(x,\xi) = (-1)^i \frac{\propto_0(x)}{2\pi\propto_1(x)}\ G(x,0,\xi,i),$$

$$Q_{0i}(x,\eta) = (-1)^{i+1} \frac{\propto_0\ (x)}{2\pi\ \propto_1\ (x)}\ G(x,0,i,\eta),$$

$$F_0(x) = \frac{h_0(x)}{\propto_1 (x)} + \frac{\propto_0 (x)\bar{F}(x,0)}{2\pi \propto_1 (x)},$$

$$F_1(x) = \frac{2\pi h_1(x) + \beta_0(x)\bar{F}(x,1)}{2\pi\beta_1(x)},$$

$$K_{1i}(x,\xi) = (-1)^i \frac{\beta_0(x)G(x,1,\xi,i)}{2\pi\beta_1(x)},$$

$$Q_{1i}(x,\eta) = \frac{(-1)^{i+1}\beta_0(x)}{2\pi\beta_1(x)} G(x,1,i,\eta),$$

$$K_{2i}(y,\xi) = \frac{(-1)^i}{2\pi\gamma_2(y)} \sum_{j=0}^{1} \gamma_j(y) \frac{\partial^i G(0,y,\xi,\eta)}{\partial x^j} \Big|_{\eta=i} \quad ,$$

$$Q_{2i}(y,\eta) = \frac{(-1)^{i+1}}{2\pi\gamma_2(y)} \sum_{j=0}^{1} \gamma_j(y) \frac{\partial^i G(0,y,\xi,\eta)}{\partial x^j} \Big|_{\xi=i} \quad ,$$

$$F_2(y) = \frac{1}{2\pi\gamma_2(y)} \left[2\pi p_0(y) + \sum_{i=0}^{1} \gamma_i(y) \frac{\partial^i \bar{F}(0,y)}{\partial x^i} \right],$$

$$K_{3i}(y,\xi) = \frac{(-1)^i \delta_0(y)}{2\pi\delta_1(y)} G(1,y,\xi,i),$$

$$Q_{3i}(y,\eta) = (-1)^{i+1} \frac{\delta_0(y)}{2\pi\delta_1(y)} G(1,y,i,\eta),$$

$$F_3(y) = \frac{2\pi p_1(y) + \delta_0(y)\bar{F}(1,y)}{2\pi\delta_1(y)}.$$

(3.1.14) hisob-kitoblar tufayli,quyidagilarni olamiz

$$\left|K_{i,j}(x,\xi)\right| < C_1 \left|i-j\right|^{\frac{1}{3}} \begin{cases} \left|x-\xi\right|^{\frac{1}{2}} * \left|i-j\right|^{\frac{-1}{3}}, & agar\ \mathrm{x} > \xi \\ \exp\left(-c\frac{\left|x-\xi\right|^3}{\left|i-j\right|^2}\right), & agar\ \ x < \xi, \end{cases} \quad i,j = 0;1;$$

$$\left|Q_{i,j}(x,\eta)\right| < C_2 \left|i-\eta\right|^{\frac{1}{3}} \begin{cases} \left|x-j\right|^{\frac{1}{2}} * \left|i-\eta\right|^{\frac{-1}{3}}, & agar \ \mathrm{j} = 0, \\ \exp\left(-c\frac{\left|x-j\right|^3}{\left|i-\eta\right|^2}\right), & agar \ j = 1, \end{cases} \quad i = 0; 1;$$

$$\left|K_{2,i}(y,\xi)\right| < C_3 \sum_{j=0}^{1} \left|y-i\right|^{\frac{1-2i}{3}} \exp\left(-c\frac{\xi^3}{\left|y-i\right|^2}\right),$$

$$\left|Q_{2,i}(y,\eta)\right| < C_4 \sum_{j=0}^{1} \left|y-\eta\right|^{\frac{1-2i}{3}} \exp\left(-c\frac{i^3}{\left|y-\eta\right|^2}\right),$$

$$\left|K_{3,i}(y,\xi)\right| < C_5, \quad \left|Q_{3,i}(y,\eta)\right| < C_6, \quad \mathrm{i=0;1}$$

Ko‘rinib turibdiki, $F_i(x), F_j(y) \in (\overline{D})$, i=0;1; j=2;3.

Demak, barcha yadrolar chegaralangan.

U holda (3.3.3)-(3.3.6) integral tenglamalar sistemasining yagona yechimi mavjud. Sistema yechimining yagonaligi isbotlangan yagonalik teoremasidan kelib chiqadi.

3.2-§ da qanday bajarilganligi kabi, (2.1.1) tenglama uchun B masalaning yechimining mavjudligi oson isbotlanadi.

III bob bo‘yicha xulosa.

III-bob 3 ta paragrifga bo‘lingan bo‘lib, 1-paragrifda yordamchi masala uchun Grin funksiyasining qanday kelib chiqqanligi, Grin funksiyasini nima ekanligi batafsil keltirilgan va masala yechimining mavjudligi ko‘rib chiqilgan. Buning uchun avolo birinchi paragrifda $U_{xxx} - U_{yy} = g(x, y)$ tenglama uchun yordamchi masala ko‘rib chiqilgan. Uning uchun Grin funksiyasi tuzilgan. Bu funksiya orqali yordamchi masalaning yechimi yozilgan.

2-paragrifda yechimining mavjudligi Grin funksiyasi yordamida ko‘rsatilgan.

3-paragrifda yordamchi masala uchun yozilgan yechimdan va boshlang‘ich chegaraviy shartlardan foydalanib, ikkinchi tur Volterra integral tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Bu Sistema yechimining mavjudligi integral tenglamalardagi yadrolarning chegaralanganligi va o‘ng tomondagi funksiyalarning uzluksizligidan chiqishi keltirilgan.

XULOSA VA TAVSIYALAR

Bajarilgan magistrlik ishini bajarishda matematik fizika tenglamalari fani asoslari atroflicha o‘rganilgan. Ya’ni xususiy hosilali differensial tenglamalar ularni tiplarga ajratish va ularning hayotdagi jarayonlarda qo‘llanilishi.

Maxsus bo‘lim “Karrali harakteristikali tenglamalar”dir. Qaralgan soha asosan nazariy xarakterga ega bo‘lib, uning modellashtirilgan hollari fan, texnika va hayot jarayonlarining turli sohalarida ijobiy qo‘llaniladi. Xulosa qilib aytilganda qo‘yilgan chegaraviy masalalar aktual bo‘lib, ular o‘rganilmoqda.

Hozirgi davrda no chiziqli bo‘lgan

$$\frac{\partial^P u}{\partial x^P} + (-1)^n \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{(P-1)} u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{(q-1)} u}{\partial y})$$

tenglamaning xususiy hollari uchun turli lokal va nolokal masalalar qo‘yib, ularning korektlik masalasi o‘rganilmoqda.

Bajarilgan ish nazariy xarakterga ega bolib, avvalo xususiy hosilali differensial tenglamalar ularning ko‘rinishlari ularning kelib chiqish sabablari va qanday jarayonlarni aniqlashi haqida to‘xtanilgan.

Keltirilganki, xususiy hollarda hayotda uchraydigan jarayonlar xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalangan.Shu tufayli bu soha o‘rganib, tenglamalarni tiplarga ajratish majburiyati tug‘ilgan.

Ulardan kelib chiqib asosiy klassik tenglamalar: giperbolik, parabolik, elliptik tenglamalar va ular uchun qo‘yiladigan turli shartlar amal qiluvchi (boshlang‘ich, chegaraviy, boshlang‘ich-chegaraviy) masalalarning qo‘yilishi; bir o‘lchovli bo‘lganda har xil sohalarda o‘rganilgan. Qo‘yilgan masalalarning korrektligi tekshirilgan. O‘tgan asrning boshlaridan har xil noklassik tenglamalar bilan shug‘ullanish boshlandi.

Shunday tiplardan biri

$$\frac{\partial^P u}{\partial x^P} + (-1)^n \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{(P-1)} u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{(q-1)} u}{\partial y^{(q-1)}})$$

p>q, p va q natural sonlar [17].

Bu ishda yuqoridagi tenglamaning xususiy holi bo‘lgan

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)$$

Tenglama uchun ma’lum nolokal chegaraviy shartlar bilan masala ko‘rilgan va mavjudligi haqida teoremalar isbotlangan. Ularni isbotlashda [19] da ko‘rsatilgan usuldan foydalanilgan.

Yuqorida aytilganidek mavzu nazariy xarakterlarga ega bo‘lganligi uchun ulardan shu yo‘nalishdagi mutaxassislar, foydalanishlari mumkin.

Dissertatsiyani boshlashda kirish qismida mavzusining dolzarbligi, natijalari va zarurati asoslangan, ilmiy izlanishning mamlakatimiz fan va texnologiyalari rivojlanishining muhum yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, berilgan masalaning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, ilmiy ishning maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti keltirilgan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari yoritilgan, qilingan ishning nazariy va amaliy ahamiyati ko‘rsatilgan, dissertatsiya natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertasiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertasiyaning birinchi bobida Matematik fizik tenglamalari, karrali xarakteristikali tenglamalr haqida tushunchalar, tiplari, tatbiqlari yoritib berilgan.

Ikkinchi bobida esa asosiy qilingangan ishlar, ya’ni uchinchi tartibli karrali xarakteristikali kichik hadlar va vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lgan tenglama to‘g‘ri to‘rtburchakda qo‘yilgan birinchi, ikkinchi chegaraviy masalalar va masala yechimining yagonaligi tadqiq qilingan.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobida esa karrali xarakteristikali uchinchi tartibli tenglamalarni yechish uchun Grin funksiyasini qurish, uchinchi tartibli karrali xarakteristikali vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lgan tenglamalarga korrekt chegaraviy masalalar qo‘yish, mavjudligi ko‘rsatish va umumiy yechimni topishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilar:

1.Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli kichik hadlarga ega bo‘lgan tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi , mavjudligi tenglamaning koeffisiyentlari va berilgan funksiyaning shartlari bilan birgalikda isbotlandi;

2.Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli kichik hadlarga ega bo‘lgan tenglamalar uchun ikkinchi chegaraviy masalaning korrektligiga ta’siri aniqlangan bo‘lib bir jinsli masalaning trivial bo‘lgan yechimlari qurilgan;

3.Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli kichik hadlarga ega bo‘lgan tenglamalar uchun uchinchi chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi tenglama va chegaraviy shartlar asosida berilgan funksiya shartlari asosida isbotlandi

4. Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga qo‘yilgan birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi ,mavjudligi va turg‘unligi isbotlangan va unga mos Grin funksiyasi qurilgan bo‘lib masala yechimi Grin funksiyasi yordamida yozilgan

5.Matematika fizika tengamalari sohasi keng yoritilgan va karrali xarakteristikali tenglamalar haqida batafsil ma’lumotlar berilgan.

Qo‘yilgan masalalar yechimining yagonaligi energiya integrali usuli usulida, yechimning mavjudligi esa o‘zgaruvchilarni ajratish va Grin funksiyasi yaratish yordamida isbotangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Mirziyoyev Sh.M. “Davlat oliy ta’lim muassasalariga moliyaviy mustaqillik berish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori 2021-yil, 24-dekabr.
2. Mirziyoev Sh.M., Tanqidiy tahlil, qat’iy tartib – intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo‘lishi kerak. T. 2017.
3. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoevning 2019 yil uchun mo‘ljallangan eng muhim ustuvor vazifalar haqidagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi. 2018 – yil, 28 – dekabr.
4. Salohiddinov M. S. “Matematik fizika tenglamalari”.TOSHKENT, “O‘ZBEKISTON” 2002.
5. Salohiddinov M. S. “Integral tenglamalar”.TOSHKENT, “YANGIYUL POLIGRAF SERVICE” 2007.
6. Jo‘rayev T. J., Abdunazarov S. “Matematik fizika tenglamalari”. – TOSHKENT, O`ZMU.2003.
7. Zikirov O. S. “Matematik fizika tenglamalari”. TOSHKENT-2017.
8. Тешабоева Н.Х. Математик физика методлари. Т.,1988.
9. Тихонов А.Н. , Самарский А.А. “Уравнения математической физики” Масква-1972.
10. Т.Д.Джураев“Краевые задачи для уравнений смешанной и смешанно составного типов”Ташкент-1979 изд.”ФАН” с.240.
11. Бицадзе А.В. “уравнения математической физики”
12. Salohiddinov M.X., Islamov B., “Matematik fizika tenglamalaridan masalalar to‘plami”
13. Cattabriga L. Potenziali di linia e didominio per equationi non paraboliche in due variabili a caracteristiche multiple. //Rendi del Sem. Mat. della univ. di Padova. 1961.Vol.31.P.1-45.

14. Cattabriga L. Equationi paraboliche in due variabili – I-II. // Rend. del. sem. Della facolta di sciente della univ. di Cagliori 1961. Vol.31. 1962.Vol.32.P.3-33.
15. Pini B. Sul problema fondamentale di Valori al contorno per una classe di equationi paraboliche lineari // Ann. Mat. Pure ed appl. 1957. Vol.4. P.261-297.
16. Абдиназаров С., Жураев Б.Б Об одной краевой задаче для параболического уравнения четвертаго порядкаю. // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. Наук. 1986. № 6. С.15-19.
17. Абдиназаров С. О фундаментальных решениях линейных уравнений с кратными характеристиками высокого порядка. // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. наук. 1989. № 3. С. 3-8.
18. Абдиназаров С. Об оценках фундаментальных решений для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками. В ки.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: 1989. С.72-75.
19. Абдиназаров С. Об одной краевой задаче для одного нелинейного уравнения.// Узбекский Математический Журнал. Ташкент: Фан. 1991. №6, С. 3-10.
20. Джураев Т.Д., Абдиназаров С. К теории уравнений нечетнаго порядка с кратными характеристиками. // Уз.М.Ж. Ташкент. Фан. 1991.№ I. С.21-31.
21. Абдиназаров.С.“Ободной краевой задаче для одного неклассического уравнения”Узб,мат. журнал Ташкент.”ФАН” 1991, N=4,с,3-13.
22. Жураев Б.Б., Хушбоков Х.Т. “Краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка с кратними характеристиками” INTERNATIONAL CONFERENCEMATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS IN MODERN MATHEMATICAL PHYSICS. PART I.

Uzbekistan. SAMARKAND – 2022 yil. “September 23-24”; 264-265-betlar

23. Donayev N.Y., Yuldashov Sh.N., Xo‘shboqov X.T. “Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun nolakal chegaraviy masala”. “АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ” МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ 2-ҚИСМ. Термиз 2022 йил 18-19 ноябрь. 32-33-бетлар.
24. Jo’rayev B.B. , Abdirovidov G’.A. “Uchinchi tartibli nolakal tenglama uchun nolakal chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligi tekshirilgan”. “AMALIY MATEMATIKANING ZAMONAVIY MUAMMOLARI VA ISTIQBOLLARI” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA ILMIY-AMALIY KONVERENSIYA MATERIALLARI TO’PLAMI. Qarshi 2024 yil 24 - 25 may. 403-404 betlar.
25. S.Xo’shboqov, Sh.Ashurov, G’.Abdirovidov “Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala haqida”. “AMALIY MATEMATIKANING ZAMONAVIY MUAMMOLARI VA ISTIQBOLLARI” MAVZUSIDAGI RESPUBLIKA ILMIY-AMALIY KONVERENSIYA MATERIALLARI TO’PLAMI. Qarshi 2024 yil 24 - 25 may. 459-460 betlar.

Internet saytlari.

1. http://www.lib.homelinex.org/math.

2. http://www.eknigu.com/lib/Mathematics.

3. http://www.eknigu.com/infom/Mathematics/