ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ
ВАЗИРЛИГИ ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР
АКАДЕМИЯСИ В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ

1-ҚИСМ
2022 йил 18-19 ноябрь

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ
В.И.РОМАНОВСКОГО

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЧАСТЬ 1
18-19 ноября 2022 года

ТЕРМЕЗ−2022

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ

МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ
1-ҚИСМ

2022 йил 18-19 ноябрь

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЧАСТЬ 1
18-19 ноября 2022 года

Термез – 2022

Ушбу тўплам Республикамизнинг Олий таълим муассасалари тизимида ва илмий текшириш институтларида фаолият олиб бораётган олимларнинг ҳамкорликларини кенгайтириш, математика фани ва уни ўкитиш методлари бўйича олинган янги натижаларни муҳокама килиш ва истиқболли йўналишларни белгилаб олиш мақсадида Термиз давлат университетида "Алгебра ва анализнинг долзарб масалалари" мавзусида ўтказилган Республика илмий анжумани материалларини ўз ичига олган. Жумладан, унга ялпи йиғилишлардаги маърузалар билан бирга шўъбаларда алгебра ва анализ ҳамда унга турдош йўналишларда илмий изланиш олиб бораётган математик олимлар, тадқиқотчилар ҳамда магистрантларнинг мақолалари ҳам киритилган.

АНЖУМАН ТАШКИЛИЙ КЎМИТАСИ

Раиси: Марахимов А.Р. – Термиз давлат университети ректори, профессор
Ҳамраиси: Аюпов Ш.А. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти директори, академик
Раис ўринбосарлари:
Розиқов Ў.А. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти, профессор
Ашуров Р.Р. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти, профессор
Холиёров Ў.М. – ТерДУ илмий ишлар ва инновациялар бўйича проректор, ф.ф.ф.д. (PhD)
Аъзолари: ф.-м.ф.н., доцент Тўраев Р.Н., ф.-м.ф.д., профессор Холмухамедов О.Р., ф.-м.ф.д., профессор Ҳаётов А.Р., ф.-м.ф.д., профессор Худойбердиев А.Х., ф.-м.ф.д. Рўзиев М., ф.-м.ф.д. Адашев Ж.Қ., ф.-м.ф.д. профессор Аллаков И., ф.-м.ф.д., профессор Мирсабуров М., ф.-м.ф.д., профессор Нормуродов Ч.Б., ф.-м.ф.ф.д. (PhD) Сафаров А.Ш., п.ф.ф.д. (PhD) Ибрагимов Н.Ш., ф.-м.ф.ф.д. (PhD), доцент Чориева С.Т., т.ф.ф.д. (PhD) Хамидов О.А., ф.ф.ф.д. (PhD) Умрқулов З.Б.

Дастурий кўмита

Ҳамраислар: Алимов Ш.А. – Ўзбекистон Миллий Университети, академик
Садуллаев А. – Ўзбекистон Миллий Университети, академик
Аъзолари: академик Хожиев Ж.Х., академик Фарманов Ш.К., академик Аъзамов А.А., академик Лакаев С.Н., академик Рахманов З.Х., профессор Худойберганов Г., профессор Арипов М., профессор Шоимкулов Б.А., профессор Омиров Б.А., профессор Абдуллаев Б.И., профессор Хўжаёров Б., профессор Хасанов А., профессор Солеев А., профессор Ўринов А.Қ., профессор Шодиметов Х.М., профессор Зикиров О.С., профессор Исломов Б., профессор Нарманов А.Й., профессор Дурдиев Д., профессор Кудайбергенов К.К., профессор Имомов А.А., профессор Артиқбоев А., профессор Заитов А.А.
Котибият: Хайруллаев И., Бегалиев О., Хуррамов Н., Бобамуродов У., Джураева Д., Имамов О.,Эргашева С., Хўжамқулов Б., Саатмуродов Ш.
Нашр учун маъсуллар: ф.-м.ф.д., профессор И.Аллаков, ф.-м.ф.д., профессор М.Мирсабуров.

Анжуманни Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2022 йил 7 мартдаги 101-Ф-сонли фармойишига кўра 2022 йил 18-19 ноябрь кунлари Термиз давлат университетида ўтказишга рухсат этилган.

Ушбу тўплам Термиз давлат университети Кенгашиниг 2022 йил 3 ноябрдаги 3-рақамли қарорига асосан нашрга тавсия этилди.

Тўпламда киритилган маълумотларнинг тўғрилиги учун муаллифлар масъулдирлар.

МУНДАРИЖА

1 – ШЎЪБА. АЛГЕБРАНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ

2 – ШЎЪБА. МАТЕМАТИК ТАҲЛИЛ МАСАЛАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

3 – ШЎЪБА. ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

5 – ШЎЪБА. СУНЪИЙ ИНТЕЛЛЕКТ ВА НЕЙРОТЎРЛИ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

6 – ШЎЪБА. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ ВА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

1 – ШЎЪБА.
АЛГЕБРАНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ

УДК 512.554.38

Solvable Lie superalgebra with low dimensional nilradical

Abdullajonov A. A.[1], Parpiyeva I.A.[2];
[1,2]Namangan State University, Namangan, Toshkent;
abbosbekabdullajonov5@gmail.com,[1] parpiyevaiqboloy@gmail.com[2]

A vector space V is said to be $\mathbb{Z}_2$-*graded* if it admits a decomposition in direct sum, $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, where $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$. An element $x \in V$ is called *homogeneous of degree* $\bar{i}$ if it is an element of $V_{\bar{i}}, \bar{i} \in \mathbb{Z}_2$. In particular, the elements of $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) are also called *even* (resp. *odd*). For a homogeneous element $x \in V$ we denote $|x|$ the degree of x (either $\bar{0}$ or $\bar{1}$).

Definition 1. A *Lie superalgebra* is a $\mathbb{Z}_2$-graded vector space $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$, with an even bilinear commutation operation (or "supercommutation") $[\cdot, \cdot]$, which for an arbitrary homogeneous elements x, y, z satisfies the conditions

1. $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2,$
2. $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x],$
3. $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|}[z, [x, y]] = 0$ *(super Jacobi identity).*

In general, the *descending central sequence* and *derived sequence* of a Lie superalgebra $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$ are defined in the same way as for Lie algebras,consequently:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L},\ \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}],\ k \geq 1,$$

and

$$\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[k+1]} = [\mathcal{L}^{[k]}, \mathcal{L}^{[k]}],\ k \geq 1.$$

Definition 2. A Lie superalgebra is called nilpotent (respectively, solvable) if there exists $s \in \mathbb{N}$ (respectively, $k \in \mathbb{N}$) such that $\mathcal{L}^s = 0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[k]} = 0$.)

A superderivation of degree s of a Lie superalgebra $\mathcal{L}$, $s \in \mathbb{Z}_2$, is an endomorphism $D \in End(\mathcal{L})_s$ with the property

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{s \cdot dega} aD(b), \text{for all } x, y \in \mathcal{L}.$$

Let consider the following nilpotent Lie superalgebra [1]:

$$N_1 : \begin{cases} [x_1, y_1] = y_2, \\ [x_1, y_2] = y_3. \end{cases}$$

Proposition 1. Any even superderivation of N has the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 + \beta_1 \end{pmatrix}$$

Theorem 1. Any maximal solvable Lie superalgebra with nilradical N_1 is isomorphic the following Lie superalgebra:

$$R(N_1) : \begin{cases} [x_1, z_1] = x_1, & [y_1, z_2] = y_1, , \\ [y_2, z_1] = y_2, & [y_2, z_2] = y_2, \\ [y_3, z_1] = 2y_3, & [y_3, z_2] = y_3. \end{cases}$$

Theorem 2. The solvable Lie superalgebra $R(N_1)$ is complete.

Bibliography

1. **Ahmad S. Hegazi,** *Classification of Nilpotent Lie Superalgebras of Dimension Five. II.* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 38, No. 10, 1999.

UDK 511.331

DIRIXLENING L-FUNKSIYASINING NOLLARI MAVJUD BOʻLMAGAN SOHA HAQIDA

Allakov I. [1], Abduraimov Y. [2]
[1]Professor, Termiz davlat universiteti, Termiz, Oʻzbekistan;
iallakov@mail.ru
[2]Magistratura talabasi, Termiz davlat universiteti, Termiz, Oʻzbekistan;
yolchiabduraimov@gmail.com

Ma'lumki Riman (Georg Fridrix Berngard Riman (1826-1866)-nemis matematigi) dzeta funksiyasi $Res = \sigma > 1$ boʻlganda

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it$$

tenglik yordamida aniqlanadi. Bu ta'rifdan $\zeta(s)$ ning $Res > 1$ yarim tekislikda analitik ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun ham $\zeta(s)$ tekis yaqinlashuvchi qatorning yigʻindisi sifatida analitik funksiyani ifodalaydi. Uning haqiqiy oʻqdagi $s = -2, -4, -6, \dots$ noʻllariga trivial noʻllari deyiladi. Qolgan barcha noʻllari esa trivial boʻlmagan nollari deb yuritiladi.

Riman oʻzining 1860 yilda yozgan mashhur memuarida [1] tub sonlar taqsimotini chuqur oʻrganish uchun $\zeta(s)$ funksiyani kompleks oʻzgaruvchi $s = \sigma + it$ ning funksiyasi sifatida oʻrganish zarur ekanligini uqtirib oʻtgan edi.

Riman isbotlagan ikki asosiy natijasi quyidagidan iborat: a) $\zeta(s)$ funksiyani butun kompleks tekislikga analitik davom ettirish mumkin; b) $\zeta(s)$ ushbu funksional tenglama

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)\zeta(1-s)$$

ni qanoatlantiradi. Bu yerda $\Gamma(s)$ – Eylerning gamma funksiyasi.

Bu funksional tenglama $\zeta(s)$ ning $\sigma > 1$ dagi xossalaridan $\sigma < 0$ dagi xossalarini keltirib chiqarish imkoniyatini beradi. Agar $\sigma > 1$ boʻlsa, $\zeta(s) \neq 0$ va agar $\sigma < 0$ boʻlsa, $\zeta(s)$ funksiyasi trivial boʻlmagan noʻllarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya'ni
$0 \leq \sigma \leq 1$ ga *kritik yoʻlak* deb ataladi. Bulardan tashqari Riman $\zeta(s)$ toʻgʻrisida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri $\zeta(s)$ning barcha trivial boʻlmagan noʻllari $\sigma = \frac{1}{2}$ kritik toʻgʻri chiziqda yotadi – degan gipotezasi hozirgacha toʻla isbotlangan emas.1914 yilda G. Xardi $\sigma = \frac{1}{2}$ toʻgʻri chiziqda $\zeta(s)$ ning cheksiz koʻp noʻllarining yotishini isbotladi. 1942 yilda A. Selberg esa bu noʻllarning $\zeta(s)$ ning barcha noʻllari orasida musbat zichlikka ega ekanligini isbotladi [2]. Valle-Pussen va Adamarlar 1898 yilda bir-biriga bogʻliq boʻlmagan holda $s = 1$ da $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbotladilar. Aniqroq qilib aytganda Valle-Pussen agar

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\ln t}, \tag{1}$$

boʻlsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini koʻrsatishgan. Bu yerda c_1 – qandaydir musbat doimiy son. 1948 yilda A. Selberg va P. Erdyoshlar bu natija (1) ning elementar isbotini berdilar. Shundan keyin N. Chudakov agar

$$\sigma > 1 - \frac{C_2}{\left(\ln^{\frac{3}{4}} t\right)(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}}$$

bo‘lsa, $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini isbot qildi. 1958 yilda I. M. Vinogradov va N. M. Korobovlar agar

$$\sigma > 1 - \frac{C(\alpha)}{(\ln t)^{\alpha}}, \quad \alpha > \frac{2}{3}$$

bo‘lsa, u holda $\zeta(s) \neq 0$ ekanligini ko‘rsatishdi. Hozirgi vaqtda $\zeta(s)$ ning eng kichik ordinatali no‘li $\beta = \frac{1}{2} + i14,134725$ ekanligi isbotlangan. $\zeta(s)$ ning no‘llari haqiqiy o‘qga nisbatan simmetrik joylashgani $\overline{\beta} = \frac{1}{2} - i14,134725$ ham $\zeta(s)$ ning noli bo‘ladi. Demak, $0 \leq \sigma \leq 1$,
$-14,134725 < t < 14,134725$ to‘g‘ri to‘rtburchakning ikkinchi va uchinchi trivial bo‘lmagan no‘llari $\beta_2 = \frac{1}{2} + i21,022$; $\overline{\beta}_2 = \frac{1}{2} - i21,022$; $\beta_3 = \frac{1}{2} + i25,011$; $\overline{\beta}_3 = \frac{1}{2} - i25,011$; ekanligi ma‘lum. Shuningdek, kompyuterlar yordamida ordinatasi $0 < t \leq 33 \cdot 10^9$ shartni qanoatlantiruvchi barcha no‘llari $\sigma = \frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziq ustida yotishi isbotlangan. Biz quyida $\zeta(s)$ no‘llari qaysi olimlar tomonidan kashf etilganligi xaqidagi ma’lumotlar jadvalini keltiramiz.

Yillar	Nollari soni	Kim tomonidan topilgani
1859 (Taxmin qilingan)	1	B. Rimann
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchincon
1935	1041	E. C. Titchmarsh
1953	1104	A. M. Turing
1956	15000	D. H. Lehmer
1956	25000	D. H. Lehmer
1958	35337	N. A. Meller
1966	250000	R. S. Lehman
1968	3500000	J. B. Rosser va boshqalar
1977	40000000	R. P. Brent
1979	81000001	R. P. Brent
1982	200000001	R. P. Brent va boshqalar
1983	300000001	J. ван de Lune, H. J. J. te Riele
1986	1500000001	J. van de Lune va boshqalar
2001	10000000000	J. van de Lune
2004	900000000000	S. Wedeniwski
2004	10000000000000	X. Gourdon

Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar dolzarb hisoblanadi. Nemis matematigi Iogann Peter Gustav Lejen Dirixle (1805–1859) 1837 yilda o‘zining Dirixle xarakterlari deb ataluvchi $\chi(n)$ funksiyasini va $Res = \sigma > 1$ bo‘lganda

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyani kiritib har qanday arifmetik progressiyadatub sonlar soninnig cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan. Bu funksiya nafaqat bu masalada balki sonlarning analitik nazariyasidagi ko‘plab masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega ekanligi kashf etildi [1],[3],[4].

Ushbu ishda biz Dirixle L-funksiyasi $L(s, \chi)$ ning no‘llari haqidagi keyingi ma’lumotlar va [5] dagi sonli hisoblashlardan foydalanib $T \geq T_0 \geq 14,135$ bo‘lganda $\sigma > 1 - \frac{0,0109}{\ln T}$ sohada $L(s, \chi)$ ning no‘llari yo‘q ekanligi ko‘rsatilgan.

Olingan natija [5]dagi shu boradagi natijaning son qiymati jihatdan yaxshilanganidir.

Adabiyotlar

1. **Karatsuba A. A.** *Osnovi analiticheskoy teorii chisel.* –M.: Nauka, 1983. -240s.
2. **Montgomery H. L., Vaughan R. C.** *Multiplicative number theory: I. Classical theory.* Cambridge studies in advanced math. Cambridge. 2007. 552p..
3. **Allakov I.** *Sonlar nazariyasining ba'zi bir additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.* – Toshkent , "Ta'lim" 2012, 200b.
4. **Allakov I.** *Otsenka trigonometricheskix summ i ix prilojeniya k resheniyu nekotorix additivnix zadach teorii chisel.* Termez. "Surxan nashr" 2021. 160s.
5. **Allakov I.** *Isklyuchitelnoe mnojestvo summi dvux prostix.* Dissertatsiya na soiskaniyu uchenoy stepeni kandidata fiz.-mat.nauk. Leningrad. LGU, 1983.148s.

UDK 511.348

Bir tenglamaning tub sonlardagi yechimlari haqida

Allakov I.,[1] Muzropova N.S.[2]

[1]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; e-mail:iallakov@mail.ru

[2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; e-mail:muzropova@mail.ru

Ushbu

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3^2 = b \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz. Bunda a_1, a_2, a_3, b -lar butun sonlar, p_1, p_2, p_3 -lar esa tub sonlar . Tushunarliki,

$$(a_1, a_2, a_3) = 1 \tag{2}$$

va $a_j \neq 0$ deb hisoblashimiz mumkin. Bundan tashqari Xua-Lo-Ken ([1] dagi 162- betga qarang) ning Tarri muammosidagi singari (1) tenglama uchun kongruent yechimga ega bo'lishlik sharti bajariladi deb qaraymiz. Agar $N(q)$ ni

$$N(q) := card\left((p_1, p_2, p_3)|(n_j, q) = 1 \ va \ a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3^2 \equiv b \pmod q\right)$$

deb aniqlasak, u holda bu shartni barcha $q \geq 1$ lar uchun

$$N(q) \geq 1 \tag{3}$$

tengsizlik ko'rinishida ifodalash mumkin.

Faraz etaylik, a_1, a_2, a_3, b lar (2), (3) shartlarni qanoatlantirsin va

$$B =: \max\{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\} \tag{4}$$

bo'lsin. Endi ishning asosiy natijalarini quyidagi teorema ko'rinishida ifodlashimiz mumkin:

Теорема. Agar $a_1a_2a_3 \neq 0$, $(a_1, a_2, a_3) = 1$ shartlarni qanoatlantirsa hamda barcha $q \geq 1$ lar uchun $N(q) \geq 1$ bo'lsa, u holda shunday $A > 0$ (qiymatini hisoblash mumkin bo'lgan) o'zgarmas son mavjud bo'lib quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

1. a_1, a_2, a_3 larning barchasi musbat va $b \geq \max\{2, a_1, a_2, a_3\}^A$ bo'lsa, (1)- tenglama p_1, p_2, p_3 tub sonlarda yechimga ega;

2.agar a_1, a_2, a_3 larning barchasi bir xil ishorali bo'lmasa, (1)- tenglama $3|b| + B^A$ dan katta bo'lmagan p_1, p_2, p_3 tub sonlarda yechimga ega bo'ladi.

Agar (1) da $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ deb olsak 1938 yilda Xua-Lo-Ken [2] tomonidan qo'yilgan klassik masalaga ega bo'lamiz.

Bundan keyin p (indeksli yoki indeksiz) bilan tub sonni belgilaymiz. $c_1, c_2, \ldots$ lar effektiv, musbat oʻzgarmas sonlar. δ yetarlicha kichik effektiv musbat son, uning qiymati c_j oʻzgarmaslarning qiymatlariga bogʻliq boʻlishi mumkin.Umumiylikni chegaralamagan holda (4) tenglik bilan aniqlanuv chi B ning qiymati 34 dan kichik emas deb olish mumkin.

$$N > 0 \ va \ Q := N^{\delta}, T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}, L := NB^{-1} \tag{5}$$

boʻlsin, N ni $B \leq Q^{\delta}$ munosabat bajariladigan darajada katta qilib tanlab olamiz. $\chi \pmod q$ va $\chi_0 \pmod q$ lar mos ravishda q modul boʻyicha Dirixle xarakterini va Dirixlening bosh xarakterini bildirsin. Ma'lumki ([3] ning 14-§ga qarang), shunday c_1 konstanta mavjudki $\sigma > 1 - c_1 \ln T^{-1}, |t| \leq T$ sohada $\tilde{r} \leq T$ modul boʻyicha koʻpi bilan bitta χ_0 mavjud boʻlib unga mos Dirixle funksiyasi $L(s, \tilde{\chi})$ bittadan koʻp boʻlmagan nolga ega boʻladi;

Agar shunday maxsus xarakter mavjud boʻlsa, u kvadratik xarakter boʻladi, unga mos nol esa maxsus nol deb ataladi va u nol yagona haqiqiy, oddiy nol boʻladi. Bundan tashqari bu maxsus nol $\tilde{\beta}$

$$c_3(\tilde{r}^{\frac{1}{2}} \ln^2 \tilde{r})^{-1} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq c_2(\ln T)^{-1}$$

munosabatni qanoatlantiradi ([3], 14 -§) .

Ixtiyoriy $y-$ haqiqiy soni va q musbat soni uchun $e(y) := e^{2\pi i y}$ va $e_q(y) := y^{2\pi i \frac{y}{q}} = e(\frac{y}{q})$ deb aniqlaymiz, $\Lambda(n)$ ushbu

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, \text{agar } n = p^{\alpha} \text{ boʻlsa;} \\ 0, \text{agar } n \neq p^{\alpha} \text{ boʻlsa.} \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanadigan Mangoldt funksiyasi. Bundan tashqari ixtiyoriy $\chi \pmod q$ xarakter uchun quyidagi belgilanishlarni kiritamiz: $S_i(y) := \sum_{L<n_i \leq X} \Lambda(n_i) e(n_i y), i = 1, 2;$ $S_3(y) := \sum_{L<n_3 \leq} \Lambda(n_3) e(n_3^2 y)$, bunda $\sum'_{|\gamma| \leq T}$ dagi shtix yigʻindi $L(s, \tilde{\chi})$ funksiyaning $\frac{1}{2} \leq \tilde{\beta} \leq 1 - c_1(\ln T)^{-1}$, $|\gamma| \leq T$ sohadagi maxsus $\tilde{\beta}$ nolidan tashqari barcha nollari $\rho = \beta + i\gamma$ boʻyicha olinishini bildiradi.

$$\tau = T^{\frac{1}{2}} N^{-2} \tag{6}$$

deb olamiz . (5) va (6) larni inobatga olgan holda $[\tau, 1 + \tau]$ kesmani quyidagicha ikki boʻlakka boʻlamiz. $m(h, q)$ bilan $1 \leq h \leq q \leq Q$, $gcd(h, q) = 1$ boʻlganda $[\frac{h-\tau}{q}, \frac{h+\tau}{q}]$ yopiq intervalni belgilaymiz. Osonlik bilan koʻrish mumkinki bu intervallar oʻzaro kesishmaydi va ularning barchasi $[\tau, 1 + \tau]$ intervalga tegishli boʻladi. Ana shunday barcha $m(h, q)$ intervallar birlashmasini M bilan belgilab katta yoylar deb ataymiz. $M' = [\tau, 1 + \tau] \setminus M$ toʻplamni kichik yoylar deb ataymiz.

$$I(N) := \int_{\tau}^{1+\tau} e(-bx) S_1(a_1 x) S_2(a_2 x) S_3(a_3 x) dx$$

deb olamiz. U holda $M \bigcup M' = [\tau, 1 + \tau]$ ekanligini e'tiborga olib $I(N)$ quyidagicha yoza olamiz.

$$I(N) = (\int_M + \int_{M'}) \ e(-bx) \prod_{i=1}^{3} S_i(a_i x) dx = I_1(N) + I_2(N) \tag{7}$$

Endi (7)da [4] dagi singari mulohaza yuritilib $I(N) = I_1(N) + I_2(N) \geq I_1(N) - |I_2(N)| > 0$ ekanligi koʻrsatiladi.

Adabiyotlar

1. **Xua L.K.** *Additive theory of prime numbers.*Providence. R.I. American Math. Soc. -1965.-180p.

2. **Xua L.K.***Some results in the additive of prime-number theory.*Quart.J.Math. Oxford Ser. 9,-1938. 68-80p.

3. **Davenport Harold.** *Multiplicative Number Theory.* Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. -1997.-178p.
4. **Liu M.C., Tsang K.M.** *Small prime solutions of some additive equations.*/ J. Mh. Math. - 1991. - 111. 147- 169p.

UDC 512.64

A CHARACTERIZATION OF DERIVATIONS ON SIMPLE JORDAN ALGEBRAS OVER A FIELD OF CHARACTERISTIC $\neq 2$

Arzikulov F. N.[1,2], Urinboyev F. S.[3]
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; arzikulovfn@rambler.ru
[2]Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan; arzikulovfn@rambler.ru
[3]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan; furqatjonforever@gmail.com, forever1005@mail.ru

Key words and phrases: Derivation; 2-local derivation; local derivation; Jordan algebra of matrices.

The present paper is devoted to the study of 2-local derivations on simple Jordan algebras over a field of characteristic $\neq 2$. The Gleason-Kahane-Żelazko theorem, which is a fundamental contribution in the theory of Banach algebras, asserts that every unital linear functional F on a complex unital Banach algebra A, such that $F(a)$ belongs to the spectrum $\sigma(a)$ of a, for every $a \in A$, is multiplicative (cf. [3], [4]). In modern terminology this is equivalent to the following condition: every unital linear local homomorphism from a unital complex Banach algebra A into $\mathbb{C}$ is multiplicative. We recall that a linear map T from a Banach algebra A into a Banach algebra B is said to be a local homomorphism if, for every a in A, there exists a homomorphism $\Phi_a : A \to B$, depending on a, such that $T(a) = \Phi_a(a)$.

In [5] S. Kowalski and Z. Słodkowski give another characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras. They prove that every 2-local homomorphism T from a (not necessarily commutative nor unital) complex Banach algebra A into $\mathbb{C}$ is linear and multiplicative. Consequently, every (not necessarily linear) 2-local homomorphism T from A into a commutative C*-algebra is linear and multiplicative.

A similar notion was introduced and studied to give a characterization of derivations on operator algebras. Namely, the notion of 2-local derivation was introduced by P. Šemrl in his paper [6] in 1997. P. Šemrl proved that a 2-local derivation on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H is a derivation. After a number of papers were devoted to 2-local maps on different types of rings, algebras, Banach algebras and Banach spaces. The list of papers devoted to such 2-local maps can be found in the bibliography of [1].

In the present paper we study 2-local derivations on Jordan algebras. Recall that a 2-local derivation is defined as follows: given a Jordan algebra $\mathcal{A}$, a map $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (not linear in general) is called a 2-local derivation if, for every x, $y \in \mathcal{A}$, there exists a derivation $D_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$. 2-local derivations on Jordan algebras are studied in [1]. In [1], it is proved that every 2-local inner derivation on the Jordan ring $H_n(\Re)$ of symmetric $n\times n$ matrices over a commutative associative ring $\Re$ is an inner derivation.

In the paper [2] an algebraic approach to the investigation of derivations and 2-local derivations on Jordan algebras is developed. It is established that every 2-local inner derivation on a finite dimensional semisimple Jordan algebra over an algebraically closed field of characteristic different from 2 is a derivation.

In the present paper we establish that every 2-local derivation on a finite dimensional semisimple Jordan algebra over an arbitrary field of characteristic $\neq 2$ is a derivation. Thus, in the present paper we generalize the main results of the paper [2].

Let V be an n-dimensional vector space over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ which is equipped with a symmetric bilinear form f. Thus $f(x,y) \in \mathbb{F}$, $f(x,y) = f(y,x)$ and $f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y)+f(x_2,y)$, $\alpha f(x,y) = f(\alpha x,y)$, x_1, x_2, x, $y \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$. We now construct the vector space $\mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\mathbf{1} \oplus V$ which is a direct sum of V and a one dimensional space $\mathbb{F}\mathbf{1}$ with basis $\mathbf{1}$. We define a product in $\mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F})$ by

$$(\alpha\mathbf{1} + x) \cdot (\beta\mathbf{1} + y) = (\alpha\beta + f(x,y))\mathbf{1} + (\beta x + \alpha y)$$

for α, $\beta \in \mathbb{F}$, x, $y \in V$. Then $\mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F})$ is a Jordan algebra. $\mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F})$ is called the Jordan algebra of the symmetric bilinear form f, also it is called a spin factor.

Theorem 1. *Every 2-local derivation $\Delta : \mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{JS}pin_n(\mathbb{F})$ is a derivation.*

If $\mathcal{A}$ is a $*$-algebra (i.e., an involutive algebra), in particular, if $\mathcal{A} = \mathbb{F}$, $\mathcal{B}(\mathbb{F})$, $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$, then so is $M_n(\mathcal{A})$, the space of $n \times n$ matrices with coefficients in $\mathcal{A}$, with $(a_{i,j})^* = (a^*_{j,i})$. The hermitian, or self-adjoint, part of $M_n(\mathcal{A})$ is denoted by $H_n(\mathcal{A})$. $H_n(\mathcal{A})$ is a Jordan algebra, with the product defined by $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ since $\mathcal{A}$ is associative. A Jordan algebra of the form $H_n(\mathcal{A})$ is called a Jordan matrix algebra. The following theorem holds.

Theorem 2. *Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field of characteristic $\neq 2$, and, let $H_n(\mathcal{A})$ be the Jordan algebra of self-adjoint $n \times n$ matrices over a division $*$-algebra $\mathcal{A}$, $n \geq 3$, where $\mathcal{A} = \mathbb{F}$, $\mathcal{B}(\mathbb{F})$, $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$. Then every 2-local derivation on $H_n(\mathcal{A})$ is a derivation.*

Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field of characteristic $\neq 2$ and let $\mathcal{O}(\mathbb{F}) = \mathcal{Q}(\mathbb{F}) \oplus \mathcal{Q}(\mathbb{F})$ the vector space direct sum of two copies of the quaternion algebra $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$. We write the elements of $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ as (a,b) where a, $b \in \mathcal{Q}(\mathbb{F})$. Let ν be a nonzero element of $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$ and define a product in $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ by

$$(a,b)(c,d) = (ac + \nu db, da + b\bar{c}),$$

where a, b, c, $d \in \mathcal{Q}(\mathbb{F})$. Since $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$ is an algebra and $a \to \bar{a}$ is linear it is clear that the product defined in $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ is bilinear, so $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ is an algebra. $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ is called the algebra of octonions (Cayley algebra, Cayley-Dickson algebra, Cayley-Graves algebra), defined by $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$ and ν.

It is clear that $(1,0)$ is an identity element for $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ and that the subset of elements $(a,0)$ is a subalgebra of $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ isomorphic under $(a,0) \to a$ to $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$. We identify $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$ with the corresponding subalgebra of $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ and write a for the element $(a,0)$ of $\mathcal{O}(\mathbb{F})$. Also we set $l = (0,1)$. Then $bl = (b,0)(0,1) = (0,b) = l\bar{b}$. Hence every element of $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ can be written in one and only one way as $a+bl$, a, b in $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$. For $x = a + bl$, a, b in $\mathcal{Q}(\mathbb{F})$ we define $\bar{x} = \bar{a} - bl$. Then $x \to \bar{x}$ is an involution in $\mathcal{O}(\mathbb{F})$.

Let $\mathcal{H}_3(\mathcal{O}(\mathbb{F}))$ be the vector space of all self-adjoint 3×3 matrices with octonion entries. Then, by theorem 4 of chapter I and theorem 5 of chapter IV in [2], $\mathcal{H}_3(\mathcal{O}(\mathbb{F}))$ is a Jordan algebra, with the product defined by $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Theorem 3. *Every 2-local derivation on $\mathcal{H}_3(\mathcal{O}(\mathbb{F}))$ is a derivation.*

Note that every finite dimensional semisimple Jordan algebra over an arbitrary field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ is isomorphic to the direct sum of the Jordan algebras indicated in Theorems 1, 2, 3 and the Jordan algebra $\mathbb{F}$. Every 2-local derivation on a finite dimensional semisimple Jordan algebra is a direct sum of 2-local derivations on its subalgebras isomorphic to Jordan algebras in the direct sum. Therefore, the following theorem is valid.

Theorem 4. *Every 2-local derivation on a finite dimensional semisimple Jordan algebra over an arbitrary field of characteristic $\neq 2$ is a derivation.*

REFERENCES

1. **Sh. Ayupov, F. Arzikulov.** *2-Local derivations on associative and Jordan matrix rings over commutative rings.* Linear Algebra Appl. 522 (2017) 28–50.
2. **Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov, N.M. Umrzaqov, O.O. Nuriddinov.** *Description of 2-local derivations and automorphisms on finite-dimensional Jordan algebras.* Linear and Multilinear Algebra (2020) DOI: 10.1080/03081087.2020.1845595.
3. **A. Gleason.** *A characterization of maximal ideals.* J. Analyse Math. 19, 171–172 (1967).
4. **J. Kahane, W. Żelazko.** *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras.* Studia Math. 29, 339–343 (1968).
5. **S. Kowalski, Z. Słodkowski.** *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras.* Studia Math. 67 (1980) 215–223.
6. **P. Šemrl.** *Local automorphisms and derivations on $B(H)$.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2677–2680.

UDC 512.541

On local automorphisms and local derivations of two-dimensional algebras

Bekbaev U.[1], Eshmirzayev Sh.[2]
[1] Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
uralbekbaev@gmail.com
[2] Tashkent Information Technology University, Tashkent, Uzbekistan;
shoxjahoneshmirzayev.95@mail.ru

The description problem of all local automorphisms and local derivations of a given algebra $\mathbb{A}$ is considered by many researchers, for example, [1,2,3]. The current paper's main aim is to solve this problem for any two-dimensional algebra $\mathbb{A}$. To solve this problem we rely on B results presented in [4] about the description of all automorphisms and derivations of two-dimensional algebras. Note that results in [4], presented over an algebraically closed field F, remain true when every second and third-degree polynomial over F has a root. Let F be a field, $\mathbb{A}$ be an algebra over F, $Lin(\mathbb{A})$ be the set of all linear maps from $\mathbb{A}$ to $\mathbb{A}$ and $|X|$ be the cardinality of the set X. B

Definition. An element $A \in Lin(\mathbb{A})$ ($D \in Lin(\mathbb{A})$) is said to be an automorphism (respectively, B a derivation) if for any $x, y \in \mathbb{A}$ the equality $A(xy) = A(x)A(y)$ B (respectively, $D(xy) = D(x)y + xD(y)$) holds true.

Let $Aut(\mathbb{A})$ ($Der(\mathbb{A})$) stand for the set of all automorphisms(respectively, derivations) of algebra $\mathbb{A}$. If B $X \subset \mathbb{A}$, $Y \subset Lin(\mathbb{A})$ we denote by $Loc_X Y$ (-the local extension(closure) of Y over X) all $B \in Lin(\mathbb{A})$ such that for any $x \in X$ there exists $A_x \in Y$ for which $B(x) = A_x(x)$, when $X = \mathbb{A}$ we use $LocY$ instead of $Loc_X Y$. In $X = \mathbb{A}, Y = Aut(\mathbb{A})(Y = Der(\mathbb{A}))$ cases the following notations are known $Loc_A Aut(\mathbb{A}) = LocAut(\mathbb{A})$ (respectively, $Loc_A Der(\mathbb{A}) = LocDer(\mathbb{A})$)- the set of local automorphism(respectively, derivations) of $\mathbb{A}$.

Proposition 1. If $\mathbb{A}$ is finite dimensional, $|Y| = m \in \mathbb{N}$ and $|F| \geq m$ then $LocY = Y$, in particular, if $|Aut(\mathbb{A})| = m \in \mathbb{N}$ and $|F| \geq m$ then $LocAut(\mathbb{A}) = Aut(\mathbb{A})$.

Further let $\mathbb{A}$ be a n-dimensional algebra, $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ be a linear basis, $Lin_e(\mathbb{A})$ ($Aut_e(\mathbb{A})$, $Der_e(\mathbb{A})$, $LocAut_e(\mathbb{A})$, $LocDer_e(\mathbb{A})$) stand for the corresponding matrix representations of $Lin(\mathbb{A})$ (respectively, $Aut(\mathbb{A})$, $Der(\mathbb{A})$, $LocAut_e(\mathbb{A})$, $LocDer_e(\mathbb{A})$) with respect to the basis e, A_i stand for the i^{th}-column of the matrix $A \in Lin_e(\mathbb{A})$ and if $A^1, A^2, .., A^n \in Lin_e(\mathbb{A})$ then $(A^1_1 A^2_2 .. A^n_n) \in Lin_e(\mathbb{A})$ stand for the matrix who's the i^{th}-column is A^i_i whenever $i = 1, 2, ..., n$.

Proposition 2. If $(A^1_1 A^2_2 .. A^n_n) \in Aut_e(\mathbb{A})$ ($(A^1_1 A^2_2 .. A^n_n) \in Der_e(\mathbb{A})$) whenever $A^1, A^2, .., A^n \in Aut_e(A)$ and $\det(A^1_1 A^2_2 .. A^n_n) \neq 0$ (respectively, $A^1, A^2, .., A^n \in Der_e(\mathbb{A})$) then $LocAut(\mathbb{A}) = Aut(\mathbb{A})$(respectively, $LocDer(\mathbb{A}) = Der(\mathbb{A})$).

Note that the multiplication operation of the algebra $\mathbb{A}$ is completely defined by it's, so called the matrix of structure constants (MSC) $A_e \in Mat(n \times n^2, F) = (A^i_{jk})_{i,j,k=1,2,...,n}$, where $e_j e_k = \sum_{i=1}^n A^i_{jk} e_i$ whenever $j, k = 1, 2, ..., n$. B

Further, it is assumed that the field F has the following property: Every second and third-degree polynomial over F has a root.

Theorem 1. Up to isomorphism there exists only one two-dimensional algebra $\mathbb{A}$, namely algebra with MSC $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ with respect to some basis e, for which $LocAut(\mathbb{A}) \neq Aut(\mathbb{A})$, more exactly $LocAut_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d^2 \end{pmatrix} : \ a, c, d \in F, a, d \neq 0 \right\} \neq Aut_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^2 \end{pmatrix} : \ a, c \in F, a \neq 0 \right\}$.

Proof of this theorem can be obtained by, taking into account that $|F|$ can not be finite, B application of Propositions 1 and 2 to the classification result on automorphisms of two-dimensional algebras given in [4]. As to the algebra A_e, for which $Aut_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^2 \end{pmatrix} : \ a, c \in F, a \neq 0 \right\}$ a local automorphism B should be in the form $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d^2 \end{pmatrix}$, where $a, c, d \in F, a, d \neq 0$ and that $Bx = A_x x$ is true for any $x \in \mathbb{A}$, where $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A_x = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ c(x) & a(x)^2 \end{pmatrix} \in Aut_e(\mathbb{A})$, $a(x) = a$ if $x_1 \neq 0$ and $a(x) = d$ otherwise, $c(x) = c + (d^2 - a(x)^2)\frac{x_2}{x_1}$ if $x_1 \neq 0$ and otherwise $c(x) = c$.

Theorem 2. In $Char.(F) \neq 2$ case there exists only one two-dimensional algebra $\mathbb{A}$, namely the algebra with MSC $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ with respect to some basis e, for which $LocDer(\mathbb{A}) \neq Der(\mathbb{A})$, more exactly $LocDer_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 2b \end{pmatrix} : \ a, b, c \in F \right\} \neq Aut_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{pmatrix} : \ a, c \in F \right\}$. In $Char.(F) = 2$ the equality $LocDer(\mathbb{A}) = Der(\mathbb{A})$ is true for any two-dimensional algebra over F.

The classification result on derivations from [4] and Proposition 2 is used to prove this result. As to the algebra A_e for which $Aut_e(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{pmatrix} : \ a, c \in F \right\}$ one can check easily that for $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 2b \end{pmatrix}$ the equality $Bx = D_x x$ is true for any $x \in \mathbb{A}$, where $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $D_x = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ c(x) & 2a(x) \end{pmatrix} \in Der_e(\mathbb{A})$, $a(x) = a$ if $x_1 \neq 0$ and $a(x) = b$ otherwise, $c(x) = c + 2(b - a(x))\frac{x_2}{x_1}$ if $x_1 \neq 0$ and otherwise $c(x) = c$.

It is easy to check that the algebra B $\mathbb{A}$ with MSC $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is a commutative, B with the polynomial identity $u(vw) = 0$, algebra.

Here we would like to formulate the following Hypotheses.

Hypothesis. For any finite dimensional algebra $\mathbb{A}$ there exists a linear basis e such that $LocAut(\mathbb{A}) = Loc_e Aut(\mathbb{A})$ ($LocDer(\mathbb{A}) = Loc_e Der(\mathbb{A})$).

References

1. **Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Peralta A.M.** A survey on local and 2-local derivations on C*-and von Neumann algebras, in Topics in Functional Analysis and Algebra, *Contemporary Mathematics*,-2016, vol. 672, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 73-126.

2. **Johnson B.** Local derivations on C*-algebras are derivations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353(2001), pp. 313-325.

3. **Larson D., Sourour A.** Local derivations and local automorphisms . *Proc. Sympos. Pure Math.*, 51 (1990), pp. 187-194.

4. **Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I.** The automorphism groups and derivation algebras of two-dimensional algebras, *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 12-1 (2018), pp.1-9,

УДК 512.544.23

Keli daraxti gruppaviy tasvirining radiusi m ga teng sferalar bo'yicha qo'shni sinflarda berilgan sonlarga ko'ra indeksi 4 bo'lgan normal qism gruppasini qurish

Bekmurodova D.B.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston
e-mail:1 bekmurodovadilorom50@gmail.com

Daraxtlar sinfi graflar nazariyasida alohida o'rin tutadi.O'rganilgan daraxtlar orasida Keli daraxti muhim ahamiyat kasb etadi.Unda statistik mexanika va fizikaning ko'pgina modellari o'rganilgan.Bu masalalarni hal etishda Keli daraxtining gruppaviy tasviri qo'llanilgan.

Har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi,siklga ega bo'lmagan cheksiz grafga k-tartibli Keli daraxti deyiladi va $T^k = (V, L)$ kabi belgilanadi, bu yerda V-daraxtning uchlari to'plami, L esa daraxtning qirralari to'plami.**[1]**

G_k tashkil etuvchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarning erkin ko'paytmasidan iborat gruppa bo'lsin. G_k gruppaning elementlari quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$x = a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_n}$, $1 \leq i_s \leq k+1$, $s = \overline{1,n}$ $n = 0, 1, 2, ...$.

[1] maqolada T^k-Keli daraxti uchlari to'plami V hamda G_k gruppa orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan.

$H_0 - G_k$ gruppaning indeksi r bo'lgan normal bo'luvchisi bo'lsin,

$G_k/H_0 = \{H_0, H_1, ..., H_{r-1}\}$ G_k ning H_0 bo'yicha faktor gruppasi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1.$d(x, y) = \min\{d|\exists x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y \in V\}-$ x va y uchlar orasidagi masofa,
bu yerda $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, < x_2, x_3 >, ..., < x_{d-1}, x_d > -$ eng yaqin qo'shnilar.
2. $W_m(x) = \{y \in G_k : d(x, y) = m\}-$ markazi x nuqtada,radiusi m ga teng sfera,
3. $q_{i,m}(x) = |W_m(x) \bigcap H_i|, i = \overline{0, r-1}$,
4.$Q_m(x) = (q_{0,m}(x), q_{1,m}(x), ..., q_{r-1,m}(x))$

Teorema [2].$\forall$ $x \in G_k$ hamda $\forall m \in N$ uchun $\exists \pi_x$ o'rinlashtirish mavjudki, $Q_m(e)$ vektor koordinatalari uchun $\pi_x Q(e) = Q(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Ushbu ishda quyidagi masalani qaraymiz: $H_0 - G_k$ ning indeksi 4 bo'lgan normal bo'luvchisi va $k_{0,m} + k_{1,m} + k_{2,m} + k_{3,m} = k^{m-1}$ $(k+1)$ bo'lsin. Bu yerda $k_{0,m}; k_{1,m}; k_{2,m}; k_{3,m} \in N \bigcup \{0\}$, k esa T^k ning tartibi. $\exists A, B \subset N_K$ topingki $H_0 = H_A \bigcap H_B$ uchun $Q_{i,m}(e) = k_{i,m}; i = \overline{0, 3}$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Teorema. $k_{0,m}+k_{1,m}+k_{2,m}+k_{3,m} = k^{m-1}$ $(k+1)$, $k_{i,1} \neq k+1 (i = \overline{0, 3})$ shartni qanoatlantiruvchi $k_{0,m}; k_{1,m}; k_{2,m}; k_{3,m} \in N \bigcup \{0\}$ sonlar uchun indeksi 4 bo'lgan $H_0 \lhd G_k$ mavjud bo'lib, ular uchun $q_{i,m}(e) = k_{i,m}$ tenglik o'rinli bo'ladi , bu yerda k Keli daraxtining tartibi.

Izoh. Yuqoridagi teorema $m = 1$ bo'lgan holatda [3] ishda o'rganilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.Ганиходжаев Н.Н. *Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли.* Доклады АН РУз. - Ташкент, 1994. – № 4. – С.3-5.

2.Норматов Э.П. *О разбияних множества m-ых соседей вершины дерева Кэли// УзМЖ.- Ташкент ,2002.№-2.-С 50-54.*

3. Bekmurodova D.B,Kamoldinov S.M. *Keli daraxti gruppaviy tasvirining qo'shni sinflarda berilgan sonlarga ko'ra indeksi 4 bo'lgan normal qism gruppasini qurish* //"Математика ,механика и интеллектуальные Технологий,Ташкент-2022 г. 21-22 апрел"136-bet.

УДК 512.554

Derivation spaces of some 3-Lie algebras

Beshimova Sh.X.[1], Berdiqulova A.N.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan;
shaxnozabeshimova@mail.ru[1], berdiqulovaaziza@gmail.com[2]

In this these all derivation spaces of some $3-$Lie algebras are determined. A vector space A over a field F is an n-Lie algebra (Filippov algebra) provided that A is equipped with some n- ary multilinear operation [-,-, ... ,-] satisfying the two identities

$$[x_1, x_2, ..., x_n] = (-1)^{sign(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}], \quad \sigma \in S_n,$$

$$[[x_1, ..., x_n], y_2, ..., y_n] = \sum_{i=1}^{n}[x_1, ..., x_{(i-1)}, [x_i, y_2, ..., y_n], x_{(i+1)}, ..., x_n]$$

Definition 1. Let A be an n-Lie algebra. A subspace B of A is an n-Lie *subalgebra* if

$$[B, B, ..., B] \subseteq B.$$

A subspace I of A is an *ideal* if $[I, A, ..., A] \subseteq I$.

Given an arbitrary ideal I of A, we define the lower central series and the derived series as follows:

$$I^1 = I, I^{k+1} = [I^k, I, A, ..., A], k \geq 1, I^{(1)} = I, I^{(s+1)} = [I^{(s)}, I^{(s)}, A, ..., A], s \geq 1.$$

Definition 2. An ideal I is *nilpotent provided* that $I^r = 0$ for some $r \in N$. If $I = A$ then A is a *nilpotent* n-Lie algebra.

Definition 3.A linear mapping $D : A \to A$ is a *derivation* of an n-Lie algebra A provided that

$$D([x_1, x_2, ..., x_n]) = \sum_{i=1}^{n}[x_1, x_2, ..., D(x_i), ..., x_n]$$

for all $x_1, x_2, ..., x_n \in A$. The vector space of all derivations of$A$(denoted by $Der(A)$) is a subalgebra of the Lie algebra $gl(A)$ which is called the *derivation algebra* of A.

A linear mapping $ad(x_2, x_3, ..., x_n) : A \to A$, defined as

$$ad(x_2, x_3, ..., x_n)(y) = [y, x_2, x_3, ..., x_n] \quad for\ all\ y \in A,$$

is the *right multiplication operator*. It is easy to verify that $ad(x_2, x_3, ..., x_n)$ is a derivation of A.

The set of all finite linear combinations of the operators of right multiplication is an ideal of the Lie algebra $Der(A)$ which is denoted by $ad(A)$. The elements in $ad(A)$ are *inner derivations*.

Definition 4. Let A be an n-Lie algebra, and let I be an ideal of A. If $I$is a nilpotent subalgebra that is not nilpotent as an ideal, then I is a *hyponilpotent ideal* of A. If I is not a proper subset of another hyponilpotent ideal then I is a maximal *hyponilpotent ideal* of A.

Let consider a m-dimensional 3-Lie algebra with the following multiplication table:

$$N : \begin{cases} [e_1, e_2, e_i] = e_{i+1}, \quad 4 \leq i \leq m-2 \\ [e_1, e_2, e_3] = e_m. \end{cases}$$

Propositsion 1. Any derivation of the algebra has the following matrix form

$$Der(N) : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2,m} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,m-1} & a_{3,m} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \cdots & a_{4,m-1} & a_{4,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{22}+a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4,m-2} & a_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{22}+a_{55} & \cdots & a_{5,m-2} & a_{5,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{6,m-2} & a_{6,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{7,m-2} & a_{7,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{11}+a_{22}+a_{m-2,m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3,m-2} & a_{11}+a_{22}+a_{33} \end{pmatrix}.$$

Now we give all inner derivation of N by the following proposition.

Propositsion 2. Any derivation of the algebra N has the following matrix form

$$ad(N):\begin{pmatrix} 0&0&0&0&\beta_5&\beta_6&\beta_7&\dots&\beta_{m-2}&\beta_{m-1}&\beta_m\\ 0&0&0&0&-\alpha_5&-\alpha_6&-\alpha_7&\dots&-\alpha_{m-2}&-\alpha_{m-1}&-\alpha_m\\ 0&0&0&0&0&0&0&\dots&0&0&\gamma_1\\ 0&0&0&0&\gamma_1&0&0&\dots&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\gamma_1&0&\dots&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\gamma_1&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&0&0&0&0&\dots&0&\gamma_1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\dots&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\dots&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

References

1. **K.K. Abdurasulov, R.K.Gaybullayev, B.A. Omirov, A.Kh. Khudoyberdiyev** *Maximal Solvable Extension of Naturally Graded Filiform $n-$Lie Algebras.* Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 2022, Vol. 63, No. 1, pp. 3-22.

УДК 512.554

LIE ALGEBRA OF DERIVATIONS ON A $3-$LIE ALGEBRA

Sh.X.Beshimova[1], R.K.Gaybullayev[2], G.O.Solijanova[3]

[1,2,3]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbeksitan;
shaxnozabeshimova@mail.ru[1], r_gaybullaev@mail.ru[2], gulhayo.solijonova@mail.ru[3]

Keywords: Solvable Lie algebra, 3-Lie algebra, derivations.

AMS Subject Classification: 17B05, 17B30, 17B60

Let consider a solvable 3-Lie algebra with the following multiplication table[**?**]:

$$L:\begin{cases} [e_1,e_2,e_i]=e_{i+1},\ 3\le i\le 5, & [x,e_1,e_2]=e_2,\\ [x,e_1,e_i]=(i-3)e_i,\ 4\le i\le 6, & [x,e_1,e_i]=e_i,\ 3\le i\le 6. \end{cases}$$

Proposition The following mappings form basis for the vector spaces of derivations and inner derivations of L :

$$Der(L):\begin{cases} d_1(e_i)=e_{i+1},\ 3\le i\le 5, & d_i(e_1)=e_i,\ 2\le i\le 6, & d_7(e_2)=e_6,\\ d_9(e_i)=e_i,\ 4\le i\le 6, & d_8(x)=d_8(y)=-e_4, & d_{10}(e_2)=e_2,\\ d_{10}(e_i)=(i-3)e_i,\ 4\le i\le 6, & d_{11}(x)=3d_{11}(y)=3e_6, & d_{12}(e_2)=e_4,\\ d_{15}(e_i)=(i-3)e_i,\ 4\le i\le 6, & d_{13}(e_1)=-d_{15}(y)=y, & d_{15}(e_1)=e_1,\\ d_7(x)=2d_7(y)=-2d_8(e_2)=-2e_5, & d_{14}(e_1)=-d_{15}(x)=x, & d_{12}(y)=-e_3, \end{cases}$$

$$Ad(L):\begin{cases} d_1(e_i)=e_{i+1},\ 3\le i\le 5, & d_i(e_1)=e_i,\ 2\le i\le 6, & d_7(e_2)=e_6,\\ d_9(e_i)=e_i,\ 4\le i\le 6, & d_8(x)=d_8(y)=-e_4, & d_{10}(e_2)=e_2,\\ d_{10}(e_i)=(i-3)e_i,\ 4\le i\le 6, & d_{11}(x)=3d_{11}(y)=3e_6, & d_{12}(e_2)=e_4,\\ d_7(x)=2d_7(y)=-2d_8(e_2)=-2e_5, & d_{12}(y)=-e_3. \end{cases}$$

Theorem $(Der(L),[-,-])$ is a Lie algebra with the following multiplication table:

$$\begin{cases} [d_1,d_{10}]=[d_{15},d_1]=d_1, & [d_6,d_{10}]=3d_6,\ [d_8,d_1]=[d_7,d_9]=d_7,\\ [d_1,d_{14}]=[d_2,d_{10}]=[d_{15},d_2]=d_2, & [d_7,d_{10}]=2d_7,\ [d_7,d_{15}]=3d_7,\\ [d_3,d_9]=[d_{15},d_3]=[d_{12},d_{13}]=d_3, & [d_8,d_9]=[d_8,d_{10}]=[d_{12},d_1]=d_8,\\ [d_4,d_{10}]=[d_8,d_{13}]=[d_8,d_{14}]=d_4, & [d_{11},d_{15}]=4d_{11},\ [d_8,d_{15}]=2d_8,\\ [d_3,d_1]=[d_2,d_{12}]=[d_4,d_9]=d_4, & [d_1,d_7]=[d_9,d_{11}]=-\frac{1}{3}[d_{10},d_{11}]=d_{11},\\ [d_4,d_1]=[d_2,d_8]=[d_5,d_9]=d_5, & [d_5,d_{10}]=[d_7,d_{14}]=2[d_7,d_{13}]=2d_5,\\ [d_5,d_1]=[d_2,d_7]=[d_{13},d_{11}]=d_6, & [d_{12},d_9]=[d_{12},d_{15}]=d_{12},\ [d_{14},d_{11}]=3d_6,\\ [d_5,d_{15}]=[d_6,d_9]=[d_6,d_{15}]=2d_6, & [d_{15},d_{13}]=2d_{13},\ [d_{15},d_{14}]=2d_{14}, \end{cases}$$

Corollary Lie algebra from Theorem is solvable.

Bibliography

[1]. **K. K. Abdurasulov, R. K. Gaybullaev, B. A. Omirov, A. Kh. Khudoyberdiyev,** *COn the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras* // Siberian Mathematical Journal. 2022, Vol. 63, P. 1-18.

UDC 511.331

IXTIYORIY MODUL BO'YICHA DIREXLE XARAKTERLARINI MISOLLAR YORDAMIDA TUSHUNTIRISH

Boysoatova Y. I.
Magistratura talabasi, Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekistan;
boysoatovayulduz@gmail.com

Birinchi bo'lib xarakterlar tushunchasini fanga nemis matematigi Peter Gustav Lejen Dirixle (1805-1859) tomonidan natural sonlar ketma-ketligidan berilgan arifmetik progressiyaga tegishli sonlarni ajratib olish uchun kiritilgan. Keyinchalik turli xarakteristik funksiyalar paydo bo'lishi bilan xarakterlar Dirixle xarakterlari deb yuritila boshlandi. Avvalo, $k = p^{\alpha}$ moduli bo'yicha xarakterlar kiritiladi, so'ng ularning sodda xossalari o'rganiladi. Keyin esa aniqlangan xarakterlardan foydalanib ixtiyoriy k moduli bo'yicha xarakterlar kiritiladi. Bunda birinchi navbatda p tub son darajasi moduli bo'yicha xarakter o'rganilgandan so'ng $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ ixtiyoriy murakkab modul bo'yicha Dirixle xarakterlari ta'rif, teorema va xossalar yordamida o'rganiladi.

1-ta'rif. k ixtiyoriy modul bo'yicha xarakter deb

$$\chi(n) = \chi(n;k) = \prod_{t=1}^{r} \chi(n; p_2^{\alpha_2}) \tag{1}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi.

2-ta'rif. Agar (1) da barcha $t = 1, 2, 3, \cdots, r$ lar uchun

$$\chi(n; p_t^{\alpha_t}) = \chi_0(n; p_t^{\alpha_t})$$

bo'lsa, $\chi(n)$ ga k moduli bo'yicha bosh xarakter deyiladi.

3-ta'rif. Agar (1) da barcha $t = 1, 2, 3, \cdots, r$ lar uchun $\chi(n; p_t^{\alpha_t})$ lar primitiv bo'lsa, u holda 1-tenglik bilan aniqlanuvchi $\chi(n; k$ xarakterga *primitiv xarakter* aks holda *hosilaviy xarakter* deyiladi.

3-ta'rifdan k moduli bo'yicha har bir xarakterga n ning $(n, k) = 1$ qiymatlarida unga aynan teng bo'lgan $\chi_1(n)(\mod k_1)$ primitiv xarakter mos keladi. Bunda k_1 soni k ning bo'luvchisi. Bunday holda $\chi(n)$ xarakterni $\chi_1(n)$ primitiv xarakter bilan *indusirlangan xarakter* deb yuritiladi. $\chi_1(n)$ ni esa $\chi(n)$ ga *mos keluvchi primitiv xarakter* deyiladi.

Quyida $k = 10 = 2{\cdot}5$ modul bo'yicha nechta xarakter bor va ular qanday topilishini misol yordamida tushuntiriladi.

1 - misol: $q = 10$ bo'lganda Dirixle xarakterlarini aniqlaymiz:

$$\chi(n) = \chi(n;10) = \chi(n;10;m) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n;10) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \cdot indn}{6}}, & \text{agar } (n;10) = 1. \end{cases}$$

bu yerda $m = 0, 1, 2, 3..$

$\varphi(10) = 4$ bo'lgani uchun $m = 0, 1, 2, 3$ 4 ta xarakterni aniqlaymiz.

$$\chi_0 = \chi(n;10) = \chi(n;10;0) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n;10) > 1; \\ 1, & \text{agar } (n;10) = 1. \end{cases}$$

$$\chi_1 = \chi(n;10) = \chi(n;10;1) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n;10) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \cdot indn}{6}}, & \text{agar } (n;10) = 1. \end{cases}$$

$$\chi_2 = \chi(n;10) = \chi(n;10;2) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n;10) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \cdot indn}{6}}, & \text{agar } (n;10) = 1. \end{cases}$$

$$\chi_3 = \chi(n;10) = \chi(n;10;3) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n;10) > 1; \\ e^{2\pi i \frac{m \cdot indn}{6}}, & \text{agar } (n;10) = 1. \end{cases}$$

Xarakterning qiymatlarini aniqlashimiz mumkin:

$\chi \setminus$ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\chi_0(n)$	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$\chi_1(n)$	1	0	-i	0	0	0	-i	0	i	0
$\chi_2(n)$	1	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0
$\chi_3(n)$	1	0	i	0	0	0	i	0	-i	0

Bu $\chi(n)$ xarakter $\chi(3)$ bilan to'la aniqlanadi, chunki 3 mod 10 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

Yuqorida modul murakkab son bo'lganda ham xarakterlar mavjudligi ta'rif va misollar yordamida ko'risatib berildi. Demak $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ murakkab modullarni tub ko'paytuvchilarga ajratib, uning boshlang'ich ildizini topish va xarakterlarini hisoblash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati.

1. **Karatsuba A. A.** *Арифметические проблемы теории характеров Дирихле.* Успехи математических наук. January 2008. ст.44-60.
2. **Чудаков Н. Г.** *Введение в теорию L-функций Дирихле.* , ОГИЗ, М.– Л., 1947.
3. **3. Нестеренко Ю. В.** *Теория чисел.* –Москва. Издательский центр – “Академия” 2008, ст. 152-170.

WEAKLY PERIODIC GROUND STATES CORRESPONDING TO SUBGROUPS OF INDEX THREE FOR THE ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE

Egamov D. O.
Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan; dilshodbekegamov87@gmail.com

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex (see [1]). Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l = \langle x, y \rangle$. The distance on this tree is defined as the number of nearest neighbour pairs of the minimal path between the vertices x and y (where path is a collection of nearest neighbour pairs, two consecutive pairs sharing at least a given vertex) and denote by $d(x, y)$.

For the fixed $x^0 \in V$ (as usual, x^0 is called a root of the tree) we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}.$$

We write $x < y$ if the path from x^0 to y goes through x and $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$.

It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i \neq e$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

Let $S(x)$ be the set of "direct successors"of $x \in G_k$ i.e.,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} |\ d(y, x) = 1\},\ x \in W_n.$$

Also, $S_1(x)$ is the set of all nearest neighboring vertices of $x \in G_k$, i.e., $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$ and $x_{\downarrow} = S_1(x) \setminus S(x)$.

The index of a subgroup is called the *period of the corresponding periodic configuration.* A configuration that is invariant with respect to all cosets is called *translation-invariant.*

Let $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ be a family of cosets, where G_k^* is a subgroup of index $r \geq 1$. We consider model which its spins take values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. Configuration $\sigma(x), x \in V$ is called G_k^* *weakly periodic*, if $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ for $x \in H_i, x_{\downarrow} \in H_j, \forall x \in G_k$.

The Ising model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ are coupling constants and $\sigma \in \Omega$.

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b.

Define the energy of a ball b for configuration σ by

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y),\quad x, y \in b,$$

where $J = (J_1, J_2) \in R^2$.

Definition 1. A configuration φ is called a *ground state* for the Hamiltonian (1) if it satisfies the following condition

$$U(\varphi_b) = \min\{U_0, U_1, ..., U_{k+1}\}, \quad \text{for any}\ \ b \in M.$$

We consider periodic ground states on the Cayley tree of order three, i.e., $k = 3$. Let $B_0 = \{\emptyset\}, B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}$, i.e., $m_1 = 1, m_2 = 3$. We consider homomorphism $u_{B_1B_2} : \langle e, a_1, a_2, a_3, a_4\rangle \to \langle e, a_1, a_3\rangle$ and $\gamma : \langle e, a_1, a_3\rangle \to \{e, a_1, a_3\}$

$$u_{B_1B_2}(x) = \begin{cases} e,\ if\, x = e; \\ a_1,\ if\ x = a_i,\ i =\ 1, 2; \\ a_3,\ if\ x = a_i,\ i =\ 3, 4. \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} e,\ if\, x = e; \\ a_1,\ if\, x \in \{a_1, a_3a_1\}; \\ a_3,\ if\, x \in \{a_3, a_1a_3\}; \\ \gamma(a_ia_{4-i}...\gamma(a_ia_{4-i})),\ if\, x = a_ia_{4-i}...a_{4-i},\ l(x) \geq 3,\ i \in \{1; 3\}; \\ \gamma(a_ia_{4-i}...\gamma(a_{4-i}a_i)),\ if\, x = a_ia_{4-i}...a_i,\ l(x) \geq 3,\ i \in \{1; 3\}. \end{cases}$$

Let $H_1 := \Im^1{}_{B_1B_2}\ (G_3)$. Then

$$H_1 = \{x \in G_3 |\ \gamma(u\ _{B_1B_2}\ (x)) = e\}.$$

By using H_1 is a subgroup of index 3 of the group G_3 we define a family of cosets:

$$G_3/H_1 = \{H_1, H_2, H_3\},$$

where

$$H_2 = \{x \in G_3 \,|\gamma(u_{\ B_1B_2}\ (x)) = a_1\},\ \ H_3 = \{x \in G_3 \,|\gamma(u_{\ B_1B_2}\ (x)) = a_3\}\ \ (\text{see}[2]).$$

$$G_3/H_1 = \{H_1, H_2, H_3\}.$$

H_1-weakly periodic set of h has the form

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{12}, & x_\downarrow \in H_1 \text{ and } x \in H_2, \\ a_{13}, & x_\downarrow \in H_1 \text{ and } x \in H_3, \\ a_{21}, & x_\downarrow \in H_2 \text{ and } x \in H_1, \\ a_{23}, & x_\downarrow \in H_2 \text{ and } x \in H_3, \\ a_{31}, & x_\downarrow \in H_3 \text{ and } x \in H_1, \\ a_{32}, & x_\downarrow \in H_3 \text{ and } x \in H_2, \end{cases}$$

where $\varphi_{ij} \in \Phi$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

In the sequel, we write $\varphi(x) = (a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32})$ for such a weakly periodic configuration φ.

Theorem 1. Let $k = 3$. Then the following assertions hold.

1. There are exactly six H_1-weakly periodic ground states on $\{J_2 = \frac{1}{2}J_1, J_1 \geq 0\}$, which are not periodic, have the form $\varphi_1 = (i, j, i, j, i, j)$, $\varphi_2 = (i, j, i, j, j, i)$, $\varphi_3 = (i, j, j, i, j, i)$, and $\varphi_{3+v} = -\varphi_v$, where $v = 1, 2, 3$ and $i \neq j; i, j \in \Phi$.

2. There are exactly two H_1-weakly periodic ground states on $\{J_2 = -\frac{1}{2}J_1, J_1 \leq 0\}$, which are not periodic, have the form $\varphi_7 = (i, j, j, i, i, j)$ and $\varphi_8 = -\varphi_7$, where $i \neq j; i, j \in \Phi$.

REFERENCE

1. **U. A. Rozikov** *Gibbs measures on a Cayley tree.* Singapore.: World Scientific Publishing. - 2013.
2. **U. A. Rozikov, F. H. Haydarov:** *Invariance property on group representations of the Cayley tree and its applications.* arxiv:1910.13733.

UDK 511.321

Birinchi va ikkinchi darajali darajali trigonometrik yig'indilarni baholash va ularning tadbiqlariga doir

Erkinova D.A.
Termiz davlat universiteti, dildora.erkinova@mail.ru

Masalaning qo'yilishi. Ma'lumki, sonlar nazariyasining additiv masalalarini tekshirishda trigonometrik yig'indilarni baholash muhim ahamiyatga ega. Bunday additiv masalalarga misol sifatida XVIII- asrning o'rtalaridan buyon ma'lum bo'lgan Varing, Eyler-Goldbax, Xardi-Litlvud, Xua-Lo-Ken problemalarini ko'rsatish mumkin. Birinchi bo'lib trigonometrik yig'indilarning trivial bo'lmagan bahosini Veyl va Vinogradovlar olgan [1-3]. Trigonometrik yig'indilarning umumiy ko'rinishi $S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}$ dan iborat bo'lib uning trial bahosi $|S| \leq P$ dan iborat. Bu yerda $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$ haqiqiy koeffisientli ko'phad, Q, P- lar natural sonlar [4,5].

Bu trigonometrik yig'indining trivial bo'lmagan bahosi muhim ahamiyatga ega. Bu sohadagi izlanishlar davom etmoqda, chunki yuqorida sanab o'tilgan masalalarning birortasi ham to'la o'z yechimini topmagan. Shuning uchun ham bu sohadagi izlanishlar dolzarb hisoblanadi.

Ishning asosiy natijalari. Ishning asosiy natijalari qyuidagilardan iborat:

1. $S_1 = \sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i f(x)} = \begin{cases} m, & agar\ a/m, \\ 0, & agar\ a \nmid m \end{cases}$

ekanligini isbotlangan. Yuqorida qaralgan trigonometrik yig'indini $ax \equiv b(mod m)$ taqqoslamaning yechimlar soni T ni aniqlashga tadbiq etilgan hamda shuning uchun ham yuqoridagi yig'indida faqat y/m_1 hadlar qoladi, qolgan hadlar nolga teng. Shunday qilib, $y = km_1$ deb olsak, $0 \le km_1 \le dm_1 - 1$, ya'ni $0 \le k \le d-1$ va $T = \begin{cases} d, & agar\ b/d, \\ 0, & agar\ b \nmid d \end{cases}$ formula isbotlangan.

Bunda foydalanilgan usul unchalik ham sodda bo'lmasada, u trigonometrik yig'indilardan foydalanib arifmetik masalalarni yechish mumkin ekanligining yoqqol namunasidir.

Faraz etaylik, $p > 2$- tub son, $Q(< P)$-musbat butun son, R-esa $1, 2, \ldots, Q$ sonlari orasidagi kvadratik chegirmalar soni, N-shu sonlar orasidagi kvadratik chegerma emaslar soni bo'lsin. Gauss yig'indisi $S_2 = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^2}$, $(a, q) = 1$ hisoblangan va barcha $q = p > 2$ tub sonlar uchun o'rinli bo'lgan $|S_2| = \sqrt{p}$ bahodan foydalanib quyidagi formulalar isbotlangan: $R = \frac{Q}{2} + \frac{\theta}{2}\sqrt{p} lnp$, $N = \frac{Q}{2} - \frac{\theta}{2}\sqrt{p} lnp$, bu yerda $\theta \in (-1; 1)$ - haqiqiy son.

Bunda quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. p – tub moduli bo'yicha eng kichik musbat kvadratik chegirma emas $[\sqrt{p} lnp] + 1$ dan katta emas. Bu yerda $[x]$ ifoda x ning butun qismini birdiradi. Bu natijalar ilgari bizga $R = \frac{Q}{2} + O(\sqrt{p} lnp)$ va $N = \frac{Q}{2} - O(\sqrt{p} lnp)$ ko'rinishlarda ma'lum edi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Аллаков И.** *Сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш.* Монография. -Т, «Таълим» 2012, 200б.
2. **Виноградов И.М.** *Метод тригонометрических сумм в теории чисел.* - М.: Наука. 1980. - 144с.
3. **Vaughan R.C.** *The Hardi-Littlewood method. Second edition.* Cambridge University Press. 1997. 232p. //Русча нашри: Метод Харди-Литтлвуда. – М.: Мир, 1985.–184с.
4. **Сегал В.И.** *Тригонометрические суммы и их некоторые приложения в теории чисел.* УМН. т-1. вып.3-4, 1956, 147-193с.
5. **Коробов Н.М.** *Тригонометрические суммы и их приложения.* М.,"Наука", 1989, 240с.

УДК 519.17

Bir o'lchovli simpleksda aniqlangan kvadratik stoxastik operatorlar kompozitsiyasi

Eshmamatova D. B.[1], Asatov J. O.[2]

[1] Toshkent davlat transport universiteti,Toshkent, O'zbekiston; 24dil@mail.ru
[2] O'zbekiston milliy universiteti, Tohkent, O'zbekiston; asatovjasur1@gmail.com

Aytaylik $V : S^{m-1} \longrightarrow S^{m-1}$ simpleksni o'zini o'ziga akslantiruvchi operator bo'lsin. Simpleksdan ixtiyoriy $x^o \in S^{m-1}$ nuqta olib, quyidagi itaratsiyalarni ko'ramiz $x^{n+1} = Vx^n$, u holda $\{x^n\}$ – ketma ketlik x^0 nuqtaning akslantirish tasiridagi traektoriyasi deyiladi.

Bizga malumki simpleks $S^{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$ qavariq kompakt u holda [1] ga ko'ra traektoriya kamida bitta limit nuqtaga ega. Operatorning barcha limit nuqtalari to'plamini quyidagicha belgilaymiz:

$$\omega(x^0) = \{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\} \neq \emptyset.$$

Endi V operatorni [1] ga asosan quyidagi ko'rinishda kiritamiz:

$$V : x_k^{'} = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \right), \qquad k = \overline{1, m}, \tag{1}$$

bunda $A = (a_{ki})$ – kososimmetrik matritsa bo'lib (1) ko'rinishdagi operatorlar uchun uning elementlari quyidagi shartni qanotlantiradi

$$a_{ki} = -a_{ik}, \qquad |a_{ki}| \leq 1.$$

Bu operator uchun [2] ishda quyidagi teorema isbotlangan:

Теорема 1. Aytaylik $A = (a_{ki})$ matritsa kososimmetrik matritsa. U holda quyidagi to'plamlar bo'sh bo'lmagan qavariq ko'pyoq bo'ladi:

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \neq \varnothing \qquad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\} \neq \varnothing.$$

Malumki ([1]), (1) operatorning kososimmetrik matritsasiga biror turnirni mos qo'yish mumkin. Taklif etilayotgan ishning maqsadi – (1) ko'rinishda berilgan operatorning xususiy holi, y'ani bir o'lchamli simpleksda aniqlangan 2 ta operatorni kompozitsiyasining dinamikasini o'rganishdan iborat. Buning uchun esa bizga qo'zg'almas nuqtalar kartasi tushunchasi kerak bo'ladi.

Ta'rif 1. $Vx^* = x^*$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x^* \in S^{m-1}$ nuqta (1) operatorning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

Qo'zg'almas nuqtalar kartasi tushunchasini 1-teoremaga asoslangan holda kiritamiz:

Aytaylik $I = \{1, 2, ..., m\}$ va $\alpha \subset I$, u holda $X = \{x(\alpha) : \alpha \subset I\}$ qo'zg'almas nuqtalar to'plami bo'lsin. U holda $x(\alpha)$ va $x(\beta)$ qo'zg'almas nuqtalar (p, q) juftlikni tashkil etadi deyiladi, agarda shunday Γ_γ yoq mavjud bo'lib, bunda $\gamma \supset \alpha \cup \beta$ va bu yoqda quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'lsa

$$A_\gamma x(\alpha) \geq 0, \quad A_\gamma x(\beta) \leq 0.$$

Bu holda $x(\alpha)$ – p nuqta $x(\beta)$ esa q nuqta deb ataladi. Bunda A_γ kososimmetrik matritsa A matritsani Γ_γ yoqdagi qisqartirilgan matritsasidir, yani A_γ matritsa $A = (a_{ki})$ matritsaning $(k, i) \notin (\gamma \times \gamma)$ elementlarini nollar bilan almashtirishidan hosil bo'ladi. U holda 1-teoremadagi P va Q to'plamlarni Γ_γ yoqdagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$P_\gamma = \{x \in \Gamma_\gamma : A_\gamma x \geq 0\} \qquad Q_\gamma = \{x \in \Gamma_\gamma : A_\gamma x \leq 0\}.$$

Agar $x(\alpha)$ va $x(\beta)$ nuqtalar (p, q) juftlikni tashkil etsa u holda ularni $x(\alpha)$ dan $x(\beta)$ga yo'nalgan strelka bilan tutashtiramiz hosil qilingan orientirlangan graf V operatorning qo'zg'almas nuqtalari kartasi deyiladi.

Endi quyidagi operatorlarni qaraylik:

$$V_1 : S^1 \longrightarrow S^1 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - ax_2) \\ x_2' = x_2(1 + ax_1) \end{cases} \quad V_2 : S^1 \longrightarrow S^1 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2) \\ x_2' = x_2(1 - x_1) \end{cases} \tag{2}$$

Bu operatorlarning $V_1 \circ V_2$ kompozitsiyasini ko'ramiz:

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} x_1'' = x_1(1 + x_2)(1 - ax_2(1 - x_1)), \\ x_2'' = x_2(1 - x_1)(1 + ax_1(1 + x_2)), \end{cases} \tag{3}$$

Kompozitsiya uchun biz faqat qo'zg'almas nuqtalar kartasi tushunchasini kirita olamiz. Kompozitsiyada qatnashuvchi har bir V_1 va V_2 operatorlar ikkitadan qo'zg'almas nuqtalarga ega bo'lib, ular simplekaning uchlari, ya'ni $e_1 = (1, 0)$ va $e_2 = (0, 1)$. Kompozitsion (3) operator esa uchta qo'zg'almas nuqtaga ega. Natijada quyidagi teoremani oldik:

Theorema 2. $V_1 \circ V_2$ kompozitsiya uchta qo'zgalmas nuqtalarga ega bo'lib, ular

1) $e_1 = (1, 0)$ va $e_2 = (0, 1)$ simpleksning uchlari – tortuvchi (attractor);

2) $A\left(\frac{3a-\sqrt{a^2+4a}}{2a};\quad \frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2a}\right)$ nuqta esa koeffitsientlarning $\frac{1}{2} < a < 1$ qiymatida simpleksga tegishli bo'lib, itaruvchi (repeller)xarakterga ega. Qolgan xollarda $A \notin S^1$.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun [3] ishdagi qo'zg'almas nuqtalarning xarakterini aniqlovchi ta'riflardan foydalanamiz. Buning uchun $V_1 \circ V_2$ operatorning Jakobi matritsasini qaraymiz, yani

$$\begin{pmatrix} ax_1x_2 - ax_1^2 + ax_1x_2^2 - ax_2^3 + x_2 + 1 & x_1 - 2x_1x_2^2 - ax_1x_2 \\ ax_2^3 + ax_2^2 - ax_1x_2^{-} ax_1x_2 - x_2 & 2ax_1x_2^2 + ax_1x_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Yakobi matritsaning xos sonlari λ ni topamiz, buning uchun quyidagi tenglama yechiladi:

$$\begin{vmatrix} ax_1x_2 - ax_1^2 + ax_1x_2^2 - ax_2^3 + x_2 + 1 - \lambda & x_1 - 2x_1x_2^2 - ax_1x_2 \\ ax_2^3 + ax_2^2 - ax_1x_2^{-} ax_1x_2 - x_2 & 2ax_1x_2^2 + ax_1x_2 + x_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

natijada $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = (1 + x_2 - x_1)(2ax_1x_2 + x_1 - x_2 + 1)$ ga ega bo'ldik. Bundan esa $\frac{2}{3} < a < 1$ da xos son absolyut qiymati bo'yicha 1 dan katta ekanligini ko'rish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Литература

1. **Ганиходжаев Р. Н.** *Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем* Математические заметки. 1994. 56(5). С. 40–49.
2. **Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.** *Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий* Владикавказский математический журнал. 2006. 8(2). С. 12–28.
3. **Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.** *Dynamics of Lotka-Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix* Uzbek Mathematical Journal. 2022. 66(1). pp.85-97. DOI: 10.29229/uzmj.2022-1-8.

UDC 517.5

Calculation of polynomial level lines in the plane

Z. Kh. Khaydarov[1], S. Khudaykulova[2]
[1]Samarkand State University, Uzbekistan, Samarkand;
zafarxx@gmail.com
[2]Termez State University, Uzbekistan, Termez;
hudaykulova.sz@gmail.com

Let $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Consider the real polynomial $f(X)$. When $c \in \mathbb{R}$ is constant, the curve in the plane $\mathbb{R}^2$

$$f(X) = c \tag{1}$$

is the *level line* of the polynomial $f(X)$.

Let $C_* = \inf f(X)$ and $C^* = \sup f(X)$ by $X \in \mathbb{R}^2$.

Theorem. There is a finite set of critical values c:

$$C_* < c_1^* < c_2^* < \cdots < c_m^* < C^*, \tag{2}$$

which correspond to the critical level lines

$$f(X) = c_j^*, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

and for the values of c from each of the $m+1$ interval

$$I_0 = (C_*, c_1^*)\,,\ I_j = \left(c_j^*, c_{j+1}^*\right), j = 1, \ldots, m-1,\ I_m = (c_m^*, C^*) \tag{4}$$

level lines are topologically equivalent. If $C_* = c_1^*$ or $C^* = c_m^*$, then there are no I_0 or I_m intervals.

Therefore to find the location of all level lines of the polynomial $f(X)$ it is necessary to find all critical values of c_j^*, depict m of critical level lines (3) and one level line for any value c of $m+1$ of the interval (4). The way to compute these level lines using power geometry is described in [1] and in part in [2, ch. I, § 2]. For a more traditional approach. The local structure of the polynomial level lines was considered in [2, ch. I, § 3]. Here some results from [2, Ch. I, § 3] are supplemented.

A point $X = X^0$ is called *simple* for a polynomial $f(X)$ if at least one of the partial derivatives $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$ is non-zero in it.

Definition 1. *Point* $X = X^0$ for a polynomial $f(X)$ is called *critical order* k if at the point $X = X^0$ all partial derivatives of $f(X)$ to order k are zero, that is, all

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(X^0) = 0,\ 1 \leqslant i + j = l \leqslant k,$$

and at least one partial derivative of order $k+1$ is non-zero.

Definition 2. *Curve*

$$g(X) = 0 \tag{5}$$

is called *critical* for a polynomial $f(X)$ if

1) it lies on some level line (1) and

2) it has $\partial f/\partial x_1 \equiv 0$, or $\partial f/\partial x_2 \equiv 0$.

Let us call the values of the constant $c = f(X)$ at the critical points $X = X^0$ and on the critical lines (5) as *critical* and denote c_j^* according to (2).

Next, near the point $X = X^0$ we will consider analytic reversible coordinate substitutions

$$y_i = x_i^0 + \varphi_i\left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0\right),\ i = 1, 2, \tag{6}$$

where φ_i are– analytic functions from $X - X^0$.

Consider solutions to the equation (1) near the critical point $X^0 = 0$ of order 1. Then

$$f(X) = f_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots$$

The Δ discriminant of the quadratic form written out is $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lemma 1.[2, ch. I, § 3] If at the first-order critical point $X^0 = 0$ the discriminant of $\Delta \neq 0$, then there exists a substitution (6) that brings the equation (1) to the form

$$f(X) = f_0 + \sigma y_1^2 + y_2^2 = c,$$

where $\sigma = 1$ (if $\Delta < 0$) or $\sigma = -1$ (if $\Delta > 0$).

This is a two-dimensional version of Morse's famous lemma.

Lemma 2. If at the first-order critical point $X^0 = 0$ the discriminant $\Delta = 0$, then there exists a substitution (6) that brings the equation (1) to the form

$$f(X) = f_0 + y_2^2 + \tau y_1^n = c,$$

where the integer $n > 2$ and the number $\tau \in \{-1, 0, +1\}$.

We propose the following order of calculations.

1) The ideal $\mathcal{J}$ is computed and a Groebner basis $\mathcal{GBJ}$ with purely lexicographic order $x_1 \prec x_2 \prec c$ using the procedure `Basis` of `Groebner` package is computed for it.

2) The basis $\mathcal{GBJ}$ allows to find all critical values c_j^* using the polynomial $h(c)$ as algebraic numbers. Such a polynomial is automatically determined for the above lexicographic order, or by the procedure `UnivariatePolynomial`.

3) Among the critical values of c_j^* one should select those to which real critical points and critical curves correspond. This can be done, for example, by performing a primal decomposition of the basis $\mathcal{GBJ}$ and then determining the zeros of the resulting ideals in the field $\mathbb{R}$.

4) Before primary decomposition of an ideal $\mathcal{GBJ}$, its dimensionality can be calculated using the procedure `HilbertDimension`. If it is not zero, first use the procedure `EquidimensionalDecompo-si-tion` to calculate a sequence of ideals with dimensions 0 and 1 respectively, and then perform their decomposition. Ideals of dimension 0 will yield critical points, and ideals of dimension 1 will yield critical curves (as well as real critical points).

5) Now for each primordial ideal find its set of real zeros. If the critical value c_j^* belongs to $\mathbb{Q}$, then all calculations are performed exactly. If it is an algebraic number, we can proceed as described in [1], i.e. all calculations are performed modulo the ideal defining the critical value and the critical point.

6) Then the nature of each critical point is determined using the discriminant Δ of the quadratic form of the expansion of the function $f(X)$ near it according to Lemmas 2 and 3. The calculations performed allow us to proceed to the construction of sketches of the level lines.

Referenses

1. **Bruno A., Batkhin A.** Level lines of a polynomial on the plane // Preprints of the Keldysh Institute for Applied Mechanics. Moscow, 2021. в„– 57. (in Russian).
2. **Bruno A. D.** Local method of nonlinear analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1979. 252 СЃ.(in Russian)

UDC 512.813.5

ON THE EXTENSION OF FOUR DIMENSIONAL SOLVABLE LIE ALGEBRAS

Khayrullaeva D.Sh.

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; khayrullaevadilaferuz@gmail.com

It is well known that the method of central extension is very useful to the classification of finite-dimensional algebras. This method first used by Skjelbred and Sund for the classification of nilpotent Lie algebras. After that Sund in his work generalize central extension method for the solvable Lie algebras. In this work, we consider the extension of some four-dimensional solvable Lie algebras.

An algebra $(L,[-,-])$ over a field F is called Lie algebra if for any $x,y,z\in L$ the following identities:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,$$

$$[x,x]=0$$

hold.

For an arbitrary Lie algebra L we define the derived and central series as follows:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[s+1]}=[L^{[s]},L^{[s]}],\ s\geq 1,$$

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k,L],\ k\geq 1.$$

An n-dimensional Lie algebra L is called solvable (nilpotent) if there exist $s\in N$ $(k\in N)$ such that $L^{[s]}=0$ $(L^k=0)$. Such minimal numbers are called index of solvability and nilpotency, respectively.

Let L be Lie algebra and A be an abelian algebra. Let $\theta: L\to EndA$ a representation, $\psi: L\times L\to A$ an anti-symmetric bilinear map satisfying the condition

$$\psi(x,[y,z])+\psi(z,[x,y])+\psi(y,[z,x])+\theta(x)\psi(y,z)+\theta(z)\psi(x,y)+\theta(y)\psi(z,x)=0,$$

where $x, y, z \in L$. The bilinear map satisfying previous condition is called a 2-cocycle on L with respect to θ. The set of all such 2-cocycles is denoted by $Z^2(L, \theta, A)$. The 2-coboundaries on L with respect to θ are defined as

$$df(x,y) = f([x,y]) + \theta \circ \phi(y)(f(x)) - \theta \circ \phi(x)(f(y))$$

for some linear map $f : L \to A$ and $\phi \in Aut(L)$.

The set of all such 2-coboundaries is denoted by $B^2(L, \theta, A)$ and it is a subset of $Z^2(L, \theta, A)$. We define second cohomology space as the quotient space

$$H^2(L, \theta, A) = Z^2(L, \theta, A)/B^2(L, \theta, A)$$

Given 4-dimensional solvable Lie algebras with the following multiplications:

$$S_{4,3} : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1 \\ [e_2, e_4] = ae_2 \\ [e_3, e_4] = be_3 \end{cases}$$

where the values of the parameters a, b are $0 < |b| \le |a| \le 1, (a, b) \ne (-1, -1)$.

We consider $\theta : S_{4,3} \to End(\mathbb{C})$ with condition $\operatorname{Ker}\theta \supset \{e_1, e_2, e_3\}$, we obtain that

$$\theta(e_4)(e_5) = \alpha e_5$$

In order to get a non-split extension of the solvable Lie algebra $S_{4,3}$, it is enough to consider the following cases and bases of $H^2(S_{4,3}, \theta, A)$ are formed for each case:

1) $a = b = 1, \alpha = -2; \quad H^2(S_{4,3}, \theta, A) = \langle \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}, \Delta_{2,3} \rangle$

2) $\alpha = -a - 1, a = b \ne 1; \quad H^2(S_{4,3}, \theta, A) = \langle \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3} \rangle$

3) $\alpha \ne -a - 1, \alpha = -b - 1, a = 1, b \ne 1; \quad H^2(S_{4,3}, \theta, A) = \langle \Delta_{1,3}, \Delta_{2,3} \rangle$

Theorem 1. Let L be a one-dimensional extension of the solvable Lie algebra $S_{4,3}$, then L is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras

Proof.

$$L_1 : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4] = e_2, \\ [e_3, e_4] = e_3, \\ [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_4, e_5] = -2e_5, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4] = e_2, \\ [e_3, e_4] = e_3, \\ [e_1, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_4, e_5] = -2e_5, \end{cases} \quad L_3 : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4] = e_2, \\ [e_3, e_4] = e_3, \\ [e_1, e_2] = \beta e_5, \beta \ne 0 \\ [e_1, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_4, e_5] = -2e_5, \end{cases}$$

$$L_4 : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4] = ae_2, \\ [e_3, e_4] = ae_3, \\ [e_1, e_3] = e_5, \\ [e_4, e_5] = -(a+1)e_5, a \ne 1 \end{cases} \quad L_5 : \begin{cases} [e_1, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4] = ae_2, \\ [e_3, e_4] = ae_3, \\ [e_1, e_2] = e_5, \\ [e_1, e_3] = e_5, \\ [e_4, e_5] = -(a+1)e_5, a \ne 1 \end{cases}$$

$$L_6:\begin{cases}[e_1,e_4]=e_1,\\ [e_2,e_4]=e_2,\\ [e_3,e_4]=be_3,\\ [e_2,e_3]=e_5,\\ [e_4,e_5]=-(b+1)e_5, b\neq 1,\end{cases}\qquad L_7:\begin{cases}[e_1,e_4]=e_1,\\ [e_2,e_4]=e_2,\\ [e_3,e_4]=be_3,\\ [e_1,e_3]=e_5,\\ [e_2,e_3]=e_5,\\ [e_4,e_5]=-(b+1)e_5, b\neq 1.\end{cases}$$

Literature

1. **Skjelbred T., Sund T.** *Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes.* C R Acad Sci Paris Ser A-B. 1978; 286(5): A241–A242.
2. **Sund T.** *On the structure of solvable Lie algebras.* Mathematica Scandinavica Journal, 44 (2)(1979), 235–242.
3. **Šnobl L. Winternitz P.** *A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants,* Journal of Physics A, 38 (2005), 2687–2700.

KVARTERNIONLAR USTIDA BAJARILADIGAN ASOSIY AMALLAR

Mamajonov J. D.[1], Muxtorov T. Sh.[2]
[1,2] Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
jmamajonov@gmail.com; toshpolatjon12.11@gmail.com

Kvarternionlarning topilishi matematikada eng yaxshi kashfiyotlardan biridir. Kvarternion sonlar Irland matematigi U.R.Gamilton tomonidan 1843-yil kashf etilgan bolib, bu ma'lumot Dublindagi Brum ko'prigida o'yib yozilgan toshlavhada aks etgan. Aniq aytilishiga sabab o'zining o'g'liga yozgan maktubida keltirilgan. Gamilton kvarternionlarni ochishdan oldin kompleks sonlar nazariyasi bilan shug'ullangan. U kompleks sonlar maydonini kengaytirishga harakat qilgan.

Misol uchun, kompleks sonlar maydoni C haqiqiy sonlar R ustidagi maydon kengaytmasi ekanligi barchaga ma'lum. Haqiqatan ham, R C ning kichik to'plamidir, chunki R ning har bir elementi $a+ib$ ko'rinishida yozilishi mumkin, bu erda $b=0$. Nihoyat, qo'shimcha va R ning multiplikativ operatorlari $b=0$ bo'lganda C operatorlari bilan mos keladi. Umuman olganda, biz C ni R ustidagi o'lchovli vektor fazosi deb ataymiz, kompleks sonlarning maydoni darajali maydon kengaytmasidir. Kvarternionlarning maxsus holatida H ikkita yangi j va k elementlarni qo'shish orqali tuziladi. Bu mavxum elementlar orasida quyidagi tenglik o'rinli:

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1.$$

Shunday qilib, kvarternionlarning maydonini quyidagicha yozish mumkin:

$$H=\left\{q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k\ |q_t\in R,\quad i^2=j^2=k^2=-1\right\},\quad (t=0,1,2,3)$$

Kvarternion soni $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ ko'rinishda bo'lib ikki qismdan iborat. Skalyar qism $scalq=q_0$ va vektor qism $vekq=q_1i+q_2j+q_3k$. Kvarternion sonni $q=q_0+|q-q_0|$ kabi ham belgilanadi.

Kvarternion sonining asosiy elementlarini keltirib o'tamiz.

1. Normasi: $\|q\|=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$
2. Moduli: $|q|=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$
3. Vektor qismining moduli: $\langle q\rangle=|q-q_0|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$
4. Argumenti: $\arg q=\arccos\left(q_0/|q|\right)$
5. Kvarternion sonning teskarisi: $q^{-1}=\bar{q}/|q|^2$

Kvarternion sonni qo'shmasi vektor qismining ishorasi bilan farq qiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\bar{q}=q_0-q_1i-q_2j-q_3k$$

Kvarternion sonlarini qo'shish va ayrish kompleks sonlar bilan bir xil bajarilib, ko'paytirish va bo'lish esa boshqacharoq bajariladi [1].

Kvarternion argumentli ba'zi funksiyalarni ko'rib chiqamiz. Buning uchun karternionlar uchun Koshi integral formulasi [2] 2-ko'rinishidan, ya'ni

$$f(q) = \mathrm{Re}\,(f(\lambda)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\,\mathrm{Im}\,(f(\lambda))$$

formuladan foydalanamiz.

1. e^q kvarternion eksponentasi $e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} = \mathrm{Re}(e^{q_0+i|q-q_0|}) + \dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\,\mathrm{Im}(e^{q_0+i|q-q_0|})$

yoki $e^{q_0+iq_1+jq_2+kq_3} = e^{q_0}\left(\cos(|q-q_0|) + \dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\sin(|q-q_0|)\right).$

2. $ln\,(q)$ kvarternionning natural logarifmi

$$\ln(q) = \ln(q_0+q_1i+q_2j+q_3k) = \mathrm{Re}(\ln(q_0+i\,|q-q_0|)) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\,\mathrm{Im}(\ln(q_0+i\,|q-q_0|))$$

yoki $\ln(q) = \ln(q_0+q_1i+q_2j+q_3k) = \ln(|q|) + \dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\arg(q_0+i\,|q-q_0|),$

$$\arg(\lambda) = \arg(q_0+i\,|q-q_0|) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\right), q_0>0 \\ \pi + arctg\left(\dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\right), q_0<0 \end{cases}.$$

3. $\sqrt{q}$ kvarternionning kvadrat ildizi

$$\sqrt{q_0+q_1i+q_2j+q_3k} = \mathrm{Re}\left(\sqrt{q_0+i\,|q-q_0|}\right) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\,\mathrm{Im}\left(\sqrt{q_0+i\,|q-q_0|}\right)$$

yoki $\sqrt{q} = \sqrt{q_0+q_1i+q_2j+q_3k} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{|q|+q_0}{2}} + \dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}\sqrt{\dfrac{|q|-q_0}{2}}\right).$

4. q^2 kvarternionning kvadrati

$$(q_0+q_1i+q_2j+q_3k)^2 = \mathrm{Re}((q_0+i\,|q-q_0|)^2) + \frac{q-q_0}{|q-q_0|}\,\mathrm{Im}((q_0+i\,|q-q_0|)^2)$$

yoki $q^2 = (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)^2 = q_0^2 - |q-q_0|^2 + \dfrac{q-q_0}{|q-q_0|}2q_0\,|q-q_0|\,.$

Oxirgi tenglikdagi amallarni bajarib

$$q^2 = (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)^2 = 2qq_0 - q_0^2 - |q-q_0|^2$$

yoki

$$q^2 = (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)^2 = 2q_0q - |q|^2$$

ga ega bo'lamiz

5. $(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^{(b_0+b_1i-b_2j-b_3k)}$ kvarternionning kvarternion darajasi

$$(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)^{(b_0+b_1i-b_2j-b_3k)} = \beta_0+\beta_1i+\beta_2j+\beta_3k,$$

bu yerda

$$\beta_0 = e^{\mu_0}(\cos\mu_1\cos\mu_2\cos\mu_3 - \sin\mu_1\sin\mu_2\sin\mu_3),$$

$$\beta_1 = e^{\mu_0}(\cos\mu_1\sin\mu_2\sin\mu_3 + \sin\mu_1\cos\mu_2\cos\mu_3),$$

$$\beta_2 = e^{\mu_0}(\cos\mu_1 \sin\mu_2 \cos\mu_3 - \sin\mu_1 \cos\mu_2 \sin\mu_3),$$
$$\beta_3 = e^{\mu_0}(\cos\mu_1 \sin\mu_2 \sin\mu_3 + \sin\mu_1 \cos\mu_2 \cos\mu_3),$$
$$\mu_0 = b_0\delta_0 - b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3, \quad \mu_1 = b_0\delta_1 + b_1\delta_0 - b_2\delta_3 + b_3\delta_2,$$
$$\mu_2 = b_0\delta_1 - b_1\delta_3 - b_2\delta_0 - b_3\delta_1, \quad \mu_3 = b_0\delta_3 + b_1\delta_2 - b_2\delta_1 + b_3\delta_0,$$
$$\delta = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad \delta_0 = \ln|\delta| = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}),$$
$$\delta_1 = \frac{a_1}{|a_1 i + a_2 j + a_3 k|}\arccos\frac{a_0}{|a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k|},$$
$$\delta_2 = \frac{a_2}{|a_1 i + a_2 j + a_3 k|}\arccos\frac{a_0}{|a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k|},$$
$$\delta_3 = \frac{a_3}{|a_1 i + a_2 j + a_3 k|}\arccos\frac{a_0}{|a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k|}.$$

6. $\sin(q)$ *sinus kvarternion*

$$\sin(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(\sin(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(\sin(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $\sin(q) = \sin(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \sin(q_0)ch(|q - q_0|) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}\cos(q_0)sh(|q - q_0|).$

7. $\cos(q)$ *kosinus kvarternion*

$$\cos(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(\cos(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(\cos(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $\cos(q) = \cos(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \cos(q_0)ch(|q - q_0|) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}\sin(q_0)sh(|q - q_0|).$

8. $tg\,(q)$ *tangens kvaternion*

$$tg\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(tg(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(tg(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $tg\,(q) = \dfrac{1}{\cos^2(q_0) + sh^2(|q - q_0|)}\left(\sin(q_0)\cos(q_0) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}sh(|q - q_0|)ch(|q - q_0|)\right).$

9. $sh\,(q)$ *giperbolik sinus kvarternion*

$$sh\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(sh(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(sh(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $sh\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = sh(q_0)\cos(|q - q_0|)) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}ch(q_0)\sin(|q - q_0|).$

10. $ch\,(q)$ *giperbolik cosinus kvarternion*

$$ch\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(ch(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(ch(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $ch\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = ch(q_0)\cos(|q - q_0|)) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}sh(q_0)\sin(|q - q_0|).$

11. $th\,(q)$ *giperbolik tangens kvarternion*

$$th\,(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \mathrm{Re}(th(q_0 + i\,|q - q_0|)) + \frac{q - q_0}{|q - q_0|}\,\mathrm{Im}(th(q_0 + i\,|q - q_0|))$$

yoki $th\,(q) = \dfrac{1}{ch^2(q_0) + \sin^2(|q - q_0|)}\left(sh(q_0)ch(q_0) + \dfrac{q - q_0}{|q - q_0|}\sin(|q - q_0|)\cos(|q - q_0|)\right).$

Adabiyotlar

1. **Гордеев В.Н.** *Квартернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механики.* Киев: Сталь. 2016. 316 с.
2. **Байрак Л.Г.** *Интегральная формула Коши для квартернионов.* Украина. 2000.
3. **Sudbery A.** *Quaternionic Analyses.* Dep. of Math. University of York Heslington. Aug. 1977.
4. **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** *Гиперкомплексные числа.*М.: Наука. 1973.
5. **Ефремов А.П.** *Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* 2004.

УДК 512.554.38

Some solvable Lie superalgebra with given nilradical

Mirzayeva D.R.,[1] Solijanova G.O.[2];
[1,2] National University of Uzbekistan, Tashkent;
diyoraxonmirzayeva9@gmail.com,[1] gulhayo.solijonova@mail.ru[2]

In this thesis, we show multiplication table of a solvable Lie superalgebra with codimension 2 to a given nilradical.

Definition 1. A *Lie superalgebra* is a $\mathbb{Z}_2$-graded vector space $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$, with an even bilinear commutation operation (or "supercommutation") $[\cdot,\cdot]$, which for an arbitrary homogeneous elements x, y, z satisfies the conditions

1. $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$,
2. $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$,
3. $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|}[z, [x, y]] = 0$ *(super Jacobi identity).*

In general, the *descending central sequence* and *derived sequence* of a Lie superalgebra $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$ are defined in the same way as for Lie algebras,consequently:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L},\ \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[k+1]} = [\mathcal{L}^{[k]}, \mathcal{L}^{[k]}],\ k \geq 1.$$

Definition 2. A Lie superalgebra is called nilpotent (respectively, solvable) if there exists $s \in \mathbb{N}$ (respectively, $k \in \mathbb{N}$) such that $\mathcal{L}^s = 0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[k]} = 0$.)

A superderivation of degree s of a Lie superalgebra $\mathcal{L}$, $s \in \mathbb{Z}_2$, is an endomorphism $D \in End(\mathcal{L})_s$ with the property

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{s \cdot dega} aD(b), \text{for all } x, y \in \mathcal{L}.$$

Let consider the following 5 dimensional nilpotent Lie superalgebra [1]:

$$N^{4,1} : \begin{cases} [x_1, x_2] = x_3, \\ [x_1, x_3] = x_4, \\ [y_1, y_1] = x_4. \end{cases}$$

Here, $N^{4,1} = N_0 \oplus N_1$. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ is a basis of N_0 and $\{y_1\}$ is a basis of N_1.

By using multiplications table and derivation rule we prove the following proposition.

Proposition 1. Any even superderivation of the algebra $N^{4,1}$ has the following matrix form:

$$Der(N^{4,1})_0 : \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 + \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_1 + \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(2\alpha_1 + \beta_2) \end{pmatrix}$$

Let $R(N^{4,1}) = N^{4,1} \oplus Q$ be a solvable Lie superalgebra with nilradical $N^{4,1}$ and Q be a complementary space to $N^{4,1}$.

Suppose, $dimQ = 2$ and $Q \subset R(N^{4,1})_0$ and $\{z_1, z_2\}$ is a basis of Q.

Theorem 1. Any solvable Lie superalgebra with nilradical $N^{4,1}$ with the codimension equal to 2 is isomorphic to the algebra:

$$R(N^{4,1}): \begin{cases} [x_1, z_1] = x_1, & [x_2, z_2] = x_2, \\ [x_3, z_1] = x_3, & [x_3, z_2] = x_3, \\ [x_4, z_1] = 2x_4, & [x_4, z_2] = x_4, \\ [y_1, z_1] = y_1, & [y_1, z_2] = \frac{1}{2}y_1. \end{cases}$$

Proof. The theorem is proved by using derivation properties and super Jacobi identity.

Bibliography

1. **Ahmad S. Hegazi,** *Classification of Nilpotent Lie Superalgebras of Dimension Five. II.* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 38, No. 10, 1999.

УДК 512.754

On Calabi-Yau property of the five dimensional Sklyanin algebra

Mizomov I. E.
Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan
mizomovinomjon@mail.ru

Fix a point $\tau \in \mathbb{C}$ and a complex elliptic curve $E = \mathbb{C}/\Lambda$ where $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\eta$ is the lattice spanned by 1 and a point η lying in the upper half plane. In 1989, Feigin and Odesskii [2] defined a family of graded $\mathbb{C}-$algebras $Q_{n,k}(E, \tau)$ to be the free algebra $\mathbb{C}\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ modulo the n^2 homogeneous quadratic relations

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}_n} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\,\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r}x_{i+r}$$

where $i, j \in \mathbb{Z}_n, i \neq j$ and $\theta_0, \cdots \theta_{n-1}$ are certain theta functions of order n, also indexed by $\mathbb{Z}_n$, that are quasi-periodic with respect to the lattice Λ.

In particular, the five-dimensional Sklyanin algebra $Q_{5,1}$ is the graded $\mathbb{C}$-algebra with generators x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 of degree one, subject to the following relations

$$r_i = \frac{be}{a}x_i^2 + \frac{ac}{b}x_{i-1}x_{i+1} + \frac{bd}{c}x_{i-2}x_{i+2} + \frac{ce}{d}x_{i+2}x_{i-2} + \frac{ad}{e}x_{i+1}x_{i-1},$$

$$s_i = ax_i^2 + bx_{i-1}x_{i+1} + cx_{i-2}x_{i+2} + dx_{i+2}x_{i-2} + ex_{i+1}x_{i-1}.$$

where $i \in \mathbb{Z}_n$ and $a = \frac{1}{\theta_2\theta_3}, b = \frac{1}{\theta_3\theta_4}, c = \frac{1}{\theta_0\theta_4}, d = \frac{1}{\theta_0\theta_1}, e = \frac{1}{\theta_1\theta_2}$. Chirvasitu, Kanda, and Smith [1] proved that this algebra is Koszul.

Let $A-\text{Bimod}$ be the category of A bimodules. Then, by viewing $A \otimes A$ as a bimodule via outer structure, we define a duality functor

$$\text{Hom}_{A-\text{Bimod}}(-, A \otimes A) : A - \text{Bimod} \to A - \text{Bimod}\,, \quad M \mapsto \text{Hom}_{A-\text{Bimod}}(M, A \otimes A)\,.$$

A bimodule structure on $\text{Hom}_{A-\text{Bimod}}(M, A \otimes A)$ is induced from the inner bimodule structure on $A \otimes A$.

An associative algebra A is *d-Calabi-Yau* if A is homologically smooth and there is an isomorphism

$$\eta : \mathrm{RHom}_{A-\mathrm{Bimod}}(A, A \otimes A) \to A[-d]$$

in the derived category of $A-$ Bimod. Here *homologically smooth* means that A as an A-bimodule has a finitely-generated projective resolution of finite length.

Example. Let $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ be a polynomial algebra. Then A is a n-Calabi-Yau algebra.

Theorem. *The algebra $Q_{5,1}$ is a Koszul Calabi-Yau algebra.*

REFERENCES

1. **A. Chirvasitu, R. Kanda, and S. Paul Smith** *Elliptic R-matrices and Feigin and Odesskii's elliptic algebras.* June 2020, preprint, 2020, arXiv:2006.12283.
2. **A. V. Odesskii and B. L. Feigin** *Sklyanin elliptic algebras.* Funktsional. Anal. i Prilozhen. 23 (1989), no. 3,45–54.

UDK 512.554

$\mathbb{Z}_2$ MAYDONDA KVADRATINING O'LCHAMI IKKIGA TENG BO'LGAN UCH O'LCHAMLI EVOLYUTSION ALGEBRALARNING TASNIFI

Normatov E. P.[1], Elboyev K. E.[2]
[1]O'zbekiston Milliy Universiteti; erkinormatov@yandex.ru
[2]O'zbekiston Milliy Universiteti; komil.elboyevgaz95@mail.ru

Bizga biror K maydon berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.[1] *(E, ·)* biror K maydon ustidagi algebra bo'lsin. Agar

$$e_i \cdot e_j = 0, \quad agar \quad i \neq j$$

$$barcha \quad i \quad larda \quad e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik} e_k$$

shartni qanoatlantiruvchi $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ bazis mavjud bo'lsa, u holda bu algebraga *evolyutsion algebra* deyiladi. Bu bazisga esa tabiiy bazis deyiladi.

Eslatma. Ushbu tezisda evolyutsion algebrani tashkil etuvchi konstantalari $\mathbb{Z}_2$ maydonda o'rganiladi.

Uch o'lchamli kompleks evolyutsion algebralari tasnifi [2] da, uch o'lchamli haqiqiy evolyutsion algebralari tasnifi esa [3] da keltirilgan. $\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli $dim(E^2) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi evolyutsion algebralar tasnifi [4]da keltirilgan.

Ushbu ishda $\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli, $dim(E^2) = 2$ shartni qanoatlantiruvchi evolyutsion algebralar tasnifini keltiramiz.

$\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli evolyutsion algebra va $\{e_1, e_2, e_3\}$ uning tabiiy bazisi bo'lsin.

Teorema. $\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli E evolyutsion algebralar $dimE^2 = 2$ bo'lganda quyidagi o'zaro izomorf bo'lmagan algebralarning biri bilan izomorfdir.

- $E_1: \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_2: \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_3: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_4: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_5: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$

- $E_6: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_7: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_8: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_9: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{10}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{11}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{12}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{13}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{14}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{15}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{16}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{17}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{18}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. **J.P. Tian** *Evolution algebras and their applications.* Lecture Notes in Mathematics, 1921, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
2. **Cabrera Casado, Yolanda; Siles Molina, Mercedes; Velasco, M. Victoria** *Classification of three-dimensional evolution algebras.* Linear Algebra Appl. 254, pp.68-108.
3. **A.N. Imomkulov** *Classification of a family of three-dimensional real evolution algebras.* TWMS J. Pure Appl. Math.2019. V. 10. в„–2 p. 225-238.
4. **E.P. Normatov, K.E. Elboyev** $\mathbb{Z}_2$ *maydonda uch o‘lchamli evolyutsion algebralarning tasnifi.* Respublika ilmiy-amaliy konferensiya "Matematika, mexanika va intellektual texnologiyalar" Toshkent-2022, 21-22 april, p.141-142.

УДК 512.544.23

Keli daraxti gruppaviy tasvirining qo‘shni sinflarda berilgan sonlarga ko‘ra indeksi 8 bo‘lgan normal qism gruppasini qurish

Normatov E.P.[1], **Kamoldinov S.M.**[2],
[1]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti erkinormatov@yandex.ru
[2]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti kamoldinovs03@gmail.com

Har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi,siklga ega bo‘lmagan cheksiz graf k-tartibli Keli daraxti deyiladi va $T^k = (V, L)$ kabi belgilanadi, bu yerda V-daraxtning uchlari, L-daraxtning qirralari to‘plami.**[1]**

G_k tashkil etuvchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo‘lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarning erkin ko‘paytmasidan iborat gruppa bo‘lsin. G_k gruppaning elementlari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi: $x = a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}$, $1 \leq i_s \leq k+1$, $s = \overline{1,n}$ $n = 0, 1, 2, ...$.

[1] maqolada T^k- Keli daraxti uchlari to‘plami V va G_k gruppa orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan.

$x \in G_k$ element uchun $\omega_x(a_i) - x$ elementdagi a_i lar soni bo'lsin.
$N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$ dastlabki $k+1$ ta natural sonlar to'plami va
$H_A = \{x \in G_k \mid \omega_x(a_i) - juft\}$ bo'lsin, bu yerda $A \subseteq N_k$ va $A \neq \varnothing$

Teorema 1[2]. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan $A, B, C \subseteq N_k$ lar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi:
$a)H_A$ G_k gruppaning indeksi 2 ga teng bo'lgan normal bo'luvchisi,
$b)H_A \neq H_B, \forall\ A \neq B \subset N_k$,
$c)$Aytaylik $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq N_k$ berilgan bo'lsin,
Agar $\bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$-qisqarmaydigan bo'lsa, u holda $H_0 = \bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$ G_k gruppaning indeksi 2^m ga teng bo'lgan normal bo'luvchisi bo'ladi.

$H_0 - G_k$ gruppaning indeksi r bo'lgan normal bo'luvchisi bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:
$S_1(x) = \{y \in V \mid d(x, y) = 1\}$ x-nuqtaning eng yaqin qo'shnilari to'plami,
$q_i(x) = |S_1(x) \cap H_i|,\ i = \overline{0, r-1};\ Q(x) = (q_0(x), q_1(x), ..., q_{r-1}(x))$

Teorema [2].$\forall\ x \in G_k$ uchun $\exists \pi_x$ o'rinlashtirish mavjudki, $Q(e)$ vektor koordinatalari uchun $\pi_x Q(e) = Q(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Teorema. Kamida 3 tasi 0 dan farqli va $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 = k+1$ shartni qanoatlantiruvchi $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7 \in N_k \bigcup \{0\}$ sonlar uchun G_k gruppaning indeksi 8 ga teng bo'lgan H_0 normal bo'luvchisi mavjud bo'lib,ular uchun $q_i(e) = k_i, i = \overline{0, 7}$ tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda k Keli daraxtining tartibi.

Izoh. Agar $k_i, i = \overline{0, 7}$ sonlarning 2 tasi 0 dan farqli qolganlari 0 bo'lsa , $q_i(e) = k_i$ shartni qanoatlantiruvchi $H_0 \lhd G_k$ ning indeksi 4 ga teng bo'lib qoladi. Bu hol [3] ishda qarab o'tilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Ганиходжаев Н.Н.** *Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли.* Доклады АН РУз. - Ташкент, 1994. – № 4. – С.3-5.
2. **Розиков У.А.** *Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса.* Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т.112. – № 1. – С.170-176.
3. **Bekmurodova D.B,Kamoldinov S.M.** *Keli daraxti gruppaviy tasvirining qo'shni sinflarda berilgan sonlarga ko'ra indeksi 4 bo'lgan normal qism gruppasini qurish.* Математика ,механика и интеллектуальные Технологий,Ташкент-2022 г. 21-22 апрел"136-bet.

УДК 512.544.23

On the n-Lie algebra of Jacobians

Nuratdinov K. D.
National University of Uzbekistan; kazbeknur11@gmail.com

Lie algebras in physics arise in general relativity, quantum field theory, quantum mechanics and string theory. Lie algebra theory has been deeply investigated for many years and Lie algebras are among the most important and useful mathematical objects.

V.T.Fillipov proposed a generalization of Lie algebras called n-Lie algebras [1]. As an infinite-dimensional example he provided n-Lie algebras of Jacobians. Another important example of infinite-dimensional n-Lie algebra structure was given by Dzhumadildayev in [2]. These two examples present the main constructions of infinite dimensional n-Lie algebras.

In this thesis we consider the generalization of n-Lie algebras of Jacobians. We introduce a n-ary bracket obtained by adding two more column to Jacobian and we give necessary and sufficient conditions when the n-ary bracket is n-Lie algebra.

Definition 1. *A vector space L equipped with skew-symmetric ternary bracket $[-,-,\dots,-]$ is called an n-Lie algebra if the following identity holds for any $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1} \in L$:*

$$[[x_1, x_2, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Definition 2. *A derivation of an n-Lie algebra is a linear transformation D of L into itself satisfying*

$$D([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, D(x_i), \dots, x_n],$$

for $x_1, \dots, x_n \in L$. All the derivations of L generate a subalgebra of Lie algebra $gl(L)$ which is called the derivation algebra of L and denoted by $Der(L)$.

Let A be an associative commutative $\mathbb{F}$-algebra and $d_1, d_2, \dots, d_{n+2}$ be pairwise commuting derivations of A. Then, define the following n-ary bracket on A:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} d_1(x_1) & \dots & d_1(x_n) & \alpha_1 & \beta \\ d_2(x_1) & \dots & d_2(x_n) & \alpha_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n+1}(x_1) & \dots & d_{n+1}(x_n) & \alpha_{n+1} & 0 \\ d_{n+2}(x_1) & \dots & d_{n+2}(x_n) & \alpha_{n+2} & 0 \end{vmatrix},$$

where $\alpha_i \in A,\ i \in \{1, \dots, n+2\},\ \beta \in \mathbb{F}$.

Now, we give necessary and sufficient conditions for $\langle A, [-,-,\dots,-]_{\alpha\beta}\rangle$ to be $n-$Lie algebra.

Theorem 1. *The algebra $\langle A, [-,-,\dots,-]_{\alpha\beta}\rangle$ is n-Lie algebra if and only if the following conditions hold true:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_j & \alpha_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_i \\ d_j(\alpha_k) & d_j(\alpha_i) \end{vmatrix} = 0$$

where $i, j, k \in \{2, \dots, n+2\}$ and $i \neq j,\ k \neq i,\ k \neq j$.

Bibliography

1. **V.T. Filippov.** *n-Lie algebras.* Sibirsk. Mat. Zh. 26(6) (1985), 126–140.
2. **A.S. Dzhumadildaev.** *Identities and derivations for Jacobian algebras.* Contemp. Math. 315 (2002), 245–278.

УДК 512.554.38

Maximal extensions of solvable Lie superalgebras

Pulatova Z. G.[1], Solijanova G. O.[2];
[1,2] National University of Uzbekistan, Tashkent; **zarifapulatova62@gmail.com**[1]
gulhayo.solijonova@mail.ru[2]

A vector space V is said to be $\mathbb{Z}_2$-*graded* if it admits a decomposition in direct sum, $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, where $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}_2$. An element $x \in V$ is called *homogeneous of degree* $\bar{i}$ if it is an element of $V_{\bar{i}}, \bar{i} \in \mathbb{Z}_2$. In particular, the elements of $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) are also called *even* (resp. *odd*). For a homogeneous element $x \in V$ we denote $|x|$ the degree of x (either $\bar{0}$ or $\bar{1}$).

Definition 1. A *Lie superalgebra* is a $\mathbb{Z}_2$-graded vector space $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$, with an even bilinear commutation operation (or "supercommutation") $[\cdot, \cdot]$, which for an arbitrary homogeneous elements x, y, z satisfies the conditions

1. $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta},\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$,

2. $[x,y]=-(-1)^{|x||y|}[y,x]$,

3. $(-1)^{|x||z|}[x,[y,z]]+(-1)^{|x||y|}[y,[z,x]]+(-1)^{|y||z|}[z,[x,y]]=0$ *(super Jacobi identity).*

In general, the *descending central sequence* and *derived sequence* of a Lie superalgebra $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\bar 0}\oplus\mathcal{L}_{\bar 1}$ are defined in the same way as for Lie algebras,consequently:

$$\mathcal{L}^1=\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{k+1}=[\mathcal{L}^k,\mathcal{L}],\quad \text{and}\quad \mathcal{L}^{[1]}=\mathcal{L},\ \mathcal{L}^{[k+1]}=[\mathcal{L}^{[k]},\mathcal{L}^{[k]}],\ k\geq 1.$$

Definition 2. A Lie superalgebra is called nilpotent (respectively, solvable) if there exists $s\in\mathbb{N}$ (respectively, $k\in\mathbb{N}$) such that $\mathcal{L}^s=0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[k]}=0$.)

A superderivation of degree s of a Lie superalgebra $\mathcal{L}$, $s\in\mathbb{Z}_2$, is an endomorphism $D\in End(\mathcal{L})_s$ with the property

$$D(ab)=D(a)b+(-1)^{s\cdot dega}aD(b), \text{for all } x,y\in\mathcal{L}.$$

Let consider the following nilpotent Lie superalgebras [1]:

$$L^{30}_{(2,3)}:\begin{cases}[y_1,y_1]=x_1,\\ [y_2,y_2]=x_2,\\ [y_3,y_3]=x_1+x_2,\end{cases}\qquad L^{31}_{(2,3)}:\begin{cases}[y_1,y_1]=x_1,\\ [y_2,y_2]=x_2,\\ [y_3,y_3]=-(x_1+x_2),\end{cases}$$

$$L^{32}_{(2,3)}:\begin{cases}[y_1,y_1]=x_1,\\ [y_2,y_2]=x_2,\\ [y_3,y_3]=x_1-x_2,\end{cases}\qquad L^{27}_{(3,2)}:\begin{cases}[x_1,x_2]=x_3,\\ [x_1,y_1]=y_2,\\ [y_1,y_1]=x_3.\end{cases}$$

Proposition 1. Any even superderivations of the algebras $L^{30}_{(2,3)}$, $L^{31}_{(2,3)}, L^{32}_{(2,3)}$ and $L^{27}_{(3,2)}$ have the following matrix forms, respectively:

$$Der(L^{30}_{2,3})_0:\begin{pmatrix}2\alpha_{1,1}&0&0&0&0\\0&2\alpha_{2,2}&0&0&0\\0&0&\alpha_{1,1}&0&0\\0&0&0&\alpha_{2,2}&0\\0&0&0&0&\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2}\end{pmatrix};$$

$$Der(L^{31}_{2,3})_0:\begin{pmatrix}2\alpha_{1,1}&0&0&0&0\\0&2\alpha_{2,2}&0&0&0\\0&0&\alpha_{1,1}&0&0\\0&0&0&\alpha_{2,2}&0\\0&0&0&0&-(\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2})\end{pmatrix};$$

$$Der(L^{32}_{2,3})_0:\begin{pmatrix}2\alpha_{1,1}&0&0&0&0\\0&2\alpha_{2,2}&0&0&0\\0&0&\alpha_{1,1}&0&0\\0&0&0&\alpha_{2,2}&0\\0&0&0&0&\alpha_{1,1}-\alpha_{2,2}\end{pmatrix};$$

$$Der(L^{27}_{3,2})_0:\begin{pmatrix}\alpha_{4,4}-\alpha_{2,2}&\alpha_{1,2}&\alpha_{1,3}&0&0\\0&\alpha_{2,2}&\alpha_{2,3}&0&0\\0&0&2\alpha_{4,4}&0&0\\0&0&0&\alpha_{4,4}&\alpha_{4,5}\\0&0&0&0&3\alpha_{4,4}-\alpha_{2,2})\end{pmatrix}.$$

Theorem 1. Any maximal solvable Lie superalgebras with nilradicals $L^{30}_{(2,3)}$, $L^{31}_{(2,3)}, L^{32}_{(2,3)}$ and $L^{27}_{(3,2)}$ are isomorphic the following Lie superalgebras, respectively:

$$R(L^{30}_{(2,3)}):\begin{cases}[x_1,z_1]=2x_1, & [x_2,z_2]=2x_2,\\ [y_1,z_1]=y_1, & [y_2,z_2]=y_2,\\ [y_3,z_1]=y_3, & [y_3,z_2]=y_3,\end{cases}\qquad R(L^{31}_{(2,3)}):\begin{cases}[x_1,z_1]=2x_1, & [x_2,z_2]=2x_2,\\ [y_1,z_1]=y_1, & [y_2,z_2]=y_2,\\ [y_3,z_1]=-y_3, & [y_3,z_2]=-y_3,\end{cases}$$

$$R(L^{31}_{(2,3)}):\begin{cases}[x_1,z_1]=2x_1, & [x_2,z_2]=2x_2,\\ [y_1,z_1]=y_1, & [y_2,z_2]=y_2,\\ [y_3,z_1]=y_3, & [y_3,z_2]=-y_3,\end{cases}\qquad R(L^{32}_{(2,3)}):\begin{cases}[x_1,z_1]=2x_1, & [x_1,z_2]=-x_2,\\ [x_3,z_1]=2x_3, & [x_2,z_2]=x_2,\\ [y_1,z_1]=y_1, & [y_2,z_2]=3y_2.\\ [y_2,z_1]=3y_2. & \end{cases}$$

Bibliography

1. **Ahmad S. Hegazi,** *Classification of Nilpotent Lie Superalgebras of Dimension Five. II.* International Journal of Theoretical Physics, Vol. 38, No. 10, 1999.

UDK 517.55

Veyershtrass ko'phadlari haqida

Qodirova M.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, 100174, Toshkent, O'zbekiston

Annotatsiya: *Ushbu ishda $n=1$ bo'lganda $f(z,w)\not\equiv 0$ bo'lgan $f(z,w)$ funksiyani undan $f(z^0,w)\not\equiv 0$ shartning bajarilishini talab qilmasdan ushbu*

$$f(z,w)=\Big[c_0(z)(w-w^0)^m+c_1(z)(w-w^0)^{m-1}+...+c_m(z)\Big]\,\varphi(z,w)$$

shaklda tasvirlash mumkinligi ko'rsatilgan. $n>2$ bo'lganda esa $f(z^0,w)\not\equiv 0$ shartni talab qilmasdan funksiyani har doim ham yuqoridagi ko'rinishda tasvirlash mumkin emasligi ta'kidlanib, Osgud misoli keltirilgan.

Kalit so'zlar: *Veyershtrass ko'phadi, Osgud misoli, algebraik funksiya, Veyershtrass teoremasi, golomorf funksiya.* Ushbu ishda biz o'zimizga qulay bo'lgan $(z,w)=(z_1,z_2,...,z_n,w)\in\mathcal{C}^{\backslash+\infty}$ belgilashdan foydalanamiz.

Bizga yaxshi ma'lum bo'lgan Veyershtass teoremasi shuni ta'kidlaydiki, agar $f(z,w)$ funksiya $(z^0,w^0)\in\mathbb{C}^n_z\times\mathbb{C}_w$ nuqta atrofida golomorf va $f(z^0,w^0)=0$, ammo $f(z^0,w)\not\equiv 0$ bo'lsa, u holda u biror $U=V(z^0,r)\times W(w^0,r)\subset\mathbb{C}^n_z\times\mathbb{C}_w$ polidoirada quyidagicha tasvirlanadi:

$$f(z,w)=\Big[(w-w^0)^m+c_1(z)(w-w^0)^{m-1}+...+c_m(z)\Big]\,\varphi(z,w),\tag{1}$$

bu yerda $m\geq 1-f(z^0,w)$ funksiyaning $w=w^0$ nuqtadagi nolining tartibi, $c_k(z)$ lar V da golomorf funksiyalar $(k=1,...,m)$, $c_k(z^0)=0$ va $\varphi(z,w)$ – U da glomorf funksiya bo'lib, $(z,w)\in U$ bo'lganda $\varphi(z,w)\neq 0$. $(w-w^0)^m+c_{m-1}(z)(w-w^0)^{m-1}+...+c_0(z)$ psevdoko'phad Veyershtrass ko'phadi deyiladi.

Odatda, $f(z,w)$ funksiya $(z^0,w^0)\in\mathbb{C}^n_z\times\mathbb{C}_w$ tayin kritik nuqtada analitik bo'lsin deb faraz qilinadi. V.I.Arnold tomonidan $f(z^0,w)\not\equiv 0$ shart qaralayotgan funksiyaning cheki karrali yakkalangan kritik nuqtaning analitik deformatsiyasi bo'lishiga ekvivalentligi ko'rsatilgan [1]. Biroq, tadbiqiy masalalarda ko'pincha yakkalanmagan kritik nuqtalarga ega bo'lgan funksiyalarga duch kelinadi. Garchi $f(z,w)\not\equiv 0$ bo'lsa ham, $f(z^0,w)\not\equiv 0$ shart bajarilishini talab qilmagan holda, Veyershtrass teoremasining analogi o'rinli bo'lishini kutishimiz tabiiy. Bu tasdiq quyidagi-cha bo'lgan bo'lardi: (z^0, w^0) nuqtaning biror $U = V \times W$ atofida $f(z, w)$ funksiya ushbu

$$f(z,w) = \left[c_0(z)(w - w^0)^m + c_1(z)(w - w^0)^{m-1} + ... + c_m(z)\right]\varphi(z,w), \tag{2}$$

ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda $c_k(z)$ funksiyalar V da golomorf $(k = 0, ..., m)$, φ esa V da golomorf va $\forall(z, w) \in U$ uchun $\varphi(z, w) \neq 0$. Bunday natija ostsillyator integrallarni o'rganishda va analitik gipertekisliklar bilan assotsirlangan maksimal operatorlarni baholashda foydali bo'lgan bo'lardi.

$n = 1$ bo'lganda (2) munosabat o'rinli bo'ladi, chunki bu holda (z^0, w^0) nuqtaning $U = V \times W$ atrofida $f(z, w)$ funksiya $f(z, w) = (z - z^0)^j \psi(z, w)$ ko'rinishida tasvirlanadi, bu yerda $j \geq 0$, $\psi(z, w) \in \mathcal{O}(U)$, $\psi(z_0, w) \not\equiv 0$. So'ngra, $\psi(z, w)$ (1) ko'rinishda ifodalab, (2) munosabatni hosil qilamiz.

Biroq, Osgudning mashhur misoli shuni ko'rsatadiki (qarang, masalan [2]), $n > 1$ bo'lganda $f(z^0, w) \not\equiv 0$ shartni talab qilmasdan funksiyani har doim ham (2) ko'rinishda tasvirlash mumkin emas.

Osgud misoli. $|\zeta| < 1$ doirada $q(\zeta) = \zeta + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \zeta^{k!}$ transsendent funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $|\zeta| = 1$ aylananing har bir nuqtasida maxsuslikka ega. $q'(0) = 1 \neq 0$ bo'lganligi uchun 0 nuqtaning biror atrofida $w = q(\zeta)$ funksiyaning teskarisi mavjud: $\zeta = q^{-1}(w)$.

$f(z_1, z_2, w) = z_1 q^{-1}(w) - z_2$ deb olamiz. U holda f funksiya $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$ nuqtaning biror atrofida golomorf va $f(0, 0, w) \equiv 0$ bo'ladi va aynan u (2) ko'rinishda tasvirlanmaydi.

Teskarisini faraz qilamiz, $(0, 0, 0)$ nuqtaning biror atrofida funksiya (2) ko'rinishda tasvirlansin:

$$f(z,w) = \left[c_0(z)w^m + c_1(z)w^{m-1} + ... + c_m(z)\right]\varphi(z,w), \ \varphi \neq 0.$$

U holda $f(z, w) = 0$ tenglama algebraik yechimga ega, $c_0(z)w^m + c_1(z)w^{m-1} + ... + c_m(z) = 0$. Ammo uning yechimi $w = q\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ — algebraik emas, chunki u $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1$ konusning nuqtalariga davom etmaydi.

Adabiyotlar

1. Арнольд В.И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С.М. Особенности диффернцируемых отображений, ч. 1. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982.
2. Sadullaev A. On Weierstrass polynomials // Ann. Pol. Mat. – 2019. – V.123. – pp. 473-479.

УДК 517.98

Kommutativ C*-algebralar.

Quziboyev S.H., Jo'rayev A.U.
O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston.
quziboyevsiroj@gmail.com

C*-algebraga quyidagicha ta'rif beramiz.

Ta'rif 1. $C^\star$-algebra deganda quyidagi algebraik amallarga ega bo'lgan va quyidagi xossalarni qanoatlantirgan, bo'sh bo'lmagan, A to'plamga aytiladi:

1) qo'shish amali kommutativ va assotsiativdir;

2) ko'paytirish amali assotsiativdir;

3) kompleks songa ko'paytirish amali kiritilgan;

4) involyutsiya $a \to a^\star$ ($(a^\star)^\star = a$ sharti bilan) amali kiritilgan;

5) ko'paytirishning ikkala amali ham qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lib ixtiyoriy a, b uchun:$(ab)^\star = a^\star b^\star$, $(\lambda a + b)^\star = \overline{\lambda} a^\star + b^\star$ va $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ shartlar bajariladi;

6)A normaga ega bo'lib, to'la fazo (ya'ni Banah fazosi) va

$$\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\| \ ,$$
$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \ ,$$
$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

shartlar bajariladi;
7) ixtiyoriy a uchun: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ shart bajariladi.

Endi C*-algebradagi bazi tushunchalarni keltiramiz:

1. a elementni o'z-o'ziga qo'shma deymiz, agar $a^\star = a$.
2. a elementni normal deymiz, agar $a^*a = aa^*$.
3. p elementni proektor deymiz, agar $p^2 = p = p^\star$.
4. u elementni unitar deymiz, agar $u^*u = uu^* = 1$ (bunda A birlik elementli deb faraz qilamiz).
5. u elementni izometriya deymiz, agar $u^*u = 1$.
6. u elementni qisman izometriya deymiz, agar u^*u element proektor bo'lsa.
7. a -ni musbat element deymiz, agar $a = b^*b$ kabi b element bor bo'lsa va $a \geq 0$ kabi yozamiz.

Misol 1. H – kompleks Gilbert fazosi va $B(H)$ – H-da aniqlangan barcha chiziqli chegaralangan operatorlar fazosi bo'lsin. Operatorlarning standart yig'indisi va songa ko'paytirish amallariga ko'ra chiziqli fazo bo'lib, operatorlarning superpozitsiyasi orqali kiritilgan ko'paytirish amaliga ko'ra algebra bo'ladi. Involutsiya esa operatorning qo'shmasi orqali, ya'ni $< a^*\xi, \eta > = < \xi, a\eta >$ kabi aniqlanadi. Norma esa $\|a\| = \sup\{\|a\xi\|, \ \xi \in H, \|\xi\| \leq 1\}$ kabi aniqlanib, unga ko'ra $B(H)$ $C^\star$-algebrasi bo'ladi.

Misol 2. n - natural soni uchun $M_n(\mathbb{C})$ – n-chi tartibli barcha matritsalar fazosi bo'lsin. Matritsalar ustidagi odatiy algebraik amallarga ko'ra bu fazo algebra bo'ladi. Involutsiya esa matritsani transponirlash va barcha elementlariga qo'shmasini qo'llash orqali kiritiladi. Norma $\|a\| = \sup\{\|a\xi\|_2, \xi \in H, \|\xi\|_2 \leq 1\}$ kabi aniqlanib, unga ko'ra $M_n(\mathbb{C})$ – C*-algebrasi bo'ladi.

Misol 3. X – kompakt Hausdorff fazosi va $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \ \mid f$ – uzluksiz$\}$ bo'lsin. Qo'shish, songa ko'paytirish va elementlarni ko'paytirish amallari nuqtali amal bo'lib, $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|, \ x \in X\}$ kabi aniqlangan normaga ko'ra $C(X)$ birlik elementli kommutativ C*-algebrasi bo'ladi. Agar X – lokal kompakt Hausdorff fazosi bo'lib,

$$C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \quad | \ f \text{ – uzluksiz, cheksizlikda nolha teng}\}$$

bo'lsa, bu algebra kommutativ $C^\star$-algebrasi bo'ladi. Bunda birlik element mavjud bo'lishi uchun X – kompakt bo'lishi zarur va yetarlidir.

A – kompleks algebra va $M(A)$ – A-ni $\mathbb{C}$ ga akslantiruvchi nol bo'lmagan gomomorfizmlar to'plami bo'lsin.

Tasdiq. Agar A birlik elementli kommutativ C*-algebra bo'lsa, $\forall\varphi \in M(A)$ uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1) $\varphi(a)$ soni a-ning spektrida yotadi;
2) φ chegaralangan va $\|\varphi\| = 1$;
3) barcha a uchun: $\varphi(a^\star) = \overline{\varphi(a)}$.

Aslida biz $X = M(A)$ – kompakt Hausdorff fazosi ekani va A algebrasi $C(X)$ ga izomorf ekanligini ko'rsatamiz. Bunda $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ kabi aniqlangan $a \to \widehat{a}$ akslantirish aytilgan izomorfizmdir, ya'ni quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar A birlik elementli kommutativ C*-algebrasi bo'lsa, $M(A)$ – kompakt Hausdorff fazosi bo'lib,

$$\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$$

kabi aniqlangan $a \to \widehat{a}$ akslantirish A va $C(M(A))$ algebralar orasidagi izometrik *-izomorfizm bo'ladi.

Adabiyotlar

1. **Sakai S.** *$C^\star-$ algebras and $W^\star-$ algebras.* Berlin: Springer. - 1971. - IX - 256 p.
2. **Takesaki M.** *Theory of operator algebras.* I,II,III.Berlin: Springer. - 1979. - VIII - 415 p.,518 p,548 p.
3. **Брателли У., Робинсон Д.** *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* М.: Мир. - 1982. - 511 с.
4. **Диксмье Ж.** *$C^\star-$ алгебры и их представления.* М.: Наука. - 1974. - 400 с.
5. **Li B.R.** *Introduction to Operator Algebras.* World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. Singapore, - 1992. - 738 p.
6. **Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M.** *Jordan, Real and Lie structures in operator algebras.* Kluwer Academic Publishers, MAIA - 1997. - Vol - 418 p,235 p.

УДК 512.554.38

Nilradikali Abel algebrasi bo'lgan yechiluvchan Leybnits algebrasining lokal differensiallashi

Ravshanova Kh.Z.
National University of Uzbekistan
apamonam@gmail.com

Lokal differensiallash tushunchasi SH.A.Ayupov, K.K Xudoyberganovlar ishlarida Li algebralar uchun kiritilib [1], ushbu ishda sodda Li algebrasining lokal differensiallashi oddiy ma'noda differensiallash bo'lishi isbotlangan. Leybnits algebralari Li algebralarining umumlashmasi hisoblanib fransuz matematigi L Loday tomonidan fanga kiritilgan [2]. Leybnits algebralari Li algebrasining umumlashmasi bo'lganligi uchun, Li algebralar nazariyasida ma'lum bo'lgan bir qancha natijalar Leybnits algebrasi uchun davom ettiriladi.

Ta'rif 1. Agar F maydon ustida berilgan L algebrada $\forall x, y, z \in L$ elementlar uchun ushbu

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y].$$

ayniyat bajarilsa, u holda L algebra *Leybnits algebrasi* deyiladi.

Endi algebraning differensiallashi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif 2. L Leybnits algebrasi va $d : L \to L$ chiziqli akslantirish berilgan bo'lsin. Agar d chiziqli akslantirish uchun

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)], \quad \forall x, y \in L,$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu chiziqli akslantirish L Leybnits algebrasining $differensiallashi$ deyiladi.

Ta'rif 3. $\triangle : L \to L$ chiziqli akslantirish bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in L$ element uchun shunday $d_x : L \to L$ differensiallash mavjud bo'lib $\triangle(x) = d_x(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\triangle$ chiziqli akslantirish Leybnits algebrasining $lokal\ differensiallashi$ deyiladi.

Quyidagi 5 o'lchamli yechiluvchan Leybnits algebrasini qaraylik [3]:

$$L^3 : \begin{cases} [e_1, x_1] = e_1 + e_3, & [e_2, x_2] = e_2, \\ [e_1, x_2] = e_3, & [e_3, x_1] = e_3. \end{cases}$$

Tasdiq 1. L yechiluvchan Leybniz algebrasining ixtiyoriy differensiallashlari matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$Der(L^3): \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Endi ushbu algebraning lokal differerensiallashlarini tahlil qilaylik.

Tasdiq 2. L yechiluvchan Leybniz algebrasining ixtiyoriy lokal differensiallashi matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\triangle: \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Teorema 1. L yechiluvchan Leybniz algebrasining ixtiyoriy local differensiallashi differensiallash bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Shavkat Ayupov, Karimbergen Kudoyberganov. Local derivation on finitedimensional Lie algebras, Linear algebra and its applications. -2016(493), -P. 381-398.
2. R.K. Gaybullaev, A. Kh. Khudoyberdiyev, K. Pohl. Classification of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical and $k-1$ dimensional extension, Communications in Algebra -2020. -48. -7. P. 3061-3078.
3. Loday J.-L., Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz, L'Enseignement Mathematique. -1963, vol. 39(2), -P. 269-293.

УДК 512.554.38

Derivation spaces of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical

Rejamatov X.F.[1],Ravshanova Kh.Z.[2]
National University of Uzbekistan[1,2];
rezamatovhasan@gmail.com[1], apamonam@gmail.com[2]

In the paper [1], solvable Leibniz algebras with abelian nilradical and $k-1$ dimensional extension are classified. In this thesis, we show all derivation spaces of some solvable Leibniz algebras classified in the paper [1].

Definition 1. An algebra L over a field $\mathbb{F}$ is said to be a Leibniz algebra if the following identity

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

holds true for any $x, y, z \in L$, where $[\cdot,\cdot]$ stands for the product in L.

If $[x,x] = 0$ for any element of Leibniz algebra L, then the Leibniz identity consides with the Jacobi identity. Therefore, a Leibniz algebra is a "noncommutative" analogue of a Lie algebra.

Definition 2. A linear map $d\colon L \to L$ of an algebra $(L,[-,-])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in L$, the following derivation rule

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)]\,.$$

The set of all derivations of L is denoted it by $\mathrm{Der}(L)$.

Let consider the following $2k-1$ dimensional solvable Leibniz algebras [1]:

$$L_6(\beta_i):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [e_k,x_j]=\beta_j e_k, & 1\le j\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i & 1\le i\le k-1,\end{cases}\quad L_{10}(\delta_{i,j}):\begin{cases}[e_i,x_i]=e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,e_i]=-e_i, & 1\le i\le k-1,\\ [x_i,x_j]=\delta_{ij}e_k, & 1\le i,j\le k-1.\end{cases}$$

Now we give all derivation spaces of the algebra $L_6(\beta_i)$.

Proposition 1. If $\beta_i=0,\ 1\le i\le k-1$, then any derivation of the algebra $L_6(\beta_i)$ has the following matrix form:

$$Der(L_6(0))\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k & 0 & \dots & 0\\ \phi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_{k-1} & \sigma_{k-1} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix};$$

while if $\beta_i\neq\{0,1\}$, then any derivation of the algebra $L_6(\beta_i)$ has the following matrix form:

$$Der(L_6(\beta_i)):\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k & 0 & \dots & 0\\ \phi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

And by using the following proposition we show matrix form of any derivation of the algebra $L_{10}(\delta_{i,j})$.

Proposition 2. If $\delta_{i,j}=0,\ 1\le i,j\le k-1$, then any derivation of the algebra $L_{10}(\delta_{i,j})$ has the following matrix form:

$$Der(L_{10}(0))\begin{pmatrix}A_1^1+D_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_2^2+D_2^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & A_{k-1}^{k-1}+D_{k-1}^{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_k^k & 0 & \dots & 0\\ C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & D_1^1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & C_{k-1}^{k-1} & 0 & 0 & \dots & D_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix};$$

while if $\delta_{i,j} \neq 0,\ 1 \leq i, j \leq k-1$, then any derivation of the algebra $L_1 0(\delta_{i,j})$ has the following matrix form:

$$Der(L_{10}(\delta_{i,j})) : \begin{pmatrix} A_1^1 + D_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^2 + D_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & D_1^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & D_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{k-1}^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Bibliography

1. **R.K. Gaybullaev, A. Kh. Khudoyberdiyev, K. Pohl.** *Classification of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical and $k-1$ dimensional extension*, Communications in Algebra -2020. -48. -7. P. 3061-3078.

UDK 517.5

Idealga tegishlilik masalasi va uni reduksiyalash orqali yechish

Ro'zimuradov X.X.[1], **Sherboyeva D.X.**[2]
[1]Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston; rxx1961@gmail.com
[2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; sherboyevadildora@mail.ru

Bizga $\mathbb{K}[x_1.x_2, \dots, x_n]$ −ko'phadlar halqasi va $J \lhd \mathbb{K}[x_1.x_2, \dots, x_n]$ ideal o'zining $J = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ bazisi bilan berilgan bo'lsin [1-2]. Shunday algoritm topish kerakki, chekli qadamlardan keyin oldindan berilgan $h(x_1, x_2, \ \dots, x_n) \in J$ ko'phad uchun Shunday $r_1(x_1, x_2, \dots x_n)$, $\dots$, $r_m(x_1, x_2, \dots x_n)$ ko'phadlar topilib, $h = f_1 r_1 + \dots f_m r_m$ tenglik o'rinli bo'lsin.
Ushbu masalani yechish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz [1,3]:

Bizga $P-$ko'phad berilgan bo'lsin. Ushbu ko'phadni oldindan aniqlangan tartiblash yordamida ikki qismga ajratamiz: $P = P_B + P_Q$. Bunda $P_B - P$ ko'phadning bosh monomi, $P_Q - P$ ko'phadning qolgan hadlari. Masalan, $P = 2x^2y^3z + 3x^2y^2z - 4y^3z^4$ ko'phad $x > y > z$ leksik tartiblash bilan berilgan bo'lsin, u holda $P_B = 2x^2y^3z$ va $P_Q = 3x^2y^2z - 4y^3z^4$.

Reduksiya jarayoni.
Faraz qilaylik, berilgan h ko'phadning bosh monomi $f_1, \dots f_m$ bazislardan birortasining bosh monomiga bo'linsin. U holda, $h_B = f_{i_B}Q, \quad i = 1,..m$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $h = h_B + h_Q = f_{i_B}Q + h_Q = \left(f_i - f_{i_Q}\right)Q + h_Q = f_iQ + \left(-f_{i_Q}\right)Q + h_Q$ tenglik kelib chiqadi. Quyidagicha belgilash olamiz: $h_1 = h - f_iQ = \left(-f_{i_Q}\right)Q + h_Q$.

Quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema. h ko'phadning J idealga tegishli bo'lishi uchun h_1 ko'phadning J idealga tegishli bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $h \in (f_1, \dots f_m) \Leftrightarrow h_1 \in (f_1, \dots f_m)$

Isbot. Faraz qilaylik, $h_1 \in (f_1, \dots f_m)$ bo'lsin. U holda, $h = h_1 - (-f_i)Q$ tenglikka ko'ra $h \in (f_1, \dots f_m)$ ekanligi kelib chiqadi. Yoki aksincha $h \in (f_1, \dots, f_m)$ bo'lsa, $h_1 = h - f_iQ$ tenglikdan $h_1 \in (f_1, \dots f_m)$ bo'ladi.

Ushbu teorema ko'rsatadiki, h ko'phadning J idealga tegishli ekanligini ko'rsatish uchun h_1 ko'phadning shu idealga tegishli ekanligini ko'rsatish yetarli. Xuddi Shunday h_1 ko'phadning J idealga tegishli ekanligini bilish uchun uni $h_2 = h_1 - f_i Q_1$, ko'phadga almashtirib(bunda $h_{1B} = f_{iB} Q_1$), h_2 ko'phadni J idealga tegishli ekanligini tekshirish yetarli va h.k. Ushbu h ko'phadni h_1 ko'phadga, h_1 ko'phadni $h_2$ko'phadga va h.k. almashtirishga *reduksiya jarayoni* deyiladi. Agar qandaydir chekli reduksiyadan keyin h ko'phad nolga aylansa, demak, h ko'phad ushbu idealga tegishli bo'ladi. Chunki, nol ixtiyoriy idealga tegishli.

1-misol. Agar $x_1 > x_2 > x_3$ leksik tartiblash berilgan bo'lsa, quyidagi $h = -x_1^2x_2^2 - x_1^3x_2 - x_2x_3^2$ ko'phad $(f_1, f_2) = (x_1 + x_2,\ x_2)$ idealga tegishlimi?

Yechimi. Misol shartiga ko'ra $h_B = -x_1^3x_2$ va $f_{1_B} = x_1, \quad f_{2_B} = x_3$. Bundan esa $h_B = f_{1_B} \bullet \left(-x_1^2x_2\right)$ ekanligini topamiz.

1-reduksiya. $h_1 = h - \left(-x_1^2x_2\right) f_1 = -x_1^2x_2^2 - x_1^3x_2 - x_2x_3^2 + x_1^2x_2\left(x_1 + x_2\right) = -x_2x_3^2$

$h_{1B} = -x_2$, bu esa $f_{2_B} = x_2$ ga bo'linadi: $h_{1_B} = f_{2B} \bullet (-1)$

2-reduksiya. $h_2 = h_1 - (-1) f_2 = -x_2 + x_2 = 0.$

Ko'rinib turibdiki, h ko'phad chekli reduksiyadan keyin nolga aylandi. Demak, $h \in (f_1, f_2)$. Agar h chekli qadamdan keyin nolga aylanmasachi, qaysidir qadamdan keyin biror h_j ning bosh monomi $f_1, \ldots f_m$ bazislar bosh monomlari birortasiga bo'linmay qolsachi? U holda h ni ushbu idealga tegishli emas deb ayta olamizmi?

Ushbu savollarga aniqlik kiritish uchun *Gryobner bazislari* tushunchasini kiritamiz:

1-ta'rif. Agar $h \in J$ ko'phad $f_1, \ldots f_m$ bazislar yordamida reduksiyalash natijasida nolga aylansa, $f_1\ , \ldots, f_m$ bazis $J = (f_1, \ldots f_m)$ idealning **Gryobner bazisi** deyiladi.

Ushbu ta'rifga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni ham keltirish mumkin:

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $h \in J$ ko'phadning bosh monomi h_B berilgan $f_1, \ldots f_m$ bazislarning birortasining bosh monomiga bo'linsa, u holda $f_1, \ldots f_m$ basis $J = (f_1, \ldots f_m)$ idealning **Gryobner bazisi** deyiladi.

2-misol. Quyidagi $J = \left(x_1^2 + x_2^2 - x_3 + x_4^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)$ ideal berilgan. Ushbu ideal uchun $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3 + x_4^3, \quad f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ deb olsak, $h = f_1 - f_2 = -x_3 - x_3^2 + x_4^3 - x_4^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 - x_3 + x_4^3\right) - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) \in J$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, $h \in J$. Lekin, $h_B = -x_3^2$ va $f_{1_B} = x_1^2, \quad f_{2_B} = x_1^2$ bo'lgani uchun, h_B monom f_{1_B} va f_{2_B} larning birortasiga bo'linmaydi. Demak, f_1, f_2 bazis *Gryobner bazisi emas.*

Tegishlilik masalasini yechimini aniqlash.

Faraz qilaylik, bizga J ideal va ushbu idealning Gryobner bazisi berilgan bo'lsin. $h-$biror ko'phad. h ko'phad J idealga tegishli ekanligini aniqlash uchun ushbu ko'phadni berilgan Gryobner bazislari yordamida barcha mumkin bo'lgan reduksiyalashlarni amalga oshiramiz. Agar chekli reduksiyadan keyin h ko'phad nolga aylansa, ushbu ko'phad J idealga tegishli bo'ladi. Agar qandaydir chekli reduksiyadan keyin h ko'phad bosh monomi berilgan bazislarning birortasining ham bosh monomiga bo'linmasa, h ko'phad J idealga tegishli bo'lmaydi. Gilbertning bazislar haqidagi teoremaga ko'ra, ixtiyoriy idealning Gryobner bazisi mavjud ekanligini isbotlash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. **Malik D.S., Morderson John N., Sen M.K.** *Fundamentals of abstract algebra* WCB. McGraw-Hill. Boston, 1997.

2. **Кокс Д., Литтл Дж.** *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры* Пер. с англ. — М.: Мир, 2000. —687с, ил.

3. **Аржанцев И.В.** *Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений* МЦНМО, Москва. 2003.

4. **Ro'zimuradov X.X.** *Nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy nazariyasi. Gryobner bazislari* 70540101 - Matematika (yo'nalishlar bo'yicha) mutaxassisligi magistrantlari uchun o'quv qo'llanma. Samarqand, 2022 y. 177 bet.

UDC 517.5

On an Upper Estimate for the Norm of the Basis Vectors of the Lattice

Ruzimuradov Kh.Kh.[1], Umirzoqov N.S.[2], Poyanova N.J.[3]
[1,2]Samarkand State University; rxx05@mail.ru
[3]Termez State University; pnigora197@gmail.com

1. Statements of Main Results

The elements X of the space $\mathbb{R}^n$ will be called points or vectors and written as columns, so that $X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Consider lattices $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ with matrix basis $A = (a_{ij})$ and volume $d(\lambda) = \det A$.

Let Λ be an unimodular point lattice in $\mathbb{R}^n$, i.e., $det\Lambda = 1$. Let $N(X)$ denote the absolute value of the product of coordinates of a point X^T, $N(X) = |x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n|$, and let $N(\Lambda) = \mu$ denote the homogeneous minimum of Λ [1]:

$$\mu = N(\Lambda) = inf_{X\in\Lambda, \quad X\neq 0} N(X).$$

Definition. *A lattice Λ is called admissible if* $\mu = N(\Lambda) > 0$.

A non-zero lattice vector of minimum length is called its shortest vector. It is known that the problem of finding the minimum length vector is related to estimates for the homogeneous minimum of the lattice [4, 5].

In this paper is considered the maximum or infinite norm (the Chebyshev norm) : if $X \in \mathbb{R}^n$, then $\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$.

In this paper, we have obtained an upper estimate for the norm of the basis vectors of the lattice Λ in terms of the homogeneous minimum of the lattice μ.

The following theorem is proved.

Main Theorem. *Let Λ a lattice with $det\Lambda = 1$ and $\mu = N(\Lambda) > 0$ be given. Then there is a constant $C(\mu)$depending only on μ, such that for $\Lambda = A\mathbb{Z}^n$ the inequality $\|A\| \leq C(\mu)$ is true.*

2.Auxiliary Assertions

To prove Main theorem, we use the following Remark 1 and Lemma 1.

Remark 1. There is a constant V_0 such that a rectangular parallelepiped with volume V_0, whose sides are parallel to the coordinate axes, does not contain a lattice point Λ.

Indeed, since the length of any non-zero vector of the lattice Λ is not less than $\mu^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$, then the parallelepiped with volume $V_0 = \mu$ does not contain a point of the lattice Λ.

Lemma 1. Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

If the following inequalities hold for the elements of the matrix A

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1, k\neq i}^{n} |a_{ik}|,$$

then $detA \neq 0$.

3.Conclusion

In this paper, we have obtained an upper estimate for the norm of the basis vectors of the lattice Λ in terms of the homogeneous minimum of the lattice μ. Such estimates are used in the shortest vector problems and closest vector problems on lattices. In this paper, we essentially use the geometric construction of the basis of an admissible lattice and some properties of matrix arithmetic. For lattices of small dimensions, there are several algorithms for estimating the length of the shortest lattice vector, but in the n-dimensional case, there are only estimates by Minkowski and some other authors [2-3]. We obtain a new estimate for the norm of basis vectors, through which we can estimate the length of the shortest vector in the n-dimensional case.

Referenses

1. **J.W. Cassels.** An Introduction to the Geometry of Numbers. // Second Printing. Springer- Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971..
2. **A.V. Malyshev** The main notions and theorems of the geometry of numbers Chebyshevskii sbornik, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 43–73.
3. **Ruzimuradov, Kh. Kh.** Fundamental rectangles of admissible lattices (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 204 (1993), Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 11, 82–89, 168–169; translation in J. Math. Sci. 79 (1996), no. 5, 1320–1324.
4. **Ruzimuradov Kh.Kh.** TOn the problem of counting the number of points of algebraic lattices in rectangles Uzbek Mathematical Journal, 2008, No. 4, pp. 116-124.
5. **Ruzimuradov Kh.Kh., Ismatova L., Poyanova N.** On an Estimate Related to the Homogeneous Minimum of the Admissible Lattice. Proceedings of International Conference on Mathematics and its Scientific Applications (ICMSA-2022). Sathyabama Institute of Science and Technology, Chennai, India, 3-4 March, 2022.

УДК 512.554.1

On extensions of solvable Leibniz algebras with null-filiform and filiform nilradicals

Sheraliyeva S., Khudoyberdiyev A.Kh.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.
abdiqodirovna@mail.ru, khabror@mail.ru

The notion of a Leibniz algebra was introduced by Loday [1] , which is a noncommutative generalization of a Lie algebra. Central extensions play an important role in the theory of non-associative algebras. Central extensions of Leibniz algebras are studied from different aspects [2, 3]. In this work, we consider a one-dimensional extensions of solvable Leibniz algebra with null-filiform and naturally gradeded filiform nilradicals.

Definition 1. An algebra L over a field K is called a Leibniz algebra if its bilinear operation $[\cdot,\cdot]$ satisfies the identity:

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]];$$

for all $x, y, z, \in L$. In fact, this is the definition of right Leibniz algebra.

For an arbitrary Leibniz algebra L we define the derived and central series as follows:

$$L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1,$$

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1.$$

Definition 2. An n-dimensional Leibniz algebra L is called solvable (nilpotent) if there exist $s \in N$ $(k \in N)$ such that $L^{[s]} = 0$ $(L^k = 0)$. Such minimal numbers are called index of solvability and nilpotency, respectively.

Let L and $\widetilde{L}$ be two Leibniz algebras over a field K. The Leibniz algebra $\widetilde{L}$ is said to be an extension of L if there is a Leibniz algebra exact sequence

$$0 \to V \to \widetilde{L} \to L \to 0,$$

where V is a trivial Leibniz algebra.

Defitition 3. Let L be a Leibniz algebra and V a vector space over a field K. A bilinear map $\theta : L \times L \to V$ satisfying:

$$\theta([x, y], z) = \theta([x, z], y) + \theta(x, [y, z]),$$

where $x, y, z \in L$ is called a Leibniz 2-cocycle. We indicate the entire set of all 2-cocycles by $ZL^2(L, V)$.

Consider a vector space $L_\theta = L \oplus V$. Define a multiplication $[\cdot, \cdot]$ on L_θ by

$$[x_1 + v_1, x_2 + v_2] = [x_1, x_2]_L + \theta(x_1, x_2),$$

for all $x_1, x_2 \in L$ and $v_1, v_2 \in V$.

Obviously L_θ is a Leibniz algebra with respect to the multiplication $[\cdot, \cdot]$.

Definition 4. Let L be a Leibniz algebra and V a vector space over a field K and $f : L \to V$. The bilinear map $\delta_f : L \times L \to V$, defined as

$$\delta_f(x, y) = f([x, y]),$$

is called a coboundary. The entire set of all coboundaries is denoted by $BL^2(L, V)$.

Obviously $BL^2(L, V)$ is a subspace of $ZL^2(L, V)$. Using the notion of 2-cocycles and 2-coboundaries, one defines the second cohomology group of a Leibniz algebra L by V as follows:

$$HL^2(L, V) = ZL^2(L, V)/BL^2(L, V).$$

Consider following solvable Leibniz algebras [4]:

$$R : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = e_1, & \\ [e_i, x] = -ie_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases} \qquad R_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-1+\alpha)e_i, & 2 \leq i \leq n, \end{cases} \qquad R_3 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-n)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, x] = e_n, & \end{cases}$$

$$R_4 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1 + e_n, & \\ [e_i, x] = (i+1-n)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, x] = -e_{n-1}, & \end{cases}$$

$$R_5(\alpha_4, \dots, \alpha_n) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = e_2 + \sum\limits_{i=4}^{n-1} \alpha_i e_i, & \\ [e_i, x] = e_i + \sum\limits_{j=i+2}^{n} \alpha_{j-i+2} e_j, & 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

Note that R is a solvable Leibniz algebra with null-filiform nilradical NF_n and $R_1, R_2, \dots, R_5$, are solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical F_n^1.

In the following Propositions we give all one-dimensional central extensions of the algebras R, $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Proposition 1. Any one-dimensional central extension of the Leibniz algebra R is isomorphic to the algebra

$$\widetilde{R}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = e_1, & [x, x] = y, \\ [e_i, x] = -ie_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Proposition 2. Any one-dimensional central extension of the Leibniz algebra $R_1, R_2(\alpha), R_3, R_4$, $R_5(\alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ is isomorphic to the following non-isomorphic algebras, respectively:

$$\widetilde{R_1}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, & \\ [e_1, x] = e_1, & [x, x] = y \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \end{cases} \qquad \widetilde{R_2}(\alpha): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & [e_1, x] = e_1, \\ [x, x] = y, & \\ [e_i, x] = (i-1+\alpha)e_i, & 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$\widetilde{R_3}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1, & \\ [e_i, x] = (i-n)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, x] = e_n + y, & \end{cases} \qquad \widetilde{R_4}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1, & \\ [e_1, x] = e_1 + e_n, & \\ [e_i, x] = (i+1-n)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, x] = y - e_{n-1}, & \end{cases}$$

$$\widetilde{R_5}(\alpha_4, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 + \gamma_1 y, & [x, e_1] = \gamma_2 y, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, x] = e_2 + \sum\limits_{i=4}^{n-1} \alpha_i e_i + \gamma_3 y, & \\ [e_i, x] = e_i + \sum\limits_{j=i+2}^{n} \alpha_{j-i+2} e_j, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, x] = \gamma_4 y. & \end{cases}$$

References

1. **J.-L. Loday.** *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz.*. T.:Enseign. Math. (2), 39 (1993), 269-293 p.
2. **J.K. Adashev, L.M. Camacho, B.A. Omirov.** *Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras.* Journal of Symbolic Computation 44(5) (2009), 527–539.
3. **J.-M. Casas.** *Central extensions of Leibniz algebras.* T.: Extracta Math. 13 (1998), no. 3, 393-397.
4. **I.A. Karimjonov.** *Classification of Leibniz algebras with a given nilradical and with some corresponding Lie algebra.* PhD thesis, Santiago de Compostella, 2017.

UDK 511.28

$\psi(x, \chi)$ FUNKSIYASI UCHUN ANIQ FORMULA TO‘G‘RISIDA.

Shodmonova Sh.
Termiz davlat universiteti; shoxsanamshodmonova@gmail.com

Faraz etaylik q ixtiyoriy natural son, p-tub son, $s = \sigma + it$-kompleks son, χ esa q moduli bo‘yicha Dirixle xarakteri, $\Lambda(n)$ bilan

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{agar } n = p^{\alpha} \text{ bo‘lsa}, \\ 0, & \text{agar } n \neq p^{\alpha} \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi Mangoldt funksiyasi bo'lsin. Ma'lumki, Dirixle L-funksiyasi $L(s,\chi)$, $Res = \sigma > 1$ bo'lganda

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu funksiyaning tadbiqlagida $\psi(x,y) = \sum\limits_{n\leq x} \chi(n)\Lambda(n)$ funksiya uchun aniq formula muhim ahamiyatga ega [1]. Bunday formulalar umuman olganda mavjud [1],[2], lekin ularning qoldiq hadida "O''-simvoli ishtiroq etgani uchun ba'zi bir sonli hisoblashlar qatnashgan masalalarda foydalanib bo'lmaydi [2], [3]. Ushbu ishda biz $\psi(x,y)$ funksiya uchun "O''-simvoli ishtiroq etmagani quyidagi natijani isbotlaymiz.

Teorema. Agar χ q moduli bo'yicha Dirixle xarakteri va $3 \leq T \leq x$ bo'lsa. U holda

$$\psi(x,y) = \delta_\chi x - E_{\widetilde{\beta}} \frac{x^{\widetilde{\beta}}}{\widetilde{\beta}} - \sum_{|\gamma<T|} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x,T) \tag{1}$$

bu yerda $\delta\chi\chi \neq \chi_0$ yoki $\chi = \chi_0$ ($\chi_0 -$ bosh xarakter) bo'lishiga qarab 0 yoki $1n$

$$\delta_\chi = \begin{cases} 1, & \text{agar } \chi = \chi_0 - \text{ bosh xarakter bo'lsa },\\ 0, & \text{agar } \chi \neq \widetilde{\chi_0} - \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$$E_{\widetilde{\beta}} = \begin{cases} 1, & \text{agar } \chi = \widetilde{\chi} - \text{ maxsus haqiqiy xarakter bo'lsa },\\ 0, & \text{agar } \chi \neq \widetilde{\chi} - \text{ bo'lsa }. \end{cases}$$

$\widetilde{\beta}$–maxsus $\chi = \widetilde{\chi}$ haqiqiy xarakterga mos haqiqiy nol bo'lib o'ng tomondagi yig'indi $0 < \sigma < 1$, $|\gamma| < T$ sohadagi maxsus noldan tashqari barcha $\rho = \beta + i\gamma$ nollar bo'yicha olinadi. (1) dagi qoldiq had uchun quyidagi baho o'rinli:

$$|R(x,T)| < 1445,91\frac{x}{T}\log^2 qx + E_{\widetilde{\beta}} x^{\frac{1}{4}} \log x + 2,67(\log x) \min\left(1, \frac{x}{\pi < x > T}\right) \tag{2}$$

Bu yerda $< x >$ bilan x dan unga eng yaqin tub sonning darajasigacha bo'lgan masofa belgilangan.

Isbot. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\aleph-i\infty}^{\aleph+i\infty} ys\frac{ds}{s} = \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 < y < 1 \text{ bo'lsa;}\\ \frac{1}{2}, & \text{agar } y = 1 \text{ bo'lsa;} \quad (\aleph > 0)\\ 1, & \text{agar } y > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \tag{3}$$

tengliklarni qaramiz (isboti [1] da mavjud). Avvalo qulaylik uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\delta(y)$ bilan (3) tenglikning o'ng tomonini belgilaymiz va

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\aleph-iT}^{\aleph+iT} y^s \frac{ds}{s}$$

bo'lsin.Teoremani isbotlash uchun quyidagi lemmalardan foydalanamiz.

1-Lemma. $y > 0$, $\aleph > 0$ va $T > 0$ bo'lsa quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$|I(y,T) - \delta(y)| \leq \begin{cases} y^\aleph \min\left(1, (\pi T)^{-1} |\log y|^{-1}\right), & \text{agar} \, y \neq 1\\ \aleph(\pi T)^{-1}, & \text{agar} y = 1. \end{cases}$$

Lemmaning isboti [4]ning $17 - \S$da keltirilgan.

2-Lemma. $q \geq q_0$ va $|t| \geq t_0$ bo‘lganida G sohada quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leq C_1 \log q|s|,$$

bu yerda

$$C_1 = \left(1 + \frac{2,5708}{\sqrt{4+t_0^2 \log(4+t_0^2)}}\right)\left(1 + \frac{2\pi}{\log(4+t_0^2)}\right)\left(1 + \frac{\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{1+t_0^2}}\right)}{\log q_0 \sqrt{1+t_0^2}}\right) + \frac{6,2759}{\log q_0 \sqrt{1+t_0^2}}$$

Bu [3] dagi I-bobdagi 3.3-lemma.

3-Lemma. $|s| \geq |s_0|$bo‘lganida quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|2-\rho|^2} \leq C_2 \ln q$$

bu yerda yig’indi $L(s,\chi)$ ning barcha trivial bo‘lmagan nollari ρ bo‘yicha olinadi va

$$C_2 = 48,6856 + 6,5834 \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}}\right)}{|s_0| \ln |s_0|} + \frac{1}{|s_0|} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{|s_0|}\right)\left(1 + \frac{1}{|s_0+a|} + \frac{1}{\ln \frac{|s_0+a|}{2}} + \frac{\ln 2\pi}{|s_0+a| \ln \frac{|s_0+a|}{2}} + \frac{2\left|r\left(\frac{1}{s_0+a}\right)\right| \ln 2\pi}{|s_0+a| \ln \frac{|s_0+a|}{2}}\right)\right];$$

$$\left|r\left(\frac{1}{s_0+a}\right)\right| \leq \frac{1}{12|s_0|}\left(1 + \frac{1}{30|s_0|} + \frac{1}{105|s_0|^4}\right), \quad |s| \geq |s_0|.$$

Bu lemmalardan foydalanib [3] ning birinchi bobi 3-paragrafidagi singari almashtirishlar qilamiz va $T \geq T_0 = 14,4$ deb olib qolgan barcha parametrlarni [3]dagi singari tanlab [5] dagi sonli natijalardan foydalansak (1) va (2)-natijalarga ega bo‘lamiz.

Adabiyotlar.

1. **Karatsuba A.A.s** *Osnovi analiticheskoy teorii chisel.*–M.:Nauka,1983.-240s.
2. **Montgomery H.L., Vaughan R.C.** *Multiplicative number theory: I. Classical theory.* Cambridge studies in advanced math. Cambridge. 2007. 552p.
3. **Allakov I..** *Isklyuchitelnoe mnojestvo summi dvux prostix.* Dissertatsiya na soiskaniyu uchenoy stepeni kandidata fiz.-mat.nauk. Leningrad. LGU, 1983.148s).
4. **Davenport Harold.** *Multiplicative Number Theory.*(Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi.,1997).
5. **Allakov I.** *Sonlar nazariyasining ba’zi bir additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.*– Toshkent , “Ta’lim” 2012, 200b.

УДК 511.34

ADDITIV MASALALAR HAQIDA

Saatmurotov Sh.[1],Jo’rayeva Z.[2]
[1,2] Termiz davlat universiteti shoxruhz1995@gmail.com, zarifabekov@gmil.com

Faraz qilaylik, M_i musbat butun sonlarning o’suvchi, cheksiz ketma-ketligi

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}, ... \tag{1}$$

bo'lsin. Agar k ta $M_1, M_2, ..., M_k$ ketma-ketliklar (ularning orasida bir xillari ham bo'lishi mumkin) berilgan bo'lsa, elementlari

$$b_j = a_{1j1} + a_{2j2} + ... + a_{kjk} \quad a_{1j1} \in M_1, \quad a_{2j2} \in M_2, ..., a_{kjk} \in M_k \tag{2}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $b_1, b_2, ..., b_n, ...$,ketma-ketlikka berilgan ketma-ketliklarning yig'indisi deb ataladi [1] va $M_1 + M_2 + ... + M_k$ ko'rinishda belgilanadi.

$$P(M_i) = \inf \frac{N(x)}{x}$$

кattalikka M_i ketma-ketlikning zichligi deb ataladi. Bunda $N(x)$ (1) ketma- ketlikdagi x dan katta bo'lmagan hadlar sonini bildiradi.

Additiv masalalar deganda berilgan M to'plamning elementlarini $M_1 + M_2 + ... + M_k$ to'plamlar elementlari yig'indisi ko'rinishida ifodalash tushiniladi.

Bu yerda quyidagi masalalarni hal etish muhim [1] :

1. Agar $M_1 + M_2 + ... + M_k$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsa, M dagi (2) shartni qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan M' ketma-ketlikning zichligi qanday bo'ladi?

Shunga o'xshash M dagi (2) shartni qanoatlantirmaydigan elementlardan tuzilgan $\overline{M}'$ ketma-ketlikning zichligini ham qarash mumkin.

2. b_j va k lar berilgan bo'lganda (2) shartni qanoatlantiruvchi $(a_{1j1}, a_{2j2}, ..., a_{kjk})$ lar sonini bildiruvchi $R_k(b_j)$ funksiyani tekshirish.

Boshqacha qilib aytganda, $R_k(b_j)$ funksiya uchun aniq yuqori va quyi chegaralarini topish yoki asimptotik formula keltirib chiqarish.

Bu keltirilgan masalalar: Waring muammosi, Eyler-Goldbax muammosi, Xardi-Littlvud muammosi, Xua-Lo-Ken muammosi va boshqa ko'plab sonlar nazariyasining additiv muammolarini o'z ichiga oladi.

Agar biz $1 < n < X$ oraliqdagi ikkita tub son ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmagan sonlarning sonini $E(x)$ bilan belgilasak, u holda yuqoridagi mualliflar tomonidan isbotlangan natijani $E(x) \ll \frac{x}{ln^a x}$ ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\ll$-Vinogradov simvoli, $A > 0$-haqiqiy son. 1961-yilda A.F.Lavrik[6] berilgan $n, 1 < n < X$ juft sonini arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni uchun assimptotik formula oldi. Ushbu ishda shu asimptotik formulaning qoldiq hadi aniqlashtirilib va quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema. (O, X) oralig'idagi ko'pi bilan $\frac{cX}{D(\ln X)^M}$ ta dan boshqa barcha juft $n = l' + l'' \,(\mathrm{mod} D)$ sonlar uchun $n = p' + p''$ tenglamaning tub sonlar $p' \equiv l' \,(\mathrm{mod} D)\,; p'' \equiv l'' \,(\mathrm{mod} D)\,, 1 \leq l', l'' \leq D; \left(l', D\right) = \left(l'', D\right) = 1; 0 \prec D \leq (\ln N)^A$ tub sonlardagi yechimlari soni $Q\,(N, D)$ uchun quyidagi formulani isbotladi:

$$Q\,(N, D) = 2 \prod_{p \succ 2} \frac{p\,(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{\substack{\frac{p}{D} \\ p \succ 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{N}{\varphi\,(D) \ln^2 N} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ \frac{p}{D}, p \times D}} \frac{p-1}{p-2} + o\left(\frac{N \ln\ln D}{\varphi\,(D) \ln^3 N}\right),$$

bu yerda p-barcha tub sonlarni qabul qiladi, φ-Eyler funksiyasi, A va M lar musbat haqiqiy sonlar, O-simvoldagi o'zgarmas son A va M ga bog'liq.

Adabiyotlar ro'yxati

1. **Аллаков И** *Оценка тригометрических сумм и их приложения к решению некоторы аддитивных задач теории чисел* Термиз, Сурхан нашр.2021, 160 с.

2. **Аллаков И** *О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической*

3. **Лаврик А.Ф.** *К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М.Виноградова* // Вестник ЛГУ.-Ленинград, 1961. -№13.-С. 11-27.

UDC 513.7

PROPERTIES OF POWER TRANSFORMATIONS FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Soleev A. S.[1], Azimov A. A.[2]
[1]Samarkand State University, University boulevard 15, Samarkand 140104, Uzbekistan;
asoleev@yandex.ru
[2]Samarkand State University, University boulevard 15, Samarkand 140104, Uzbekistan;
Azimov_Alijon_Akhmadovich@mail.ru

In this paper power transformations which transform nonlinear algebraic equations or systems of nonlinear algebraic equations into equations and or systems of algebraic equations with a smaller variable are considered. The changes in geometric constructions after these transformations are shown and these transformations make the geometry of exponents more meaningful. The notion of the dimension of a system of algebraic equations is presented on the basis of the construction of Newton polyhedrons and normal cones of its faces. The construction of Newton polyhedra and normal cones of its faces was considered in the works of A.D.Bruno (1980), A.Soleev (1982), A.G.Hovansky (1983). We consider some significant properties of power transfor–mations. It is proved that if the dimension of the system is d <n, then there exists a unique modular matrix that this system is reduced to a system of equations with respect to variables by a power transformation with this matrix and by suitable abbreviations. It is also proposed an algorithm for finding unique modular matrices of power transformations. Specific examples are given at the end of the paper.

Let us consider the system of nonlinear algebraic equations

$$f_i(X) \ \equiv \ \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

which in the space R^n of exponents Q correspond to parallel translations (for each one f_i) and affine transformations (one for all f_i).

These system of nonlinear algebraic equations make the geometry of exponents [1] more meaningful and provide a way to solve certain systems.

Finding those solutions of system (1), for which one of the coordinates is identically equal to zero, will be considered a solved problem since it is reduced to a problem similar to the original one, but with a lower dimension. Therefore, we will seek solutions to system (1) for which no coordinate is identically zero. For such solutions, each of the equations of system (1) can be reduced by any product of the powers of coordinates [2]. If in the i equation we reduce by$X^{\overline{Q}^i}$, then the vector exponents in it become equal $\tilde{Q} = Q - \overline{Q}^i$, i.e. $D_i$transfers parallel to the vector$-\overline{Q}^i$.

Let

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

be a square matrix with real elementsα_{ij}, and det$\alpha \neq 0$. Transformation

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1^{\alpha_{11}} \quad \ldots \quad x_n^{\alpha_{1n}}, \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n & = & x_1^{\alpha_{n1}} \quad \ldots \quad x_n^{\alpha_{nn}} \end{array}\right\} \tag{2}$$

is called a *power transformation* with α matrix. Reverse transformation

$$\left.\begin{array}{lcllll} x_1 & = & y_1^{\beta_{11}} & \dots & y_n^{\beta_{1n}}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & y_1^{\beta_{n1}} & \dots & y_n^{\beta_{nn}} \end{array}\right\} \tag{3}$$

is also a power transformation with matrix

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \alpha^{-1}.$$

We give some properties of the power transformation (2):

1. Under transformation (2), $X^Q = Y^{Q'}$ where

$$Q' = \beta^* Q \tag{4}$$

andβ^*- is the transposed matrix β. So, with the power transformation (2), the vector exponents undergo a linear transformation. This is also true for the sum

$$f(X) = \sum_{Q \in D} a_Q X^Q,$$

which upon transformation (3) becomes the sum

$$f(X) = f'(Y) = \sum_{Q' \in D'} a_{Q'} Y^{Q'},$$

where $Q' = \beta^* Q$,$D' = \beta^* D$,$a_Q = a_{Q'}$. Geometric construction of the sets $D$and $D'$are also related by the same linear transformation (4). Therefore, under transformation (2), truncate (shortening) turns into truncate (shortening), i.e. the operation of extracting truncations is per mutational with a power transformation.

2. Upon transformation (2) the curve

$$x_i = b_i \tau^{p_i}(1 + o(1)), \quad \sum p_i^2 \neq 0, i = 1, \cdots, n, (\tau \to \infty)$$

of the vector order $P = (p_1, \dots, p_n)$ passes to the curve

$$y_i = b_i' \tau^{p_i'}(1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

of the vector order

$$P' = \alpha P. \tag{5}$$

Therefore, in the space R_*^n of orders$P$, the power transformation (2) induces a linear transformation (5). This transformation is conjugated with transformation (4). Therefore, the spaces $R^n$and $R_*^n$are conjugate, and the scalar product $\langle P, Q \rangle$ is preserved under the power transformation (2).

3. Transformation (2) reflects the set $\{X : \ 0 < |x_i| < \infty, \ \ i = 1, \dots, n\}$ to the set $\{Y : \ 0 < |y_i| < \infty, \ \ i = 1, \dots, n\}$ one-to-one, if the matrix α is unimodular, i.e., α_{ij} all integers and det$\alpha = \pm 1$. Only such power transformations are used here.

4. Suppose, in addition to (2), there is a power transformation

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \cdots y_n^{\gamma_{in}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

with a matrix γ. Then Z is connected with X power transformation with matrix$\gamma\alpha$, i.e., power transformations form a group, and power transformations with a unimodular matrix form its subgroup.

Let $f(X)$- be an arbitrary Laurent's polynomial and d be dimension of its Newton polyhedron$M = M(f)$, d will be called dimension of the polynomial$f(X)$. In R_*^nwe consider a linear space $N(f)$ normal to $M(f)$ [3]. It is obvious that dim$M$+dim$N = n$. Similarly, for the system of Laurent's polynomials$f_i(X)$,$i = 1,\dots,m$ we consider polyhedron$M(f_i)$and their normal spaces$N(f_i)$. We denote

$$N = N(f_1)\bigcap\dots\bigcap N(f_m)$$

and $d = n-$ dim$N$. The quantity $d$is called the dimension of the indicated system of polynomials [4].

Let there be such a system (1).

Theorem 1. *If the dimension of the system (1) is equal to*d*, then there exists a unimodular matrix* α *such that the power transformation (2) with matrix* α*and suitable reduces this system to a system* m*of equations in* d*variables.*

Theorem 2. *There is a power transformation (2) with a unimodular matrix* α*and reductions such that the system (1) of dimension* d*with subsystems* $i_1,\dots,i_l$ *of equations is reduced to a system of equations*m *in variables* d*that has a quasi-triangular form: the subsystem of the first* i_j*equations depends on* $d(i_j)$ *variables*$(j = 1,\dots,l)$.

Indeed, by Theorem 1, we reduce the entire system (1) to a system of $d$variables. Then, also making a power transformation for these$d$ variables, we will reduce the subsystem from the first $i_l$equations to a subsystem ofd_{i_l} variables, etc. descending$j$ from l to 1.

Example. 1. Consider the system

$$f_1\left(x_1x_2x_3\right) \equiv b_1x_1x_2x_3 + b_2x_1^4 + b_3x_3^4 + b_4x_1^2x_2^2 = 0,$$

$$f_2\left(x_1x_2x_3\right) \equiv c_1x_2x_3 + c_2x_1^2x_3 = 0. \tag{6}$$

For which we have $D_1 = \{\mathcal{Q}_1 = (1,1,1)\,,\ \ \mathcal{Q}_2 = (4,0,0)\,,\ \mathcal{Q}_3 = (0,0,4)\,,\ \ \mathcal{Q}_4 = (2,2,0)\}$; $D_2 = \{\mathcal{Q}_1^2 = (0,1,1)\,,\ \ \mathcal{Q}_2^2 = (2,0,1)\}$. From these we find $\overline{Q_1} = Q_1 - Q_2 = (-3,1,1)$, $\overline{Q_2} = Q_2^2 - Q_1^2 = (2,-1,0)$.

Therefore, the unimodular matrix will be

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Here the third row of matrix α is chosen so that $det\,|\alpha| = 1$. Power transformation with matrix α and its inverse will be

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{-3}x_2x_3, \\ y_2 = x_1^2x_2^{-1}, \\ y_3 = x_1^{-1}x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_2y_3, \\ x_2 = y_2y_3^2, \\ x_3 = y_1y_2^2y_3. \end{cases} \tag{7}$$

After the power transformation (7) and the reduction of the first equation of system (6) by $y_2^4y_3^4$, and the second by $y_1y_2y_3^3$, we obtain the system

$$\begin{aligned} g_1(y_1,y_2) &\equiv b_1y_1 + b_2 + b_3y_1^4y_2^4 + b_4y_1^2y_2^2 = 0, \\ g_2(y_2) &\equiv c_1 + c_2y_2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

As a result of the power transformation, we obtained the system of equations (8) with a smaller number of variables.

2. For the system

$$f_1\left(x_1x_2x_3\right)_1 \equiv a_1x_1^4 + a_2x_2^4 = 0,$$

$$f_2\left(x_1x_2x_3\right) \equiv b_{11}x_2x_3 +\ b_{12}x_1^3x_2 = 0.$$

After the corresponding power transformation passes into the system

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &\equiv a_2 + a_3 y_1^4 = 0, \\ g_2(y_2) &\equiv a_{21} y_2 + a_{23} = 0. \end{aligned}$$

We offer the reader the construction of the corresponding power transformation.

References

1. **Bruno AD, Soleev A.** *Local uniformization of branches of a space curve and Newton polyhedra* // Algebra andAnaliz. 1991. Vol. 3, no. 1. P. 67-102.
2. **Soleev A.** *Power geometry in local resolution of singularities of an algebraic curve*, World Science, B№6(**??**), Vol.1, 2020, P. 21-28.
3. **Soleev A.** *Algorithm for calculating Newton polyhedra* // Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan, No. 5, 1982. P. 14–16.
4. **Soleev A., Soleeva N.** *(*Power geometry and algebraic equations) // AIP Conference Proceedings, 1557, 85, 2013.

UDC 517.98

An abstract characterization of Schatten's ideal $\mathcal{C}_2$

Toshmatova M. M.[1], Azizov A. N.[2]
[1]National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
toshmatovamaftuna14@gmail.com
[2]National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; azizov.07@mail.ru

Let l_∞ (respectively, c_0) be the Banach space of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers.

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$, then the *non-increasing rearrangement* $\xi^* : (0,\infty) \to (0,\infty)$ of ξ is defined by

$$\xi^*(t) = \inf\{\lambda : \mu\{|\xi| > \lambda\} \le t\}, \quad t > 0,$$

(see, for example, [1]). As such, the non-increasing rearrangement of a sequence $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ can be identified with the sequence $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, where

$$\xi_n^* = \inf\left\{\sup_{n\notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N},\ |F| < n\right\}.$$

If $\{\xi_n\} \in c_0$, then $\xi_n^* \downarrow 0$; in this case there exists a bijection $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space l_∞ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec\prec \eta = \{\eta_n\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \le \sum_{n=1}^m \eta_n^* \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l_\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric* (*fully symmetric*) sequence space if

$$\eta \in E,\ \xi \in l_\infty,\ \xi^* \le \eta^* \text{ (resp., } \xi^* \prec\prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \le \|\eta\|_E.$$

Every fully symmetric sequence space is a symmetric sequence space. The converse is not true in general. At the same time, any separable symmetric sequence space is a fully symmetric space.

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then

$$\|\xi\|_E = \| \, |\xi| \, \|_E = \|\xi^*\|_E \quad \text{for all} \ \ \xi \in E.$$

Now, let $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ be an infinite-dimensional Hilbert space over $\mathbb{C}$, and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^\star-$algebra of all bounded linear operators in $\mathcal{H}$. Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ $(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is well known that, for any proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, we have $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$, and if $\mathcal{H}$ is separable, then $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (see, for example, [3]).

At the same time, if $\mathcal{H}$ is a non-separable Hilbert space, then there exists a proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subsetneqq \mathcal{I}$.

Denote $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ be the *canonical trace* on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is,

$$\tau(x) = \sum_{j \in J} (x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

where $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ is an orthonormal basis in $\mathcal{H}$ (see, for example, [4]).

Let $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ be the lattice of projectors in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^* x)^{1/2}$ of x, that is, $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. If $t > 0$, then the *t-th generalized singular number* of x, or the *non-increasing rearrangement* of x, is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}.$$

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called *symmetric* (*fully symmetric*) if the conditions

$$x \in X, \ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ \mu_t(y) \leq \mu_t(x) \quad \text{for all} \ \ t > 0$$

(respectively,

$$x \in X, \ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ \int_0^s \mu_t(y) dt \leq \int_0^s \mu_t(x) dt \quad \text{for all} \ \ s > 0 \ \ (\text{writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \ \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \ 1 \leq p < \infty,$$

are examples of fully symmetric spaces.

It should be noted that for every symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and all $x \in X$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|x\|_X = \| \, |x| \, \|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \quad \text{and} \quad \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Let $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a symmetric space. Fix an orthonormal basis $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ in $\mathcal{H}$ and choose a countable subset $\{\varphi_{j_n}\}_{n=1}^\infty$. Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C} \cdot \varphi_{j_n} \subset \mathcal{H}$. It is clear that the set

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 : \ x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X \right\}$$

(the series converges uniformly), is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric subspace $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ uniquely generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ uniquely generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [2]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

In addition,

$$E(\mathcal{C}_E) = E, \ \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E, \ \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \ \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}.$$

We will call the pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ a *Banach ideal of compact operators*. It is known that $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}})$ for all $1 \leq p < \infty$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the Banach ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is defined by

$$x \prec\prec y, \ x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is *fully symmetric* if conditions $y \in \mathcal{C}_E$, $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $x \prec\prec y$ entail that $x \in \mathcal{C}_E$ and $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. It is clear that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal if and only if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

Examples of fully symmetric ideals include $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the Schatten's Banach ideals $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p)$ for all $1 \leq p < \infty$. It is clear that $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ for every symmetric sequence space $E \subset c_0$ with $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_1$ and $\|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ for all $x \in \mathcal{C}_1$ and $y \in \mathcal{C}_E$.

Now we give an abstract characterization of ideal $\mathcal{C}_2$.

Theorem. Let E a Banach ideal of compact operators with following property

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

for all $x, y \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$, $x \cdot y = 0$. Then $E = \mathcal{C}_2$.

References

1. **Bennett C., Sharpley R.** *Interpolation of Operators.* Academic Press Inc. - 1988.
2. **Lord S., Sukochev F., Zanin D.** *Singular Traces.* Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston. - 2013.
3. **Simon B.** *Trace Ideals and Their Applications.* Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society. - 2005.
4. **Stratila S., Zsido L.** *Lectures on von Neumann algebras.* Editura Academiei, Bucharest. - 1979.

UDC 519.6

Panjaraning noldan farqli eng qisqa vektori uzunligini baholash

Umirzoqov N.S., Uralova M.[1], Poyanova N.[2]
[1] Sh. Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, 140104 Uzbekiston, Samarqand, Universitet xiyoboni, 15; nosirjonumirzoqov695@gmail.com
[2]Termez davlat universiteti, 190111 Termez, Uzbekiston;

Panjaraning keltirilgan bazisini topish metodi uning nol boʻlmagan eng qisqa vektorini topishda ishlatiladigan baholarni olishga imkon beradi. Panjaraning eng qisqa vektori topish masalasi 1842 yili Dirixle tomonidan birgalikdagi diofant yaqinlashishlari masalasi shaklda bayon qilingan edi. Minkovskiyning [1] qavariq markaziy simmetrik jism haqidagi teoremasi (1896) ham nol boʻlmagan eng qisqa vektorning uzunligini baholashga imkon beradi.

Yevklid normasi kiritilgan holda, qavariq jism sfera boʻlgan holda yuqoridagi teorema eng qisqa vektor uzunligi uchun quyidagi bahoni beradi:

$$sh\,(\Lambda) \leq c\sqrt{n}(\det(\Lambda)\,)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

bu yerda $\det(\Lambda)$ – panjaraning hajmi. Dirixle va Minkovskiy [1] teoremalarining isboti konstruktiv emas, shuning uchun bu isbotlar panjaraning eng qisqa vektorini topish metodini bermaydi, ana shunday vektor mvvjudligini tasdiqlaydi.
Panjaraning keltirilgan bazisining eng qisqa vektori panjaraning eng qisqa vektorining uzunligini baholashga imkon beradi:

$$||b|| \leq 2^{\frac{n-1}{4}} (\det(\Lambda)\ )^{\frac{1}{n}}. \qquad (2)$$

Hozirgi vaqtda panjaraning eng qisqa vektorini topish masalasi – SVP (shortest vector problem) deb yuritiladi va uning murakkabligi NP-to'liqligi o'rnatilgan. Lekin hali ham eng qisqa vektorni topishning taqribiy algoritmlari to'g'risida biror narsa deyish qiyin. Bu muammoga nisbatan berilgan vektorga eng yaqin vektorni topish muammosi – CVP (closest vector problem) muammosi, ya'ni berilgan panjaraning berilgan a vektoriga eng yaqin b vektorini topish ($||b-a||$ ni minimallashtirish masalasi ko'proq o'rganilgan. Bu masalaning NP-to'liqligi 1981 yilda isbotlangan.
Panjaradagi ba'zi masalalar. Panjaraning ketma-ket minimumlarini ixtiyoriy normaga nisbatan aniqlash mumkin.

$sh(\Lambda)$ bilan Λ panjaraning nol bo'lmagan eng qisqa vektori uzunligini belgilaymiz. Ravshanki, u birinchi ketma-ket minimumga teng: $sh\,(\Lambda) = \lambda_1$. Yuqorida keltirilgan (1) Minkovskiy teoremasining natijasi sifatida eng qisqa vektor uzunligining yuqoridan bahosi olingan:

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

Eng qisqa vektor uzunligini (2) quyidan baholash quyidagi teorema bilan beriladi.
Teorema. $\boldsymbol{B}$ – panjaraning bazisi, $\boldsymbol{B^*}$ - esa panjaraning Gramm-Shmidt ortogonallashtirish jarayoni yordamida hosil qilingan mos ortogonal bazisi bo'lsin. U holda

$$\boldsymbol{\lambda_1 \geq \min_j ||b^*|| > 0}\ .$$

Teoremani isbot qilish uchun butun koordinatali x vektor uchun quyidagi tengsizlikdan foydalanish kerak bo'ladi.
$||Bx|| \geq ||b_i||$, bu yerda $i = \max\{i|\ x_i \neq 0\}$.

Hozirgi vaqtda panjaraning eng qisqa vektorini topishning birorta ham polinomial algoritmi ma'lum emas. Bundan tashqari, ana shunday algoritm Minkovskiy bahosi (1) bilan beriladigan oraliqda

$$Bx \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\mathit{\Lambda})}\,,$$

yoki bu bahoga nisbatan kuchsizroq bo'lgan baho bilan beriladigan oraliqda

$$Bx \leq n^c \cdot \sqrt[n]{\det(\mathit{\Lambda})}$$

da ham mavjud emas.
Panjaradagi yana bir muhim masala berilgan vektorga eng yaqin vektorni topish muammosi – CVP (closest vector problem) muammosidan iborat.
Shunday qilib, CVP va SVP tipidagi quyidagi uchta masala qaralishi mumkin:

Panjaraning eng yaqin yoki eng qisqa vektorini topish masalasi.

Panjaraning eng yaqin vektorigacha bo'lgan masofaning minimumini aniqlash yoki eng qisqa vektorining uzunligini aniqlash.

Tekshirish masalasi: berilgan $r > 0$ uchun panjaraning masofasi r dan oshmaydigan vektori mavjudligini yoki uzunligi r dan katta bo'lmagan vektorning mavjduligini aniqlash.

Ushbu ishda Λ panjarining bazis vektorlari normasini baholash [4-5] orqali panjaraning eng qisqa vektori uzunligining yangi bahosi olingan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Kassels Dj.**Vvedeniye v geometriyu chisel. M.: Mir, 1965.
2. **Utkin P.S.** http:// mipt.ru/education/chair/ computational_mathematics/study/materials, 2014.
3. **Ruzimuradov Kh.Kh.** Fundamental rectangles of admissible lattices. - Journal of Mathematical Sciences. May 1996, Volume 79, Issue 5. N.York. Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers. pp 1320-1324.
4. **Ruzimuradov X.X.** K probleme podscheta chisla tochek algebraicheskix reshetok v pryamougolnikax. O'zbekskiy matematicheskiy jurnal, 2008, №4. S. 116-124.
5. **Ruzimuradov Kh.Kh., Ismatova L., Poyanova N.**On an Estimate Related to the Homogeneous Minimum of the Admissible Lattice. Proceedings of International Conference on Mathematics and its Scientific Applications (ICMSA-2022). Sathyabama Institute of Science and Technology, Chennai, India, 3-4 March, 2022.

UDC 512.331

Yechiluvchan va nilpotent algebralar.

Xakimova M. [1]
[1]Magistratura talabasi, Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekistan;
xakimovamaftuna41@gmail.com

Bizga L Li algebrasi berilgan bo'lsin. Demak, L yoki pastki markaziy qator belgilash orqali aniqlaymiz.

$$L^1 = L, L^2 = [L, L], L^3 = [L^2, L], ldots, L^i = [L^{(i-1)}, L] \qquad (1)$$

L algebra nilpotent deb ataladi, agar ba'zi n uchun $L^n = 0$ bo'lsa.

Ta'rif 1. Agar shunday n natural son bo'lib $L^n = 0$ bo'lsa, u holda L algebra nilpotent algebra deyiladi.

Masalan, har qanday abileviy algebralar nilpotentdir. Shubhasiz, hamma i uchun $L^{(i)} \subset L^i$, va shuning uchun nilpotent algebra yechiluvchandir.

Teorema 1. (Engel).[1] Agar L Li algebrasinig barcha x elementlari uchun ad_x-nilpotent bo'lsa, u holda L algebra nilpotent bo'ladi.

Isbot keyingi bobda keltirilgan. Engel teoremasidan foydalanib, kamayib boruvchi markaziy qatorni aniq hisoblamasdan, $n(n, F)$ algebra nilpotentsiyasini isbotlash oson. Bizga faqat keyingi quyidagi oddiy lemma kerak.

Lemma 1. Ixtiyoriy $x \in gl(V)$-nilpotent endomorfizm bo'lsa, U holda ad_x endomorfizm ham nilpotent bo'ladi.

L algebra ideallarining quyidagi ketma-ketligini aniqlaymiz *(hosilaviy qator)*:

$$L^1 = L, L^2 = [L^1, L^1], L^3 = [L^2, L^2], ldots, L^i = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \qquad (2)$$

L algebra, ba'zi n uchun $L^{(n)} = 0$ bo'lsa, yechiluvchan deb ataladi. Xususan, Abeliviylik yechiluvchanlikni anglatadi, oddiy algebralarda esa hal etilmaydi.

Ta'rif 2. Agar shunday natural son topilib L$L^{(n)} = 0$, u holda L algebra yechiluvchan deyiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. **Fraleigh J.B.,** *Brand N. A First Course in Abstract Algebra.* 8th Edition. "Pearson Education", 2020, p. 443.
2. **Ayupov Sh. A., Omirov B.A. Xudoyberdiyev A. X., Haydarov F. H.** *Algebra va sonlar nazaryasi.*"Tafakkur bo'stoni", 2019 y. 296 b.
3. **Под редакцией, Кострикина А. И.** *Сборник задач по алгебре.* "Физмат-лит", 2001. 464 с.

УДК 517.98

Chekli o'lchamli operatorlar *-algebrasi.

Xolliyeva N.O., Jo'rayev A.U.
O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston.
nargizxolliyeva@gmail.com

H – kompleks Gilbert fazosi, W – qism fazo va $W^{\perp}$ fazo W ning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lsin. U holda $\forall x \in H$ element biror $\xi \in W$, $\eta \in W^{\perp}$ elementlar orqali $x = \xi + \eta$ kabi yozilishi mumkin. $P_{\mathrm{w}} : H \to H$ akslanishni (qisqacha P kabi belgilaylik) $P(x) = \xi$ kabi aniqlaylik, ya'ni P proeksiya operatori bo'lsin.

Lemma 1. P operatori uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1) P – chiziqlidir va $P(H) = W$, $P|_W = id$, $P|_{W^{\perp}} = 0$;

2) P – o'z-o'ziga qo'shma: $P^* = P$;

3) P – idempotentdir: $P^2 = P$, va demak $P^2 = P^* = P$ ekanidan P – proektordir;

4) $W = Ker(\mathbb{1} - P)$ va $W^{\perp} = Ker(P)$;

5) W, V-qism fazolar va P, Q ularga mos keluvchi proektorlar bo'lsa: $< W, V >= 0 \Leftrightarrow PQ = 0$

Oxirgi xossa quyidagicha umumlashtirilishi mumkin. Agar W_1, W_2,...,$W_n \subset H$ - qism fazolar va P_1, P_2,...,P_n ularga mos keluvchi proektorlar bo'lsa:

$$\oplus_{i=1}^{n} W_i = H, \quad < W_i, W_j >= 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_i P_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = \mathbb{1}.$$

A – biror algebra bo'lsin. A da *involutsiya* deb shunday $^* : A \to A$ akslantirishni tushunamizki, bu akslantirish uchun quyidagi xossalar o'rinli: $(a^*)^* = a$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a + b)^* = a^* + b^*$ va $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$. Bu holda A ga **-algebra* deyiladi.

Misol. 1) $B(H)$ – H-da aniqlangan barcha chiziqli chegaralangan operatorlar fazosi bo'lsin. Operatorlarning standart yig'indisi va songa ko'paytirish amallariga ko'ra chiziqli fazo bo'lib, operatorlarning superpozitsiyasi orqali kiritilgan ko'paytirish amaliga ko'ra algebra bo'ladi. Involutsiya esa operatorning qo'shmasi orqali, ya'ni $< a^*\xi, \eta >=< \xi, a\eta >$ kabi aniqlansa, $B(H)$ – *-algebrasi bo'ladi.

2) $M = M_n(\mathbb{C})$ – n-chi tartibli barcha matrisalar to'plami bo'lsin. Matrisalar ustidagi amallarga ko'ra M algebra bo'lib, $A = (a_{ij})$ matrisa uchun $A^* = (\overline{a}_{ji})$ kabi aniqlangan involutsiya orqali M – *-algebra bo'ladi. e_{ij} orqali i-chi satri va j-chi ustunida 1, qolganlari esa 0 ga teng bo'lgan matritsani belgilaymiz. U holda $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$ va $e_{ij}^* = e_{ji}$ bo'lib, $\{e_{ij}\}$ matritsalar M ning bazisi bo'ladi.

Endi $(A_i)_{i=1}^{n}$ – *-algebralar oilasi bo'lsin. U holda $\oplus_{i=1}^{n} A_i$ to'plam mos koordinatali amallarga ko'ra, hamda

$$(a_1, a_2, ..., a_n)^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$$

kabi aniqlangan involutsiyaga ko'ra *-algebra bo'ladi.

A – Banah *-algebrasi bo'lsin. Agar $\forall a \in A$ uchun $\|a^* a\| = \|a\|^2$ sharti bajarilsa, A ga C*-algebrasi deyiladi. $M_n(\mathbb{C})$ va $B(H)$ lar C*-algebrasi bo'ladi.

Lemma 2. Agar $(A)_{i=1}^{n}$ – C*-algebralar oilasi bo'lsa, $\oplus_{i=1}^{n} A_i$ ham C*-algebrasi bo'ladi.

Teorema. Agar A chekli o'lchamli C*-algebra bo'lsa, shunday $m_1, m_2, ..., m_r$ natural sonlar bor bo'lib, $A \cong M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{m_2}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(\mathbb{C})$ bo'ladi. Undan tashqari, agar

$$M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{m_2}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{m_r}(\mathbb{C}) \;\cong\; M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(\mathbb{C})$$

bo'lsa $r = s$ bo'lib, $\{1, 2, 3, ..., r\}$ ning biror σ o'rin almashtirishi uchun $n_i = m_{\sigma_i}$ bo'ladi.

Adabiyotlar

1. **Sakai S.** *C*-algebras and W*-algebras.* Berlin: Springer. - 1971. - IX - 256 p.
2. **Брателли У., Робинсон Д.** *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* М.: Мир. - 1982. - 511 с.
3. **Диксмье Ж.** *C*-алгебры и их представления.* М.: Наука. - 1974. - 400 с.
4. **Li B.R.** *Introduction to Operator Algebras.* World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. Singapore, - 1992. - 738 p.
5. **Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M.** *Jordan, Real and Lie structures in operator algebras.* Kluwer Academic Publishers, MAIA - 1997. - Vol - 418 p,235 p.

УДК 517.98

Uch o'lchamli simpleksda aniqlangan uzilishga ega operatorning qo'zg'almas nuqtalari to'plami

Yo'ldosheva M. S.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
munisay90@gmail.com

Uch o'lchamli standart simpleksda aniqlangan $V : S^3 \to S^3$ operatorni quyidagicha ta'riflaymiz:

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_1((\mathbf{x})), & x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}; \\ V_2((\mathbf{x})), & x_1 + x_2 > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

bu yerda

$$V_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1' = x_1(1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4) \\ x_2' = x_2(1 - \alpha x_1 + \lambda x_3 + \mu x_4) \\ x_3' = x_3(1 - \beta x_1 - \lambda x_2 + \eta x_4) \\ x_4' = x_4(1 - \gamma x_1 - \mu x_2 - \eta x_3) \end{cases} \quad V_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1' = x_1(1 + \alpha x_2 - \beta x_3 - \gamma x_4) \\ x_2' = x_2(1 - \alpha x_1 - \lambda x_3 - \mu x_4) \\ x_3' = x_3(1 + \beta x_1 + \lambda x_2 - \eta x_4) \\ x_4' = x_4(1 + \gamma x_1 + \mu x_2 + \eta x_3) \end{cases}$$

parametrlar esa $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \eta \in [-1, 1]$.

Ma'lumki, V operatorning qo'zg'almas nuqtalarini topish uchun $V(\mathbf{x}) = x$ tenglamani yechish lozim. Bizning holda $V(\mathbf{x}) = x$ tenglama

$$V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \quad \textit{va} \quad V_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$$

tenglamalarga teng kuchlidir. V_1 va V_2 operatorlarning ko'rinishlarida parametrlar simmetrikligidan $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \ \ x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$ tenglamani yechimlarini bilgan holda $V_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \ \ x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$ tenglamaning ham yechimini topish mumkin.

Teorema 1. $V_1(\mathbf{x})$ operatorning $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi qo'zg'almas nuqtalari quyidagilardan iborat:

1) $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0, 1)$;

2) $\mathbf{x}_2 = (0, 0, 1, 0)$;

3) agar $\lambda \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\mu \leq 0$, $\eta + \mu \leq \lambda$ yoki $\lambda \leq 0$, $\eta \leq 0$, $\mu \geq 0$, $\eta + \mu \geq \lambda$ va $\eta + \lambda \neq \mu$ bo'lsa, $(0, \frac{\eta}{\eta - \mu + \lambda}, -\frac{\mu}{\eta - \mu + \lambda}, \frac{\lambda}{\eta - \mu + \lambda})$;

4) agar $\eta \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \leq 0$, $\eta+\gamma \leq \beta$ yoki $\eta \leq 0$, $\beta \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $\eta+\gamma \geq \beta$ va $\eta+\beta \neq \gamma$ bo'lsa, $(\frac{\eta}{\eta-\gamma+\beta}, 0, -\frac{\gamma}{\eta-\gamma+\beta}, \frac{\beta}{\eta-\gamma+\beta})$;

5) agar $\mu \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\gamma \leq 0$, $\alpha+\gamma \geq \mu$ yoki $\mu \leq 0$, $\alpha \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha+\gamma \leq \mu$ va $\mu+\alpha \neq \gamma$ bo'lsa, $(\frac{\mu}{\mu-\gamma+\alpha}, -\frac{\gamma}{\mu-\gamma+\alpha}, 0, \frac{\alpha}{\mu-\gamma+\alpha})$;

6) agar $\lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$, $\alpha+\beta \geq \lambda$ yoki $\lambda \leq 0$, $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \leq \lambda$ va $\lambda+\alpha \neq \beta$ bo'lsa, $(\frac{\lambda}{\lambda-\beta+\alpha}, -\frac{\beta}{\lambda-\beta+\alpha}, 0, \frac{\alpha}{\lambda-\beta+\alpha})$.

Adabiyotlar

1. R.N. Ganikhodzhaev, F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov, *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems.* Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields., **14**(2) (2011), 279–335.

УДК 512.554

Local automorphisms of n-dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra

Yusupov B. B.[1,2], Bekturdiyev U. R.[2], Sultonboyev B. B.[2]
[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
e-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru
[2]Department of Physics and Mathematics, Urgench State University;

In last decades a series of papers have been devoted to study of mappings which are close to automorphism and derivation of associative algebras (especially of operator algebras and C*-algebras). Namely, the problems of describing so-called local automorphisms (respectively, local derivations) and 2-local automorphisms (respectively, 2-local derivations) have been considered. Later similar problems were extended for non associative algebras, in particular, for the case of Lie algebras.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. Recall that a linear mapping Φ of $\mathcal{A}$ into itself is called a local automorphism (respectively, a local derivation) if for every $x \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism (respectively, a derivation) Φ_x of $\mathcal{A}$, depending on x, such that $\Phi_x(x) = \Phi(x)$.

Local automorphisms of certain finite-dimensional simple Lie and Leibniz algebras are investigated in [1]. Concerning local automorphism, T.Becker, J.Escobar, C.Salas and R.Turdibaev in [3] established that the set of local automorphisms $LAut(sl_2)$ coincides with the group $Aut^{\pm}(sl_2)$ of all automorphisms and anti-automorphisms. Later in [4] M.Costantini proved that a linear map on a simple Lie algebra is a local automorphism if and only if it is either an automorphism or an anti-automorphism.

An algebra $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ over a field $\mathbb{F}$ is called a (right) Leibniz algebra if it satisfies the property

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

which is called Leibniz identity.

For a given Leibniz algebra $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$, the sequence of two-sided ideals are defined recursively as follows:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L},\ \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}],\ k \geq 1.$$

Definition 1. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is said to be nilpotent, if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{L}^n = \{0\}$.

Now we give the definitions of automorphisms and local automorphisms.

Definition 2. A linear bijective map $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is called an automorphism (resp. an anti-automorphism) if it satisfies $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ (resp. $\varphi([x,y]) = [\varphi(y), \varphi(x)]$) for all $x, y \in \mathcal{L}$.

Definition 3. Let $\mathcal{L}$ be an algebra. A linear map $\Delta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is called a local automorphism if for any element $x \in A$ there exists an automorphism $\varphi_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$.

Below we define the notion of a quasi-filiform Leibniz algebra.

Definition 4. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called quasi-filiform if $\mathcal{L}^{n-2} \neq \{0\}$ and $\mathcal{L}^{n-1} = \{0\}$, where $n = \dim \mathcal{L}$.

Given an n-dimensional nilpotent Leibniz algebra $\mathcal{L}$ such that $\mathcal{L}^{s-1} \neq \{0\}$ and $\mathcal{L}^s = \{0\}$, put $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, and $gr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{s-1}$. Due to $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$ we obtain the graded algebra $gr(\mathcal{L})$. If $gr(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}$ are isomorphic, $gr(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}$, we say that $\mathcal{L}$ is *naturally graded.*

Let x be a nilpotent element of the set $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^2$. For the nilpotent operator of right multiplication $\mathcal{R}_x$ we define a decreasing sequence $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, where $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, which consists of the dimensions of Jordan blocks of the operator $\mathcal{R}_x$. On the set of such sequences we consider the lexicographic order, that is, $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_t)$ iff there exists $i \in \mathbb{N}$ such that $n_j = m_j$ for any $j < i$ and $n_i < m_i$.

Definition 5. The sequence $C(\mathcal{L}) = \max\limits_{x \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^2} C(x)$ is called the characteristic sequence of the algebra $\mathcal{L}$.

A quasi-filiform non Lie Leibniz algebra L is called an algebra of the type I (respectively, type II) if there exists an element $x \in L \setminus L^2$ such that the operator $\mathcal{R}_x$ has the form $\begin{pmatrix} J_{n-2} & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ (respectively, $\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_{n-2} \end{pmatrix}$).

The study of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra of corresponding type from Theorems 1 and 2 can be simplified, as follows (see [5]):

Proposition 1. Let L be a naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra, then it is isomorphic to one of the algebras from the following non isomorphic families

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2, & [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \quad [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = -e_4 + \beta e_2, & [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_3, e_3] = \gamma e_2, & [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i \alpha e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

where $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ is a basis of the algebra; moreover, in the algebra $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ if n is odd, then $\alpha \in \{0,1\}$, if n is even, then $\alpha = 0$.

Remark 1. The algebras given in Theorem 1 and 2 under the conditions of Proposition 1 are of the form:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}(0,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{1,\beta}; & \mathcal{L}(0,\beta,1) := \mathcal{L}_n^{2,\beta}; & \mathcal{L}(1,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{3,\beta}; & \mathcal{L}(1,0,\gamma) := \mathcal{L}_n^{4,\gamma}; \\ \mathcal{L}(1,\beta,\gamma) := \mathcal{L}_n^{5,\beta,\gamma}; & \mathcal{G}(0,0,0) := \mathcal{L}_n^{1}; & \mathcal{G}(0,1,0) := \mathcal{L}_n^{2}; & \mathcal{G}(0,0,1) := \mathcal{L}_n^{3}; \\ \mathcal{G}(0,2,1) := \mathcal{L}_n^{4}; & \mathcal{G}(1,0,0) := \mathcal{L}_n^{5}; & \mathcal{G}(1,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{6,\beta}; & \mathcal{G}(1,0,\gamma) := \mathcal{L}_n^{7,\gamma}; \\ \mathcal{G}(1,\beta,\gamma) := \mathcal{L}_n^{8,\beta,\gamma}. & & & \end{array}$$

The following theorem is the main result of this note.

Theorem 1. The naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra admit a local automorphisms which are not automorphisms.

Литература

1. **Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.** *Local Automorphisms on Finite-Dimensional Lie and Leibniz Algebras.* Algebra, Complex Analysis and Pluripotential Theory, USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 264 (2017), p. 31–44.

2. **Ayupov Sh.A., Omirov B.A.** *On some classes of nilpotent Leibniz algebras* Siberian Math. J. 42 (2001) 15-24.

3. **Becker T., Escobar J., Salas C., Turdibaev R.** *On Local Automorphisms of sl_2.* Uzbek Mathematical Journal. (2) (2019), p. 27–34.

4. **Costantini M.** *Local automorphisms of finite dimensional simple Lie algebras.* Linear Algebra and its Applications. 562 (2019), p. 123–134.
5. **Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.** *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.* Journal of Symbolic Computation, 44(5), 2010, pp.527-539.

УДК 512.554

Разрешимые расширения естественным образом градуированных квазифилиформных алгебр Лейбница

Адашев Ж.К.[1], Тайманова Э.Л.[2]
[1] Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан; adashevjq@mail.ru
[2] Чирчикский государственный педагогический университет, Ташкент, Узбекистан;

Из классической теории алгебр Ли известно, что произвольная конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль разлагается в полупрямую сумму максимального разрешимого идеала и её полупростой подалгебры (теорема Леви-Мальцева), причём полупростая алгебра Ли разлагается в прямую сумму простых идеалов.

Аналог теоремы Леви для алгебр Лейбница был доказан Д.Барнсом [1] в 2011 году (ранее в 1971 году А.Блохом [2]).

В 1945 году А.И.Мальцев [3] доказал, что разрешимая алгебра Ли определяется ее нильрадикалом. Далее, в 1963 году Г.М.Мубаряксзянов [4] разработал метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и ниль-независимых дифференцирований нильрадикала.

Аналог результата Г.М.Мубаряксзянова был применен к алгебрам Лейбница в работе [5].

Отметим, что всякая не нильпотентная разрешимая алгебра Лейбница R имеет нетривиальный максимальный нильпотентный идеал N, который называется нильрадикалом. Обозначим через Q – дополняющее векторное пространство к нильрадикалу N, т.е. $R = N \oplus Q$. Более того, аналогично случаю алгебр Ли для разрешимой алгебры Лейбница R справедливо неравенство $dimN \geq \frac{1}{2}dimR$. Кроме этого, имеет место следующее соотношение

$$dimQ \leq dimN - dim([N, N]).$$

В работе [5] была получена другая оценка для размерности пространства Q, т.е. размерность дополняющего векторного пространства Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N.

Целью данной работы является классификация разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикалом которых являются естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры. Надо отметить, что серии работ посвящены классификации разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z]] - [[x, z], y] \quad - \quad \text{тождество Лейбница},$$

где $[-, -]$ умножение на L.

Заметим, что если в L выполняется тождество $[x, y] = -[y, x]$, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби.

Для произвольной алгебра Лейбница L определим нижний центральный ряд:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L^1],\ k \geq 1.$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной* если существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $L^p = \{0\}$.

Приведем определение естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Лейбница.

Конечномерная алгебра Лейбница L называется *квази-филиформной*, если

$$L^{n-2} \neq \{0\} \text{ и } L^{n-1} = \{0\}, \text{ где } n = dimL.$$

Пусть L–конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $L_i = L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, где s–нильиндекс алгебры L, и обозначим $gr(L) = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_{s-1}$. Тогда используя $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$ установливается вложение $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$, которое определяет градуированную алгебру grL.

Пусть x – элемент множества $L \setminus L^2$. Для оператора правого умножения $\mathcal{R}_x$ определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора $\mathcal{R}_x$. На множестве таких последовательностей рассмотрим лексикографический порядок.

Определение 3. Последовательность $C(L) = \max\limits_{x \in L \setminus L^2} C(x)$ назовём характеристической последовательностью алгебры L.

Пусть $L-$ n-мерная естественным образом градуированная квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница, имеющая характеристическую последовательность $(n-2, 1, 1)$ или $(n-2, 2)$. Первый случай (случай 2-филиформный) изучался в [6] и второй в [7].

Найдены 64 разрешимые алгебры Лейбница нильрадикал которых являются n-мерной естественно градуированной квази-филиформной алгеброй Лейбница с размерностью дополняющего пространства к нильрадикалу равной единице. А также найдены 10 разрешимых алгебр Лейбница нильрадикал которых являются n-мерной естественно градуированной квази-филиформной алгеброй Лейбница с размерностью дополняющего пространства к нильрадикалу равном двум.

Литература

1. **Barnes D.W.** *Some theorems on Leibniz algebras.* Communications in Algebra. -2011. -Vol. 39. -P. 2463-2472.

2. **Блох А.** *Об одном обобщении понятия алгебры Ли.* ДАН. СССР. -1965. -Т. 165(3). -С. 471-473.

3. **Мальцев А.И.** *О разрешимых алгебрах Ли.* Изв. Акад. Наук СССР. -1945. N. 9. -С. 329-356.

4. **Мубаракзянов Г. М.** *О разрешимых алгебрах Ли.* Изв. вузов. Матем., -1963, N. 1, 114-123.

5. **Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A.** *Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical.* Linear and Multilinear Algebra. -2013. -Vol. 61(6). -P. 758-774.

6. **Camacho, L.M., Gómez, J.R., González, A.J., Omirov, B.A.** *Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras.* Comm. Algebra. -2010. -Vol.38(10). -P.3671-3685.

7. **Camacho, L. M., Gómez, J. R., González, A. J., Omirov, B. A.** *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.* J. Symbolic Comput. -2009. -Vol. 44(5). -P.527-539.

УДК 511.325

Проблема Варинга для девяти почти пропорциональных кубов

Азамов А.З.

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан;

asliddinkhon@mail.ru

Аддитивные задач и с почти пропорциональными слагаемыми сформулировал и впервые изучил английский математик Мейтленд Райт в тридцатые годы прошлого века. К аддитивным задачам, которые он исследовал с почти пропорциональными слагаемыми, относятся теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырёх квадратов натуральных чисел и её обобщение, предложенное Варингом в 1770 г., которое утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нём базис конечного порядка $G(n)$, то есть каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированную величину $G(n)$, называемую порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди. Мейтленд Райт [1] исследуя проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми, в частности доказал:

- если γ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 — произвольные положительные числа, $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4 = 1$, $N = 2^{\xi}N_1$, N_1 — нечётное целое число, $N_1 > N_0 = N_0(\gamma, \mu_1, \ldots, \mu_4)$, и выполняется условие

  $$|x_i^2 - \mu_i N| \leq \gamma\mu_i N, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

  тогда число N представимо в виде

  $$N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2;$$

- пусть $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — фиксированные положительные числа, $\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1$, $r \geq r_0$,

  $$0 < \beta < \alpha = \min\left(\frac{r-4}{4(r-3)},\ \frac{r-2}{2(r-1)}\right), \qquad \gamma = \frac{r}{k} - 1 - (r-1)\beta,$$

  $I(N)$ — число решений уравнения (1) относительно $x_1, \ldots, x_r$ с условием $|x_i^n - \mu_i N| \leq A_i N^{1-\beta}$, тогда справедлива асимптотическая формула

  $$I(N) = \frac{c\left(\prod \mu_i\right)^{\alpha-1}}{n^r\Gamma(r)} S(N)N^{\gamma} + O\left(N^{\gamma-d}\right),$$

  где $c = c(A_1, \ldots, A_s)$ — абсолютная постоянная, $d = d(r, \beta) > 0$.

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, так как при $\mu_1 = \ldots = \mu_r$ аддитивная задача с почти пропорциональными слагаемыми превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональ-ными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \leq q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leq P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Для произвольного фиксированного n поведения коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах было исследовано З.Х.Рахмоновым и его учениками в работах [2,3]. Воспользовавшись результатами этих работ, были решены следующие аддитивные задачи с почти равными слагаемыми:

- проблема Варинга с почти равными слагаемыми в случаях $n = 3, 4, 5$, точнее были найдены [3,4], асимптотические формулы для количество решений диофантова уравнения (5), с условиями

$$\left| x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1} \right)^{\frac{1}{n}} \right| \leq H, \qquad i = 1, \ldots, 2^n + 1, \qquad H \geq N^{\frac{1}{n} - \theta(n) + \varepsilon};$$

где

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \qquad \theta(4) = \frac{1}{108}, \qquad \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

- обобщение тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

при $n = 2, 3, 4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \qquad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \qquad H \geq N^{1 - \theta(n)} \ln^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \qquad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \qquad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}.$$

Доклад посвящён выводу асимптотической формулы в проблеме Варинга для девяти почти пропорциональных кубов [5].

Теорема. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $\mu_1, \ldots, \mu_9$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_9 = 1,$$

$I(N, H)$ — число представлений N суммою девяти кубов чисел x_i, $i = \overline{1, 9}$ с условиями

$$|x_i - (\mu_i N)^{\frac{1}{3}}| \leq H, \qquad i = \overline{1, 9},$$

Тогда при $H \geq N^{\frac{3}{10} + \varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N, H) = \mathfrak{B}(N) S(N) \frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{H^8}{N^{\frac{2}{3}} \ln^8} \right),$$

где $\mathfrak{B}(N)$ – абсолютная постоянная являющиеся значением особого интеграла, $S(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходить некоторое число $c(N) > 0$.

Литература

1. **Wright E.M.** *The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares.Ъ - The Quarterly Journal of Mathematic.* - 1936. - V. 7. - Is. 1. P. 230–240.
2. **Рахмонов З.Х.** *Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми.* - Математические заметки. - 2014. - Т.95. - В .3. - С. 445—456.
3. **Рахмонов З.Х., Н.Н. Назрублоев, Рахимов А.О.** *Короткие суммы Г.Вейля и их приложения.* - Чебышевский сборник. - 2015. - Т. 16. - В. 1(53). - С. 232-247.
4. **Рахимов А.О.** *Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвёртого порядка в малых дугах* - Доклады НАН Таджикистана. - 2015. – Т. 58. - № 8. - С. 674–677.
5. **Азамов А.З.** *Проблема Варинга для девяти почти пропорциональных кубов* - Доклады НАН Таджикистана. 2022. Т. 65. - № 5-6. - С. 286–291.

УДК 511.348

О количестве решении пары линейных уравнений с четырмя простыми переменными

Аллаков И.[1], Абраев Б.Х.[2]
[1,2]Термезский государственный университет, г.Термез
iallakov@mail.ru babrayev@mail.ru

Пусть $a_{ij}(i=1,2; j=1,2,3,4)$, b_1, b_2- целые числа и p_1, p_2, p_3, p_4- простые числа. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4, i = 1,2; \tag{1}$$

при условии:

а) для любого простого p существуют такие целые числа l_1, l_2, l_3, l_4 с условиями $1 \le l_1, l_2, l_3, l_4 \le p-1$, которые удовлетворяют системе линейных сравнений:

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + a_{i3}l_3 + a_{i4}l_4 \equiv b_i(\mathrm{mod} p), i = 1,2;$$

b) существуют такие действительные положительные числа y_1, y_2, y_3, y_4, для которых выполняются равенства

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 = b_i, i = 1,2.$$

Обозначим $B = 3\max|a_{ij}|$, $i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$.

Пусть $W_{2,4}(X)$ – множество пар $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $1 \le b_1, b_2 \le X$, которые удовлетворяют условиям а) и b). $U_{2,4}(X)-$ множество $\bar{b} = (b_1, b_2) \in W_{2,4}(X)$, которое нельзя представить в виде (1) и $E_{2,4}(X) = cardU_{2,4}(X)$. В работе [1] доказано, что для достаточно больших X, справедлива оценка

$$cardW_{2,4}(X) > 1,69954 \cdot X^2 B^{-20}\Big(e^{\gamma_0+10}\ln\ln B + 2,507 \cdot e^{10}(\ln\ln B)^{-1}\Big)^{-1}$$

и работе [2] исследовано разрешимость системы линейных уравнений состоящей из n уравнений с $n+1$ неизвестными в простых числах.

В настоящей работе оценивается количество решений система (1) в простых числах при заданном $\bar{b} = (b_1, b_2)$.

Пусть $R(\bar{b})-$ количество решений система (1) в простых числах $p_j < X$ и $\frac{X}{2} \le b_1, b_2 < X$. Для достаточно малого положительного числа δ положим

$$X \ge B^{\exp(\delta^{-2})},\ Q = N^{\delta},\ L = NQ^{-\frac{1}{100}} \text{ и } \mathrm{T{=}Q}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}},\ N = 18B^3X,\ \ B \le Q^{\delta}.$$

Основным результатам работы является следующая:

Теорема Если $X-$ достаточно большое, $\delta(0<\delta<1)$ достаточно малое вещественные числа, тогда имеют места следующие утверждение:

1) если не существует $\tilde{\beta}-$ исключительный нуль $L-$ функции Дирихле, то для всех $\bar{b} \notin U_{2,4}(X)$, $\bar{b} \in W_{2,4}(X)$ за исключением не более чем

$$E_{2,4}(X) < X^{2-\delta c_1}, \text{ где } c_1 = 1 + \frac{3}{\exp(\delta^{-2})}$$

векторов из них справедлива оценка

$$R(\bar{b}) > \frac{X^{2-\left(2\delta^2+\frac{\delta}{100}\right)c_1}}{\ln^4 X}\left(1 - X^{-\frac{13\delta}{20}}\right);$$

2) если существует $\tilde{\beta}-$ исключительный нуль L функции Дирихле, т.е $\delta=1$, и $\tilde{r} \leq Q^{\frac{1}{18}}$, то для всех $\overline{b} \notin U_{2,4}\left(X\right)$, $\overline{b} \in W_{2,4}\left(X\right)$ за исключением не более чем $E_{2,4}(X) < X^{2-\frac{c_1}{3}}$ векторов из них справедлива оценка

$$R(\bar{b}) > \frac{X^2}{\ln^4 X}\left(X^{-\left(2\delta+\frac{109}{900}\right)c_1} - X^{-\frac{c_1}{8}}\right);$$

3) если существует $\tilde{\beta}-$ исключительный нуль L функции Дирихле, т. е $\delta=1$, и $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{18}}$ то для всех $\overline{b} \notin U_{2,4}\left(X\right)$, $\overline{b} \in W_{2,4}\left(X\right)$ за исключением не более чем $E(X) < X^{2-\frac{c_1}{36}}$ векторов из них справедлива оценка

$$R(\bar{b}) > \frac{X^{2-\frac{c_1}{8}}}{\ln^4 X}\left(X^{-\left(2\delta+\frac{391}{3600}\right)c_1} - 1\right).$$

Далее, приведем схему доказательство теоремы. Пусть $\chi-$ характер Дирихле по модулю $q \leq T$, $\Lambda(n)-$ функция Мангольдта, определяемый равенством

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, \text{ если, } n = p^m, p - \text{простое, } m > 0 - \text{ целое;} \\ \qquad 0, \text{ если, } \ n \neq p^m. \end{cases}$$

Положим:

$$\begin{cases} S(y) = \sum\limits_{\frac{X}{2} \leq n \leq X} \Lambda(n)e(ny), \qquad S_\chi(y) = \sum\limits_{\frac{X}{2} \leq n \leq X} \Lambda(n)\chi(n)e(ny), \\ I(y) = \int\limits_{\frac{X}{2}}^{X} e(xy)dx, \ \tilde{I}(y) = \int\limits_{\frac{X}{2}}^{X} x^{\tilde{\beta}-1}e(xy)dx, \ I_\chi(y) = \int\limits_{\frac{X}{2}}^{X} e(xy) \sum\limits_{|\gamma| \leq T}{}' x^{\rho-1}dx, \end{cases}$$

где $e(x) = e^{2\pi ix}$, $\tilde{\beta} > 1 - c(\ln T)^{-1}-$ исключительный нуль функции $L(s,\chi)$, т.е. единственный вещественный нуль $L-$ функции Дирихле, возможно существующий для одного характера $\chi(\mathrm{mod} q)$, $\sum'_{|\gamma| \leq T}-$ означает суммирование по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ (кроме $\tilde{\beta}$) функции $L(s,\chi)$, лежащей внутри области: $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1(\ln T)^{-1}$, $|\gamma| \leq T$, $\chi(n)-$характер Дирихле по модулю q, $\Lambda(n)-$ функция Мангольдта.

Для $1 \leq h \leq q \leq Q$, $\gcd(h,q) = 1$ полагая, что $\tau = T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$ интервал $[\tau, 1+\tau]$ делим на основные M_1 и дополнительные M_2 под интервалы (более подробно см. [3]). Далее, согласно деление интервал $[\tau, 1+\tau]$, интеграл $I(\bar{b})$ можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$I(\bar{b}) = \int\limits_{\tau}^{1+\tau}\int\limits_{\tau}^{1+\tau} e\left(-\bar{x}_b\right)\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 = \left(\iint\limits_{M_1} + \iint\limits_{M_2}\right) e\left(-\bar{x}_b\right)\prod_{j=1}^{4} S(\bar{x}_j)dx_1dx_2 = I_1(\bar{b}) + I_2(\bar{b}).$$

Далее, учитывая неравенство

$$R(\bar{b}) \geq \frac{I_1(\bar{b})}{\ln^4 X} - \frac{|I_2(\bar{b})|}{\ln^4 X},$$

а затем подставляя в нем соответствующие оценки I_1 и I_2 получим утверждение теоремы.

Литература

1. **Abrayev B.Kh., Allakov I.** *On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers.* T.: //Uzb.mat.jurnal.-2020.№3.C.16-24.

2. **Allakov I.** *On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers,* Izv.Vuzov.Math., 2006. №9. P.10-16.

3. **Allakov I.** Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. 2021. Изд. "Сурхан нашр" -160с.

УДК 519.644

Все смежные совершенные формы с второй совершенной формы Вороного.

Гуломов О. Х.[1], **Нолалиев С.**[2], **Жураев Э.**[2],**Маматкулов Ж.**[2]
[1]Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистана,
[2]Термезский государственный университет, noralievsanjar@gmail.com

Задача классификации целочисленных квадратичных форм имеет долгую историю, на протяжении которой многие математики внесли свой вклад в ее решение. Бинарные формы были всесторонне изучены Гауссом. Он и позднейшие исследователи наметили также основные пути решения проблемы классификации тернарных форм и форм более высоких размерностей. Величайшими достижениями последующего периода явились глубокое развитие теории рациональных квадратичных форм и проведенная Эйхлером полная классификация неопределенных форм в размерностях 3 и выше в терминах спинорных родов.

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскание совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметические минимумы положительных квадратичных форм. Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики (Эрмит, Гаусс, Коркин, Золотарев, Минковский, Вороной, Венков, Делоне, Рышков, Малышев, Барнс, Владимиров, Скотт, Лармоут, Стаси, Барановский, Шушбаев, Анзин, Умаров и др.).

Классическая задача Вороного отыскания совершенных форм, тесна связанная с известной проблемой Эрмита о нахождении арифметического минимума положительных квадратичных форм, являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики. Они появились в работах С.Л.Соболева и Х.М.Шадиметова в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул.

В настоящей работе с помощью усовершенствованного алгоритма Вороного найдены все смежные совершенные формы с второй совершенной формы Вороного от пяти переменных. Применение усовершенствованного алгоритма Вороного приводит быстрее к цели, чем сам алгоритм Вороного, так как здесь объем вычислений резко сокращается.

Пусть задана положительно-определенная квадратичная форма от n переменных $x_1, ..., x_n$:

$$f \equiv f\,(x) \equiv f\,(x_1,\ ...,\ x_n) = \sum_{1\leq\ i,j\ \leq n} a_{i\,j}\,x_i\,x_j \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ij,}$ с определителем $\det f = \det\,(a_{ij})0$ и $m = m(f)$ - арифметический минимум формы fдостигается в $2s$ целых точках

$$\pm\ m_k = \pm\,(m_{1k}, ..., m_{nk})\,,\ \text{k=1}, ..., \text{s}, \tag{2}$$

называемых представлениями минимума m формы f. Точки (2) мы иногда будем называть минимальными векторами формы f, а матрицу

$$M(f) = \begin{pmatrix} m_{11}\ m_{21}\ldots m_{n1} \\ m_{12}\ m_{22}\ldots m_{n2} \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ldots \\ m_{1s}\ m_{2s}\ldots m_{ns} \end{pmatrix}$$

минимальной матрицей формы f.

Положительно-определенная квадратичная форма f называется совершенной формой (см. [1]), если она полностью задается значением своего арифметического минимума и его представлениями минимума (2) ,т. е., если система уравнений.

$$\sum a_{ij}m_{ik}m_{jk} = m\ \text{k=1}, ..., \text{s}$$

относительно неизвестных a_{ij}имеет единственное решение.

Две положительно-определенная квадратичная форма $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными $f_1 \cong f_2$), если существует целочисленная унимодулярная подстановка переменных $x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{ij} y_i$ $(x = Uy)$, переводящая форму $[f_1(x)$ в $f_2(x)$, т.е $f_1(Uy) = f_2(y)$, или тоже самое, что $f_1 U = f_2$.

В случае $f_1 = f_2 = f$ подстановка U называется автоморфизмом формы f, т.е. $fU = f$.

Как известно, что число неэквивалентных совершенных форм от n переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает задача: для заданного n найти все неэквивалентные совершенные формы.

Основным результатом настоящие работе является польной доказательство следующее предложение.

Теорема. Окрестность Вороного совершенной формы состоит только из одной совершенной формы φ_1^5, т.е. $VN\left\{\varphi_2^5\right\} = \left\{\varphi_1^5\right\}$.

Литература

1. **Вороной Г.Ф.** *О некоторых свойствах положительных квадратичных форм.* Соб. соч., Т.2, Киев –1952, Изд-во АН УССР, с. 171–238.

2. **Гуломов О.Х., Шодиев С.Ю.** *Вычисление совершенных форм от четырех переменных с помощью усовершенствованного алгоритма Вороного.* Чебышевский сборник, – 2021.– №2–2(42), –С. 59–63 Math-Net.Ru.

3. **Gulomov, O.Kh., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh., Turaev, F.Zh.** *Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables.* Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithmsthis link is disabled, – 2021.– 28(1), стр. 15–23.

4. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* Москва: Наука,–1974. 808 с.

УДК 512.544.23

О НЕВЫЧИСЛИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИХ ОБЛАСТЕЙ ЦЕЛОСТНОСТИ

Ибрагимов Ф.Н., Шарофбоева Ш.А.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан farkh-i@yandex.com

В настоящей заметки доказывается, что бесконечная вычислимая область целостности обладает невычислимым негативным представлением.

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [3].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} = (A, f_1, \ldots, f_r)$-алгебра. Говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ является термально сепарабельной, если для любого конечного множества термов $\{t_1(x,y), \ldots, t_n(x,y)\}$ с параметрами изA, для любого подмножества $J \subseteq \{1, \ldots, n\}^2$и $\forall a \in A$ имеет место:

$$\mathfrak{A} \vDash \bigwedge_{(k,l)\in J} t_k(a,a) \neq t_l(a,a) \to \exists b_1 \exists b_2 (b_1 \neq b_2) \wedge (\bigwedge_{(k,l)\in J} t_k(b_1,b_2) \neq t_l(b_1,b_2)).$$

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{A} = (A, f_1, \ldots, f_r)$- бесконечная алгебра и для любых термов $t_1(x)$ и$t_2(x)$ с параметрами из A множество $\{a \in A : \mathfrak{A} \vDash t_1(a) = t_2(a)\}$ либо конечно либо совпадает с A. Тогда $\mathfrak{A}$является термально сепарабельной.

Предложение 2. Любая бесконечная область целостности термальна сепарабельна.

Идея доказательства. Каждый терм $t(x)$ с параметрами из области целостности представляет собой полином от одной переменной с коэффициентами из области целостности. Каждый ненулевой полином над областью целостности имеет конечное число нулей. Следовательно, выполняется условия предложения 1 и область целостности термальна сепарабельна.

В работе [2] Б.Хусаинов, Т.Слэман и П.Семухин доказали, что любое бесконечное поле, имеющее вычислимое представление обладает невычислимым негативным представлением.

Следующий результат является его обобщением.

Теорема 1. Любая вычислимая бесконечная область целостности изоморфна невычислимой негативной области целостности.

Заметим, что любое позитивное представление поле является вычислимым. Более того,в [1] доказано, что всякие позитивные представления алгебр конечного индекса являются вычислимыми.

Следующая теорема показывает, что в отличие от полей, все позитивные представления которых вычислимы, позитивные области целостности не обязаны быть вычислимыми

Теорема 2. Существует невычислимая позитивная область целостности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Kasymov, Positive algebras with congruences of finite index, Algebra and Logic, 30 (1991), No 3, pp. 293-305.

[2] B.Khoussainov, T.Slaman, P.Semukhin, $\prod_1^0$ −presentations of algebras, Arch. Math. Logic, 45(6), pp.769-781, 2006.

[3] Р.Соар. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань, 2000.

УДК 517.348

О преставление суммой квадрата, куба и шестой степени натуральных чисел.

Имамов О.Ш.
Термезский государственный университет
oybekimamov000@gmail.ru

Введение.

Предположим, что k_1, k_2 , ..., k_s s целых чисел, таких, что

$$2 \le k_1 \le k_2 \le \dots \le k_s$$

и

$$\sum_{j=1}^{s} k_j^{-1} > 1. \tag{1}$$

Тогда уравнение

$$\sum_{j=1}^{s} x_j^{k_j} = n \tag{2}$$

разрешимо в натуральных числах $x_1, x_2, ..., x_s$ всякий раз, когда:
(a) для каждого простого p и большого k уравнение (2) разрешимо по модулю p^k с $p \dagger x_j$ для некоторого j;
(b) n достаточно велико.
Вопросы такого рода очень тщательно разрабатывались; эта работа, в сущности, еще не завершена, потому что рассмотрение малых дуг при нынешних знаниях, вообще говоря, требует, чтобы сумма $\sum k_j^{-1}$ была значительно больше единицы.

Наименьшей величиной s, для которой условия (1) выполняются, является $s = 3$. Причем окончательное решение получено только при $k_1 = k_2 = k_3 = 2-$ это классическая теорема Лежандра о суммах трех квадратов. Однако во всех остальных случаях показано, что почти все числа представимы в виде (2). Случаи $k_1 = k_2 = 2$ и $k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = 3$ рассмотрели Дэвенпорт и Хельбронн (1937a,b), случай $k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4-$ Рот (1949), а случай $k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 5-$ Вон (1980a). В настоящая работа изучено число представлений суммой квадрата, куба и шестой степени натуральных чисел и доказано теоремы.

Пусть $E(X)$-означает количество натуральных чисел, не превосходящих X и не являющихся суммой квадрата, куба и шестой степени натуральных чисел.

Теорема 1. Существует положительное число δ, такое, что $E(X) \ll X^{1-\delta}$.

Теорема 2.Существует положительная постоянная δ, такая, что для каждого достаточно большого n $R(m) = J(m)\sigma(m,)$для всех, за исключением $\ll n^{1-\delta}$, значений m, удовлетворяющих неравенству $n < m < 2n$.

Пусть n означает большое натуральное число и $P_k = n^{\frac{1}{k}}$. $R(m,n)-$ обозначает число представлений m в виде $m = x_2^2 + x_3^3 + x_6^6$ с $P_k < x_k \leq 2P_k$ и пусть

$$J(m) = \sum_{y_2}\sum_{y_3}\sum_{y_6} \frac{1}{6} y_2^{-\frac{1}{2}} y_3^{-\frac{2}{3}} y_6^{-\frac{5}{6}}$$

где переменные суммирования удовлетворяют условиям $P_k^k < y_k \leq (2P_k)^k$ и $y_2 + y_3 + y_6 = m$ Определим также (см.[1])

$$S_k = S_k(q,a) \leq \sum_{t=1}^{q} e(\frac{at^k}{q})$$

$$A(m,q) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} q^{-3} S_2 S_3 S_6 e(\frac{-am}{q})$$

и

$$\sigma(m,x) = \sum_{q<x} A(m,q)$$

Докажем теорема 2.

Пусть $h_k = h_k(\alpha) = \sum\limits_{P_k<x<cP_k} e(\alpha x^k)$ $\delta = 10^{-3}$ $P = n^{\frac{1}{6}+3\delta}$, $U = \left(\frac{P}{n}, 1 + \frac{P}{n}\right)$. Тогда $R(m) = \int\limits_U h_2(\alpha)h_3(\alpha)h_6(\alpha)e(-\alpha m)d\alpha$.

При $1 \leq \alpha \leq q \leq P$ и $(a,p) = 1$ определим большое дуге $M(q,a)$ в виде

$M(q,a) = \left\{\alpha : \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq Pq^{-1}n^{-1}\right\}$

а $M-$как объединение всех больших дуг. Как обычно, легко доказывается, что $M(q,a)$ не пересекается, и малые дуги m берутся как $U\backslash M$ (см.2). Приведем важное в дальнейшем подразделение дуг M_1.

Пусть M_1 означает подмножества M, состоящий из $M(q,a)$ с $q > n^{\frac{1}{12}}$ и пусть $m(q,a) = \left\{\alpha : \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq n^{3\delta - \frac{14}{15}}\right\}$ Теперь определим M_2как объединение $M(q,a)\backslash m(q,a)$ с условиями $1 \leq \alpha \leq q \leq n^{\frac{1}{12}}$ и $(a,q) = 1$ тогда если положить $\Theta = m \cup M_1 \cup M_2$ и $R_1(m) = \int h_2(\alpha)h_3(\alpha)h_6(\alpha)e(-\alpha m)d\alpha$ То надо будет доказать неравенство

$$\sum_m |R_1(m)|^2 \ll n^{\frac{16}{15}-3\delta}$$

И соотношение

$$\sum_{q\leq n^{\frac{1}{12}}} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} h_2(\alpha)h_3(\alpha)h_6(\alpha)e(-km) = J(m)\sigma\left(m, n^{\frac{1}{12}}\right) + o(1)$$

Первая из этих оценок будет следовать из тождества Парсеваля, если показать что

$$\int\limits_{\Theta} |h_2(\alpha)h_3(\alpha)h_6(\alpha)|^2 d\alpha \ll n^{\frac{16}{15}-3\delta}$$

Литература

1. **Аллаков И** *Оценка тригометрических сумм и их приложения к решению некоторы аддитивных задач теории чисел* Термиз, Сурхан нашр.2021, 160 с.Аллаков И.

2. **Вон Р.** *Метод Харди–Литтлвуда.* - Москва: Мир. - 1985.

3. **Подвигин** *Основы функционального анализа. Новосибирск. Изд. Новосибирский государственный университет, 2017. 184с.*

УДК 511.325

Об оценки линейных тригонометрических сумм с простыми числами на основе средних значений функций Чебышева

Нозиров О.О.[1]

[1]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан;

nozirov92@inbox.ru

В 1937 г. И.М.Виноградов [1] обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложения и вычитания из сравнительно небольшого числа других сумм, хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм, не имеющих какого-либо отношения к теории L-рядов Дирихле. В частности, такой суммой оказалась сумма

$$S(\alpha, x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) e(\alpha n),$$

где α — вещественное число и при условии $|\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$, $q \le x$, $(a, q) = 1$ была найдена оценка:

$$S(\alpha, x) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) x^{\varepsilon}, \tag{1}$$

доказательство которой проводится элементарным методам.

Впервые сумму $S(\alpha, x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [2]. Он с помощью теоремы о густоте нулей L-рядов Дирихле дал новый вариант нетривиальной оценки линейной тригонометрической суммы с простыми числами в следующей формулировке: *пусть α- вещественное число, $N \ge N_0 > 0$, $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$, где $(a, q) = 1$, $1 < q \le \tau = (\ln x)^{1000}$, $\tau^{1000} x^{-1} \le |\lambda| \le (q\tau)^{-1}$, тогда справедлива оценка:*

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \exp\left(-\frac{n}{N}\right) e(\alpha n) \right| < N(\ln N)^{-1000}.$$

Г.Монтгомери пользуясь своей оценкой средних значений функций Чебышева доказал, что

$$S\left(\frac{a}{q}, x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}} q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) (\ln xq)^{17}. \tag{2}$$

Он также доказал, что если $\eta \le x^{\frac{1}{4}}$, $\eta \le a \le x\eta^{-1}$, $|\alpha - \frac{a}{q}| \le \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, то

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}} (\ln xq)^{17}. \tag{3}$$

Р.Вон [3], применяя свою новую оценку для средних значений функций Чебышева уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, что

$$S(\alpha,x)\ll(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{7}{8}}q^{-\frac{1}{8}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})(\ln xq)^4. \tag{4}$$

и, если $\eta\le x^{\frac{1}{3}}$, $\eta\le a\le x\eta^{-1}$, $|\alpha-\frac{a}{q}|\le\eta(xq)^{-1}$, $(a,q)=1$, то

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}(\ln xq)^4. \tag{5}$$

Отметим, что оценки (2), (3), (4) и (5), полученные аналитическим методом, слабее оценки (1), полученной И.М. Виноградовым элементарным методом.

З.Х.Рахмонов [4] получил более точную оценку средних значений функций Чебышева чем оценка Р.Вона, и воспользовавшись этой оценкой он вывел оценку $S(\alpha,x)$, где множитель x^{ε} в (1) заменяется на конечную степень логарифма от xq, то есть:

$$S(\alpha,x)\ll(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}})(\ln xq)^{35}. \tag{6}$$

Автору [5] удалось уточнить в оценке (6) степени логарифмов в слагаемых.

Теорема. *Пусть* $(a,q)=1$. *Тогда справедлива оценка:*

$$S\left(\frac{a}{q},x\right)\ll xq^{-\frac{1}{2}}(\ln xq)^{29}+x^{\frac{4}{5}}(\ln xq)^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(\ln xq)^{33}.$$

Следствие 1. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, $(a,q)=1$, *тогда имеет место оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll xq^{-\frac{1}{2}}(\ln xq)^{33}+x^{\frac{4}{5}}(\ln xq)^{32}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(\ln xq)^{33}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\eta\le x^{\frac{2}{5}}$, $\eta\le a\le x\eta^{-1}$, $|\alpha-\frac{a}{q}|\le q^{-2}$, $(a,q)=1$ *тогда справедлива оценка:*

$$S(\alpha,x)\ll x\eta^{-\frac{1}{2}}(\ln xq)^{33}.$$

Литература

1. **Виноградов М.М.** *Избранные труды.* - Москва. - Изд-во АН СССР. - 1952.
2. **Линник Ю.В.** *Избранные труды.* - Ленинград. - Наука. - 1980.
3. **Vaughan R.O.** *Mean value theorems in prime number theory.* - J. London Math. Soc. - 1975. - V. s2-10, pp. 153-162.
4. **Рахмонов З.Х.** *Средние значения функции Чебышева.* - Доклады Российской академии наук. - 1993. - Т. 331(3). С. 281-282.
5. **Нозиров О.О.** *О среднем значений функций Чебышева.* - Доклады Академии наук Республики Таджикистан. - 2019. - Т 62. -№ 11-12. С. 613-618.

УДК 511.325

Об оценке коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в малых дугах

Назрублоев Н.Н.
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан;
nasrullo_86@bk.ru

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде.

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, $P < Q$ через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

После создания метода тригонометрических сумм и метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова решения классических аддитивных проблем как тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема Гольдбаха-Варинга, проблема Эстермана, а также другие аддитивные задачи сводятся к двум следующим задачам:

- изучение в большие дуги $\mathfrak{M}(P)$ поведения тригонометрических сумм Г. Вейля вида
$$S_k(\alpha, N) = \sum_{m \le N} \Lambda(m) e(\alpha m^k), T_n(\alpha, N) = \sum_{x \le N} e(\alpha x^n);$$
- получение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Решение вышеназванных классических проблем становится гораздо труднее, если требовать, что все слагаемые почти равны, так как вместо обычных тригонометрических сумм Г. Вейля $S_k(\alpha, N)$ и $T_n(\alpha, N)$ возникают короткие тригонометрические суммы Г. Вейля вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\le x} e(\alpha m^n).$$

Более конкретно решения классических аддитивных проблем с почти равными слагаемыми сводятся к трём следующим задачам:

- изучение поведения коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha; x, y)$ и $T_n(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг $\mathfrak{M}(P)$;
- получение нетривиальных оценок этих коротких сумм в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ за исключением малой окрестности их центров;
- нахождение нетривиальных оценок этих сумм в малые дуги $\mathfrak{m}(P)$.

Поведение $T_n(\alpha; x, y)$ и $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(P)$ изучены соответственно в работах [1,2]. В работе [3] была доказана, что *если* $x \ge x_0 > 0$, $y_0 < y \le 0,01x$, $\tau(h)$ *— функция делителей,* α *– вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, *то справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \le 2y \left(4k! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^k}\right) \max_{h < y^{k-1}} \tau(h)\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}},$$

которая нетривиальна при $q \gg 2^{2k-1} 4k! \tau(y^{k-1})$, то есть в $\mathfrak{m}(y^\varepsilon)$. Доклад посвящен выводу новой оценке суммы $T_k(\alpha; x, y)$, являющиеся нетривиальной при $\mathfrak{m}(\ln y)^A$, A — абсолютная положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть* $x \geq x_0 > 0$, $y_0 < y \leq 0,01x$, α *— вещественное число,* $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a,q) = 1$, *тогда справедлива оценка*

$$|T_k(\alpha; x, y)| \leq 2y \left(2^{2k} 6kk! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^k}\right) \ln y\right)^{2^{-k}}.$$

Пусть Δ_j означает j — применение разностного оператора, так что для многочлена $f(u)$ степени n

$$\Delta_1(f(u); t) = f(u+t) - f(u), \ \ \Delta_{j+1}(f(u); t_1, \ldots, t_{j+1}) = \Delta_1(\Delta_j(f(u); t_1, \ldots, t_j); t_{j+1}).$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$\Delta_j(u^k; t_1, \ldots, t_j) = t_1 \ldots t_j p_j(u; t_1, \ldots, t_j),$$

где p_j — многочлен от u степени $k-j$ со старшим коэффициентом $k!/(k-j)!$.

Лемма 1. [3]. *Пусть*

$$T(f(u); x, y) = \sum_{x-y<u\leq x} e(f(u)),$$

где $f(u)$ – произвольный многочлен степени n. Тогда при $j = 1, \ldots, n-1$ имеет место

$$|T(f(u); x, y)|^{2^j} \leq (2y)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1|<y} \cdots \sum_{|h_j|<y} T_j, T_j = \left|\sum_{u \in I_j} e(\Delta_j(f(u); h_1, \ldots, h_j))\right|,$$

где интервалы $I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j)$ удовлетворяют соотношениям:

$$I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x-y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1],$$

$$I_j = I_j(x, y; h_1, \ldots, h_j) = I_{j-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{j-1}) \cap I_{j-1}(x - h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1}),$$

то есть интервал $I_{j-1}(x-h_j, y; h_1, \ldots, h_{j-1})$ получается из $I_{j-1} = I_{j-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{j-1})$ сдвигом на $-h_j$ всех интервалов, пересечением которых он является.

По лемме 1 при $j = k-1$ имеем

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1}-k} \sum_{|h_1|<y} \cdots \sum_{|h_{k-1}|<y} \left|\sum_{u \in I_{k-1}} e(\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \ldots, h_{k-1}))\right|,$$

$$\Delta_{k-1}(\alpha u^k; h_1, \ldots, h_{k-1}) = \alpha k! h_1 h_2 \ldots h_{k-1} \left(u + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_2 \ldots + \frac{1}{2}h_{k-1}\right),$$

где интервал $I_{k-1} = I_{k-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-1})$ удовлетворяет соотношениям

$$I_1 = I_1(x, y; h_1) = (x-y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1],$$

$$I_{k-1}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-1}) = I_{k-2}(x, y; h_1, \ldots, h_{k-2}) \cap I_{k-2}(x - h_j, y; h_1, \ldots, h_{k-2}).$$

Таким образом,

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1}-k} \sum_{|h_1|<y} \cdots \sum_{|h_{k-1}|<y} \left|\sum_{u \in I_{k-1}} e(\alpha k! h_1 h_2 \ldots h_{k-1} u)\right|.$$

В последней сумме члены с $h_1 \cdots h_{k-1} = 0$ дают вклад не более $(k-1)y(2y)^{k-2}$. Поэтому

$$|T_k(\alpha; x, y)|^{2^{k-1}} \leq (2y)^{2^{k-1}-k} \left(2^{k-1} S_k(\alpha; x, y) + (k-1)y(2y)^{k-2}\right), \qquad (1)$$

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\tau'(h)\left|\sum_{u\in I_{k-1}}e(\alpha k!hu)\right|,\quad \tau'(h)=\sum_{\substack{h=h_1\ldots h_{k-1}\\ 1\le h_1,\ldots,h_{k-1}<y,}}1\le\tau(h).$$

Применим к внутренней сумме в $S_k(\alpha;x,y)$ лемму 4 из [4] стр. 94, имея в виду, что она является линейной, сплошной, длина которой не превосходит y:

$$S_k(\alpha;x,y)\le\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\tau(h)\min\left(y,\frac{1}{2\|\alpha k!h\|}\right).$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$S_k^2(\alpha;x,y)\le\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\tau^2(h)\sum_{h=1}^{y^{k-1}}\min\left(y,\frac{1}{2\|\alpha k!h\|}\right)^2\le ky^k\ln y\sum_{h=1}^{k!y^{k-1}}\min\left(y,\frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Далее, воспользовавшись леммой 5 из [4], стр. 94, найдем

$$S_k^2(\alpha;x,y)\le 6ky^k\ln y\left(\frac{k!y^{k-1}}{q}+1\right)(y+q\ln q)\le 6kk!y^{2k}\ln y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^{k-1}}+\frac{q\ln q}{y^k}\right).$$

Подставляя эту оценку в (1), получим

$$|T_k(\alpha;x,y)|^{2^k}\le 2^{2k}(2y)^{2^k}\left(3kk!\ln y\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^{k-1}}+\frac{q\ln q}{y^k}\right)+\frac{(k-1)^2}{8y^2}\right)\le$$

$$\le(2y)^{2^k}2^{2k}6kk!\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{y}+\frac{q\ln q}{y^k}\right)\ln y.$$

Извлекая корень степени 2^{k-1}, получим утверждение теоремы.

Литература

1. **Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О.** *Короткие суммы Г.Вейля и их приложения.* - Чебышевский сборник. - 2015. - Т. 16. - В. 1(53). - С. 232-247.

2. **Рахмонов З.Х.** *Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах.* - Чебышевский сборник. - 2021. - Т. 22. -№ 5(81). - С. 176-200.

3. **Рахмонов З. Х., Азамов А.З., Нарзублоев Н.Н** *Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в малых дугах.* - ДАН Республики Таджикистан. - 2018. - Т. 61. - № 7-8. - С. 609–614.

4. **Карацуба А.А.** *Основы аналитической теории чисел.* -2-ое изд. - М.: Наука. - 1983.

УДК 511.325

Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвёртого порядка в малых дугах

Рахимов А.О.

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан;

rao8787@mail.ru

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана, основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в варианте тригонометрических сумм И.М.Виноградова является также поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\leq x}e(\alpha m^n),\ \ \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad q\leq\tau,\quad |\lambda|\leq\frac{1}{q\tau}$$

в длинных дугах и их оценка в малых дугах. Поведение $T(\alpha;x,y)$ в длинных дугах последовательно изучено в работах [1 – 3]. В настоящей работе, воспользовавшись методом Г.Вейля, найдена нетривиальная оценка короткой тригонометрической суммы Вейля четвёртого порядка.

Лемма 1. *Пусть x и y – вещественные числа,* $1\leq y<x$,

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m<x}e(\alpha m^4).$$

Тогда имеет место соотношение

$$|T(\alpha;x,y)|^8\leq 2^{11}y^4\sum_{0<k\leq y}\ \sum_{0<r\leq y-k}\ \sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}e(24\alpha krtm)\right|+2^{11}y^7.$$

Схема доказательства. Преобразуем $|T(\alpha;x,y)|^2$. Имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^2\leq 2\left|\sum_{x-y<m<x}\ \sum_{0<k\leq x-m}e(\alpha((m+k)^4-m^4))\right|+y.$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством $(m+k)^4-m^4=kf_1(m)+k^4$, $f_1(m)=4m^3+6km^2+4k^2m$, найдем

$$|T(\alpha;x,y)|^2\leq 2\sum_{0<k\leq y}|W(k)|+y,\quad W(k)=\sum_{x-y<m\leq x-k}e(\alpha kf_1(m)).$$

Возводя обе части полученного неравенства в четвёртую степень, затем дважды последовательно воспользовавшись соотношением $(a+b)^2\leq 2a^2+2b^2$ и неравенством Коши, найдем

$$|T(\alpha;x,y)|^8\leq 2^7y^3\sum_{0<k\leq y}|W(k)|^4+2^3y^4. \tag{1}$$

Преобразуя $|W(k)|^2$, найдем

$$|W(k)|^2\leq 2\left|\sum_{0<r\leq y-k}\ \sum_{x-y<m<x-k-r}e(\alpha k(f_1(m+r)-f_1(m)))\right|+y.$$

Здесь, воспользовавшись тождеством

$$f_1(m+r)-f_1(m)=12rf_2(m)+4k^2r+6kr^2+4r^3,\quad f_2(m)=m^2+m(k+r),$$

находим

$$|W(k)|^2\leq 2\sum_{0<r\leq y-k}|W(k,r)|+y,\quad W(k,r)=\sum_{x-y<m<x-k-r}e(12\alpha krf_2(m)). \tag{2}$$

Далее, воспользовавшись тождеством $f_2(m+t)-f_2(m)=2mt+t^2+(k+r)t$ и поступая аналогично, как в случае $W(k)$, найдем:

$$|W(k,r)|^2\leq 2\sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t}e(24\alpha krtm)\right|+y. \tag{3}$$

Последовательно подставляя в (1) значения $W(k)$ и $W(k,r)$ соответственно из (2) и (3), каждый раз воспользовавшись соотношением $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ и неравенством Коши, найдем

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \le 2^{11}y^4 \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\left|\sum_{x-y<m<x-k-r-t} e(24\alpha krtm)\right| + 2^{11}y^7.$$

Теорема 1. *Пусть $x \ge x_0 > 0$, $y_0 < y \le 0,01x$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q)=1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha;x,y)| \ll y\left(q^{-\frac{1}{16}} + y^{-\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}} q + y^{-\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{16}}\ln^{\frac{1}{16}} q\right)(\ln y)^{\frac{7}{16}}.$$

Схема доказательства. Применяя к сумме по m в лемме 1 лемму 4 из [4; с. 94], имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^8 \le 2^{11}y^4 \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{0<t<y-k-r}\min\left(y, \frac{1}{\|24\alpha krt\|}\right) + 2^{11}y^7 =$$

$$= 2^{11}y^4 \sum_{n\le 24y^3}\eta(n)\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + 2^{11}y^7,$$

$$\eta(n) = \sum_{0<k\le y}\sum_{0<r\le y-k}\sum_{\substack{0<t<y-k-r\\ n=24krt}} 1 \le \tau_3(n).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 5 из [4; с. 94], получим

$$|T(\alpha;x,y)|^{16} \ll y^8 \sum_{n\le 24y^3}|\eta(n)|^2 \sum_{n\le 24y^3}\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)^2 + y^{14} \ll$$

$$\ll y^{12}\ln^7 y \sum_{n\le 24y^3}\min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^{14} \ll y^{12}\ln^7 y\left(\frac{y^3}{q}+1\right)(y+q\ln q) + y^{14} \le$$

$$\ll y^{16}\left(\frac{1}{q} + \frac{\ln q}{y} + \frac{q\ln q}{y^4}\right)\ln^7 y.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Литература

1. **Рахмонов З.Х.** *Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми.* - Математические заметки. - 2003.- Т. 74. - Вып. 4. - С. 564–572.

1. **Рахмонов З.Х.** *Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми.* - Математические заметки. - 2014. -Т. 95. - Вып. 3. - С. 445–456.

1. **Рахмонов З.Х., Нарзублоев Н.Н., Рахимов А.О.** *Короткие суммы Г.Вейля и их приложения.* - Чебышёвский сборник. - 2015. - Т. 16. - № 1(53). С. 232–247.

1. **Карацуба А.А.** *Основы аналитической теории чисел.* - Москва: Наука. – 1983.

УДК 511.325

Короткие тригонометрические суммы четвёртого порядка с простыми числами

Рахмонов Д.Д.
Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана; r.dostn@bk.ru

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q)=1, \qquad 1 \le q \le \tau, \qquad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \le P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

И.М. Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b_n e(\alpha (mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \le \tau^c(m)$, $|b_n| \le \tau^c(n)$, M, N, $U \ge N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же. Затем С.Б. Хейзелгроув, В. Статулявычус, Пан Ч.Д и Пан Ч.Б., Ж. Тао [2] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \ge x^{\theta}$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \le H$, $H = N^{\theta}$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Дж. Лю и Ж. Тао [3] как в малых дугах, так и в больших дугах получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \qquad H \ge N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

и решили задачу Хуа о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \qquad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \le H, \quad H \ge N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонову и Ф.З. Рахмонову [4] воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова получили нетривиальную оценку вида

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+151}$, где B — абсолютная постоянная.

Доклад посвящается теореме о поведении суммы $S_4(\alpha;x,y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, $\tau = y^7x^{-4}\mathscr{L}^{-b_1}$, где b, b_1 — произвольные фиксированные положительные числа.

Теорема 1. *Пусть $x \geq x_0$, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathscr{L}^b$, $\tau = \frac{y^7}{x^3}\mathscr{L}^{-b_1}$,*

$$S_4(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leq x}\Lambda(n)e(\alpha n^4), \qquad \alpha = \frac{a}{q}+\lambda, \quad (a,q)=1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Тогда при $\lambda \leq \left(32\pi x^2y^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство:

$$S_4(\alpha;x,y) = \frac{\tau(\chi_0,a,k)}{\varphi(q)}\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^4)du + O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right),$$

а при $\lambda > \left(32\pi x^2y^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{1-\frac{1}{7+\eta}}\mathscr{L}^c$, где

$$\eta = \frac{2}{11+2\sqrt{30}}, \qquad c = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}-1\right)b_1}{2\sqrt{30}-5},$$

имеет место оценка

$$S_4(\alpha;x,y) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Литература

1. **Виноградов И.М.** *Избранные труды.* - Москва: изд-во АН СССР. - 1952.
2. **Zhan Tao.** *On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes.* - Acta Math Sinica. New ser. - 1991. - V. 7. - No 3. - P. 135–170.
3. **Liu J., Zhan T.** *Estimation of exponential sums over primes in short intervals I.* - Mh Math. - 1999. - V. 127. - 27–41.
4. **Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З.** *Короткие кубические суммы простыми числами.* - Труды МИАН. - 2016. - Т. 296. - С. 220 – 242.

УДК 511.325

Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях по составному модулю

Рахмонов З.Х.
Институт математики им. А. Джураева Национальной Академии наук Таджикистана;
zrahmonov@mitas.tj

Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана имеет место оценка

$$t(x;q) = \sum_{\chi \bmod q}\max_{y\leq x}|\psi(y,\chi)| \ll x + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^2, \tag{1}$$

$$T(x;Q) = \sum_{q\leq Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leq x}|\psi(y,\chi)| \ll x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^2, \tag{2}$$

где * означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам по модулю q. При решении ряда задач теории простых чисел достаточно, чтобы для $T(x;Q)$ и $t(x;q)$ имелись оценки, близкие к оценкам (1) и (2).

А.А.Карацуба [1] создал метод решения тернарных мультипликативных задач, с помощью которого оценил самый простой случай величины $t(x;q)$ и в сочетании со своей оценкой суммы значений неглавного характера по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел решил задачу о распределении чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью в следующей формулировке.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$; $x \ge x_0(\varepsilon)$ *— достаточно большое положительное число;* q *— простое число,* $q \le x^{æ_0}$, $æ_0 = 1/(4,6+\varepsilon)$; $(a,q)=1$, $(l,q)=1$, $\mathscr{L} = \ln q$, α *— произвольное число из интервала*

$$\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\frac{\mathscr{L}}{\ln x}, 1-4,1\frac{\mathscr{L}}{\ln x}\right];$$

$x_1 \ge x^{1-\alpha}$, $x_2 \ge x^{\alpha}$; p_1, p_2 *— простые числа;* $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ *— количество чисел* $p_{\le} x_1$, $p_2 \le x_2$ *таких, что* $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$, $\delta > 0$ *— сколь угодно малое число. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{\pi(x_1)\pi(x_2)}{\varphi(q)} + O\left((x_1x_2)^{1+\delta}\, q^{-1-\frac{\varepsilon^2}{1024}}\right),$$

где константа в O *зависит только от* ε.

В 1989 г. автор [2], опираясь на метод А.А. Карацубы, элементарно доказал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + {}^{\frac{1}{2}}q)x^{\varepsilon}.$$

Этим же методом Пан Чен Донг и Пан Чен Бьяо [3] показали, что

$$T(x;Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}Q + {}^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^4.$$

Г.Монтгомери, пользуясь своей плотностной теоремой о нулях L-рядов Дирихле, доказательство которой опирается на метод большого решета, показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)(\ln xq)^{16},$$
$$T(x;Q) \ll (xQ^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2)(\ln xQ)^{11}.$$

Этот результат уточнил Р.Вон [4]. Он с помощью метода большого решета и специального представления логарифмической производной L-функции, доказал, что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}(\ln xq)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{\frac{7}{2}},$$
$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{3}{4}}Q^{\frac{5}{4}}(\ln xQ)^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^{\frac{7}{2}}.$$

Автор [5–6], в свою очередь, уточнил оценки Р.Вона. Воспользовавшись методом решения тернарных мультипликативных задач А.А.Карацубы в сочетании с новым аналитическим вариантом метода И.М.Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, доказал,что

$$t(x;q) \ll x(\ln xq)^3 + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}(\ln xq)^{34} + x^{\frac{1}{2}}q(\ln xq)^{34}m, \tag{3}$$

$$T(x;Q) \ll x(\ln xQ)^3 + x^{\frac{4}{5}}Q(\ln xQ)^{34} + x^{\frac{1}{2}}Q^2(\ln xQ)^c, \tag{4}$$

где $c = 34$, если $Q \le x^{\frac{5}{3}}(\ln x)^{-\frac{5}{3}}$, $c = \frac{7}{2}$, если $Q > x^{\frac{5}{6}}(\ln x)^{-\frac{5}{6}}$.

А.А.Карацуба в своей работе [1] также отметил, что в теореме 1 верхняя граница для q, в случае, когда q — простое число, может быть значительно увеличена, но не более, чем до $x^{æ_1}$, то есть величина

$$æ_0 = \frac{1}{4,6+\varepsilon}$$

может быть заменена на величину

$$æ_1 = \frac{1}{2,5+\varepsilon},$$

которая является следствием условной оценки (1).

Автору удалось, воспользовавшись оценкой (3), следствием оценки (4) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем», нетривиальными оценками коротких сумм значений неглавного характера χ по модулю q в последовательности сдвинутых простых чисел в случае, когда модуль примитивного характера χ_d, порождённого характером χ, является числом, свободным от кубов [7], а также в случае когда q — произвольное составное число [8], доказать теорему А.А.Карацубы о распределении чисел вида $p_1(p_2+a)$ в арифметических прогрессиях с растущей разностью при

$$æ_2 = \frac{1}{2,5+\theta+\varepsilon}, \qquad \theta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & q \text{ — число, свободное от кубов;} \\ \frac{5}{6}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $x \geq x_0(\varepsilon)$ — достаточно большое положительное число; q — натуральное число, $q \leq x^{æ_2}$, $\mathscr{L} = \ln q$, $æ_2$ определяется соотношением (5),*

$$\alpha \in \left[(\theta+\varepsilon)\frac{\mathscr{L}}{\ln x}, 1-2,5\frac{\mathscr{L}}{\ln x}\right], \qquad x_1 \geq x^{1-\alpha}, \qquad x_2 \geq x^{\alpha},$$

p_1, p_2 — простые числа; $(a,q) = (l,q) = 1$, $\pi_2(x_1,x_2,a,l)$ — количество чисел $p_1 \leq x_1$, $p_2 \leq x_2$ таких, что $p_1(p_2+a) \equiv l \pmod q$. Тогда для произвольного числа $A > 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\pi_2(x_1,x_2,a,l) = \frac{1}{\varphi(q)}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\mathrm{Li}(x_1)\mathrm{Li}(x_2) + O\left(\frac{x_1x_2}{\varphi(q)\ln x_1 \ln x_2 \mathscr{L}^A}\right),$$

где константа в O зависит только от ε.

Литература

1. **Карацуба А.А.** *Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях.* - ДАН СССР. 1970. - Т. 192. - В. 4. С. 724–727.
2. **Рахмонов З.Х.** *Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях.* - Известия АН СССР. Сер. матем. - 1989. - Т. 52. - № 1. - С. 211—224.
3. **Пан Чен Донг, Пан Чен Бьяо** *Основы аналитической теории чисел,* (на китайском языке). - Пекин. - 1991.
4. **Vaughan R.** *Mean value theorems in prime number theory.* - J. London Math. Soc. - 1975. - V. s2-10, pp/ 153—162.
5. **Рахмонов З.Х.** *Средние значения функции Чебышева.* — Доклады Российской академии наук, 1993, т. 331, № 3, с. 281—282.
6. **Рахмонов З.Х.** *Теорема о среднем значении в теории простых чисел.* — Доклады Российской Академии наук, 1996, т. 349, № 5, с. 606—607.
7. **Рахмонов З.Х.** *Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел.* — Тр. МИАН, 2017,т. 299, с. 1—27.
8. **Rakhmonov Z.Kh.** *Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes.* — In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers, 2018, Springer International Publishing, pp. 187–217.

УДК 517.98

Группы со свойством Т.

Ризоев У.Р.
Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан.
umidjonrizoev55@gmail.com

Определение 1. Пусть G – группа, K – линейное пространство. *Представлением* G в K называется гомоморфизм группы G на подгруппы $T \subset L(K) = \{A : K \to K, A$ - линейный$\}$

$$\pi : g \to T_g \in T$$

Ясно, что, при этом, выполняется $T_{gf} = T_g T_f, \ \ \forall g, f \in G$. Пусть π – представление группы G в n-мерном унитарном пространстве K. Подпространство из K назовем *инвариантным* для представление, если $T_g x \in K$, для $\forall x \in K$ и $\forall g \in G$.

Определение 2. Представление π группы G называется *неприводимым*, если для всех операторов T_g $(g \in G)$ в пространстве K не существует инвариантных, подпространств, отличные от K и от нуля. В противном случае, называется *приводимым.*

Примером приводимого представления может служить двухмерное представление группы целых чисел $\mathbb{Z}$ с $n \rightarrowtail \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Полная линейная группа векторного пространства V – это группа обратимых линейных операторов вида $T : V \to V$. Роль групповой операции играет обычная композиция линейных операторов. Эта группа обозначается как $GL(V)$.

Определение 3. Представление $\pi : G \to GL(V)$, задаваемое как $g \to E$ $(\forall g \in G)$, т.е. отображающий произвольный элемент g на единичный (т.е. тождественный) элемент $E \in GL(V)$, называется *тривиальным* представлением группы G.

Пусть G – локально компактная группа. *Дуальным пространством* группы G (обозначается $\hat{G}$) называется множество унитарных неприводимых представлений этой группы с топологией. Опишем эту топологию, точнее, опишем базис окрестностей любого представления. Пусть дано представление $g \to T_g$ в пространстве L. Выберем вектор $x \in L$, компакт в G и число $\varepsilon > 0$. Скажем, что *представление* $g \to T'_g$*, действующие в пространстве* L'*, лежит в* (x, K, ε)*-окрестности* T_g, если существует вектор $y \in L'$ такой, что

$$|(T_g x, x) - (T'_g y, y)| < \varepsilon, \qquad \forall g \in K.$$

Обозначим через $\tilde{G}$ множество всех унитарных представлений с такой же топологией. Заметим, что в замыкании любого представления лежат все его подпредставления.

Определение 4. Скажем, что группа G обладает *свойством* T, если тривиальное представление является открытым множеством в $\hat{G}$. Свойство Т эквивалентному другому свойству группы G: *если тривиальные представление лежит в замыкании представления* $P \in \tilde{G}$*, то оно входит туда прямым слагаемым.*

Теорема.Пусть G-компактная топологическая группа. Тогда группа G обладает свойством T.

Литературы

1. **Каждан Д.А.** *О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп. Функциональный анализ и его приложения.* N1, Вып.1, 1967, 71–74.
2. **Курош А.Г** *Теория групп.* М.:наука , - 1967
3. **Нейман Х** *Многообразия групп.* М.: Мир, - 1969.

УДК 511.336

Малые дуги

Сафаров А.Ш.[1], Имамов О.Ш.[2]
[1,2] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
asafarov1977@mail.ru, oybekimamov000@gmail.ru

Пусть X-достаточно большое действительное число, $M-$ множество натуральных чисел $n \leq X$, которое непредставимые в виде суммы простого числа и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии с разностью D, $E_D(X)$ – количество элементов в M, $\varepsilon-$произвольное малое положительное число $\nu = 4^{1-k}$, $\delta = \varepsilon\nu^{-1}$, будем считать, что $\delta = \frac{1}{14k}$, $\left(\varepsilon < \frac{2}{7k4^k}\right)$, $X > X_{k,\varepsilon}$, $X_{k,\varepsilon}-$ достаточно большое положительное число, $X = P^k, Q = X^{7\delta}$, $\tau = XQ^{(-1)}, \Delta = 1/\tau, Z = Q^{0,3}, L = lnX, l = lnlnX$;
$c_1, c_2 ...-$ эффективные положительные постоянные, в худшем случае зависящие от $\delta, \varepsilon, k, X$.

Постоянные в знаках $\ll$ О могут зависеть от δ, ε, k, $X_{k,\varepsilon}$. $p_i \equiv f-$ означает, что $p_i \equiv f\,(mod\ D)\,; e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$.
Далее, пусть
$R(n) = k \sum\limits_{\substack{p_1 + p_2^k = n \\ \frac{X}{3} < p_1,\ p_2^k \leq X \\ p_1 \equiv f,\ p_2 \equiv f}} lnp_1 lnp_2$ и $S_k(\alpha) = k \sum\limits_{\substack{\frac{X}{3} < p^k \leq X \\ p \equiv f}} lnp\ e\left(\gamma p^k\right)$.
Тогда

$$R(n) = \int\limits_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha)\, S_k(\alpha)\, e(-n\alpha)\, d\alpha.$$

Теперь на интервале интегрирования выделим множестве M_1больших и множество M_2 малых дуг обычным способом (см., напр. [1]) для подобных задач. В рассматриваемом случае большая дуга – это интервал $M_1(a,q) = \left(aq^{-1} - \Delta,\ aq^{-1} + \Delta\right)$, где $1 \leq q \leq Q$, $0 \leq a \leq q$ и $(a,q) = 1$. Поэтому

$$M_1 = \bigcup_{a,q} M_1(\mathrm{a}, \mathrm{q})$$

и M_2-множество тех α, для которых $-\Delta < \gamma < 1 - \Delta$ и $\alpha \notin M_1$. Таким образом, мы будем иметь

$$R(n) = R_1(n) + R_2(n), \tag{1}$$

где

$$R_1(n) = \int\limits_{M_1} S_1(\alpha)\, S_k(\alpha)\, \mathrm{e}(-\mathrm{n}\alpha)\, \mathrm{d}\alpha,\ R_2(n) = \int\limits_{M_2} S_1(\alpha)\, S_k(\alpha)\, \mathrm{e}(-\mathrm{n}\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{2}$$

Ясно что если $R(n) > 0$, то для n существует представление в виде (1) с условием (2). Покажем что $R(n) > 0$для всех n, $\frac{X}{2} < n \leq X$, с исключением не более $\ll X^{\varepsilon}\varphi^{-1}(D)$ значений n из них. Сначала рассмотрим $R_2(n)$. Покажем, что

$$\sum_{n \leq X,\quad n \equiv f_1} R_2^2(n) \ll XP^{2+\varepsilon}Q^{-2\nu}\varphi^{-3}(d), \tag{3}$$

где f_1-наименьший положительный вычет $f + f^k$ по модулю d. Согласно тождеству Парсеваля, имеем

$$\sum_{n \leq X,\quad n \equiv f_1} R_2^2(n) = \int\limits_{M_1} |S_1(\alpha)\, S_k(\alpha)|^2 d\alpha \leq m_1^2 m_2. \tag{4}$$

Здесь

$$m_2 = \int\limits_0^1 |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \ll XL\varphi^{-1}(d)\,. \qquad (5)$$

Для $m_1 = \max\limits_{M_2} |S_k(\alpha)|$из следствия 1 теоремы 1 [2] при $Q < q \le \tau$, $N = P$, $D \ll L^A$, $\varepsilon < \nu/14k$ находим

$$m_1 \ll P^{11-\varepsilon} Q^{-\nu} D^{-1}. \qquad (6)$$

Из (4), (5), (6) получим (3).

Из (3) следует, что при $k \ge 2$ количество $n \le X$, $n \equiv f_1$ для которого $|R_2(n)| \ge \varphi^{-1}(D)\, P^{1-12{,}5\varepsilon}$ не больше чем $E_D^{(1)}(X) \ll XP^{26\varepsilon-14k\varepsilon}\varphi^{-1}(D)$. Таким образом

$$R_2(n) < \varphi^{-1}(D)\, P^{1-12{,}5\varepsilon} \qquad (7)$$

для всех $n \le X$, $n \equiv f_1$ за исключением $E_D^{(1)}(X)$ значений n из них.

Литература

1. **Allakov I., Safarov A.Sh.** *On representation of numbers by sum of prime number's prime fixed degree* Uzbek Mathematical Journal, 2019, No 1, p.14-26.

2. **Аллаков И., Сафаров А.Ш.** *Об исключительном множестве суммы простого и фиксированной степени простого числа из арифметической прогрессии* Бюллетень Института математики, Узбекистан, 2019, №-5. С. 9-21

УДК 511.325

О среднем значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля с простыми числами

Фозилова Д.М.

Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан;

davlat-baht83@mail.ru

Хуа Ло–кен [1] для средних значений сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha, x) = \sum_{m \le x} e(\alpha m^n)$$

получил правильную по порядку оценку

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x)|^{2^k} d\alpha \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \le k \le n.$$

В работах [2,3] оценка Хуа Ло-кена обобщена для коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T_n(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^n),$$

при $n = 3;\ 4;\ 5$, то есть для среднего значения $T_n(\alpha; x, y)$ — сумм Г.Вейля, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, получена правильная по порядку оценка вида

$$\int_0^1 |T_n(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 2 \le k \le n,$$

и соответственно были приложены при выводе асимптотических формул в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми [4,5].

В докладе оценка Хуа Ло-кена обобщается для коротких кубических тригонометрическич сумм Вейля с простыми числами вида

$$\mathbb{S}_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<p\le x} e(\alpha p^3).$$

Теорема 1. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \le 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |\mathbb{S}_3(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \le k \le 3.$$

Основу доказательства этой теоремы составляют вышеупомянутый метод Вейля и соображение о том, что интеграл от четной степени модуля короткой суммы Вейля выражается через количество решений диофантового уравнения.

Литература

1. **Вон Р.** *Метод Харди–Литтлвуда.* - Москва: Мир. - 1985.
2. **Азамов А.З.** *Среднее значение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени.* -ДАН Республики Таджикистан. - 2011. - Т. 54. - № 1. С. 13–17.
3. **Назрублоев Н.Н.** *О среднем значении коротких тригонометрических сумм Г.Вейля пятой степени.* - ДАН Республики Таджикистан. - 2014. - Т. 57. - № 7. С. 531–537.
5. **Рахмонов З.Х., Азамов А.З.** *Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми.* - ДАН Республики Таджикистан. - 2011. - Т. 54. - № 3. С. 34–42.
5. **Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., Рахимов А.О.** *Короткие суммы Г.Вейля и их приложения.* - Чебышевский сборник. - 2015. - Т. 16. - В. 1(53). С. 232–247.

УДК 511.325

О тернарной проблеме Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми

Фозилова П.М.[1]

[1]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан;
parinoz-89@mail.ru

Английский математик Мейтленд Райт [1] сформулировал и решил ряд аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, к которым относится задача о представлении числа n в виде

$$n = m_1^2 + \ldots + m_s^2, \qquad |m_i^2 - \lambda_i n| = O(n^{1-\beta}), \qquad 0 < \beta < \alpha,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — фиксированные положительные числа, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 1$, и

$$\alpha = \frac{s-4}{4(s-3)}, \quad s = 5,\ 6,\ 7; \qquad \alpha = \frac{s-2}{2(2s-1)}, \quad s \ge 8,$$

а также задача о представимости нечетного числа n в виде

$$n = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \qquad m_i = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}}(1 + o(1)), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Аддитивные задачи с почти равными слагаемыми являются частным случаем аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми. Если в аддитивной задаче с почти пропорциональными слагаемыми $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ равны между собой, то есть $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = \frac{1}{s}$, то она превращается в задачу с почти равными слагаемыми.

Т.Эстерман доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. Эта задача исследована с более жесткими условиями [2], а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2; \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad , H \geq N^{\frac{3}{4}}\mathfrak{L}^3.$$

В [3] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть, когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \geq N^{\frac{5}{6}}\mathfrak{L}^{10}$. В работе [4] доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^2 = N, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2; \quad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H; \quad H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

где p_1, p_2 и p_3 — простые числа.

Доклад посвящен выводу асимптотической формуле для последовательности с почти пропорциональными слагаемыми, когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на куб простого числа [5].

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющее условию*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \qquad \eta = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}}, \qquad c = \frac{10476 - 4816\sqrt{3}}{39},$$

$I(N, H)$ — число решений относительно простых чисел p_1, p_2 и p_3 диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3^3 = N, \quad |p_i - \mu_i N| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad |p_3^3 - \mu_3 N| \leq H.$$

Тогда при $H = N^{1-\frac{1}{15+3\eta}}\mathfrak{L}^c$, справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{\mathfrak{S}(N)H^2}{9(\mu_3 N)^{\frac{2}{3}}\mathfrak{L}^3} + O\left(\frac{H^2}{N^{\frac{2}{3}}\mathfrak{L}^4}\right), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{(p-1)^3}\right),$$

где $\Phi(p, N) = 1 - p$ если $(p, N) = p$, и $\Phi(p, N) = 1 - p + p\rho(N, p)$ если $(p, N) = 1$, $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod{p}$.

Литература

1. **Wright E.M.** *The representation of a number as a sum of five or more squares* // The Quarterly Journal of Mathematics. - 1933. - V. 4. - Is. 1. P. 37–51.

2. **Рахмонов З.Х.** *Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми* // Математические заметки. - 2003. - Т. 74. - В. 4. С. 564–572.

3. **Рахмонов З.Х.** *Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми* // Математические заметки. - 2014. - Т. 95. - В. 3. С. 445–456.

4. **Liu J., Zhan T.** *Estimation of exponential sums over primes in short intervals I* // Mh Math. - 1999. - V. 127. P. 27–41.

5. **Фозилова П.М.** *Тернарная проблема Эстермана для кубов простых чисел с почти пропорциональными слагаемыми.* - Доклады НАН Таджикистна. - 2022. - Т. 65. - № 1-2. - С 14–23.

УДК 511.325

Оценка количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой

Хайруллоев Ш.А.
Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан; shamsullo@rambler.ru

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2} L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2} L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1]. Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right) f(1-s),$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\, s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\, s > 1$, $0 < Im\, s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1980 г. С.М. Воронин [2] доказал, что *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leq T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geq T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А.А. Карацуба [3]–[4]. Он в 1989 году доказал, что при ε и ε_1 – произвольно малых фиксированных положительных числах, не превосходящих 0.001, и $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{1}$$

В 1993 г. А.А. Карацуба [4], воспользовавшись новым усовершенствованным методом, при котором возникают почти такие же тригонометрические суммы, как при выводе оценки (1), при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0,01$, ε_1 — фиксированное число, получил более точную оценку вида

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{2}} \exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}). \tag{2}$$

Автору удалось доказать оценку (2) для коротких промежутках критической прямой, имеющих более короткую длину.

Теорема 1. Пусть ε — произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0.01, тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816}+\varepsilon}$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H\sqrt{\ln T}\exp(-c_8\sqrt{\ln\ln T}),$$

где $c_8 > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема 1 доказывается усовершенствованным методом А.А. Карацубы изложенным в работе [4], в соединение с идеями и методами работы [5]. Основным утверждением, позволяющим доказать эту теорему, является новая оценка специальных тригонометрических сумм $W = W(T)$ равномерных по параметру в терминах экспоненциальных пар [5].

Литература

1. **Davenport H.** *On the zeros of certain Dirichlet series.* J. Lond. Math. Soc. – 1936. – V. 11. – pp. 181-185 and 307-312.

2. **Воронин С.М.** *О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой* Известия АН СССР. Серия математическая. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 63–91.

3. **Карацуба А.А.** *О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой* Известия АН СССР. Серия математическая. – 1990. – Т 54. – № 2. – С. 303–315.

4. **Карацуба А.А.** *Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле* Труды МИАН. – 1994. – Т. 207. – С. 180–196.

5. **Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А., Аминов А.С.** *Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой* Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20. – Вып. 4(72). –С. 271–293.

УДК 511.325

О поведение коротких квадратичных тригонометрические сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг

Хотамова Р.Л.[1], Шарифзода М.С.[2]

[1,2]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан, г. Душанбе, Таджикистан;
hotamovarahbaroy@mail.ru.

Короткие тригонометрические суммы с простыми числами первым начал изучать И.М.Виноградов [1]. Используя свой метод оценок сумм с простыми числами в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $k = 1$ и $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, он доказал нетривиальную оценку сумму вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k).$$

Затем поведение суммы $S_1(\alpha; x, y)$ как в больших, так и в малых дугах была изучена работах [2–5] и приложена к выводу асимптотической формулы в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми.

В [6] при помощи второго момента L-функций Дирихле в критической прямой [7] при $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathfrak{L}^{1.5A+0.25b+18}$ исследовано поведение суммы $S_3(\alpha; x, y)$ в малой окрестности $|\alpha - aq^{-1}| \leq (18\pi xy^2)^{-1}$ центра больших дуг $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}^b)$.

В докладе воспользовавшись методом изложенным в работы [6], доказывается асимптотическая формула для суммы $S_2(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг.

Теорема. *Пусть $x \geq x_0$, A, c_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathfrak{L}^c$, $\tau = y^3x^{-1}\mathfrak{L}^{-c_1}$. Тогда при $\lambda \leq \left(8\pi y^2\right)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathfrak{L}^{1.5A+0.25c+18}$ имеет место оценка:*

$$S_2(\alpha; x, y) - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n=1\\(a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{an^2}{q}\right)\int_{x-y}^{x} e(\lambda u^2)d \ll y\mathfrak{L}^{-A}.$$

Литература

1. **Виноградов И.М.** *Избранные труды.* - М.: Изд-во АН СССР. - 1952..
2. **Haselgrove C.B.** *Some theorems in the analytic theory of number.* - J. London Math. Soc. - 1951. - V. 26. - P. 273–277. 3. **Статулявичус В.** *О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел.* - Вильнюс. - Ученые труды университета, сер. мат., физ. и хим. н. - 1955. - №2. - С. 5–23.
4. **Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao.** *On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III).* - Chinese Ann. of Math. - 1990. - V. 2. - P. 138–147.
5. **Zhan Tao.** *On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes.* - Acta Math Sinica, new ser. - 1991. - V. 7. - № 3. - 135–170.
6. **Рахмонов З.Х., Собиров А.А., Фозилова П.М.** *Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг.* - ДАН Республики Таджикистан. - 2020. - Т. .63. - № 5–6. С. 279-288.
7. **Zhan Tao** *On the Mean Square of Dirichlet L-Functions.* - Acta Mathematica Sinica. New Series. - 1992. V. 8. - No 2. P. 204–224.

УДК 519.17

Динамика некоторых квадратичных отображений симплекса, действующих в трехмерном симплексе

Эшмаматова Д. Б.,[1] Каримов Д. И.[2]

[1] Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан; 24dil@mail.ru

[2] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; karimov.dilshod98@gmail.com

Рассмотрим класс квадратичных стохастических операторов Лотки-Вольтерры, имеющих вид [1]:

$$V : x_k^{'} = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \qquad k = \overline{1, m}, \tag{1}$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a_{ki} = -a_{ik}, \qquad |a_{ki}| \leq 1. \tag{2}$$

Этот оператор действует в произвольном $(m-1)$ – мерном симплексе, это означает, что оператор отображает симплекс в себя, т.е. V: $S^{m-1} \longrightarrow S^{m-1}$. Из (1) можно понять, что [1] существует взаимно-однозначное соответствие между операторами Лотки-Вольтерры и кососимметрическими матрицами $A = (a_{ki})$ с коэффициентами (a_{ki}), удовлетворяющими условиям (2).

Главный минор второго порядка матрицы A имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ki} \\ -a_{ik} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Так как a_{ki}=$-a_{ik}$, то отсюда следует, что $a_{ki} \neq 0$ при $k \neq i$.
В случае, когда главные миноры четного порядка равны нулю, мы получим оператор Лотки-Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей. Этот случай возможен только в том случае, если некоторые коэффициенты кососимметрической матрицы равны нулю, т.е. $a_{ki=0}$.

Для рассмотрения отображений Лотки-Вольтерры с вырожденной матрицей введем понятие смешанного графа из [2].

Определение 1. [2]. Смешанный граф – это граф, который содержит как ориентированные, так и неориентированные ребра.

Определение 2. [2].Неориентированный граф – это граф, который не имеет ориентированных ребер, и, вообще говоря, его можно включить в состав смешанных графов.

Орграф можем рассматривать, как смешанный граф, в котором каждая симметричная пара ориентированных ребер заменяется неориентированным ребром.

Пусть $V-$ оператор Лотки-Вольтерры с кососимметрической матрицей общего положения при $m=3$.

$$V:\begin{cases} x_1^{'}=x_1(1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4),\\ x_2^{'}=x_2(1-a_{21}x_1+a_{23}x_3+a_{24}x_4),\\ x_3^{'}=x_3(1-a_{31}x_1-a_{32}x_2+a_{34}x_4),\\ x_4^{'}=x_4(1-a_{41}x_1-a_{42}x_2-a_{43}x_3).\end{cases}$$

В рассматриваемом нами случае некоторые $a_{ki}=0$.

Для того чтобы изучить характеры неподвижных точек, мы воспользуемся матрицей Якоби и ее спектром. Собственные числа матрицы Якоби найдем, решая уравнение [3]:

$$|J(x)-\lambda I|=0. \tag{3}$$

Пусть $I=\{1,2,...,m\}$, для произвольного $\alpha\subset I$.
Для основного изложения нашей работы воспользуемся теоремой из [3]:

Теорема 1. [3]. Пусть $A=(a_{ki})$ – кососимметрическая матрица. Тогда решение системы линейных неравенств

$$P=\{x\in S^{m-1}:\sum_{i=1}^{k}a_{ki}x_i\geq 0,\quad k=\overline{1,m}\}$$

и

$$Q=\{x\in S^{m-1}:\sum_{i=1}^{k}a_{ki}x_i\leq 0\quad k=\overline{1,m}\}$$

выпуклые непустые многогранники. Возьмем сужение этих множеств для произвольного $\alpha\subset I:$

$$P_\alpha=\{x\in\Gamma_\alpha:A_\alpha x\geq 0\}\quad\text{и}\quad Q_\alpha=\{x\in\Gamma_\alpha:A_\alpha x\leq 0\},$$

где A_α матрица, получающаяся из кососимметрической матрицы заменой нулями всех a_{ki}, для которых $(k,i)\notin\alpha\times\alpha$.

Пусть рассматриваемое нами отображение имеет вид:

$$V:\begin{cases} x_1^{'}=x_1(1-a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4),\\ x_2^{'}=x_2(1+a_{21}x_1+a_{23}x_3),\\ x_3^{'}=x_3(1-a_{32}x_2-a_{31}x_1),\\ x_4^{'}=x_4(1-a_{41}x_1).\end{cases} \tag{4}$$

Для нахождения множества P рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} -a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_3 \geq 0, \\ -a_{32}x_2 - a_{31}x_1 \geq 0, \\ -a_{41}x_1 \geq 0. \end{cases}$$

А для нахождения множества Q решим систему неравенств

$$\begin{cases} -a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_3 \leq 0, \\ -a_{32}x_2 - a_{31}x_1 \leq 0, \\ -a_{14}x_1 \leq 0. \end{cases}$$

В итоге мы получили следующую теорему:

Теорема 2. Для квадратичного отображения, заданного равенствами (3) имеем следующее:

– множество P :

1) $P = \{\frac{a_{13}}{a_{13} - a_{14}} \leq x_4 \leq 1\}$, если коэффициенты удовлетворяют условию $a_{14} < a_{13}$;

2) если же коэффициенты удовлетворяют $a_{14} > a_{13}$, тогда $P = \{0 \leq x_3 \leq \frac{a_{14}}{a_{14} - a_{13}}\}$.

– множество Q при произвольных $0 < a_{ki} < 1$ имеет вид:

$$\text{либо} \quad \{0 \leq x_4 \leq \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{14}}\} \quad \text{либо} \quad \{\frac{a_{14}}{a_{12} + a_{14}} \leq x_2 \leq 1\}.$$

Для наглядного примера возьмем коэффициенты кососимметрической матрицы $a_{ki} = \pm 1$, тогда система (4) имеет вид:

$$V : \begin{cases} x_1^{'} = x_1(1 - x_2 + x_3 + x_4), \\ x_2^{'} = x_2(1 + x_1 + x_3), \\ x_3^{'} = x_3(1 - x_2 - x_1), \\ x_4^{'} = x_4(1 - x_1). \end{cases} \tag{5}$$

Сделав анализ для системы (5) найдем множества

$$P = \{\Gamma_{34}\} = \{0;\ 0;\ ;\alpha;\ 1 - \alpha\}, \text{ где } \alpha \in (\frac{1}{2}; 1),$$

и

$$Q = \{\Gamma_{24}\} = \{0;\ \beta;\ 0;\ 1 - \beta\}, \text{ где } \beta \in (0; \frac{1}{2}).$$

Литература

1. **Ганиходжаев Р. Н.** *Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем.* Математические заметки. 1994. 56(5). С. 40–49.
2. **Харари Ф., Палмер Э.** *Перечисление графов.* М.: Мир, 1977. 324 с.
3. **Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.** *Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий.* Владикавказский математический журнал. 2006. 8(2). С. 12–28.

UDK 511.524

О некоторых диофантовых неравенствах, включающих простые числа из арифметиской прогрессии

Эрдонов Б.Х.
Термезский государственный университет bekmurod.erdonov@mail.ru

Известная теорема Давенпорта-Хейльброна (H.Davenport and H.Heilbronn) [1] (см.также гл. 11, [2]) гласит, что если $\lambda_1, ..., \lambda_5$ являются ненулевыми действительными числами, не все одного знака, по крайней мере с одна из соотношений λ_i/λ_j является иррациональным, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые числа $x_1, ..., x_5$ не все равны нулю, такой, что будет выполняться неравенство

$$|\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_5 x_5^2| < \varepsilon. \tag{1}$$

Результат был первоначально сформулирован Оппенгеймом на основе классической теоремы Мейера о том, что если все λ_i/λ_j являются рациональными, то левая часть (1) представляет ноль нетривиально. Теорема Давенпорта-Хейлброна позже была уточнена Бёрчом и Дэвенпортом [3], которые доказали что существует бесконечно много наборов целых чисел $x_1, ..., x_5$ удовлетворяющие неравенству

$$|\lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_5 x_5^2| < x^{-\frac{1}{2}+\delta} \tag{2}$$

где x обозначает максимальное значение $|x_j|$.

Комбинируя методы Давенпорта и Хейльбронна с методами Харди-Литтлвуда-Виноградова, знакомые по исследованию проблемы Гольдбаха, нетрудно получить аналог (1) типа

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| < \varepsilon,$$

где p_1, p_2, p_3 простые числа. Однако более сложной проблемой является вывод более точного результата аналогичное с неравенством (2), в котором ε заменяется подходящей функцией p_1, p_2, p_3. Ни первоначальный метод Давенпорта и Хейльбронна, ни более поздние модификации, предложенные Бёрчем и Давенпортом, не могут быть адаптированы непосредственно для этой цели. А.Бэкер [4] вел новую модификацию этого метода и доказал следующее:

Теорема (А.Бэйкер). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ненулевые действительные числа, не все одного знака, по крайней мере с одним из соотношений λ_i/λ_j иррационально. Тогда для любого положительного целого числа n существует бесконечно много простых чисел p_1, p_2, p_3 удовлетворяющее неравенству

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| < (logp)^{-n},$$

где p обозначает максимум из p_1, p_2, p_3.

В ходе доказательства этого результата А.Бэйкер приходит к рассмотрению уравнений типа

$$|b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3| = m, \tag{3}$$

где b_1, b_2, b_3 и m целые числа. При подходящих условиях он устанавливает существование решения такого уравнения в ограниченных простых числах p_1, p_2, p_3. Этим улучшает некоторые предыдущие работы Рихерта (см. [5]). Из особого случая $m = 0$ мы видим, что, в отличие от

(2), условие, что по крайней мере одно из соотношений λ_i/λ_j является иррациональным, является необходимым при изложении вышеупомянутой теоремы; ибо если b_1, b_2, b_3 были взаимно простыми, но b_1, b_2 оба делились на одно и то же составное число, то ясно, что (3) не было бы разрешимым.

С другой стороны, он доказал, что при условии, что только b_1, b_2, b_3 были взаимно просты и не все имеют одинаковый знак, то (5) всегда имеет решение либо с $m = 1$, либо с $m = 2$.

Отметим, что в случае $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1$ из теоремы Бэйкера следует, что для любого действительного числа α, не рационального, и любого положительного целого числа n существует бесконечно много рациональных чисел q/p, с простым числом p, такое, что $|\alpha - \frac{q}{p}| < \frac{1}{p(logp)^n}$ В настоящей работе обобщается теорема А.Бэйкера для простых чисел из арифметической прогрессии, а именно доказано.

Теорема. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ненулевые действительные числа, не все одного знака, по крайней мере с одним из соотношений λ_i/λ_j иррационально. Тогда для любого положительного целого числа n существует бесконечно много простых чисел $p_1 \equiv l_1(modD)$, $p_2 \equiv l_2(modD)$, $p_3 \equiv l_3(modD)$, удовлетворяющие неравенству $|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3| < (logp)^{-n}$, где p обозначает максимум из p_1, p_2, p_3 и $D \leq \ln^A X,\ (l_j, D) = 1$.

Литература

1. **H.Davenport and H.Heilbronn.** *On indefinite quadratic forms in five variables.* J. London Math. Soc. 21(1946) 185-193.

2. **R.C. Vaughan.** *The Hardy-Littlewood method, Second edition.* Cambridge university press, 1997.232p.

3. **B.J.Birch and H.Davenport.** *On a theorem of Davenport and Heilbronn.* Acta Mathematica. 100 (1958). 259-279.

4. **A. Baker.** *On some Diophantine inequalities involving primes.* J. Reine Angew.Math. 228(1967),166-181.

5. **H. Richert.** *Aus der additive Primzahltheorie.* J. Reine Angew.Math. 191(1953),179-198.

2 – ШЎЪБА.
МАТЕМАТИК ТАҲЛИЛ МАСАЛАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

Abdullaev J.I.,[1] Ergashova Sh.H.[2]
[1] Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan; jabdullaev@mail.ru
[2]Navoi state pedagogical institute, Navoi, Uzbekistan; sh.ergashova@mail.ru

In this work we consider Hamiltonian H_μ for a system of three quantum particles, three fermions with mass 1, with interacting neighboring nodes potentials $\mu > 0$ on a lattice $\mathbb{Z}$. In the momentum representation the total three-body Hamiltonian appears to be decomposable (see, e.g. [1],[2])

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K) dK.$$

The fiber Hamiltonian $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$ depends parametrically on the total quasimomentum $K \in \mathbb{T}$. The corresponding three-particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$$

acts in Hilbert space

$$L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : \ f(p,q) = -f(q,p) = -f(p, K-p-q) = -f(K-p-q, q)\},$$

where

$$(H_0(K)f)(p,q) = E_K(p,q)f(p,q), \quad E_K(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K-p-q), \varepsilon(p) = 1 - \cos p,$$

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-s) f(p,s) ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p-s) f(s,q) ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p-s) f(s, p+q-s) ds.$$

Two-particle Schrödinger operator $h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v$ corresponding two fermions acts in

$$L_2^o(\mathbb{T}) := \{f \in L_2(\mathbb{T}) : \ f(-p) = -f(p)\}$$

as follows [2]:

$$(h_\mu(k)f)(q) = \varepsilon_k(q) f(q) - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin q \sin s f(s) ds,$$

where $\varepsilon_k(q) = \varepsilon(\frac{k}{2} + q) + \varepsilon(\frac{k}{2} - q) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos q$.

Theorem 1. Let $\mu > 1$. Then for all $k \in \mathbb{T}$ the operator $h_\mu(k)$ has a unique simple eigenvalue

$$z_\mu(k) = 2 - \mu - \frac{\cos^2\frac{k}{2}}{\mu}$$

lying to the left of essential spectrum.

Here $z_\mu(k)$ is zero of Fredholm determinant

$$\Delta_\mu(k,z) = 1 - \frac{2\mu}{2 - z + \sqrt{(2-z)^2 - 4\cos^2\frac{k}{2}}}$$

corresponding to the operator $I - vr_0(k,z)$, where I is the identity operator, $r_0(k,z)$ is the resolvent of the operator $h_0(k)$.

The essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$ coincides [1] with the union of the range of functions $z_\mu(K-p)+\varepsilon(p)$ and $E_K(p,q)$.

Operator $H_\mu(K)$ does not have eigenvalues on the right of $E_{max}(K) = \max_{p,q\in\mathbb{T}} E_K(p,q)$.

The problem of studying the eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ is reduced to the problem of finding the fixed points of the compact self-adjoint operator $T(K,z)$.

The operator $T(K,z)$ is compact, acts in the Hilbert space $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^2) := \{(\psi_1,\psi_2) : \psi_i \in L_2(\mathbb{T}), i = 1,2\}$ as follows:

$$T(K,z) = \begin{pmatrix} T_{11}(K,z) & T_{12}(K,z) \\ T_{21}(K,z) & T_{22}(K,z) \end{pmatrix},$$

where

$$(T_{11}(K,z)\psi_1)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p,z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(K-p-s)(\cos p+\cos s)\psi_1(s)ds}{(E_K(p,s)-z)\sqrt{\Delta_\mu(K-s,z-\varepsilon(s))}},$$

$$(T_{22}(K,z)\psi_2)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p,z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(K-p-s)(\sin p+\sin s)\psi_2(s)ds}{(E_K(p,s)-z)\sqrt{\Delta_\mu(K-s,z-\varepsilon(s))}},$$

$$(T_{12}(K,z)\psi_2)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p,z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \Big[\frac{\cos s\sin(K-p-s)}{(E_K(p,s)-z)\sqrt{\Delta_\mu(K-s,z-\varepsilon(s))}} +$$
$$+\frac{\sin p\cos(K-p-s)}{(E_K(p,s)-z)\sqrt{\Delta_\mu(K-s,z-\varepsilon(s))}}\Big]\psi_2(s)ds,$$
$$T_{21}(K,z) = T_{12}^*(K,z).$$

Here $T_{12}^*(K,z)$ is adjoint operator to the operator $T_{12}(K,z)$.

Lemma 1. A number

$$z < \tau(\mu,K) = \min_{p\in\mathbb{T}}\{z_\mu(K-p)+\varepsilon(p)\}$$

is an eigenvalue of the operator $H_\mu(K)$ if and only if 1 is eigenvalue of $T(K,z)$.

Lemma 2. The number of eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ less than z is equal to the number of eigenvalues of the operator $T(K,z)$ greater than 1.

Theorem 2. There exists μ_0 such that for any $\mu > \mu_0$ the operator $H_\mu(0)$ has at least one eigenvalue below to the essential spectrum.

References

1. **Khalkhuzhaev A.M.** The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice, Russian mathematics, 9, 2017, 76-88.

2. **Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M.** The existence of eigenvalues of Schrodinger operator on a lattice in the gap of the essential spectrum, Journal of Physics.: Conf. Ser. 2070 012017. 2021. 12 p.

3. **Abdullaev J.I., Toshturdiev A.M.** Invariant subspaces of the Schrödinger operator with a finite support potential, 43, 2021, 728-737.

UDC 517.55

Estimates the Bergman kernel for classical domains $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$ and $\Re_{III}(m)$.

Abdullayev J.Sh.[1,2],

[1]Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

jonibek-abdullayev@mail.ru

In domains of $\mathbb{C}^n$ and in matrix domains of $\mathbb{C}[m \times m]$, finding the kernels of integral representations of holomorphic functions is a rather difficult problem. In classical theory, such kind kernels are usually constructed in bounded symmetric domains (see [1-4]). Some of these domains are classical domains and matrix balls associated with classical domains. A number of problems were set for these domains (see [3]): finding the transitive group of automorphisms in these matrix balls, calculating the Bergman and Cauchy-Szeg?o kernels for these domains, finding the Carleman formula, restoring the values of holomorphic functions in classical domains and in matrix balls from the values of the function on some boundary sets of uniqueness (see [3]).

The Bergman space on bounded symmetric domains is a fundamental concept in the analysis. It is equipped with a natural projection, i.e. the Bergman projection, determined by the property of the reproducing nucleus. On the other hand, the weighted Bergman spaces are also important in harmonic analysis (see, for example [3-4]).

The Bergman kernel for any transitive circular domain is equal to the ratio of the volume density to the Euclidean volume of the domain. Hua Luogeng in [4] constructed Bergman kernels for four types of classical domains, being guided only by this consideration and without resorting to complete orthonormal systems, and in this book one can also find explicit expressions for the Bergman kernel, groups of automorphisms of the domain $\Re_I(m,k), \Re_{II}(m), \Re_{III}(m)$ and $\Re_{IV}(n)$.

Definition ([1]). *Let $\{\varphi_\nu(z), \nu = 0,1,2,...\}$ be a complete orthonormal system of holomorphic functions in $L^2(D)$. The Bergman kernel (or kernel function) $K_D(z,\zeta)$ is the sum of the series*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\nu(\zeta)} = K_D(z,\zeta),$$

which is holomorphic by z and antiholomorphic by ζ

The aim of this work is to find optimal estimates for the Bergman kernels for the classical domains $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$ and $\Re_{III}(m)$, respectively, through the Bergman kernels in balls from the spaces $\mathbb{C}^{mk}$, $\mathbb{C}^{\frac{m(m+1)}{2}}$ $\mathbb{C}^{\frac{m(m-1)}{2}}$. For this, we use the statements of the Sommer-Mehring theorem (see [5]) on the extension of the Bergman kernel and some properties of the Bergman kernel.

It is known [4], that the Bergman kernels for the domains $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$ and $\Re_{III}(m)$ have the form:

$$K_{\Re_I(m,k)}(z,\bar{z}) = \frac{1}{V(\Re_I(m,k))}\frac{1}{\det^{m+k}\left(I^{(m)} - Z\bar{Z}'\right)},$$

$$K_{\Re_{II}(m)}(z,\bar{z}) = \frac{1}{V(\Re_{II}(m))}\frac{1}{\det^{m+1}\left(I^{(m)} - Z\bar{Z}\right)},$$

$$K_{\Re_{III}(m)}(z,\bar{z}) = \frac{1}{V(\Re_{III}(m))}\frac{1}{\det^{m-1}\left(I^{(m)} + Z\bar{Z}\right)},$$

where

$$V(\Re_I(m,k)) = \frac{1!2!...(m-1)!1!2!...(k-1)!}{1!2!...(m+k-1)!}\pi^{mk},$$

$$V(\Re_{II}(m)) = \pi^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{2!4!...(2m-2)!}{m!(m+1)!...(2m-1)!},$$

$$V(\Re_{III}(m)) = \pi^{\frac{m(m-1)}{2}}\frac{2!4!...(2m-4)!}{(m-1)!m!...(2m-3)!},$$

volumes of the domain $\Re_I(m,k)$, $\Re_{II}(m)$ and $\Re_{III}(m)$, respectively. The Bergman kernel for a ball with radius R, $\mathbb{B}^n(R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$, has the form

$$K_{\mathbb{B}^n(R)}(z,\bar{\zeta}) = \frac{n!R^2}{\pi^n\left(R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\bar{\zeta}_k\right)^{n+1}}.$$

Theorem 1. *The following statements are true:*

a) if the Bergman kernel is $K_{\mathbb{B}^{mk}(1)}(z,\bar{z})$ *continues to the domain* $\Re_I(m,k)$ *as a real analytic function, then at the points* $z \in \Re_I(m,k)$ *the following inequality holds*

$$K_{\Re_I(m,k)}(z,\bar{z}) \le K_{\mathbb{B}^{mk}(1)}(z,\bar{z});$$

b) if the Bergman kernel is $K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(z,\bar{z})$ *continues to domain* $\Re_{II}(m)$ *as a real analytic function, then at the points* $z \in \Re_{II}(m)$ *the inequality holds*

$$K_{\Re_{II}(m)}(z,\bar{z}) \le K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(z,\bar{z});$$

c) if the Bergman kerne $K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1)}(z,\bar{z})$ *extends into the domain* $\Re_{III}(m)$ *as a real analytic function, then at the points* $z \in \Re_{III}(m)$ *the inequality holds*

$$K_{\Re_{III}(m)}(z,\bar{z}) \le K_{\mathbb{B}^{\frac{m(m-1)}{2}}(1)}(z,\bar{z}).$$

References

1. **Shabat B. V.** *Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables*, Moscow: Nauka, Physical and mathematical literature, 1985. 464 p. (in Russian).
2. **Aizenberg L. A., Yuzhakov A. P.** *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis,* Novosibirsk: Nauka, 335 pp (1979). (in Russian) Engl. transl.: Transl. Math. Monogr. Vol. **58**, Providence, 283 pp. (1983).
3. **Khudayberganov G., Kytmanov A. M., Shaimkulov B. A.** *Analysis in matrix domains.* Monograph. Krasnoyarsk, Siberian Federal University. 297 p. (in Russian) (2017).
4. **Hua Luogeng.** *Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains*, Inostr. Lit., M., 1959 (in Russian).
5. **Fuks B. A.** *Special Chapters in the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables,* Fizmatgiz, 1963.

УДК 517.55

Caratheodory and Kobayashi metrics for classical domains

Akhmatova Sh. F.
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail:ravshan_999555@mail.ru

In this paper we consider the intrinsic metrics of the bounded symmetric domain of classical type.

I. Classical domains. by a classical domain we shall understand an irreducible bounded symmetric domain (in the space of several complex variables) of one of the following four types:

(1)The domain $\Re$ of $[m \times n]$ matrices with complex entries satisfying the condition

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0$$

Here $I^{(m)}$ is the identity matrix of order m, Z^* is the complex conjugate of the transposed matrix Z.

(2)The domain $\Re_{II}$ of symmetric matrices of order n (with complex entries) satisfying the condition

$$I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0.$$

(3) The domain $\Re_{III}$ of skew- symmetric matrices of order n (with complex entries) satisfying condition

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0.$$

(4) The domain $\Re_{IV}$ of n-dimensional ($n > 2$) vectors

$$z = (z_1, \dots, z_n),$$

(z_k are complex number) satisfying conditions

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \ |zz'| < 1.$$

So, we can write the above four classical domains as follows.

$$\Re_I(m,k) = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - ZZ^* > 0 \right\},$$

$$\Re_{II}(m) = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z^{'} = Z \right\},$$

$$\Re_{III}(m,k) = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z^{'} = -Z \right\},$$

$$\Re_{IV}(n) = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n : |\langle z, z \rangle|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, |\langle z, z \rangle| < 1 \right\},$$

Lemma(Hua[2])**(1)** For $\xi \in M(m,n)$, there is $g \in G_0$ such that

$$g\xi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0,$$

where $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \lambda_n^2$ are eigenvalues of $\xi * \xi$.

(2) For $\xi \in M(m,m)$ with $\xi' = \xi$, there is $g \in G_0$ such that

$$g\xi = dioganal[\lambda_1, \dots, \lambda_n], \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0,$$

where $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots \lambda_n^2$ are eigenvalues of $\xi * \xi$.

(3) For $\xi \in M(m,m)$ with $\xi' = -\xi$, there is $g \in G_0$ such that

$$g\xi = dioganal \left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, 0 \right],$$

where $k = [n/2]$, $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_n^2 \geq 0$ are eigenvalues of $\xi * \xi$, and the last term is 0 if n is odd.

(4) For $\xi \in M(n,1)$, there is a $g \in G_0$ such that

$$g\xi = (\lambda_1, i\lambda_2, 0, \dots 0)$$

where λ_1^2, λ_2^2 are eigenvalues of the $(2,2)$ matrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\xi' \\ \mathrm{Im}\xi' \end{pmatrix} (\mathrm{Re}\xi, \mathrm{Im}\xi)$$

.

Theorem 1.(A.Sadullayev[3]) Let D be a complete circular domain in $\mathbb{C}^n$ with center 0. If D is complete hyperbolic, then

$$K_D(0;\xi) = \|\xi\| R(\xi)^{-1} (\xi \neq 0),$$

Furthermore, If D id convex, then

$$C_D(0;\xi) = K_D(0;\xi) = \|\xi\| R(\xi)^{-1}$$

for all $\xi \in C^n - \{0\}$.

Theorem 2.(M.Suzuki[1]) Let C_j and K_j denote the C-metric and K-metric of $\Re_j$ respectively. Then, for j = I, II, III

$$C_{\Re_j}(0;\xi) = K_{\Re_j}(0;\xi) = max\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ \xi * \xi\right\},$$

and

$$C_{IV}(0;\xi) = K_{IV}(0;\xi) = (||\xi||^2 + (||\xi||^4 - |\xi^{'}\xi|^2)^{1/2})^{1/2}.$$

Remarks.(1) For any $(z;\xi)$ in TR(is tangent boundle), taking a $g \in G_0$, with g(z) = 0, we have $K_j(z,\xi) = K_j(0; dg_z(\xi))$.

(2) We obtain the same result for $K_{IV}(0;\xi)$ from the calculation using the fact $\{(z_1 + iz_2, z_1 - iz_2), (z_1, z_2, ...z_n) \in \Re_{IV}(n)\}$ is the geodesic polydisc in $\Re_{IV}(n)$.

Also next Theorem is general case of Theorem 2, and we can use above remark for Theorem3.

Theorem 3.(1) Let For $(P;\xi) \in \Re_I$, there exists an [m x m] matrix Q and [n x n] matrix R such that

$$\bar{Q}(I^m - P^{'}\bar{P})Q^{'} = I^m, \bar{R}(I^n - P^{'}\bar{P})R^{'} = I^n$$

then for $\Re_I$ (se L.K.Hua[2])

$C_{\Re_I}(P;\xi) = K_{\Re_I}(P;\xi) = max$

$$\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q * dP * \bar{R}^{'}) * (Q * dP * \bar{R}^{'})\right\}$$

.

(2) Let For $(P;\xi) \in \Re_{II}$, we can find a matrix R such that

$$\bar{R}(I - P^{'}\bar{P})R^{'} = I$$

then for R_{II}

$C_D(P;\xi) = K_D(P;\xi) = max$

$$\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q * dP * \bar{R}^{'}) * (Q * dP * \bar{R}^{'})\right\}$$

.

(3) Let For $(P;\xi) \in \Re_{III}$, a matrix Q can be found such that

$$\bar{Q}(I + P^{'}\bar{P})R^{'} = I$$

then for $\Re_{III}$

$C_{\Re_{III}}(P;\xi) = K_{\Re_{III}}(P;\xi) = max$

$$\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q * dP * \bar{R}^{'}) * (Q * dP * \bar{R}^{'})\right\}$$

.

(4) Let For $(z_0;\xi) \in \Re_{IV}$, then

$$C_{IV}(z_0;\xi) = K_{IV}(z_0;\xi) = (||\xi||^2 + (||\xi||^4 - |\xi^{'}\xi|^2)^{1/2})^{1/2}.$$

where $\xi = dw$ and $dw = idz * \left\{I - 2\frac{z_0^{'}\bar{z}_0 - z_0\bar{z}^{'} * z_0 z^{'}}{1 - |z_0 z^{'}|^2}\right\} * D^{'} * (1 + |z_0 z^{'}|^2 - 2z_0 z^{'})^{-1/2}.$

References

1. Masaaki Suzuki, The intrinsic metrics on the domains in C^n. Math rep Toyoma univ,1983,6,143-177.
2. L.K.Hua. harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, 1963.
3. A.Sadullaev, schwarz for circular domains and its applications, Math.Rep.Toyama Univ,(1981) 120-125.

UDC 517.55

Caratheodory and Kobayashi metrics for the unit matrix polydisc

Akhmatova Sh. F.
National university of Uzbekistan; ravshan_999555@mail.ru

In this paper we consider the intrinsic metrics of the several matrix domains.

I.Introduction. Let M be a (countable, connected) complex manifold, and TM the holomorphic tangent bundle of M.

Caratheodory metric(C-metric, in short) $\mathbb{C}_M(p,\xi)a$ and Cabayashi metric(K-metric,in short) $K_M(p,\xi)$ at are defined by

$$\mathbb{C}_M(p,\xi) = sup|(df)_p\xi|; f \in Hol(M,\triangle), f(p) = 0,$$
$$K_M(p,\xi) = inf 1/r : \exists F \in Hol(\triangle, M), F(0) = p, F'(0) = r\xi(r > 0)$$

respectively, where $F\prime(0) = dF_0(d/dt)$.

II.The Classical domains. The four classical domains $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}, \mathfrak{R}_{III}, \mathfrak{R}_{IV}$ are given as follows ($M(m,n)$ denotes the set of all $m \times n$ matrices):

$$\mathfrak{R}_I(m,n) = \left\{Z \in M\left[m \times n\right] : I^{(m)} - ZZ^* > 0\right\},$$
$$\mathfrak{R}_{II}\left(n\right) = \left\{Z \in M\left[n \times n\right] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z\right\},$$
$$\mathfrak{R}_{III}\left(n\right) = \left\{Z \in M\left[n,n\right] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = -Z\right\},$$
$$\mathfrak{R}_{IV} = \left\{z \in C^n : |\langle z,z\rangle|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, |\langle z,z\rangle| < 1\right\}$$

where I^m is the $n \times n$ unit matrix and Z' is the transpose of the Z and $Z* = \bar{Z}'$. (Hua.L.K[2])

Matrix unit polydisc. The unit matrix polidisc $T = T_n \in \mathbb{C}^n[m \times m]$ is defined as the direct product of the domain $\mathfrak{R}_I$ into itselsf, i.e.

$$T = T_n = \mathfrak{R}_I^n = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) : Z_j \in \mathfrak{R}_I, j = 1, ...n\}.$$

The boundary ∂T is the union of the surfaces

$$\gamma^\nu = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : Z_v \in \partial\tau, Z_\mu \in \bar{\mathfrak{R}}_I, \mu \neq \nu\}$$

each of which is a $(2nm^2 - 1)$-dimensional surface. Therefore, the entire boundary of the polydisc $\partial T = \cup_{\nu=1}^n \gamma^\nu$ is $2nm^2$ dimensional.The set $S(T) = S(T) \times ... \times S(T) \subset \partial T$ is called skeleton.(see G.Khudayberganov,A.M [4])

Theorem 1. (M.Suzuki[1]) Let C_j and K_j denote the C-metric and K- metric of $\mathfrak{R}_j$ respectively. Then, for j=I, II, III.

$$C_{\mathfrak{R}_j}(0;\xi) = K_{\mathfrak{R}_j}(0;\xi) = max\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ \xi * \xi\}$$

and

$$\mathbb{C}_{IV}(0;\xi) = K_{IV}(0;\xi) = (||\xi||^2 + (||\xi||^4 - |\xi\prime\xi|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

Remarks.(1) For any $(z;\xi)$ in TM, taking a $g \in G_0$ with g(z)=0, we have $K_j(z,\xi) = K_j(0; dg_z(\xi))$.

(2)We obtain the same result for $K_{IV}(0;\xi)$ from the calculation using the fact $\{(z_1 + iz_2, z_1 - iz_2), (z_1, z_2...z_n) \in \mathfrak{R}_{IV}(n)\}$ is the geodesic polydisc in $\mathfrak{R}_{IV}(n)$.

Theorem 2.[3].(1) Let for $(P;\xi) \in \mathfrak{R}_I$, there exists an $[mxm]$ matrix Q and $[nxn]$ matrix R such that

$$\bar{Q}(I^m - P'\bar{P})Q' = I^m, \quad \bar{R}(I^n - P'\bar{P})R' = I^n$$

then for $\mathfrak{R}_I$ (see L.K.Hua[2])

$$C_{\mathfrak{R}_I}(P;\xi) = K_{\mathfrak{R}_I}(P;\xi) = max\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q\cdot dP\cdot \bar{R'})*(Q\cdot dP\cdot \bar{R'})\}.$$

(2) Let for $(P;\xi) \in \mathfrak{R}_{II}$, we can find a matrix R such that

$$\bar{R}(I - P'\bar{P})R' = I$$

then for $\mathfrak{R}_{II}$

$$C_{\mathfrak{R}_{II}}(P;\xi) = K_{\mathfrak{R}_{II}}(P;\xi) = max\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (R\cdot dP\cdot R')*(R\cdot dP\cdot R')\}.$$

(3) Let for $(P;\xi) \in \mathfrak{R}_{III}$, a matrix Q can be found such that

$$\bar{Q}(I + P'\bar{P})Q' = I$$

then for $\mathfrak{R}_{III}$

$$\bar{R}(I - P'\bar{P})R' = I$$

then for $\mathfrak{R}_{II}$

$$C_{\mathfrak{R}_{III}}(P;\xi) = K_{\mathfrak{R}_{III}}(P;\xi) = max\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q\cdot dP\cdot \bar{Q'})*(Q\cdot dP\cdot \bar{Q'})\}.$$

(4) Let for $(z_0;\xi) \in \mathfrak{R}_{IV}$,then

$$\mathbb{C}_{IV}(z_0;\xi) = K_{IV}(z_0;\xi) = (||\xi||^2 + (||\xi||^4 - |\xi\prime\xi|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

where $\xi = dw$ and $dw = -idz \cdot \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - z_0\bar{z}' \cdot z_0 z_0'}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} \cdot D' \cdot (1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0')^{-1/2}$.

III. Let we focus on $\mathfrak{R}_I(m,n) \times \mathfrak{R}_I(m,n)$.

$$\mathfrak{R}_I(m,n) = \left\{ Z_1 \in M\,[m \times n] : I^{(m)} - Z_1 Z_1^* > 0 \right\}$$

$$\mathfrak{R}_I(m,n) = \left\{ W_1 \in M\,[m \times n] : I^{(m)} - W_1 W_1^* > 0 \right\}$$

$$T = \mathfrak{R}_I(m,n) \times \mathfrak{R}_I(m,n) = \{Z \in M(m,n); Z = Z_1 \times W_1, I^m - Z_1 Z_1^* > 0, I^m - W_1 W_1^* > 0\} =$$
$$= \{Z = (Z_1, W) : Z_1, W_1 \in \mathfrak{R}_I\} \tag{1}$$

Theorem 3.C_T and K_T of the unit matrix polydisc T is aqual to the following

$$C_T(0;\xi) = K_T(0;\xi) = max\left\{C_{\mathfrak{R}_I}(0,\xi_1), C_{\mathfrak{R}_I}(0,\xi_2)\right\}$$

$$C_{\mathfrak{R}_1}(0;\xi_1) = K_{\mathfrak{R}_1}(0;\xi_1) = max\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ \xi_1 * \xi_1\right\}$$

$$C_{\mathfrak{R}_1}(0;\xi_2) = K_{\mathfrak{R}_1}(0;\xi_2) = max\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ \xi_2 * \xi_2\right\}.$$

Next theoreme is about general condition of Theorem 3. Let us find the transformations which carry an arbitrary point $Z = P$ into the origin. (Hua.L.K [2])

Theorem 4. Let for $(P_j;\xi) \in \mathfrak{R}_I$, there exists an $[mxm]$ matrix Q_j and $[nxn]$ matrix $R_j(j = 1,2)$ such that

$$\bar{Q_j}(I^m - P_j^{'}\bar{P_j})Q_j^{'} = I^m,\ \ \bar{R_j}(I^n - P_j^{'}\bar{P_j})R_j^{'} = I^n\ \ respectively,$$

then for the unit matrix polydisc T (see L.K.Hua [2])

$$C_T(P;\xi) = K_T(P;\xi) = max\left\{max1, max2\right\},$$

where

$$max1 = max\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvalues\ of\ (Q_1 \cdot dP_1 \cdot \bar{R_1^{'}}) * (Q_1 \cdot dP_1 \cdot \bar{R_1^{'}})\right\},$$

$$max2 = max\left\{positive\ square\ roots\ of\ the\ eigenvaluesof\ (Q_2 \cdot dP_2 \cdot \bar{R_2^{'}}) * (Q_2 \cdot dP_2 \cdot \bar{R_2^{'}})\right\}.$$

Remark. For $j = I, II, III, IV$, $\mathfrak{R}_j \times ... \times \mathfrak{R}_j$ is aqual to the unit polydisc.Therefore, we can easily write a formula similar to Theorem 4 for them.

References

1. Masaaki Suzuki, The intrinsic metrics on the circular domains in C^n. Math rep Toyoma univ,1983.
2. L.K.Hua . harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, 1963.
3. SH.F.Akhmatova, Caratheodory and Kobayashi metrics for classical domains, 2022.
4. G.Khudayberganov, Анализ в матричних областиях, 2017.

UDC 517.55

Lyapunov eksponentalari

Boymurodov S.,[1] Jalilov O.[2]
[1]O‘zbekiston Milliy Universtiteti; sobirmathbukhara@gmail.com
[2]O‘zbekiston Milliy Universtiteti; Olimjonjalilovmath@mail.ru

Bu ilmiy tezisda biz $\mathbb{P}^k$ proyektiv fazoda dastlab $k = 1$ hamda $k > 1$ hollarida golomorf funksiyalarning Lyapunov eksponentalari haqida ma‘lumot berib o‘tamiz.
$\mathbb{P}^k$ fazodagi golomorf akslantirish $f = ([F_0 : F_1 : ... : F_k])$ ko‘rinishda ifodalanib bu yerda $F_i(i = \overline{0,k})$ funksiyalar bir jinsli hamda darajasi aynan d ga teng bo‘lgan ko‘phadlardir , odatda ularni f endomorfizmning lifti deb atashadi va $\mathbb{P}^k$ fazodagi har qanday f golomorfik endomorfizmning $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ lifti mavjud .
$\pi-$ Kanonik proyektiv akslantirish bo‘lib $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^k$ va $\pi \circ F = f \circ \pi$ akslantirish hisoblanadi.
$\mathcal{M}-$kompleks ko‘pxillik.
Bu va bundan keyingi o‘rinlarda $f^n(z)$ sifatida $n-$ tartibli iteratsiyani nazarga tutgan bo‘lamiz, ya‘ni $f(z), f^2(z) = f(f(z)), ..., f^n(z) = \underbrace{f(f(...f(z)...))}_{n\ \text{marta}}$.

Green oqimi va o‘lchovi. Har qanday $F \in \mathcal{H}_d(\mathbb{C}^{k+1})$ funksiya uchun uning G_F green funksiyasi

$$G_F := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log||F^n(z)||$$

ko'rinishda aniqlanadi.
Deylik $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ golomorf endomorfizm bo'lsin , u holda $\mathbb{P}^k$ fazoda shunday bir yopiq musbat T_f (1,1) oqim mavjudki bu oqim

$$T_f := dd^c g + \omega$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda g funksiya f ning green funksiyasi bo'lib u uzluksiz hamda gloyder uzluksiz , $f_* T_f = d \cdot T_f, f^* T_f = d^{k-1} \cdot T_f$. f funksiyaning **Green o'lchovi** deb $\mu_f := (T_f)^k$ ga aytiladi. Qolaversa $\mathbb{C}^{k+1}$ fazoda aniqlangan ehtimollik m hamda μ_F da quyidagi o'lchovlarni qarash qulay bo'ladi .

$$m := (dd^c \log^+ ||z||)^{k+1} \qquad \mu_F := (dd^c G_F^+)^{k+1}$$

Ishlarimizda Birkhofning ergodiklik teoremasidan foydalanamiz.
Ta'rif 1. p_λ ko'phadning μ_λ tekis taqsimlangan o'lchovga bog'liq Lyapunov eksponentasi $L(p_\lambda)$ deb

$$L(p_\lambda) := \int_{\mathbb{C}^1} \log |p'_\lambda(z)| \mu_\lambda(z).$$

funksiyaga aytiladi .
Teorema 1. Berilgan $\lambda \in \mathcal{M}$ parametrga bog'liq bo'lgan $p_\lambda(z)$ ko'phad uchun $L(p_\lambda) = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} G(\lambda, c_j(\lambda))$. formula o'rinli .
Isbot:

$$L(p_\lambda) = \int_{\mathbb{C}^1} \log |p'_\lambda| \mu_\lambda = \int_{\mathbb{C}^1} \log |d \prod_{j=1}^{d-1} (z - c_j(\lambda))| \mu_\lambda$$

$$= \log d + \sum_{j=1}^{d-1} \int_{\mathbb{C}^1} \log |z - c_j(\lambda)| dd_z^c G(\lambda, z) = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} \langle \delta_{c_j(\lambda}, G(\lambda, \cdot) \rangle.$$

Lyapunov Exponentasi xossalari: (i) $L(F) = \int_{C^{k+1}} \log |\det F'| \mu_F$
(ii) $L(F) = L(f) + \log d$
(iii) $L(F^n) = nL(F)$ bunda $n \in \mathbb{N}$
(iv) $L(F)$-funksiya $F \in \mathcal{H}_d(\mathbb{C}^{k+1})$ fazoda plurisubgarmonik.
Lemma 1. Berilgan $F \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ va $D = (k+1)(d-1)$ uchun
1) $L(F) = \int_{\mathbb{C}^{k+1}} \log |\det F'| \mu_F = \int_{\mathbb{P}^k} \log ||J_F||_{G_F} \mu_f$
2) $L(F) = \int_{\mathbb{C}^{k+1}} \log |\det F'| m = \int_{\mathbb{P}^k} \log ||J_F||_{G_F} \omega^k$ formulalar o'rinli.
Biz yuqorida berilgan ishlarni $\mathbb{P}^1$ fazoda o'rganib chiqdik endi esa $\mathbb{P}^k$ fazoga olib chiqib o'rganaylik.
Teorema 2. Algebraik darajasi $d \geq 2$ bo'lgan $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^k)$ fazodagi endomorfizm va uning $F \in \mathbb{C}^{k+1}$ lifti shuningdek $T_f = dd^c g + \omega$ green oqimi uchun f ning Lyapunov exponentasi $L(f)$ quydagicha bo'ladi : $L(f) + \log d = L(F) = H(F) - (k+1)(d-1)B(F)$ bu yerda $H(F) := \sum_{j=0}^{k-1} \int_{C_f} g_F T_f^j \wedge \omega^{k-j-1} + \int_{\mathbb{P}^k} \log ||J_F||_0 \omega^k$ va $B(F) := \sum_{j=0}^{k} \int_{\mathbb{P}^k} g_F T_f^j \wedge \omega^{k-j}$

Tasdiq. Deylik $\mathbb{P}^k$ fazodagi endomorfizmlarning golomorf oilasi $\{f_\lambda\}_{\lambda \in M}$ bo'lib $\{F_\lambda\}_{\lambda \in M}$ esa uning $\mathbb{C}^{k+1}$ dagi lifti bo'lsin . U holda

$$dd^c H(F_\lambda) = p_*((dd^c g_{F_\lambda} + \omega)^k \wedge [C_M])$$

tenglik o'rinli bo'lib bu yerda $C_M := \{(\lambda, z) \in M \times \mathbb{P}^k; z \in C_{f_\lambda}\}$ va $p : M \times \mathbb{P}^k \to M$ kanonik proeksiya.
Lemma 2. $H(F)$ funksiya $\mathcal{H}_d(\mathbb{C}^{k+1})$ fazoda plurisubgarmonik hamda
$dd^c H(F^2) = 2dd^c H(F)$ tenglik o'rinli .
Endi esa reja bo'yicha keyingi qadamda $dd^c B(F)$ ni hisoblashimiz kerak bo'ladi.
Teorema 3. $B(F)$ funksiya $\mathcal{H}_d(\mathbb{C}^{k+1})$ fazoda plyurigarmonik.

Demak maqsadimizga ham yetib keldik ya'ni Lyapunov exponentasi uchun ushbu :
Natija. Deylik $\mathbb{P}^k$ fazodagi algebraik darajasi $d \geq 2$ bo'lgan golomorf endomorfizmlar oilasi $\{f_\lambda\}_{\lambda \in M}$ uchun $dd^c L(f_\lambda) = p_*((dd^c g_{F_\lambda} + \omega)^k \wedge [C_M])$ tenglik o'rinli.

Adabiyotlar

1. **Giovanni Basseneli and Francois Barteloot.***Bifurication and stability on projective spaces*
2. **DeMarco L., Dynamics of rational maps:** *Lyapunov exponents , bifurications, and capacity,Math .Ann.,*

UDK 517.55

Ikkinchi tur matritsaviy polikrug uchun golomorf davom ettirish masalasi.

Bozorov J.T.,[1] Durmanov S.J.,[2] Qurbonova G.T.[3]

[1,2,3]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston;

jorabek.bozorov.89@mail.ru, safarjurrqulovich@gmail.com

Sohaning chegarasida yoki chegaraning bir qismida berilgan funksiyani sohaga golomorf davom ettirish funksiyalar nazariyasining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Bu masala bilan ko'plab olimlar shug'ullanishgan, jumladan: G.M. Xenkin [1], E.M. Chirka [1], N.N. Tarxanov, L.A. Ayzenberg, U. Rudin, A. Sadullayev [2], G. Xudoyberganov [3-4], A.M. Kitmanov [4], S. Kosbergenov , B.A. Shoimqulov [2-4] va boshqalar. Bizga

$$D_2 = \left\{ Z_2 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \, Z_2 \overline{Z_2} < I \right\}$$

ikkinchi tur klassik soha [4,5], (bu yerda Z_2 $n \times n-$tartibli kvadrat matritsa, $\overline{Z}_2-$ matritsa Z_2 matritsaning qo'shmasi, $I-$ birlik matritsa) va

$$S_2 = \left\{ \xi_2 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \, \xi_2 \overline{\xi}_2 = I \right\}$$

D_2 sohaning ostovi [4,5] berilgan bo'lsin. Biz D_2 sohalarning n tasining dekart ko'paytmasi

$$\underbrace{D_2 \times D_2 \times ... \times D_2}_{n\,ta}$$

ni ikkinchi tur matritsaviy polikrug deb ataymiz va T_2^n bilan belgilaymiz ya'ni

$$T_2^n = \left\{ Z = \left(Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, ..., Z_2^{(n)} \right) \in \mathbb{C}^n \left[m \times m\right] : \, Z_2^{(j)} \overline{Z}_2^{(j)} < I, \, Z_2^{(j)} \in D_2 \right\}.$$

Ikkinchi tur matritsaviy polikrugning ostovini ham mos ravishda S_2 larning n tasining dekart ko'paytmasi ko'rinishida olamiz va $S\left(T_2^n\right)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$S\left(T_2^n\right) = \left\{ \xi = \left(\xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)}, ..., \xi_2^{(n)} \right) \in \mathbb{C}^n \left[m \times m\right] : \, \xi_2^{(j)} \overline{\xi}_2^{(j)} = I, \, \xi_2^{(j)} \in S_2 \right\}.$$

Bizga T_2^n sohada aniqlangan $f\left(Z\right)$ funksiya berilgan bo'lsin. Ta'rif: Agar $f\left(Z\right)$ funksiya T_2^n sohada golomorf bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$\sup_{0 \le r < 1} \int\limits_{S\left(T_2^n\right)} \left| f\left(r\xi\right) \right| d\mu\left(\xi\right) < \infty,$$

bu yerda $d\mu\left(\xi\right) - S\left(T_2^n\right)$ dagi normallangan Lebeg o'lchovi, u holda $f\left(Z\right)$ funksiya T_2^n sohada Xardi sinfiga tegishli deyiladi va $f\left(Z\right) \in H^1\left(T_2^n\right)$ orqali belgilanadi. Bizga nm^2 o'zgaruvchili $F(Z) = F(Z_2^1, Z_2^2, ..., Z_2^n) \in H^2(S(T_2^n), d\mu)$ funksiya berilgan bo'lsin. Ma'lumki, agar $F(Z) \in H^2(S(T_2^n), d\mu)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $Z \in T_2^n$ nuqta uchun quyidagi integral formula o'rinli

$$F(Z) = \int\limits_{S\left(T_2^n\right)} \frac{f(\xi) d\mu\left(\xi\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^{\frac{m+1}{2}} \left(\xi_2^j - Z_2^j \right)}. \tag{1}$$

Endi quyidagicha sohalarni kiritib olamiz
$D_\beta = \Big\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : \, (-1)^{\beta_1} \left(Z_2^{(1)} \overline{Z}_2^{(1)} - I \right) < 0, (-1)^{\beta_2} \left(Z_2^{(2)} \overline{Z}_2^{(2)} - I \right) < 0, ...$

$$..., (-1)^{\beta_n} \left(Z_2^{(n)} \overline{Z}_2^{(n)} - I \right) < 0, \, Z_2^{(j)} \in D_2, \, j = \overline{1, n} \Big\}$$

bu yerda $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n), |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n, \beta_j = \overline{0, 1}, j = \overline{1, n}$ multiindeks. Hamma $\beta_j = 0$ bo'lsa, u holda $D_{(0,0,...,0)}$ soha T_2^n soha bilan ustma-ust tushadi. (1) integralning mos D_β sohalardagi qiymatlarini $F_\beta \left(Z \right)$ bilan belgilaymiz.

Bu ishda biz $S \left(T_2^n \right)$ dan T_2^n sohaga golomorf davom ettirish masalasini o'rganamiz ya'ni T_2^n sohaning ostovi $S \left(T_2^n \right)$ da kvadrati bilan integrallanuvchi (L_2) funksiyalar sinfiga tegishli bo'lgan $f \left(Z \right)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya qanday shartlarni bajarganda T_2^n sohaga golomorf davom etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. **Хенкин Г.М., Чирка Е.М.** *Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных.* Современные проблемы математики, –М., ВИНИТИ, 1975, Т.4, –С.12-142.
2. **Садуллаев А.С., Шаимкулов Б.А.** *О теореме Ф. и М. Риссов* Узб. матем. журнал.–1991. №2. –С. 37–41.
3. **Худайберганов Г., Шаимкулов Б.А.** *Критерий голоморфной продолжимости функций, заданных на части границы Шилова классических областей* Узб. Матем. Журнал. 2009. №1. –С.45-52.
4. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях.* Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. –293 с.
5. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* –М., Изд. иност. лит., 1959. –163 с.

УДК 517.98

Potential properties of the Julia set

Jalilov O.R.[1], Boymurodov S.I.[2]

[1,2]Master student, National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

Olimjonjalilovmath_@mail.ru, Sobirmathbukhara_@gmail.com

Let $q(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$ be a polynomial of degree d, g_D is *Green's function* for D. The *attracting basin of* ∞ of q is the set

$$F_\infty := \{ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : q^n(z) \to \infty \text{ as } n \to \infty \}.$$

Theorem 1. *If* $q(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$ *is a polynomial of degree* $d \geq 2$*, then its Julia set has capacity*

$$c(J) = \frac{1}{|a_d|^{\frac{1}{d-1}}}$$

Let $m(z) = \alpha z + \beta$ be a polynomial of degree 1, and let $\widetilde{q}$ be the conjugate

$$\widetilde{q} = m \circ q \circ m^{-1}.$$

Then $\widetilde{q}$ is again a polynomial of degree d, and $\widetilde{q}^n = m \circ q^n \circ m^{-1}$ for each n, so that $\widetilde{q}$ has essentially the same dynamics as q. The advantage of conjugating q in this fashion is that $\widetilde{q}$ can be made algebraically simpler than q by choosing α, β appropriately. For example, if $\alpha = a_d^{\frac{1}{d-1}}$ then $\widetilde{q}$ is monic, and taking $\beta = \frac{a_{d-1}}{d}$ we can further ensure that $\widetilde{q}(z) = z^d + O(z^{d-2})$ as $z \to \infty$.

Corollary 1. *With q, J as above, the diameter of J satisfies*

$$diam(J) \geq \frac{2}{|a_d|^{\frac{1}{d-1}}}.$$

Morever, if J is connected, then

$$diam(J) \leq \frac{4}{|a_d|^{\frac{1}{d-1}}}.$$

Theorem 2. *Let q be a polynomial of degree $d \geq 2$, and let F_∞* be the attracting basin of ∞ for q. Then

$$g_{F_\infty}(q(z), \infty) = d \cdot g_{F_\infty}(z, \infty), \ (z \in F_\infty)$$

Corollary 2. *With q, F_∞ as in the Theorem,*

$$g_{F_\infty}(z, \infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log |q^n(z)|, \ (z \in F_\infty)$$

the convergence being uniform on compact subsets of F_∞.

References

1. T.J.Ransford, Potential Theory in the Complex Plane, 1995.
2. M.Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, 2nd edition, Chelsea, New York, 1975.
3. J.Wermer, Potential Theory, 2nd edition, Lecture Notes in Mathematics 408, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Ikkinchi tur matritsaviy polikrug uchun Karleman formulasi

Ko'charova M.N.[1], Karimov J.R.[2] To'rayev T.A.[3]

[1,2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; safarjurrqulovich@gmail.com

[3] O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston; torayevt2000@gmail.com

Bizga

$$D_2 = \left\{ Z_2 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \ Z_2 \overline{Z_2} < I \right\}$$

ikkinchi tur klassik soha [1,2], (bu yerda Z_2 $n \times n-$tartibli kvadrat matritsa, $\overline{Z}_2-$ matritsa Z_2 matritsaning qo'shmasi, $I-$birlik matritsa) va

$$S_2 = \left\{ \xi_2 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : \ \xi_2 \overline{\xi}_2 = I \right\}$$

D_2 sohaning ostovi [1,2] berilgan bo'lsin. Biz D_2 sohalarning n tasining dekart ko'paytmasi

$$\underbrace{D_2 \times D_2 \times ... \times D_2}_{n\,ta}$$

ni ikkinchi tur matritsaviy polikrug deb ataymiz va T_2^n bilan belgilaymiz ya'ni

$$T_2^n = \left\{ Z = \left(Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, ..., Z_2^{(n)} \right) \in \mathbb{C}^n \left[m \times m\right] : \ Z_2^{(j)} \overline{Z}_2^{(j)} < I, \, Z_2^{(j)} \in D_2 \right\}.$$

Ikkinchi tur matritsaviy polikrugning ostovini ham mos ravishda S_2 larning n tasining dekart ko'paytmasi ko'rinishida olamiz va $S\left(T_2^n\right)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$S\left(T_2^n\right) = \left\{ \xi = \left(\xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)}, ..., \xi_2^{(n)} \right) \in \mathbb{C}^n \left[m \times m\right] : \ \xi_2^{(j)} \overline{\xi}_2^{(j)} = I, \, \xi_2^{(j)} \in S_2 \right\}.$$

Bizga T_2^n sohada aniqlangan $f(Z)$ funksiya berilgan bo‘lsin. **Ta’rif:** Agar $f(Z)$ funksiya T_2^n sohada golomorf bo‘lib, quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$\sup_{0\le r<1}\int\limits_{S(T_2^n)}|f(r\xi)|\,d\mu(\xi)<\infty,$$

bu yerda $d\mu(\xi)-S(T_2^n)$ dagi normallangan Lebeg o‘lchovi, u holda $f(Z)$ funksiya T_2^n sohada Xardi sinfiga tegishli deyiladi va $f(Z)\in H^1(T_2^n)$ orqali belgilanadi.

Bu ishda quyidagicha masalani o‘rgamiz: T_2^n sohada Xardi sinfiga tegishli bo‘lgan va Lebeg ma’nosida musbat o‘lchovli $E\subset S(T_2^n)$ to‘plamda qiymatlari ma’lum bo‘lgan $f(Z)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning T_2^n sohadagi qiymatlarini qanday qilib tiklash mumkin.
Bunday masalaning yechimi birinchi bo‘lib 1926-yilda T.Karleman tomonidan maxsus sohada yechilgan. Shuning uchun bunday masala yechimi Karleman formulasi deyiladi. Keyinchalik ko‘plam olimlar bu masala bilan shug‘ullanishgan va rivojlantirishgan [2-4]. Shu olimlar orasida A.M.Kitmanov tomonidan bir jinsli sohalar uchun ularning avtomorfizmlaridan foydalanib Karleman formulasini olish metodi ishlab chiqildi [3]. Bu metoddan foydalanib [5] ishda birinchi tur matritsaviy polikrug uchun Karleman formulasi olingan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.

1. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* -М., Изд. иност. лит., 1959. -163 с.
2. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях.* Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. -293 с.
3. **Кытманов А.М., Никитина Т.Н.** *Аналоги формулы Карлемана для классических областей* Мат. заметки, -1989. Т.45, №3, С.87-93.
4. **Худайберганов Г.** *Формула Карлемана для функций от матриц* Сиб. матем. журн.-1988. Т.29, №1. С.207-208.
5. **Shaimkulov B. A., Bozorov J.T.** *Carleman’s Formula for a Matrix Polydisk* Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. 2015. №8(2). P.371-374.

УДК 517.98

The fixed points of discontinuous quadratic stochastic operator and their character

Kutlimuratova D. A.[1], Mexmonbayeva G. M.[2]

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; kutlimuratovadurdona@gmail.com

[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan; javohir0107@mail.ru

Let V be Volterra QSO:

$$V(\hat{x})=\begin{cases} V_1(\hat{x}), & x\le\frac{1}{2}\\ V_2(\hat{x}), & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

where

$$V_1=\begin{cases} x'=x(1+ay+bz)\\ y'=y(1-ax+cz)\\ z'=z(1-bx-cy)\end{cases}\qquad V_2=\begin{cases} x'=x(1-by-cz)\\ y'=y(1+az+bx)\\ z'=z(1-ay+cx)\end{cases}$$

and the parameters $a,b,c\in[-1,1]$.

Fixed points.

a) We need solve the equation $V_1(\hat{x})=\hat{x}$ in the set

$$A=\{\hat{x}\,|\,\hat{x}=(x,y,z)\in S^2,\, \min\{x,y,z\}=x \ \ and \ \ x\neq y \ \ or \ \ \hat{x}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\}$$

It can be checked that the operator V_1 always has the fixed point $x_1=(0,1,0)$ and another one is $x_1^1=(\frac{c}{a-b+c},\frac{-b}{a-b+c},\frac{a}{a-b+c})$ if the parameters satisfy the followings: $\{c>0,\, c\leq a,\, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$.

b) We need solve the equation $V_2(\hat{x})=\hat{x}$ in the set

$$B=\{\hat{x}\,|\,\hat{x}=(x,y,z)\in S^2,\, \min\{x,y,z\}=y \ \ and \ \ y\neq z\}$$

It can be checked that the operator V_2 always has the fixed point $x_2=(0,0,1)$ and another one is $x_2^1=(\frac{a}{a-b+c},\frac{c}{a-b+c},\frac{-b}{a-b+c})$ if the parameters satisfy the followings: $\{c>0,\, c\leq a,\, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$.

c) We need solve the equation $V_3(\hat{x})=\hat{x}$ in the set

$$C=\{\hat{x}\,|\,\hat{x}=(x,y,z)\in S^2,\, \min\{x,y,z\}=z \ \ and \ \ x\neq z\}$$

It can be checked that the operator V_3 always has the fixed point $x_3=(1,0,0)$ and another one is $x_3^1=(\frac{-b}{a-b+c},\frac{a}{a-b+c},\frac{c}{a-b+c})$ if the parameters satisfy the followings: $\{c>0,\, c\leq a,\, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$.

The following lemma gives all fixed points of the operator V:

Lemma. For the operator of V the followings hold:

- if the parameters satisfy one of the following conditions: $\{c>0, c\leq a, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$ then $\mathrm{Fix(V)}=\{\mathrm{x_1,x_2,x_3,x_1^1,x_2^1,x_3^1}\}$;

- if the parameters don't satisfy any conditions which: $\{c>0,\, c\leq a,\, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$ then $\mathrm{Fix(V)}=\{\mathrm{x_1,x_2,x_3}\}$.

Next theorem gives us about characters of fixed point in Lemma.

Theorem.

- if $ac>0$ then the fixed points x_1, x_2, x_3 are saddle;
- if $a>0$ and $c<0$ then the fixed points x_1, x_2, x_3 are repelling;
- if $a<0$ and $c>0$ then the fixed points x_1, x_2, x_3 are attractive;
- if $\{c>0,\, c\leq a,\, c<-b\}$ or $\{c<0,\, c\geq a,\, c>-b\}$ then the fixed points x_1^1, x_2^1, x_3^1 are saddle.

Adabiyotlar

1. R.N. Ganikhodzhaev, F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov, *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*. Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields., **14**(2) (2011), 279–335.

УДК 517.55

Ikkinchi tur matritsaviy poliyedr uchun Veyl formulasi

Mahkamov E.M.,[1] Raupova S.A.,[2] Xolmurzayev M.M.[3]
[1] Chirchiq davlat pedagogika universiteti; erkin_mah@mail.ru
[2,3] Termiz davlat universiteti;

Bizga

$$D_{2,r}=\left\{Z_2\in\mathbb{C}\left[m\times m\right]:\ Z_2\overline{Z_2}<r^2I\right\},\ r\in\mathbb{R}_+$$

r radiusli ikkinchi tur matritsaviy doira [1,2], (bu yerda Z_2 $m\times m-$tartibli kvadrat matritsa, $\overline{Z}_2-$ matritsa Z_2 matritsaning qo'shmasi, $I-$birlik matritsa) va

$$S_{2,r}=\left\{\xi_2\in\mathbb{C}\left[m\times m\right]:\ \xi_2\overline{\xi}_2=r^2I\right\}$$

$D_{2,r}$ sohaning ostovi [1,2] berilgan bo'lsin. Biz $D_{2,r}$ sohalarning n tasining dekart ko'paytmasi

$$\underbrace{D_{2,r}\times D_{2,r}\times...\times D_{2,r}}_{n\,ta}$$

ni r radiusli ikkinchi tur matritsaviy polikrug deb ataymiz va $T^n_{2,r}$ bilan belgilaymiz ya'ni

$$T^n_{2,r}=\left\{Z=\left(Z^1_2,Z^2_2,...,Z^n_2\right)\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:\ Z^j_2\overline{Z}^j_2<r^2I,\ Z^j_2\in D_{2,r}\right\}.$$

r radiusli ikkinchi tur matritsaviy polikrugning ostovini ham mos ravishda $S_{2,r}$ larning n tasining dekart ko'paytmasi ko'rinishida olamiz va $S\left(T^n_{2,r}\right)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$S\left(T^n_{2,r}\right)=\left\{\xi=\left(\xi^1_2,\xi^2_2,...,\xi^n_2\right)\in\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]:\ \xi^j_2\overline{\xi}^j_2=r^2I,\ \xi^j_2\in S_{2,r}\right\}.$$

Agar yuqoridagi sohalarda $r=1$ bo'lsa, u holda bu sohani ikkinchi tur matritsaviy polikrug deb ataymiz va T^n_2 bilan belgilaymiz. Bizga shu sohada aniqlangan $f\left(Z\right)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif: Agar $f\left(Z\right)$ funksiya T^n_2 sohada golomorf bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$\sup_{0\le r<1}\int\limits_{S\left(T^n_2\right)}\left|f\left(r\xi\right)\right|^2d\mu\left(\xi\right)<\infty,$$

bu yerda $d\mu\left(\xi\right)-S\left(T^n_2\right)$ dagi normallangan Lebeg o'lchovi, u holda $f\left(Z\right)$ funksiya T^n_2 sohada Xardi sinfiga tegishli deyiladi va $f\left(Z\right)\in H^2\left(T^n_2\right)$ orqali belgilanadi. Bizga nm^2o'zgaruvchili $F(Z)=F(Z^1_2,Z^2_2,...,Z^n_2)\in H^2(S(T^n_2),d\mu)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, agar $F(Z)\in H^2(S(T^n_2),d\mu)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $Z\in T^n_2$ nuqta uchun quyidagi integral formula o'rinli

$$F(Z)=\int\limits_{S\left(T^n_2\right)}\frac{F(\xi)d\mu\left(\xi\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\det^{\frac{m+1}{2}}\left(\xi^j_2-Z^j_2\right)}.\tag{1}$$

Bizga $G\subset\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ soha va unda golomorf bo'lgan

$$f:\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]\to\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$$

akslantirish berilgan bo'lsin. Agar

$$f^{-1}\left(T^n_{2,r}\right)=\left\{Z:f^j\left(Z\right)\left(\overline{f^j\left(Z\right)}\right)<r^2I,j=\overline{1,n}\right\}$$

to‘plam G sohada kompakt yotsa ya’ni $f^{-1}\left(T^n_{2,r}\right) \Subset G$ bo‘lsa, u holda $f^{-1}\left(T^n_{2,r}\right)$ to‘plam f akslantirishga bog‘liq matritsaviy poliyedrik to‘plam deyiladi.

Lemma: Ixtiyoriy $f^{-1}\left(T^n_{2,r}\right)$ matritsaviy poliyedrik to‘plam chekli sondagi bog‘lamli komponentalardan iborat.

2-ta’rif: $f^{-1}\left(T^n_{2,r}\right)$ matritsaviy poliyedrik to‘plamning bog‘lamli komponentasiga ikkinchi tur maxsus analitik matritsaviy poliyedr deb ataladi. Ikkinchi tur maxsus analitik matritsaviy poliyedrni $\Pi^f_{2,r}$ orqali uning ostovini esa $\Gamma^f_{2,r} = \left\{\xi : f^j\left(\xi\right)\left(\overline{f^j\left(\xi\right)}\right) = r^2 I, j = \overline{1,n}\right\}$ orqali belgilaymiz.

Bu ishda matritsaviy poliedrik soha hisoblangan $\Pi^f_{2,r}$ sohada (1) formulaning umumlashmasi bo’lgan, Veyl integral formulasini yozish va shu sohada Rushe teoremasining bir variantini olish masalasi qo‘yilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.

1. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* -М., Изд. иност. лит., 1959. -163 с.
2. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях.* Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. -293 с.

UDK 517.2

Siljishli funksional operatorlarning teskarilanuvchanlik va o‘ngdan teskarilanuvchanlik shartlari.

Mardiyev R.,[1] Murodov J. Sh.[2]

[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universeteti.

[2]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universeteti.

murodovjurabekk2323@gmail.com

Γ-sodda silliq yopiq kontur, $\alpha - \Gamma$ konturni o‘ziga akslantiruvchi diffeomorfizm (siljish) bo‘lib bo‘sh bo‘lmagan Λ davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin. $H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$ Giyol’der fazosida.

$$A = aI - bW \tag{1}$$

Ko‘rinishdagi siljishli funksional operatorni qaraylik. Bu yerda $a, b \in H_\mu(\Gamma)$, I-birlik operator, W-siljish operatori:

$$(W\varphi) = \varphi[\alpha(t)],\ t \in \Gamma$$

Agar α-siljishning davriy nuqtalari to‘plami Λ chekli bo‘lganda va α-siljish yo‘nalishini o‘zgartirganda $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ fazosida (1) operatorning bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlari o‘rganilgan. ([2]) Bu ishda A operatorning $H_\mu(\Gamma)$ fazosida teskarilanuvchanlik va o‘ngdan teskarilanuvchanlik shartlari α-siljish yo‘nalishini saqlagan yoki o‘zgartirgan holda hamda u ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lgan holda olingan. Xususiy holda α-siljishning davriy nuqtalar to‘plami kontinum quvvatli yoki bo‘sh bo‘lmagan ichki nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lgan to‘plam ham bo‘lishi mumkin.

Ma’lumki α siljish Γ-konturning yo‘nalishini saqlasa, u uning davriy nuqtalari bir xil $m \geq 1$ tartibli bo‘ladi. ([1]. 24 bet) Agar α siljish Γ konturning yo‘nalishini o‘zgartirsa, u holda siljish albatta ikkita z_1 va z_2 qo‘zg‘almas nuqtalarga ega bo‘ladi. Hamda $\alpha_2(t) = \alpha(\alpha(t))$, $t \in \Gamma$ siljish esa $m = 2$ tartibli qo‘zg‘almas nuqtaga ega. Demak α-yo‘nalishni o‘zgartirgan holda $m = 2$ yo‘nalishni saqlagan holda deb olinadi.

Φ-orqali $\{t \in \Gamma : \alpha_m(t) \neq t\}$ $(\alpha_m(t) = (\alpha(\alpha_{m-1}()t)), \alpha_0(t) = t, t \in \Gamma)$ to‘plamning yopig‘ini belgilaymiz. $Y = \Lambda \cap \Phi$ va $H^0_\mu(\Gamma, Y) = \{\varphi \in H_\mu(\Gamma) : \varphi(t) = 0, \forall t \in Y\}$ bo‘lsin. $u, a, b \in (\Gamma)$ funksiyalar uchun quydagi belgilashlarni kiritamiz. ([2] adabiyotdagiga o‘xshash).

$u_m(t) = \prod_{i=0}^{m-1} u[\alpha_i(t)], \quad h_m(t) = |\alpha_m(t)| - |\alpha_m(t)|^\mu |b_m(t)|, \, t \in \Gamma$ da

$h_\pm(t) = \lim_{n\to\pm\infty} h_m[\alpha_n(t)]$ $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Phi$, $\Gamma_2 = \{t \in \Phi : h_\pm(t) > 0\}$, $\Gamma_3 = \{t \in \Phi : h_\pm(t) > 0\}$, $\Gamma_4 = \{t \in \Phi : h_+(t) < 0 < h_-(t)\}$, $\Gamma_5 = \{t \in \Phi : h_+(t) > 0 > h_-(t)\}$

$$v_A(t) = \begin{cases} a_m(t) - b_m(t), & t \in \Gamma_1, \\ a_m(t), & t \in \Gamma_2, \\ b_m(t), & t \in \Gamma_1, \\ 0, & t \in \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i, \end{cases}$$

Quydagi tasdiqlar o‘rinli.

1-Teorema. α siljish yo‘nalishini saqlovchi yoki yo’nalishni o‘zgartuvchi bo‘lib, bo‘sh bo‘lmagan Λ davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin. U holda A operator $H^0_\mu(\Gamma, Y)$, $0 < \mu < 1$ fazoda teskarilanuvchi bo‘lishi uchun $\forall t \in \Gamma \, v_A \neq 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

2-Teorema. α siljish yo‘nalishini saqlovchi yoki yo‘nalishni o‘zgartuvchi bo‘lib, bo‘sh bo‘lmagan Λ davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin. U holda A operator $H^0_\mu(\Gamma, Y)$, $0 < \mu < 1$ fazoda o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchi bo‘lishi uchun

$$v_A(t) \neq 0 \, \forall t \in \Gamma \setminus \Gamma_4 \, (\forall t \in \Gamma \setminus \Gamma_5) \text{ va } \forall t \in \Gamma_4, \, \exists k_0 \in Z, \, \forall k \geq k_0 \, b[\alpha_k(t)] = 0, \, \forall k < k_0, \, \alpha[\alpha_k(t)] \neq 0$$

(mos ravishda $\forall t \in \Gamma_5$, $\exists k_0 \in Z$, $\forall k \geq k_0 \, b[\alpha_k(t)] \neq 0 \, \forall k \geq k_0 \, a[\alpha_k(t)] \neq 0$) shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Adabiyotlar ro‘yxati.

1. **Литвинчук Г. С.** *Краевые задачи и сингуляные интегральные уравнения со сдвигом Brand N.*–М.Наука, 1997.–448с.
2. **Mardiyev R.** *One-Way Inversibility, of Mathematics.*Samarqand State University. Middle European Scientific Bulletin, VOLUME 19 Dec 2021.

UDK 517.518.5

ON ESTIMATES FOR THE TRANSFORMATION FOURIER WITH DAMPED FACTOR

Muranov.Sh.A., Abdunabiyev S., Hayitov I.
Samarkand State University named after Sharof Rashidov; muranov-2017@mail.ru

Abstract: In this paper we consider estimates for the Fourier transform measures, concentrated on analytic hypersurfaces containing the of damping factor. The paper presents the solution of the problem S.D.Soggi and I.M. Stein about the optimal decay of the transformation Fourier measures with a damping factor for any analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

Keywords: oscillatory integrals, Fourier transform, damping factor, maximal operator.

1 Introduction In connection with the boundedness problem for the maximal operators, associated to hypersurface $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ by S.D. Soggy and I.M. Stein [1] introduced the following damped oscillator integrals

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_S e^{i(\xi,x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \tag{1.1}$$

where $K(x)$ is the Gaussian curvature of the hypersurface at the point $x \in S$ and $\sigma(x)$ is a surface measure, $\psi \in C_0^\infty(S)$ is a smooth non-negative function, (ξ, x) is an inner product of ξ and x. They proved that if $q \geq 2n$, then integral (1.1) decays in order $O\left(|\xi|^{-\frac{n}{2}}\right)$ (as $|\xi| \to +\infty$).

Statement of the problem.

Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth hypersurface. Find a minimum value of q such that the following estimate

$$\left| \int_S e^{i(\xi,x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \right| \leqq A|\xi|^{-\frac{n}{2}}$$

Holds for $\xi \neq 0$.

The analogical problem was proposed by C.D. Sogge and E.M. Stein for a fixed hypersurface in [1]. It was proved in [4] that integral (1.1) decays optimally, if $0 \leq \psi(x) \leq |K(x)|^{\frac{1}{2}}$ and $\psi \in C_0^\infty$, whenever S is a convex finite linear type hypersurface. In one-dimensional case, more precisely, when the curve S is given by a polynomial function the solution of the problem follows from the results of Oberlin [2].

In this paper we represent a solution of the problem of C.D. Sogge and E.M. Stein for analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

We can suppose that S is given as the graph of $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, defined on a neighborhood of the origin, more precisely:

$$S := \left\{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2 : \, x_3 = \Phi(x_1, x_2), \, \Phi(x_1, x_2) := x_1 x_2^{2n}\right\}$$

where $n \geq 1$. So, further assume that $n \geq 1$.

Then, for the function $\det Hess$ the following equality holds true

$$\det Hess \Phi(x_1, x_2) = -4n^2 x_2^{2(2n-1)}.$$

The integral (1.1) can be written in the form:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := 4^q n^{2q} \int_S e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \Phi(x_1,x_2))} |x_2|^{2q(2n-1)} a(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{1.2}$$

where $a(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2,)\Phi(x_1,x_2)}{\sqrt{(1+|\Delta\Phi(x_1,x_2)|^2)^{4q-1}}}$.

The main result of the work is the following theorem.

Theorem. Let $q > \frac{1}{2}$. Then there exist a neighborhood V of the origin the estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C\|a\|_{c^3}}{|\xi|},$$

holds, for all function $a \in C_0^\infty(V)$ and $\xi \neq 0$, where C is a constant depending on q.

Now, we consider (1.2) for the different parameters ξ_1, ξ_2, ξ_3.

If $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|,\} \geq \xi_3$, then, we have the following lemma:

Lemma. Let $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|,\} \geq \xi_3$ and $q > 0$. Then there exists a neighborhood V of the origin such that the following estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C\|a\|_{c^3}}{|\xi|} \tag{1.3}$$

holds, for all function $a \in C_0^\infty(V)$ and $\xi \neq 0$, where C is a constant depending on q.

Lemma is an analog of lemma 5 from [3].

References.

1. **C. D. Sogge, E. M. Stein** *Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ Invent.*–Math 82543-5561985.

2. **D. M. Oberlin.** *Oscillatory integrals with polynomial phase.*MATH.SCAND 69 45-56 1991.

3. **I. A. Ikromov and Sh. A. Muranov.** *Ob otsenkakh ostsillyatornykh integralov s mnozhitelem gasheniya [On estimates of oscillatory integrals with fading factor].* Mat. zametki [Math. Notes], 2018, 104, No. 2, 200–215 (in Russian).

4. **Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N.** *Trigonometric integrals.*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971–1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980),pp 21-239.
5. **Ikromov I. A.** *"Dempfirovannye ostsillyatornye integraly i maksimal'nye operatory" [Dampened oscillatory integrals and maximal operators].* Mat. zametki [Math. Notes], 2005, 78, No. 6, 833–852 (in Russian).

UDK 517.55

Ekstremum masalalarini Maple dasturida yechish

Mustafoyeva F.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti;
feruzamustafoyeva581@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu ishda funksiya ekstremumining Maple dasturida yechilishi ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar: *Ekstremum, minimum, maksimum, Ekstremiumning zaruriylik va yetarlilik sharti, Maple dasturi.* Faraz qilaylik, n ta o'zgaruvchili $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar a nuqtaning shunday atrofi topilsaki, bu atrofdan olingan istalgan x nuqta uchun $f(a) \geq f(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya $a \in \mathbb{R}^n$ nuqtada lokal maksimumga ega deyiladi. Bunday xossaga ega bo'lgan a nuqta lokal maksimum nuqta deb ataladi. Agarda $f(a) \geq f(x)$ o'rniga $f(a) < f(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda a lokal minimum nuqta deyiladi. Lokal maksimum nuqtalar va lokal minimum nuqtalar lokal ekstremum nuqtalar deb ataladi.

1-teorema. (*lokal ekstremumning zaruriylik sharti*). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya a nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Agar a lokal ekstremum nuqta bo'lsa, u holda

$$\nabla f(a) = 0$$

bo'ladi.

Ekstremumning yetarlilik shartlari.

2-teorema. Faraz qilaylik, f funksiya $a \in \mathbb{R}^n$ statsionar nuqtada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar f funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali shu nuqtada musbat aniqlangan kvadratik forma bo'lsa, u holda a nuqta f funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi.

MAPLE dasturi yordamida ikki o'zgaruvchli funksiyani ekstremumga tekshirish

Faraz qilaylik $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani o'z ichiga olgan biror D sohada uzluksiz bo'lgan birichi, ikkinchi, uchinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lib, $M_0(x_(0,)y_0)$ nuqta $f(x, y)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin. Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A,\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B,\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C,\ \Delta = AC - B^2$$

Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada

1. $\Delta > 0,\ A < 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya shu $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi;
2. $\Delta > 0,\ A > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya shu nuqtada minimumga erishadi;
3. $\Delta < 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ fuksiya shu nuqtada maksimumga ham, minimumga ham erishmaydi;
4. $\Delta = 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya ekstremumga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin.

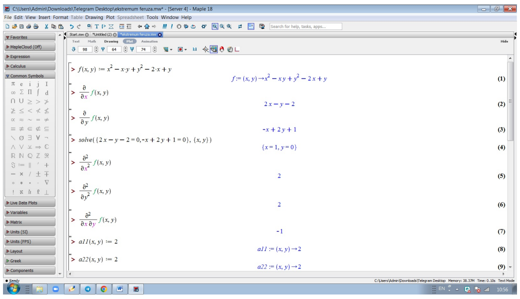


Рис. 1: MAPLE dasturi yordamida ikki o'zgaruvchli funksiyani ekstremumga tekshirishga doir misol

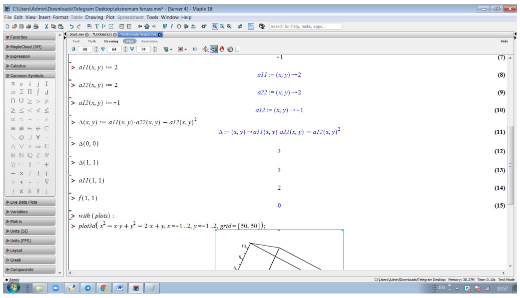


Рис. 2: MAPLE dasturi yordamida ikki o'zgaruvchli funksiyani ekstremumga tekshirishga doir misol (davomi)

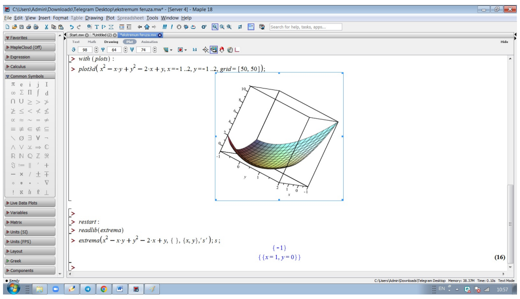


Рис. 3: MAPLE dasturi yordamida ikki o'zgaruvchli funksiyani ekstremumga tekshirishga doir misol (davomi)

Quyida Maple dasturi yordamida ikki o'zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshirishga doir misol keltirilgan:

Adabiyotlar

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik analiz, 2-qism, Toshket, 2018.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М. 1971.
3. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple, Белгород, 2001.

UDC 517.953

THE LOCAL PROBLEM FOR A TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH THE HILFER OPERATOR ON SIMPLE STAR GRAPHS

Rashidova D. O.[1], Abdurasulova O. Sh.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek;
ravshan999555@gmail.ru, Oydinshabdurasulova@gmail.com

Let us consider simple star graph Γ with three semi-finite bonds connected at the point O. The point O is the vertex of the graph. We label bonds of the graph as B_k, $\left(k=\overline{1,3}\right)$. Let us define coordinate x_k on the bond B_k, $\left(k=\overline{1,3}\right)$ and $x_k \in (0,\, L_k)$. At each bond the coordinate of the vertex point O is equal to zero. Further, we will use x instead of x_k [5].

In each bond of the graph consider the fractional differential equations [1], [4]

$$D_{0+}^{\alpha,\mu}u^{(k)}\left(x,t\right)-u_{xx}^{(k)}\left(x,t\right)=f^{(k)}\left(x,t\right),\, x\in B_k,\, k=\overline{1,3}, \tag{1}$$

where $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ is Hilfer operator [2]-[3], $0<\alpha<1$, $0\le\mu\le 1$, $f^{(k)}\left(x,t\right)$ $(k=\overline{1,3})$ are known functions.

We will study the following problem for equation (1) in graph Γ.

Problem. To find functions $u^{(k)}\left(x,t\right)$ in the domain $B_k\times(0,T)$, satisfy an equation (1) for $0<\alpha<1$ with following properties:

$$t^{1-\alpha-\mu+\alpha\mu}u^{(k)}\left(x,t\right)\in C\left([0,\,L_k]\times[0,\,T]\right),$$

$$u_{xx}^{(k)}\left(x,t\right), D_{0+}^{\alpha,\mu}u^{(k)}\left(x,t\right)\in C\left((0,\,L_k)\times(0,\,T)\right).$$

Define local conditions

$$I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)}u^{(k)}\left(x,t\right)|_{t=0}=\varphi^{(k)}\left(x\right),\, k=\overline{1,3},\, x\in B_k \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u^{(k)}\left(L_k,t\right)=0,\ t\in[0,\,T]\,,\, k=\overline{1,3}. \tag{3}$$

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$u^{(1)}\left(0,t\right)+u^{(2)}\left(0,t\right)+u^{(3)}\left(0,t\right)=0,\, t\in[0,\,T]\,, \tag{4}$$

$$u_x^{(1)}(0,\,t)=u_x^{(2)}(0,\,t)=u_x^{(3)}(0,\,t),\, t\in[0,\,T]\,. \tag{5}$$

Where $\varphi^{(k)}\left(x\right)$ are sufficiently smooth given functions, moreover

$$\varphi^{(1)}\left(0\right)+\varphi^{(2)}\left(0\right)+\varphi^{(3)}\left(0\right)=0, \varphi_x^{(1)}\left(0\right)=\varphi_x^{(2)}\left(0\right)=\varphi_x^{(3)}\left(0\right),$$

$$\varphi^{(k)}\left(L_k\right)=0,\, k=\overline{1,n}.$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3) – (5).

REFERENCES

1. **Kilbas A.A., Srivstava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of fractional differential equations.* In North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, 2006.
2. **Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.** *On a nonlocal problem for fourth-order mixed type equation with the Hilfer operator.* Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, 1, pp.59-67 (in Russian).
3. **Karimov E.T., Sobirov Z.A., Khujakulov J.R.** *Solvability of a problem for a time fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graphs.* Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021, Vol. 4, №4, pp.9-18.
4. **Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R.** *Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 12(4). 2019. P. 412–420.
5. **Alikhanov A.A.** *A priori estimate for solutions of boundary value problems for fractional-order equations.* Differential equations., 2010, 6(5), pp. 660-666.

UDC 517.982.252

Universal Separation Theorem for the $I(X)$ idempotent spaces.

Tagaymurotov A.O.
Chirchik State Pedagogical University; tagaymurotov93@gmail.com

Subsemimodules and convex subsets of semimodules over semirings with an idempotent addition studied by Guy Cohen *et. all* 2003. Furthermore appeared Projector Formula and proved Universal Separation Theorem for an idempotent complete subsemimodule (see [2] for details). In this paper, we give Projector Formula and Universal Separation Theorem for the complete idempotent semimodule $I(X)$.

Let $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ equip with two operations $\oplus$ and $\odot$, which are defined as $x\oplus y = \max\{x, y\}$, $x \odot y = x + y$, $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$. Then $\mathbf{0} := -\infty$ is the zero of $\mathbb{R}_{\max}$ according to $\oplus$, and $\mathbf{1} := 0$ is the unit of $\mathbb{R}_{\max}$ according to $\odot$. It is well-known [1] that $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ is idempotent semifield (since $x \oplus x = x$ for all $x \in \mathbb{R}_{\max}$).

By ordered set, we will mean throughout the paper a set equipped with a partial order. Let partially order defined following way:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \; a \oplus b = b.$$

Definition 1.[3] Let V be an idempotent semigroup, K be an idempotent semiring, and let a multiplication operation $k, x \mapsto k \odot x$ be defined so that the following equalities hold

$$\begin{aligned}
&(k_1 \oplus k_2) \odot x = (k_1 \odot x) \oplus (k_2 \odot x),\\
&k \odot (x \oplus y) = (k \odot x) \oplus (k \odot y),\\
&\mathbf{1} \odot x = x.
\end{aligned}$$

for all $x, y \in V$, $k, k_1, k_2 \in K$; then the semigroup V is called a (left) idempotent semimodule over the semiring K (or simply a semimodule).

Definition 2.[3] A semimodule V over a semifield K is called an idempotent space.

This notions is analogous to the notion of linear (vector) space over field.

Let $|X| = n$. By $I(X)$ they denote [1] the set of all idempotent measures on X, and by definition one has $I(X) \subset \mathbb{R}^n_{\max}$.

$$I(X) = \left\{ \mathop{\oplus}_{i=1}^{n} \mu_i \odot \delta_{x_i} : \; \mu_i \geq -\infty, \, i = 1, \, 2, \, \ldots, \, n, \; \mathop{\oplus}_{i=1}^{n} \mu_i = 0 \right\}.$$

In a complete semimodule Y, the authors of [2] defined for all $x, y \in Y$ and $\lambda \in \mathcal{K}$,

$$x \setminus y \overset{def}{=} (L_x^Y)^{\#}(z) = \top\{\lambda \in \mathcal{K} \mid x \odot \lambda \leq z\},$$

$$x/y \overset{\text{def}}{=} (R_\lambda^Y)^{\#}(x) = \top\{z \in Y \mid z \odot \lambda \leq x\}.$$

Let V be a complete subsemimodule of a complete semimodule Y over a complete idempotent semiring $\mathcal{K}$, i. e., a subset of Y that is stable by arbitrary sups and by the action of scalars. A map P_V is called [2] canonical projector on V which defines

$$P_V \colon Y \to Y, \quad P_V(y) = \top\{v \in V \mid v \leq y\} \qquad y \in Y.$$

W is said [2] to be a *generating family* of a complete subsemimodule V if any element $v \in V$ can be written as $v = \vee\{w \odot \lambda_w \mid w \in W\}$, for some $\lambda_w \in \mathcal{K}$.

Theorem 1. (Projector Formula). For the set $I(X)$ with generating family W, the following equality holds

$$P_{I(X)}(y) = \bigvee_{w \in W} w \odot (w \setminus y).$$

where $y \in \mathbb{R}_n^{\max}$.

Proposition 1. For the $I(X) \subset \mathbb{R}_n^{\max}$ complete subsemimodule with generating family W the following equality holds

$$P_{I(X)}(y) = \perp\{z \in \mathbb{R}_n^{\max} \mid w \setminus z \geq w \setminus y, \quad \forall w \in W\}.$$

Theorem 2. For the complete subsemimodule $I(X) \subset \mathbb{R}_n^{\max}$ and any $y \in \mathbb{R}_n^{\max}$ the following equalities hold

$$\forall \mu \in I(X), \qquad \mu \setminus P_{I(X)}(y) = \mu \setminus y,$$

and

$$y \in I(X) \quad \Longleftrightarrow \quad y \setminus P_{I(X)}(y) = y \setminus y.$$

Corollary 1. (Separating a Point from $I(X)$) For the a complete subsemimodule $I(X) \subset \mathbb{R}_n^{\max}$ and any $y \in \mathbb{R}_n^{\max}$ not lying in $I(X)$ the following equalities hold

$$\mu \setminus y \wedge \mathbf{1} = \mu \setminus y \wedge \nu, \quad \forall \mu \in I(X),$$

$$y \setminus y \wedge \mathbf{1} > y \setminus y \wedge \nu$$

with

$$\nu = \bigvee_{\mu \in I(X)} (\mu \setminus y \wedge \mathbf{1}), \qquad y = \bigvee_{\mu \in I(X)} \mu \odot (\mu \setminus y \wedge \mathbf{1}).$$

References

1. **Zaitov A. A.** *On a metric on the space of idempotent probability measures.* Applied General Topology. No. 1, 2020, p. 35–51.

2. **Cohen G., Gaubert S.,Quadrat J. P.** *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules.* Linear Algebra and its Applications Vol. 379, 2004, p. 395–422.

3. **Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz G. B.** *Idempotent Functional Analysis: An Algebraic Approach.* Mathematical Notes, Vol. 69, no. 5, 2001, p. 696–729.

УДК 517.988.52

О продолжениях слабо аддитивных функционалов

Актамов Ф.
[1]Чирчикский государственный педагогический университет; *feruzaktamov28@gmail.com*

Пусть L – частично упорядоченное линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, θ – нуль пространства L, а K – конус в нём, такой, что $L = K - K$.

Пусть $x_1,\, x_2 \in L$ – произвольные различные точки. Напомним, что множество

$$[x_1,\, x_2] = \{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\colon\ \alpha \in [0,\, 1]\}$$

называется отрезком, соединяющим точки x_1, x_2. Точка $x \in [x_1,\, x_2]$, называется внутренней точкой отрезка $[x_1,\, x_2]$, если $x_1 \neq x \neq x_2$.

Пусть $x \in K$. Точка x называется внутренней точкой конуса K, если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset L$, содержащего x как внутреннюю точку, отрезок $[x_1,\, x_2] \cap K$ также содержит x как внутреннюю точку. Множество всех внутренних точек конуса K называется внутренностью этого конуса, и обозначается через $Int(K)$.

Зафиксируем теперь некоторую внутреннюю точку $x_0 \in K$. Определим δ-окрестность (относительно конуса K и точки x_0) нуля θ следующим образом:

$$\langle\theta;\, \delta\rangle = \{x \in L\colon\ (\delta x_0 \pm x) \in Int(K)\}. \tag{1}$$

Ясно, что множества вида (1) образуют базу окрестностей нуля. Окрестность произвольной точки $z \in L$ можно определить с помощью сдвигов окрестностей нуля:

$$\langle z;\, \delta\rangle = \langle\theta;\, \delta\rangle = \{x + z \in L\colon\ x \in \langle\theta;\, \delta\rangle\} = \{x + z \in L\colon\ (\delta x_0 \pm x) \in Int(K)\} =$$

$$= \{y \in L\colon\ (\delta x_0 \pm (y - z)) \in Int(K)\}.$$

База окрестностей точек множества L порождает отделимую топологию на L. Легко показать, что множество L, снабженное этой топологией, является топологическим линейным пространством.

Определение 1. Подмножество B линейного пространства L называется A-подпространством относительно точки $x_0 \in L$, если $\theta \in L$, и из $x \in B$ вытекает, что $(x + \lambda x_0)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.
A-подпространство B пространства L относительно точки $x_0 \in L$ для краткости назовем A^{x_0}-подпространством и обозначим его через B^{x_0}.

Легко доказывается следующая

Лемма 1. Подпространство L_1 линейного пространства L является A^{x_0}-подпространством тогда и только тогда, когда оно содержит точку $x_0 \in L$.

Отметим, что само пространство L, а также множества вида $\{\lambda x_0\colon\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ являются A^{x_0}-подпространствами для любого $x_0 \in Int(K)$. Такие множества (как легко видеть, их бесконечно много) назовем тривиальными A^{x_0}-подпространствами. Но, в отличие от линейных подпространств, $\{\theta\}$ не является A^{x_0}-подпространством ни для одной точки $x_0 \in Int(K)$.

Легко показать, что пересечение любого семейства A^{x_0}-подпространств в L является A^{x_0}-подпространством. В частности, пересечение всех A^{x_0}-подпространств, содержащих данное множество $X \subset L$, есть минимальное A^{x_0}-подпространство, содержащее X; это множество назовем слабо аддитивной (относительно точки x_0) оболочкой множества X, и обозначим через $A^{x_0}(X)$.

Следующее утверждение характеризует структуру слабо аддитивной оболочки данного множества.

Предложение 1. Слабо аддитивная оболочка $A^{x_0}(X)$ множества X состоит из (теоретико-множественного) объединения множества $\{\lambda x_0\colon\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ и совокупности всех сумм вида $x+\lambda x_0$, где $x\in X$, $\lambda\in\mathbb{R}$ т. е.

$$A^{x_0}(X)=\{\lambda x_0\colon\ \lambda\in\mathbb{R}\}\cup\{x+\lambda x_0\colon\ x\in X,\,\lambda\in\mathbb{R}\};$$

в частности, если $x_0\in X$, то

$$A^{x_0}(X)=\{x+\lambda x_0\colon\ x\in X,\,\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Доказательство вытекает из определения A^{x_0}-подпространства.

Обозначим

$$\Lambda_{x_0}=\{\lambda x_0:\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Тогда легко видеть, что

$$A^{x_0}(X)=\bigcup_{x\in X\cup x_0}(x+\Lambda_{x_0}).\tag{2}$$

Равенство (2) оправдывает название A^{x_0}-подпространства: всякое A^{x_0}-подпространство $A^{x_0}(X)$ состоит из объединения одномерного подпространства $\Lambda_{x_0}\subset L$ и аффинных подмножеств $x+\Lambda_{x_0}$, $x\in X$.

Введем следующее

Определение 2. Функционал $f:L\to\mathbb{R}$ называется:

1) слабо аддитивным (относительно точки x_0), если

$$f(x+\lambda x_0)=f(x)+\lambda f(x_0),$$

где $x\in L$, $\lambda\in\mathbb{R}$;

2) сохраняющим порядок (относительно конуса K), если

$$f(x)\geq f(y)$$

для всех x, $y\in L$ таких, что $x-y\in K$, где K – конус пространства L;

3) нормированным (относительно точки x_0), если $f(x_0)=1$.

Если точка $x_0\in L$ фиксирована, то функционал в 1) для краткости, назовем слабо аддитивным; а в 3) просто нормированным; если конус K пространства фиксирован, то функционал f в 2) назовем просто сохраняющим порядок.

Заметим, что из 1) определения 2 сразу вытекает, что слабо аддитивный функционал является линейным функционалом на подпространстве $\{\lambda x_0\colon\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ линейного пространства L. Откуда следует, что $f(\theta)=0$ для слабо аддитивного функционала f.

Пусть $K\subset L$ – конус. Напомним, что функционал $f\colon\ L\to\mathbb{R}$ называется неотрицательным (относительно конуса K), если $f(x)\geq 0$ для всех $x\in K$.

Всякий слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал f неотрицателен. Действительно, пусть $x\in K$. Тогда $x-\theta\in K$. Поскольку f сохраняет порядок, то $f(x)\geq f(\theta)$. Следовательно, $f(x)\geq 0$.

Теорема 1. Если слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал f непрерывен в нуле, то он непрерывен на всем L.

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|f(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in L$, для которых $x\in\langle\theta;\,\delta\rangle$. Пусть $y\in L$ – произвольный ненулевой элемент. Рассмотрим окрестность

$$\langle y;\,\tfrac{\delta}{2}\rangle=\{z\in L\colon\ (\tfrac{\delta}{2}x_0\pm(z-y))\in Int(K)\}.$$

Для любого $z\in\langle y;\frac{\delta}{2}\rangle$имеем:

1) $f(\frac{\delta}{2}x_0) + f(y) \geq f(z)$, так как $(\frac{\delta}{2}x_0 + y) - z \in Int(K)$;
2) $f(\frac{\delta}{2}x_0) + f(z) \geq f(y)$, так как $(\frac{\delta}{2}x_0 + z) - y \in Int(K)$. Из этих двух неравенств следует, что

$$|f(z) - f(z)| \leq f(\tfrac{\delta}{2}x_0).$$

Теперь возьмем такой x, что $x - \frac{\delta}{2}x_0 \in K$ и $\frac{3}{4}\delta x_0 - x \in K$. Тогда $f(\frac{\delta}{2}x_0) \leq f(x)$ и $f(x) \leq f(\frac{3}{4}\delta x_0)$. С другой стороны, $f(\frac{3}{4}\delta x_0) < \varepsilon$, поскольку $\frac{3}{4}\delta x_0 \in \langle\theta;\, \delta\rangle$. Следовательно, $\mid f(z) - f(y) \mid < \varepsilon$ для любого. $z \in \langle y;\, \frac{\delta}{2}\rangle$. Таким образом, f непрерывен в $y \in L$. Значит, f непрерывен во всем L в силу произвольности $y \in L$. Теорема 1 доказана.

Слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал $f\colon\ L \to \mathbb{R}$ называется ограниченным, если $\sup\{\mid f(x) \mid\colon\ x \in \langle\theta;\, 1\rangle\} < \infty$.

Теорема 2. Слабо аддитивный, сохраняющий порядок функционал $f\colon\ L \to \mathbb{R}$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Доказательство. Пусть f – произвольный ограниченный функционал. Пусть $f(x_0) = a < \infty$. Пусть $\delta x_0 \pm (z - y) \in Int(K)$. Тогда

$$\mid f(z) - f(y) \mid < \delta f(x_0) = a\delta,$$

и, следовательно, f непрерывен.

Обратно, пусть f непрерывен. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $\mid f(x) \mid < 1$ при $x \in \langle\theta;\, \delta\rangle$ (поскольку, f непрерывен в нуле). В частности, $\mid \frac{\delta}{2}f(x_0) \mid < 1$, так как $\frac{\delta}{2}x_0 \in \langle\theta;\, \delta\rangle$. Следовательно, $\mid f(x_0) \mid < \frac{2}{\delta} < \infty$ т. е., $\sup\{\mid f(z) \mid\colon\ z \in \langle\theta;\, 1\rangle\} < \frac{2}{\delta} < \infty$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. **Колмогоров А. А., Фомин С. В.** *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука. 1976. – 586 с.
2. **Zaitov A. A.** *The functor of order-preserving functionals of finite degree.* Journal of Mathematics Sciences. Vol. 133, no. 5, 2006. P. 1602–1603.
3. **Аюпов Ш. А., Заитов А. А.** *Принцип равномерной ограниченности для слабо аддитивных операторов.* Узбекский математический журнал. № 4. 2006. Стр. 3–10.
4. **Аюпов Ш. А., Заитов А. А.** *Слабо аддитивных функционалы на линейных пространствах.* Доклады АН РУз. № 4-5. 2006. Стр. 7–12.

УДК 517.55

УСЛОВИЯ СВЯЗНОСТИ ГРАФИКА МНОГОЗНАЧНОЙ ОТОБРАЖЕНИИ

Аликулов Э. О.,[1] Амирова Д. А.[2]
[1,2] Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
e-mail:eshpulat05@mail.ru, dilnozamirova1994@gmail.com

Пусть нам дана непрерывная вещественная функция $D \subset \mathbb{R}^n$ $f : D \to \mathbb{R}$. Следуя Лузина Н. Н. рассмотрим следующее построение [1]:для каждой точки $x \in [a,b]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ построим множества

$$M_x = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon(f; x_k)$$

где

$$M_\varepsilon(f; x_k) = \{\frac{f(x_1, ...x_k + h_k...) - f(x_1, x_2, ...x_k)}{h_k}, 0 < |h_k| < c\}$$

Легко показат, что $M_x(f)$ совпадает с совокупностью всех производных чисел функции f в данной точке x; и состоит,вообще говоря,из двух компонент: множества $M_x^+(f)$ правых (т.е.при $h_k > 0$) и множество $M_x^-(f)$ левых (при $h_k < 0$) производных чисел этой функции,т.е. $M_x(f) = M_x^+(f) \bigcup M_x^-(f)$.Напомним,что d называется производным числом непрерывной функции f в точки x ,если существует безконечна малая последовательность $\{h_n\}$ такая,что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1, x_2, ...x_k + h_n, ...) - f(x_1, x_2, ...x_n)}{h_n} = d$$

В отличие от производной , с помощью производных чисел на прямой можно исследовать произвольную функцию, не обязательно гладкую, или даже не непрерывную. Например,для выпуклых функций и функций максимума построен соответствующий аппарат исследования, основанный на понятие производных чисел $[3-4]$.

Условия связности производных множеств существенная . С помошью этой условии можно докозат следующее.По построению множество $M_x(f)$,соответствие $\Phi_f : x \to M_x(f)$ определят многозначное отображение $[a, b]$на некоторое множество плоскости $\mathbb{R}^{n+1}$ и обладает множеством всюду второй категории в$[a, b]$ точек полунепрерывности сверху [3].

Верна следующая

Теорема 1. Пусть $f \in [a, b]$ и пусть в каждой точке $x \in [a, b]$ множество $M_x(f) = M_x^+(f) \bigcup M_x^-(f)$ связно.Тогда график многозначного отображения $\Phi_f : x \to M_x(f)$ т.е $W_\Phi = \{(x, \xi); x \in D, \xi \in M_x(f)\}$-связное подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$..

Литература

1. **Трохимчук Ю.Ю.** *Дифференцирование,внутренние отображения и критерии аналитичности.//Киевб Ин-т математика НАН Украины,2007,300с.*

2. **Трохимчук Ю.Ю.** *Теорема о средних значениях //Укр.мат.журнал.2013,т.65,№9.*

3. **Кларк Ф** *Оптимизация и негладкий анализ. М .Наука.1988 .*

4. **Демьянов В.Ф.,Рубинов А.М.** *Основы негладкого анализа и квазидифференцируемость.//М.:Наука ,1990.*

УДК 517.55

О РЯДАХ ЯКОБИ-ХАРТОГСА ПО СТЕПЕНЯМ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Жуманиязова Д. Т.
Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека; jdurdona.93@gmail.com

Данная заметка посвящена исследованию областей сходимости рядов Якоби – Хартогса по степеням дробно-линейной функции.

В многомерном комплексном анализе кроме степенных рядов рассматриваются еще ряды Хартогса, ряды по однородным полиномам и ряды Якоби - Хартогса. С помощью этих рядов успешно решаются многие задачи комплексного анализа (см., например, [1-4]). Особенно при задачах голоморфного продолжения функций вдоль фиксированного направления часто используются ряды Якоби – Хартогса. В связи с этим представляет интерес исследование областей сходимости таких рядов.

Рассмотрим на плоскости С рациональную лемнискату G_r, т.е. связную компоненту множества $|g(z)| < r$, задаваемую некоторой рациональной функцией $g(z)$.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{G_r}$. Тогда функция

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{g(\xi) - w} \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} d\xi$$

голоморфна в области $G_r \times \{|w| < r\}$, причем $F(z, g(z)) \equiv f(z)$ в G_r по интегральной формуле Коши. Разложим $F(z, w)$ в ряд Хартогса по w:

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k \tag{1}$$

Подставляя в (1) $w = g(z)$, получим разложениеf в ряд Якоби [5]

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) g^k(z), \tag{2}$$

где коэффициенты $c_k(z)$, k=0,1,2,... определяются по формуле

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} f(\xi) \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{g^{k+1}(\xi) \cdot (\xi - z)} d\xi. \tag{3}$$

Действительно,

$$c_k(z) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(z,w)}{\partial w^k} |_{w=0} = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial w^k} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{g(\xi) - w} \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} d\xi \right] \right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} f(\xi) \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{g^{k+1}(\xi) \cdot (\xi - z)} d\xi.$$

В этой формуле, согласно интегральной теореме Коши, ∂G_r можно заменить любым контуром $\partial G_{r'}$, $r' \leq r$. Если рассматриваемая функция $g(z)$ имеет вид $g(z) = \frac{p_m(z)}{q_m(z)}$, где $p_m(z)$ и $q_m(z)$ - многочлены, $\deg p_m(z) \leq m$, $\deg\, q_m(z) \leq m$, то по формуле (3) имеем

$$c_k(z) = \frac{1}{q_m(z)} \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} \frac{f(\xi)\, q_m^k(\xi)}{p_m^{k+1}(\xi)} \cdot \frac{p_m(\xi) q_m(z) - p_m(z) q_m(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

В результате приходим к равенству $c_k(z) = \frac{\tilde{p}^{(k)}{}_{m-1}(z)}{q_m(z)}$, из которого видно, что $c_k(z)$ рациональные функции с полюсами в полюсах $g(z)$, причем $\deg c_k \leq \deg g = m$, $k = 1, 2 \ldots$.

Областью сходимости ряда (2) является внутренность лемнискаты $|g(z)| < R$, где радиус R определяется по формуле

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|c_k\|_K^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R}. \tag{4}$$

Здесь K- произвольный неполярный компакт, не содержащий полюсовg, и предел в левой части равенства не зависит от выбора такого компакта (см. [2]).

Заметим, что на границе рассматриваемой лемнискаты $|g(z)| = R$ существует хотя бы одна особая точка$f(z)$.

В этой заметке мы рассмотрим частный случай рядов Якоби-Хартогса, а именно рассмотрим случай, когда функция $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$, дробно-линейная. В этом случае коэффициенты ряда Якоби-Хартогса будут иметь вид

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} f(\xi) \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{g^{k+1}(\xi) \cdot (\xi - z)} d\xi = \frac{1}{cz+d} \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} f(\xi) \cdot \frac{(c\xi + d)^k}{(a\xi + b)^{k+1}} d\xi =$$
$$= \frac{l_k}{cz+d},$$

где

$$l_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} f(\xi) \cdot \frac{(c\xi + d)^k}{(a\xi + b)^{k+1}} d\xi. \tag{5}$$

Следовательно, ряд Якоби-Хартогса имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{cz+d} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)^k = \frac{l_k}{cz+d} \sum_{k=0}^{\infty} l_k \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)^k. \tag{6}$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. Областью сходимости ряда (6) является внутренность лемнискаты $\{|g(z)| < R\}$, где радиус сходимости R определяется по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|l_k|^{\frac{1}{k}}}\,. \tag{7}$$

Доказательство теоремы. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число k_0 такое, что при $k > k_0$ имеем $|l_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R} + \varepsilon$ и $|l_k|^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^k$при $k \geq k_0$. Теперь на множестве $L = \{|g(z)| \leq R - \delta\}$ $(\delta > 0)$ оценим члены ряда (6):

$$\left|l_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^k\right| \leq \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^k \cdot (R-\delta)^k = \left[(R-\delta)\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)\right]^k. \tag{8}$$

Можно выбрать $0 < \varepsilon < \frac{1}{R(R-\delta)}$ так, чтобы $(R-\delta)\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right) = q < 1$. Тогда как видно из (8), члены ряда (6) при $k \geq k_0$ мажорируются членами геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, и, следовательно, ряд (6) сходится при $\{|g(z)| < R - \delta\}$. В силу произвольности $0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ и $\delta > 0$ получим, что ряд (6) сходится в $\{|g(z)| < R\}$ и его сумма голоморфна на этом множестве.

Теперь докажем, что ряд (6) не сходится в $\{|g(z)| > R\}$. Предположим противное, что $\left\{\left|g(z^0)\right| > R\right\}$ и ряд (6) сходится в некоторой окрестности

$$V = \{|g(z)| \geq R + \delta\} \ .$$

Тогда получим, что $l_k \cdot g^k(z)$ ограничена в V и выполняется неравенство

$$(R+\delta)\,\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|l_k|^{\frac{1}{k}} \leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\left|l_k \cdot g^k(z)\right| \leq 1 \quad (z \in V). \tag{9}$$

А это противоречит неравенству $|g(z)| > R$ (9). Следовательно,

$$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|l_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R}\,.$$

Теорема доказана.

Литература

1. **Садуллаев А.** *Теория плюрипотенциала. Применения Palmarium akademik publishing. Saarbrüchen, Deutschland 2012.*

2. **Туйчиев Т.Т.** *Об аналоге теоремы Хартогса //Изв.АН. УзССр. Сер. Физ-мат. Наук.1985. №6,с. 26-29.*

3. **Садуллаев А.С., Туйчиев Т.Т.** *О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечения. УзбекскийМатематическийжурнал, 2009,№1, с.148-157.*

4. **Tuychiev T.T.** *ON DOMAINS OF CONVERGENCE OF MULTIDIMENSIONAL LACUNARY SERIES. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019 т.12, № 6,с.736-746.*

5. **Садуллаев А., Чирка Е.М.** *О продолжении функций с полярными особенностями //Мат.сб. 1987,т. 132, №3, с. 383-390.*

УДК 517.98

ОЦЕНКА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ОДНОГО ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Кучаров Р.Р.,[1] Сайидмуродова С.А.,[2] Салимов Ж.К.[3]
[1,2,3] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан ramz3364647@yahoo.com, sitorasayidmurodova1993@gmail.com, edujahongir.salimov@gmail.com

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1},\ \ \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2},\ \ d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ компактные множества.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{1}$$

где действия операторов T_1 и T_2 заданы формулами

$$T_1 f\,(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1\,(x,s,y)\,f(s,y)d\mu_1(s),\ \ k_1(x,s,y) \in C(\Omega_1^2 \times \Omega_2),\ \ k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)},$$

$$T_2 f\,(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2\,(x,t,y)\,f(x,t)d\mu_2(t),\ \ k_2(x,t,y) \in C(\Omega_1 \times \Omega_2^2),\ \ k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}.$$

Иногда операторы вида (1) называются частично интегральными операторами (ЧИО) типа Фредгольма. Исследованию различных свойств ЧИО типа Фредгольма посвящена монография [1]. В [2] исследованы спектральные свойства самосопряженных ЧИО типа Фредгольма. В работе [3] исследован спектр одного трехчастичного дискретного оператора H^t Шредингера, возникающего в модели Хаббарда, для которого импульсное представление оператора H^t представляется как самосопряженный оператор вида (1).

Пусть $\{\varphi_k(x), k = \overline{1,2}\}, \{\psi_j(y), j = \overline{1,2}\}$ – ортонормированные системы непрерывных функций из $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$ – вещественнозначные непрерывные функции на Ω_2 и Ω_1 соответственно. В настоящей работе рассматривается модельный оператор $H(1)$ с вырожденными ядрами

$$k_1\,(x,s,y) = \ \varphi(y)\left(\alpha_1\varphi_1(x)\overline{\varphi_1\,(s)} + \alpha_2\varphi_2(x)\overline{\varphi_2\,(s)}\right),\ \ \alpha_1, \alpha_2 > 0,$$

$$k_2\,(x,t,y) = \ \psi(x)\left(\beta_1\psi_1(y)\overline{\psi_1\,(t)} + \beta_2\psi_2(y)\overline{\psi_2\,(t)}\right),\ \ \beta_1, \beta_2 > 0.$$

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$, как обычно, обозначаются резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [4].

Числа $E_{\min}\,(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}\,(A)\}$, $E_{\max}\,(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}\,(A)\}$ будем называть *нижней гранью (или нижним краем) и верхней гранью (или верхним краем)* существенного спектра оператора A.

Положим

$$\pi_j(t) = \inf_{\|h\|=1}(H_j(t)h, h),\ \ t \in \Omega_j$$

$$\pi_j^{\max} = \max_{t\in\Omega_k}\pi_j\,(t)\,,\ \ k \neq j,\ \ j = 1, 2,\ \ k = 1, 2,$$

$$a_{\max} = \max\{a_1, a_2\}\,,\ \ b_{\max} = \max\{b_1, b_2\}\,.$$

Определим матрицу Λ порядка $m \times n$ с положительными элементами $\xi_{i,j}$:

$$\xi_{i,j} = \int_{\Omega_1} u\,(x)\,|\varphi_i(x)|^2 dx \int_{\Omega_2} v\,(y)\,|\psi_j(y)|^2 dy.$$

Лемма. 1) Пусть $\varphi_{\max}\alpha_{\max} \geq \psi_{\max}\beta_{\max}$. Если для некоторого элемента $\xi_{i,j}$ матрицы Λ выполнено условие

$$\xi_{i,j} < \psi_{\min}\beta_j + (\varphi_{\min}\alpha_i - \varphi_{\max}\alpha_{\max}),$$

то оператор (1) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева нижней грани существенного спектра.

2) Пусть $\varphi_{\max}\alpha_{\max} \leq \psi_{\max}\beta_{\max}$. Если для некоторого элемента $\xi_{i,j}$ матрицы Λ выполнено условие

$$\xi_{i,j} < \varphi_{\min}\beta_j + (\psi_{\min}\alpha_i - \psi_{\max}\alpha_{\max}),$$

то оператор (1) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева нижней грани существенного спектра.

Теорема. Количество собственных значений в модели (1), лежащих ниже нижней грани $E_{\min}(H)$ существенного спектра $\sigma_{ess}(H)$ не более, чем четыре.

Литература

1. **Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.** *Partial integral operators and Integro-Differential Equations*, New York, 2000.
2. **Эшкабилов Ю.Х.** *Частично интегральные операторы типа Фредгольма.*, Germany, Saarbrucken: LAP, 2013.
3. **Эшкабилов Ю.Х.** *Об одном дискретном "трехчастичном"операторе Шредингера в модели Хаббарда.*, ТМФ 149 (2), -2006. С. 228-243.
4. **Рид М., Саймон Б.** *Методы современной математической физики. Т.1, Функц. Анализ.* (Мир, М., 1977).

УДК 517.98

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ СУММОЙ ЧАСТИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И МУЛЬТИПЛИКАТОРА

Кучаров Р.Р.,[1] Хатамов М.,[2] Пардаев Ш.А.[3]
[1,2,3] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан ramz3364647@yahoo.com, hatamovmaruf7@gmail.com, shohzodmath@gmail.com

Частично интегральные операторы представляют собой сравнительно новую область в теории интегральных операторов, хотя, частично интегральные операторы являются главным объектом изучения в квантовой теории поля, статистической физике, механике и теории операторов Шредингера.

Пусть $\Omega_1 = [a,b]^{\nu_1} \subset \mathbb{R}^{\nu_1}$ и $\Omega_2 = [c,d]^{\nu_2} \subset \mathbb{R}^{\nu_2}$ (где $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$). Пусть $k_1(x,s,y)$ и $k_2(x,t,y)$ – непрерывные функции на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ и на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ соответственно, причем $k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)}$, $k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим линейные ограниченные операторы T_1 и T_2 формулами

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s), \;\; T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t),$$

где μ_j-мера Лебега на $\sigma-$алгебре измеримых по Лебегу подмножеств множества $\Omega_j, j = 1,2$, т. е. здесь интеграл понимается в смысле Лебега. Операторы T_1 и T_2 называются частично интегральными операторами (ЧИО) в $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Надо подчеркнуть, что понятие частично интегрального оператора, которым мы пользуемся в данной работе, связано с оператором, действующим в функциональном пространстве функций из двух переменных $f(x,y)$, причем, в описании этого оператора содержится интегральный оператор, в котором интегрирование берется по одному аргументу (по x или y) функции $f(x,y)$. Линейный частично интегральный оператор иногда называется линейным оператором с частными интегралами.

Пусть $k_0(x,y)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и $k(x,y;s,t)$ – непрерывная функция на $(\Omega_1 \times \Omega_2)^2$, причем $k(x,y;s,t) = \overline{k(s,t;x,y)}$. Обозначим через H_0 оператор умножения на функцию $k_0(x,y)$:

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \;\; f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

а через K обозначим компактный интегральный оператор, заданный на $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ равенством

$$Kf(x,y) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} k(x,y;s,t) f(s,t) ds dt.$$

Здесь и в дальнейшем $ds = d\mu_1(s), \;\; dt = d\mu_2(t)$, и мы предполагаем, что меры $\mu_1(\cdot) = \mu_2(\cdot)$ нормированы, т. е. $\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$H = H(\varepsilon) : L_2(\Omega_1 \times \Omega_2) \to L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

заданный равенством

$$H(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon(T_1 + T_2) - \varepsilon K. \tag{1}$$

Конечность и бесконечность дискретных спектров трехчастичных операторов, вписывающихся моделью $H(\varepsilon)$, были исследованы в работах [1], [2]. Дискретный спектр гамильтониана $H(\varepsilon)$ для произвольных непрерывных ядер изучался в статье [3].

Спектральные свойства гамильтониана $H(\varepsilon)$ (1) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ исследованы в работе Минлоса и Акчурина [4], где изучалась теория рассеяния для оператора H.

Пусть $\nu_1 = \nu_2 = d \geq 3$ и $k_0(x,y) = \omega(x) + \omega(y)$, где ω – вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственную критическую точку q_0, являющуюся точкой невырожденного минимума, а ядра k_1, k_2, k–гладкие функции. При этих предположениях доказано, что при достаточно малом ε спектр гамильтониана H совпадает со спектром мультипликатора H_0, т. е. $\sigma(H) = \sigma(H_0)$, следовательно, отсутствуют двухчастичные ветви спектра гамильтониана H и связанные состояния.

Пусть $\varphi(y), \psi(x)$ – вещественнозначные непрерывные функции на Ω_2 и Ω_1, соответственно.

В настоящей работе исследуется спектр гамильтониана $H(\varepsilon)$ (1) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в случае $K = \theta$, где θ – нулевой оператор и при функции $k_0(x,y) = u(x)v(y)$, $k_1(x,s,y) = \alpha_1 \varphi(x) \overline{\varphi_1(s)} \varphi(y)$, $\alpha_1 > 0$, $k_2(x,t,y) = \beta_1 \psi(x) \overline{\psi_1(t)} \psi(y)$, $\beta_1 > 0$,

Положим

$$m = \inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2} k_0(x,y), \;\; M = \sup_{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2} k_0(x,y).$$

Допустим, что

$$m = k_0(x_{\min}, y_{\min}), \;\; M = k_0(x_{\max}, y_{\max}), \;\; (x_{\min}, y_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

На множестве Ω_2 определим следующие функции:

$$F_1(y) = \lim_{\lambda \to m-0} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{k_0(s,y) - \lambda}, \;\; F_2(y) = \lim_{\lambda \to M+0} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{\lambda - k_0(s,y)}.$$

Аналогично на множестве Ω_1 определим следующие функции

$$G_1(x) = \lim_{\lambda \to m-0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{k_0(x,t) - \lambda}, \;\; G_2(x) = \lim_{\lambda \to M+0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{\lambda - k_0(x,t)}.$$

Предположим, что

$$J_k = \max_{y\in\Omega_2} F_k(y), \ \ I_k = \max_{y\in\Omega_1} G_k(x), \ \ k=1,2 \ \ J_0 = \max\{J_1,J_2\}, \ \ I_0 = \max\{I_1,I_2\},$$

$$k_1^{\max} = \sup_{(x,s,y)\in\Omega_1^2\times\Omega_2} |\, k_1(x,s,y)\,|, \ \ k_2^{\max} = \sup_{(x,t,y)\in\Omega_1\times\Omega_2^2} |\, k_2(x,t,y)\,|, \ \ \mu_0 = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{k_1^{\max}J_0}, \frac{1}{k_2^{\max}I_0}\right\}.$$

На множестве Ω_1 определим следующие функции:

$$\psi_1(x) = \lim_{\lambda\to m-0}\int_{\Omega_2}\frac{dt}{(k_0(x,t)-\lambda)^4}, \ \ \psi_2(x) = \lim_{\lambda\to M+0}\int_{\Omega_2}\frac{dt}{(k_0(x,t)-\lambda)^4}.$$

Положим

$$\Lambda_k = \sup_{x\in\Omega_1}\psi_k(x), \ \ k=1,2 \ , \ \ \Lambda_0 = \max\{\Lambda_1,\Lambda_2\}.$$

Для каждого $a\in(0,\mu_0)$ определим также положительное число $\gamma_0(a)$:

$$\gamma_0(a) = \begin{cases} a, & \text{если } \mu_0 \le \gamma(a), \\ \gamma(a), & \text{если } \mu_0 > \gamma(a). \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $a\in(0,\mu_0)$. При всех

$$\varepsilon\in(0,\gamma_0(a))$$

в спектре трехчастичного оператора $H(\varepsilon)$ отсутствуют двухчастичная ветвь и связанные состояния, т.е. $\sigma_{ess}(H(\varepsilon)) = \sigma(H(\theta))$ и $\sigma_{disc}(H(\varepsilon)) = \emptyset$.

Пусть $a_0\in\big(0,1/(2k_1^{\max}J_0)\big)$ – фиксированное число и

$$\Gamma_1 = \Omega_2\times(-\infty,m)\times(0,a_0], \ \ \Gamma_2 = \Omega_2\times(M,+\infty)\times(0,a_0],$$

$$\inf_{(y,\lambda,\varepsilon)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2} D_1(y,\lambda,\varepsilon) = D_1^{\min}, \ \ \ \sup_{(y,\lambda,\varepsilon)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2} D_1(y,\lambda,\varepsilon) = D_1^{\max}.$$

Обозначим

$$A_1(\varepsilon) = \frac{k_1^{\max}k_2^{\max}}{D_1^{\min}}\Phi_1(\varepsilon), \ \ A_2(\varepsilon) = \frac{\Lambda_0^{3/4}k_2^{\max}}{D_2^{\min}}\Phi_2(\varepsilon),$$

где

$$\Phi_1(\varepsilon) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon J_0 k_1^{\max})^k\frac{(k+1)^{(k+1)/2}}{k!}, \ \text{ и } \ \Phi_2(\varepsilon) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon I_0 k_2^{\max})^n\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}.$$

Теорема 2. Если при $\varepsilon\in(0,\mu_0)$ выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0}+A_2(\varepsilon))},$$

то у оператора $H(\varepsilon)$ отсутствует дискретный спектр.

Литература

1. **Ю. Х. Эшкабилов** *Теоретическая и математическая физика* Т.164:1. - 2010. - 78-87 с.
2. **Ю. Х. Эшкабилов, Р. Р. Кучаров** *Теоретическая и математическая физика* Т.170:3. - 2012. - 409-422 с.
3. **Ю. Х. Эшкабилов** *Матем. тр.* Т.15:2. - 2012. - 194-203 с.
4. **Э. Р. Акчурин, Р. А. Минлос** *Изв. РАН. Сер. матем.* Т.76:6. - 2012. - 5-38 с. *УДК 517.984.46*

О спектральных свойствах самосопряженных частично интегральных операторов с невырожденными ядрами

Култураев Д.Ж.
Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан;
davron_2189@mail.ru

Линейные операторы и уравнения с частными интегралами в разных функциональных пространствах исследовались в монографиях [1]. Существенный и дискретный спектры самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма в гильбертовом пространстве исследованы в [2]. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}\right)$ - полная ортонормированная система функций из $L_2[a,b]$ $(L_2[c,d])$ и пусть $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(\{p_j(x)\}_{j=1}^{\infty}\right)$ - система существенно ограниченных измеримых [3] вещественных функций на $[c,d]$ (на $[a,b]$).

Определим измеримую функцию $k_1(x,s,y)$ (функцию $k_2(x,t,y)$) на $[a,b]^2\times[c,d]$ (на $[a,b]\times[c,d]^2$) с помощью следующего правила:

$$k_1(x,s,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}h_k(y)\quad\left(k_2(x,t,y)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j(x)\psi_j(y)\overline{\psi_j(t)}\right),$$

где $|h_k(y)|\le M_k,\ k\in\{1,2,...,n\}$, $n\in\mathbb{N}$ ($|p_j(x)|\le N_j$, $j\in\{1,2,...,m\}$, $m\in\mathbb{N}$).

В гильбертовом пространстве $L_2([a,b]\times[c,d])$ определим линейную ограниченную самосопряженную частично интегральный оператор (ЧИО) T_1 (T_2) следующей формулой

$$(T_1f)(x,y)=\int_a^b k_1(x,s,y)f(s,y)ds\ \left((T_2f)(x,y)=\int_c^d k_2(x,t,y)f(x,t)dt\right).$$

Здесь интегралы следует понимать в смысле Лебега на [a, b] (на [c, d]).

Пусть $\mathcal{H}$ - сепарабельное гильбертово пространство, $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ линейный ограниченный самосопряженный оператор. Через $\sigma(A)$, $\sigma_{ess}(A)$ и $\sigma_{disc}(A)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженного оператора A (см. [4]).

Введем также следующие обозначения

$$E_{min}(A)=inf\{\lambda:\lambda\in\sigma_{ess}(A)\},\ E_{max}(A)=sup\{\lambda:\lambda\in\sigma_{ess}(A)\}$$

Число $E_{min}(A)\in\sigma(A)$ $(E_{max}(A)\in\sigma(A))$ будем называть нижним краем (верхним краем) существенного спектра оператора A.

Для измеримой функции φ на множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^{\nu}$, число $\lambda\in\mathbb{R}$ называется [3] существенным значением функции φ, если

$$\mu(\{\xi\in\Omega:\ \lambda-\varepsilon<\varphi(\xi)<\lambda+\varepsilon\})>0,$$

для всех $\varepsilon>0$. Обозначим через $essran(\varphi)$ множество всех существенных значений функции φ.

Теорема 1. *Для существенного спектра $\sigma_{ess}(T_1+T_2)$ ЧИО T_1+T_2 с невырожденным ядром верна формула*

$$\sigma_{ess}(T_1+T_2)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}essran(h_k)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}essran(p_j)\right).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия для функций* $h_j(y),\ j \in \mathbb{N}$ *и* $p_k(x),\ k \in \mathbb{N}$ *в ядрах* $k_1(x,s,y)$ *и* $k_2(x,t,y)$*:*

$$h_j(y) \geq h_{j+1}(y) > 0,\ j \in \mathbb{N} \text{ и } p_k(x) \geq p_{k+1}(x) > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Пусть существуют убывающие последовательности из положительных чисел $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$*, такие, что:*

(i) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j < \infty, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty;$

(ii) $max\{esssup(h_1),\ esssup(p_1)\} = max\{a_1,\ b_1\};$

(iii) $h_j(y) \geq a_j$ *при п.в.* $y \in [c,d],\ j \in \mathbb{N}$ *и* $p_k(x) \geq b_k$ *при п.в.* $x \in [a,b], \quad k \in \mathbb{N}.$

Тогда ЧИО $T_1 + T_2$ *имеет счетное число собственных значений лежащих выше верхнего края* $E_{max}(T_1 + T_2)$ *существенного спектра* $\sigma_{ess}(T_1 + T_2)$*.*

Литература

1. **Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.** *Partial integral operators and Integro - Differential Equations.* - New York, 2000.

2. **Эшкабилов Ю.Х.** *Частично интегральные операторы типа Фредгольма.* Germany, Saarbrucken: LAP, 2013, 201 с.

3. **Канторович А.В., Акилов Г.П.** *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984, 750 с.

3. **Pankrashkin K.** *Introduction to the spectral theory.* France, Orsay. 2014, 99 с.

УДК 517.953

СОДДА МЕТРИК ГРАФЛАРДА ҲИЛФЕР ОПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ВАҚТ БЎЙИЧА КАСР ТАРТИБЛИ ШРЕДИНГЕР ТЕНГЛАМАСИ УЧУН БОШЛАНҒИЧ-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Максумов М.Х.[1]

[1]Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети, Тошкент, Ўзбекистон;
mansurbekmaksumov@gmail.com

Бизга учта чекли кесмани граф учи деб аталувчи битта O нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган Γ содда метрик граф берилган бўлсин. Графнинг боғламларини B_k, $k = 1, 2, 3$ каби белгилаймиз. B_k боғламларни $(0, L)$ интервалларга мос қўйиб, ҳар бир бо?ламда координата аниқлаймиз. Бунда граф учи 0 га мос қўйилади. Умумийликка зарар етказмаслик учун x_k ни x деб қабул қиламиз [4].

Графнинг ҳар бир боғламида қуйидагича каср тартибли Шредингер тенгламасини қараймиз [4]

$$D_{0+}^{\alpha,\mu} iu^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x,t),\ (x,\ t) \in (B_k \times (0,\ T)),\ k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

бу ерда $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ Ҳилфер оператори [1], $1 < \alpha < 2$, $0 \leq \mu \leq 1$, $f^{(k)}(x,t)$, $k = 1, 2, 3$ маълум функциялар.

Γ графда (1) тенглама учун қуйидаги масалани қараб чиқамиз:

Масала. $1 < \alpha < 2$ учун (1) дифференциал тенгламанинг $B_k \times (0, T)$ соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u^{(k)}(x,t)$, $k = 1, 2, 3$ ечимларини топиш талаб этилсин [2]-[3]:

Бошлан?ич

$$I_{0+}^{(1-\mu)(2-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\big|_{t=0} = \varphi^{(k)}(x),\ x \in B_k,\ \ k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(2-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\bigg|_{t=0} = \psi^{(k)}(x),\ x \in B_k,\ \ k = 1, 2, 3 \tag{3}$$

ва чегаравий шартлар

$$u^{(k)}(L,t) = 0,\ \ t \in [0,\ T],\ k = 1, 2, 3, \tag{4}$$

каби аниқланган. Бундан ташқари, уланиш (Кирхкофф) шартларини қуйидагича аниқлаймиз

$$u_x^{(1)}(0,t)+u_x^{(2)}(0,t)+u_x^{(3)}(0,t)=0,\ t\in[0,\,T]\,, \tag{5}$$

$$u^{(1)}(0,\,t)=a_1u^{(2)}(0,\,t)=a_2u^{(3)}(0,\,t),\ t\in[0,\,T]\,. \tag{6}$$

Бу ерда $a_1, a_2 = const, \varphi^{(k)}(x), \psi^{(k)}(x), k=1,2,3$ етарлича силлиқ берилган функциялар. Охирги шартлар одатда графнинг тармоқланиш нуқтасида узлуксизлик ва оқимнинг сақланиш (Кирхгофф) шартлари деб аталади. Масала ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида берилганлар ва бошланғич шартларга нисбатан аниқ ифодаси топилган.

ФОЙДАЛАНИГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. **Kilbas A.A., Srivstava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of fractional differential equations.* In North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, 2006.
2. **Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.** *On a nonlocal problem for fourth-order mixed type equation with the Hilfer operator.* Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, 1, pp.59-67 (in Russian).
3. **Karimov E.T., Sobirov Z.A., Khujakulov J.R.** *Solvability of a problem for a time fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graphs.* Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021, Vol. 4, №4, pp.9-18.
4. **Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R.** *Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 12(4). 2019. P. 412–420.

УДК 517.55

О ПРОДОЛЖЕНИИ СУММЫ РЯДА ГАРТОГСА ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Нурмухамедова У. Б.
Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
umidanurmukhamedova111@gmail.com

Данная заметка посвящена исследованию областей сходимости рядов Гартогса, допускающих голоморфное продолжение вдоль параллельных сечений с полярными особенностями.

Известно, что ряды Гартогса имеют большую роль при решении многих задач многомерного комплексного анализа и с помощью этих рядов получены много известных результатов. Первый результат в этом направлении принадлежит Гартогсу (основная лемма Гартогса) [1]: пусть функция $f(z,w)$ такая, что

1) $f(z,w)$ голоморфна в области $D\times\{|w|<r\}\subset {C_z}^n\times C_w$,

2) при каждом фиксированном $z\in D$ функция $f(z,w)$ голоморфна в круге
$|w|<R, R>r>0$.

Тогда функция $f(z,w)$ будет голоморфной по совокупности переменных в области
$D\times\{|w|<R\}$.

Далее, используя ряды Гартогса и его обобщение - ряды Якоби-Гартогса решены многие задачи многомерного комплексного анализа, такие как фундаментальная теорема Гартогса, продолжение сепаратно аналитических функций, аналоги теоремы Гартогса для мероморфных функций, продолжение функций вдоль фиксированного направления с тонкими особенностями и др.

Мы исследуем голоморфность суммы ряда

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)w^k, \tag{1}$$

предполагая только лишь голоморфность коэффициентов $c_k(z)$. Отметим, что из голоморфности $f(z,w)$ в области $D\times\{|w|<r\}\subset {C_z}^n\times C_w$ следует, что $f(z,w)$ представляется в этой области рядом (1), где $c_k(z)$ - голоморфные в области D функции и ряд сходится равномерно внутри $D\times\{|w|<r\}$. В работе [2] доказано, что если ряд (1) удовлетворяет следующим условиям

1) $c_k(z)\in\mathcal{O}(D),\quad k=0,1,2...,$

2) при каждом фиксированном $z\in D$ ряд сходится в круге $\{|w|<R\}$, то существует нигде не плотное замкнутое множество $S\subset D$ такое, что

$$f(z,w)\in\mathcal{O}((D\setminus S)\times\{|w|<R\}).$$

Показано также, что наличие S в этой теореме необходимо, а именно для нигде не плотного замкнутого связного множества $S\subset C$ со связным дополнением относительно бесконечно удаленной точки (т.е. любую точку $z\in C\setminus S$ можно соединить непрерывной кривой с бесконечно удаленной точкой) строится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)w^k,$$

для суммы которого множество $S\times C$ является неустранимым особым множеством. В работе [3] эта теорема обобщена для рядов Гартогса с переменным радиусом сходимости.

Пусть теперь $S\subset D$ - замкнутое связное нигде не плотное множество со связным дополнением. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ряд (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) $c_k(z)\in\mathcal{O}(D\setminus S),\quad k=0,1,2...,$

2) для каждой фиксированной точки $z\in D$ радиус сходимости ряда (1) $R(z)>0,$

3) для каждого фиксированного $z\in E\setminus S$ сумма ряда (1), как функция переменного w , голоморфно продолжается на всю плоскость C_w, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества P_z , где $E\subset D$ - некоторое открытое множество.

Тогда существуют нигде не плотное замкнутое множество $\tilde S(\tilde S\supset S)$ в D и плюриполярное (аналитическое) в $(D\setminus\tilde S)\times C$ множество P такие, что ряд (1) представляет голоморфную в $[(D\setminus\tilde S)\times C]\setminus P$ функцию $f(z,w)$.

Для доказательства этой теоремы нам нужно следующее известное утверждение.

Теорема 2. (Садуллаев А.С., Чирка Е.М.[4]). Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в области и $D\times\{|w|<r\}\subset {C_z}^n\times C_w$ и $E\subset D$ - некоторое неплюриполярное множество. Если при каждом фиксированном $z^0\in E$ функция $f(z^0,w)$ переменного w, голоморфная в круге $\{|w|<r\}$, на плоскости $\{z=z^0\}$ имеет лишь полярное (дискретное) множество особенностей, то f голоморфно продолжается в $(D\times C)\setminus S$, где S - некоторое плюриполярное (аналитическое) подмножество в $D\times C$.

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Так как $R(z)>0$ для всех $z\in D$, то используя схему доказательства теоремы 2 из работы [5] получаем, что ряд (1) сходится равномерно внутри области $\{(z,w):z\in D\setminus\tilde S,|w|<R_*(z)\}$, где $\tilde S(\tilde S\supset S)$ - некоторое нигде не плотное замкнутое множество в D и $R_*(z)=\underline{\lim}_{\xi\to\infty}R(\xi)$-нижняя регуляризация радиус - функции $R(z)$, причем $-lnR_*(z)\in psh(D\setminus S)$.

Поскольку $\tilde S\subset D$ нигде не плотное множество и $E\subset D$ открытое множество, то множество $E\backslash\tilde S$ содержит некоторое открытое множество $E_1(E_1\subset E\backslash\tilde S)$. Следовательно, для фиксированной области $D_0\subset\subset D\setminus\tilde S$ ряд (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) ряд (1) сходится равномерно внутри области $D_0\times\{|w|<R_*(z)\}$,

2) для произвольной точки $z^0\in E_1$ ряд

$$f(z^0,w)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z^0)w^k$$

сходится в $C_w \setminus P_{z^0}$, где P_{z^0} - полярное (дискретное) множество, т.е. $f(z^0, w) \in C_w \setminus P_{z^0}$.

Тогда согласно теореме 2 имеем, что существует плюриполярное (аналитическое) множество P в $D_0 \times C$ такое, что

$$f(z, w) \in \mathcal{O}\{(D_0 \times C) \setminus P\}.$$

Из произвольности области D_0 получаем утверждение теоремы 1.

Замечание. Если в теореме 1 не требовать условие $R(z) > 0$ для любого фиксированного $z \in D$, то утверждение теоремы будет не верным, т.е. условие 2 теоремы 1 является необходимым.

Заметим, что случай, когда $S = \emptyset$, рассмотрен в работе [5].

Литература

1. **Hartogs F.** *Zur theorie der analytischen Funktione nmehrerer Veranderlichen //Math. Ann. 1906. v. 62. p. 1-88.*

2. **ТуйчиевТ.Т.** *Об аналоге теоремы Хартогса //Изв.АН. УзССр. Сер. Физ-мат. Наук.1985. №6,с. 26-29.*

3. **СадуллаевА.С., ТуйчиевТ.Т** *О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечения. Узбекский Математический журнал, 2009,№1, с.148-157.*

4. **Садуллаев А.С., Чирка Е.М.** *О продолжении функций с полярними особенностями //Мат.сб.1987,т. 132(174) №3, с.383-390.*

5. **Tuychiev T.T., Tishabaev J.K.** *ON THE CONTINUATION OF THE HARTOGS SERIES WITH HOLOMORPHIC COEFFICIENTS. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences.2019.*
Vol.2: Issue 1, Article 5, p. 69-76.

УДК 517.55

Модификация формулы Вейля в матричных областях

Расулова М. К.[1], Адхамова З. Б.[2]
[1,2]Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; leytenant9807@gmail.com, xolmirzayevaziyodaxonxzb2@gmail.com

Пусть $\prod = \prod^r(f) = \{z \in G \subset \mathbb{C}^n : |f_j| < r_j, j = \overline{1,n}\}$ специальный аналитический полиэдр в области $G \subset \mathbb{C}^n$, соотствующий отображению $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : G \to \mathbb{C}^n$.Зафиксируем натуральное число $p < n$ и представим f в виде $f = (f', f'')$, где $f' = (f_1, f_2, ..., f_p), f'' = (f_{p+1}, f_{p+2}, ..., f_n)$.

Рассмотрим полиэдр $\prod_\varepsilon^{(p)} = \{z \in G : |f_k| < r_k, k = 1, ..., p; |f_k| < r_k + \varepsilon, k = p+1, ..., n\}$ причем ε выбрано настолько малым ,чтобы $\prod_\varepsilon^{(p)} \Subset G$. Указанный полиэдр называется ε-продолжением полиэдра $\prod$ вдоль f''.

Верна следующая модификация формулы Вейля в специальном аналитическом полиэдре [см.[1]]

Теорема Пусть $\prod = \prod^r(f)$-специаалный аналитический полиэдр в области $G \subset \mathbb{C}^n$ и $\prod_\varepsilon = \prod_\varepsilon^{(p)}$- его ε-продолжение вдоль f''. Существует гладкая $\overline{\partial}$-замкнутая форма $\psi_z = \psi_z^{(p)}(\zeta)$ бистепени $(n, n-p)$, коэффициенты которой голоморфно зависят от $z \in \prod$, причем для всякой функции $h \in O(\overline{\prod})_\varepsilon$ имеет место формула

$$h(z) = (2\pi i)^{-n} \int_\gamma h(\zeta) \frac{\psi_z^{(p)}(\zeta)}{\prod_{j=1}^p [f_j(\zeta) - f_j(z)]} , z \in \prod, \tag{1}$$

с интегрированием по грани

$$\gamma = \gamma^{(p)} = \{\zeta \in \overline{\prod}_{\varepsilon} : |f_j(\zeta)| = r_j, j = 1, ..., p\}$$

полиэдра $\prod_{\varepsilon}$.

В данной работе получены аналоги формулы (1) в матричных областях с помощью формул Вейля,полученных в работах [2],[3]

Литература

1. **Цих А.К.** *Многомерные вычеты и их применения.*– Новосибирск:Наука,Сиб. отд-ние, 1988.-241с.
2. **Б.А.Шоимкулов.** *Интегральное представление Коши-Вейля для матричных функций.//* Изв.вузов.Матем.2003.N2,с.68-71
3. **Б.А.Шоимкулов,Э.Маккамов** *Об одной формуле Вейля.//*Узб.Матем.журнал, 2010. №4, с.191-196.

УДК 517.98

Три типа собственных движений плоскости Лобачевского

Тишабаев Дж.К.,[1] Махмудова М.Р.[2]
[1,2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;
jura63@rambler.ru rmjurayev@mail.ru

От модели Клейна можно перейти к другой важной модели геометрии Лобачевскогою. Новая модель получается следующим образом. Рассмотрим сферу, экватором которой служит данная окружность. Пусть A – точка модели Клейна, A_1 – точка южной полусферы, проецирующаяся в точку A, A' – точка пересечения экваториальной плоскости с прямой A_1N, где N – северный полюс. Сопоставив каждой точке A точку A', получим преобразование экваториального круга. Чтобы это преобразование было изометрией, нужно определить расстояние между точками A' и B' в новой модели как расстояние между точками A и B в старой модели. Полученную таким образом модель геометрии Лобачевского называют моделью Пуанкаре в круге [2].

Выясним, как устроены прямые в модели Пуанкаре. Хорде AB соответствует сечение южной полусферы плоскостью, перпендикулярной экватору. Это сечение представляет собой полуокружность, перпендикулярную экваториальной окружности. При проекции из полюса на экваториальную плоскость эта полуокружность переходит в дугу окружности, перпендикулярной экваториальной окружности. Это следует из свойств стереографической проекции. Таким образом, для модели Пуанкаре в круге прямыми являются дуги окружностей, перпендикулярных граничной окружности данного круга.

Для модели Пуанкаре данный круг удобно считать единичным кругом на комплексной плоскости [1]. (Единичный круг задается неравенством $| z |\leq 1$, $z \in \mathbb{C}$.)

Любое движение плоскости Лобачевского можно представит в виде композиции не более чем трех симметрий относительно прямых.

Рассмотрим движение $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (1). В этом случае, $ad - bc = 1$. Положим $D = (d-a)^2 + 4bc$.

Теорема. Движения (1) является

a) параболическое, если $D = 0$;

b) гиперболическое, если $D > 0$;

c) эллиптическое, если $D < 0$.

Литература

1. **Шабат Б.В.** *Введение в комплексный анализ*, часть 1. Москва: издательство Наука, 1976, 577 стр.
2. **Прасолов В.В.** *Геометрия Лобачевского*, Издание третье, исправленное и дополненное, 2004, 89 стр.

УДК 517.55

О ПРОДОЛЖЕНИИ R-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ФИКСИРОВАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Туйчиев Т. Т.
Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека; tahir1955@mail.ru

Работа посвящена задачам R-аналитического продолжения функций многих действительных переменных, допускающих R-аналитическое продолжение на параллельные сечения. В ней приводится аналог известной теоремы Гартогса для R-аналитических функций с переменным радиусом сходимости.

Известная лемма Гартогса (см.[1]) утверждает, что если голоморфная в области $'U\times\{|z_n|<r\}\subset C^n_{'z}\times C_{z_n}$, где $'z=(z_1,z_2,...,z_{n-1})$, функция $f('z,z_n)$ при каждом фиксированном $'z\in' U$ голоморфно продолжается в круг $|z_n|<R, R>r>0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $'U\times\{|z_n|<R\}$.

С теоремой Гартогса непосредственно связана следующая теорема Форелли [2]: если f - бесконечно гладкая в точке $0\in C^n, f\in\mathcal{O}^\infty\{0\}$, и сужения $f|_l$- голоморфны в круге $U(0,1)=l\cap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l\ni 0$, то f - голоморфно продолжается в шар $B(0,1)\subset C^n$.

В недавней работе [3] А.Садуллаев доказал следующий аналог теоремы Форелли для R-аналитических функций.

Теорема 1. Пусть функция $f(x), x=(x_1,x_2,...,x_n)$, бесконечно гладкая в некоторой окрестности $0\in R^n, f(x)\in\mathcal{O}^\infty\{0\}$ и пусть для любой вещественной прямой $l:x=\lambda t,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in S(0,1)\subset R^n, t\in R$- параметр, сужение $f|_l=f(\lambda t)$ является вещественно-аналитической (R -аналитической) в интервале $t\in(-1,1)$. Тогда существует замкнутое плюриполярное множество $S\subset B(0,1)$ такое, что $f(x)$ является R -аналитической в $B(0,1)\setminus S$, где $B(0,1)\subset R^n$ - единичный шар, а $S(0,1)=\partial B(0,1)$- единичная сфера.

Отметим, что здесь использована известная терминология, что множество $S\subset R^n_x$ называется плюриполярным, если оно плюриполярное во вложенном комплексном пространстве $C^n_z, R^n_x\subset C^n_z, z=x+iy$. Пример функции $f(x_1,x_2)=\frac{x_1^{k+1}}{(x_2-1)^2+x_1^2}$ показывает, что точные аналоги Теоремы Форелли, а также Теоремы Гартогса для R-аналитических функций не верны. Функция $f(x_1,x_2)$ вещественно-аналитическая в области $R\times\{|x_2|<\frac{1}{2}\}$, сужение $f(x_1^0,x_2)$ вещественно аналитическая на всей прямой R . Однако f не является вещественно-аналитической в точке $(0,1)$.

В работе [4] аналог теоремы А.Садуллаева доказан для полицилиндрической области.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)=f('x,x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f('x,x_n)$ R - аналитическая в полицилиндре $U=' U\times\{|x_n|<r_n\}, r_n>0$, где $'x=(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ и $'U=\{'x\in R^{n-1}:|x_1|<r_1,|x_2|<r_2,...,|x_{n-1}|<r_{n-1}\}=$
$=\{'x\in R^{n-1}:-r_1<x_1<r_1,-r_2<x_2<r_2,...,-r_{n-1}<x_{n-1}<r_{n-1}\}$;

2) при каждом фиксированном $'x^0\in' U$ функция $f('x^0,x_n)$ R-аналитическая в интервале $|x_n|<r_n$,R -аналитически продолжается в больший интервал $|x_n|<R_n, R_n>r_n$.

Тогда существует плюриполярное замкнутое множество $'S\subset' U$ такое, что функция $f('x,x_n)$ R -аналитически продолжается по совокупности переменных $('x,x_n)$ в $('U\times\{|x_n|<R_n\})\setminus('S\times\{|x_n|\geq r_n\})$.

В доказательстве теоремы 2 существенно используется метод доказательства Теоремы 1, предложенный А.Садуллаевым, а именно, вложение вещественного пространства

$R^n_x \subset C^n_z, z = x + iy$, и естественное голоморфное продолжение R -аналитических функций в C^n, голоморфное продолжение рядов Гартогса и методы теории плюрипотенциала.

Отметим, что используя локальное преобразование пучка прямых $l \ni 0$, в параллельные, из Теоремы 2 можно получить доказательство Теоремы 1.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция $f(x) = f('x, x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f('x, x_n)$ R -аналитическая в полицилиндре $U =' U \times \{|x_n| < r_n\}, r_n > 0$;

2) при каждом фиксированном $'x^0 \subset' U$ функция $f('x^0, x_n)$ R-аналитическая в интервале $|x_n| < r_n$,R -аналитически продолжается в интервал $|x_n| < R_n('x^0), R_n('x^0) \geq r_n > 0$ и $R_n('x^0)$ - радиус максимального интервала куда R -аналитически продолжается функция $f('x^0, x_n)$.

Тогда существует плюриполярное замкнутое множество $'S \subset' U$ такое, что функция $f('x, x_n)$ R -аналитически продолжается по совокупности переменных $('x, x_n)$ в область $\{('x, x_n) \in R^n :' x \in' U, |x_n| < (R_n('x))_*\} \backslash ('S \times \{|x_n| \geq r_n\})$, где $(R_n('x))_* = \underline{\lim}_{'\omega \to 'x} R_n('\omega)$ - нижняя регуляризация радиус функции $R_n('x)$.

В доказательстве основного результата существенно используется метод доказательства теоремы 2 и следующее утверждение.

Теорема 4([5]). Пусть функция $f('z, z_n)$ голоморфна в поликруге $'U \times \{|z_n| < r\}$ и при каждом фиксированном $'z^0 \in' U$ функция $f('z^0, z_n)$ переменной z_n голоморфно продолжается в круг $|z_n| < R('z^0), R('z^0) \geq r > 0$, где $R('z^0)$ радиус максимального круга, куда голоморфно продолжается функция $f('z^0, z_n)$. Тогда функция $f('z, z_n)$ голоморфно продолжается в область $\{('z, z_n) \in C^n :' z \in' U, |z_n| < (R_*('z))\}$ по совокупности переменных. Здесь $R_*('z) = \underline{\lim}_{'\omega \to 'z} R('\omega)$ - нижняя регуляризация радиус функции $R('z)$.

Литература

1. **Hartogs F.** *Zur theorie der analytischen Funktione nmehrerer Veranderlichen //Math. Ann. 1906. v. 62. p. 1-88.*

2. **Forelly F.** *Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices// Math. Scand., V. 41, 1977, p. 358-364.*

3. **СадуллаевA.** *Real analyticity of a germ at a origin// Ann. Polon. Math. 2021. Published online. DOI: 10.464/ap210125-31-3.*

4. **Atamuratov A.A, Tishabaev Zh.K, Tuychiev T.T.** *An analogue of Hartogs lemma for R-analytic functions.// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2022. 15(2). P.194-198.*

5. **СадуллаевA.C., ТуйчиевT.T.** *О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечения. Узбекский Математический журнал, 2009, №1, с.148-157*

УДК 517.5

Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций

Шабозов М.Ш.,[1] Шабозова А.А.[2]

[1]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистан; shabozov@mail.ru

[2]Таджикский национальный университет; shabozova91@mail.ru

Обозначим через $W^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ класс непрерывных 2π-периодических функций

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

имеющих производную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. Обозначим

$$r_n(f, x) := f(x) - S_{n-1}(f, x)$$

остаток ряда (1), где $S_{n-1}(f,x)$ – частная сумма n-го порядка ряда (1) в точке x, и положим

$$r_n(f) := \|r_n(f)\|_{C[0,2\pi]}, \quad r_n\big(W^{(r)}\big) := \sup\left\{r_n(f) : f \in W^{(r)}\right\}.$$

А.Н.Колмогоров [1] показал, что для любых $n, r \in \mathbb{N}$

$$r_n\big(W^{(r)}\big) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Рассмотрим класс $\mathscr{B}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{2}$$

аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих для любых $z \in U$ условию $\left|f^{(r)}(z)\right| \le 1$. Если $S_{n-1}(f,z)$ – n-я частная сумма Тейлора ряда (2), то по прежнему положим

$$r_n(f,z) := f(z) - S_{n-1}(f,z). \tag{3}$$

С.Б.Стечкин [2] доказал, что для остатка (3) при $n \ge r$ справедливо асимптотическое равенство

$$r_n\big(\mathscr{B}^{(r)}\big) := \sup_{f \in \mathscr{B}^{(r)}} \|r_n(f)\|_{C(U)} = \frac{1}{\pi}\frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4}$$

В этой работе докажем точное равенство вместо асимптотического (4) в более общем пространстве Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho < R,\ R \ge 1)$, из которого $\mathscr{B}^{(r)}$ получается при $q = \infty, \rho = 1$. Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \ge 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в круге U_R функций. Для произвольной функции $f \in A(U_R)$ при любом $\rho \in (0,R)$ положим

$$M_q(f,\rho) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f\big(\rho e^{it}\big)\right|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \le q < \infty; \\ \displaystyle\max_{0 \le t \le 2\pi}\left|f\big(\rho e^{it}\big)\right|^q, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Символом $H_{q,R},\ 1 \le q \le \infty, R \ge 1$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \to R-0} M_q(f,\rho).$$

Хорошо известно [3, с.279], что норма функции $f \in H_{q,R}$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f\big(Re^{it}\big)$:

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f\big(Re^{it}\big)\right|^q dt\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty; \\ ess\displaystyle\sup_{0 \le t < 2\pi}\left|f\big(Re^{it}\big)\right|, & q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ обозначим $U := U_1, H_q := H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$. Полагаем $H_{q,\rho} := \left\{f \in A(U_\rho) : \|f\|_{q,\rho} = \left\|f\big(\rho e^{i(\cdot)}\big)\right\|_q < \infty\right\}$ и для $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$H_q^{(r)} := \big\{f \in A(U) : f^{(r)} \in H_q\big\}, \quad f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)z^{k-r}$$

где ради удобства обозначено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1),\ k \geq r,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha_{k,0} \equiv 1,\ \alpha_{k,1} = k.$$

Пусть $\mathscr{P}_n$ – подпространство алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n$. Равенством

$$E_n(f)_{q,\rho} := \inf\bigl\{\|f - p_n\|_{q,\rho} : p_n \in \mathscr{P}_n\bigr\} \tag{5}$$

определим наилучшее приближение функций $f \in H_{q,\rho}$ элементами подпространства $\mathscr{P}_n$. Если $\mathfrak{M} \in H^{(r)}_{q,\rho}$ есть некоторый подкласс функций $f \in H^{(r)}_{q,\rho}$, тогда положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} := \sup\bigl\{E_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M}\bigr\}. \tag{6}$$

Далее, пусть $S_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)z^k$ – частная сумма n-го порядка ряда Маклорена $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)z^k$, и пусть

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} := \|f - S_{n-1}(f)\|_{q,\rho}. \tag{7}$$

Для $\mathfrak{M} \subset H^{(r)}_{q,\rho}$ также полагаем $\mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} := \sup\bigl\{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} : f \in \mathfrak{M}\bigr\}$. Из равенств (6) и (7) следует, что

$$E_{n-1}(f)_{q,\rho} \leq \mathscr{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} \tag{8}$$

и в силу неравенства (**??**) для $\mathfrak{M} \in H_{q,\rho}$ имеем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho} \leq \mathscr{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{q,\rho}. \tag{9}$$

Пусть, далее $W^{(r)}H_{q,R}$ – множество функций $f \in H^{(r)}_{q,R}$, у которых $\left\|f^{(r)}\bigl(Re^{i(\cdot)}\bigr)\right\|_q := \left\|f^{(r)}\right\|_{q,R} \leq 1$. В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $R \geq 1$, $\rho \in (0,R]$. Тогда справедливы равенства*

$$E_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_{q,R}\bigr)_{q,\rho} = \mathscr{E}_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_{q,R}\bigr)_{q,\rho} =$$

$$= R^r\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\frac{1}{\alpha_{n,r}} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}R^r\left(\frac{\rho}{R}\right)^n.$$

Из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1.В условиях теоремы 1 при $q=\infty$, $R=\rho=1$ имеет место равенство

$$E_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_\infty\bigr)_\infty = \mathscr{E}_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_\infty\bigr)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}}.$$

Отметим, что равенство

$$E_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_\infty\bigr)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}}$$

ранее было доказано в работе К.И.Бабенко [4], а соотношение

$$\mathscr{E}_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_\infty\bigr)_\infty = \frac{1}{\alpha_{n,r}},$$

уточняет результат С.Б.Стечкина (4):

$$\mathscr{E}_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_\infty\bigr)_\infty = \frac{1}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Следствие 2. *В условиях теоремы при $R=1, \rho \in (0,1)$ и $1 \leq q < \infty$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_q\bigr)_q = \mathscr{E}_{n-1}\bigl(W^{(r)}H_q\bigr)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}. \tag{11}$$

В [4] равенство

$$E_{n-1}\big(W^{(r)}H_q\big)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}$$

ранее было доказано Л.В.Тайковым [5], а соотношение

$$\mathscr{E}_{n-1}\big(W^{(r)}H_q\big)_q = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}$$

*обобщает равенство (**??**) в пространстве* $H_q (1 \le q < \infty)$.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $R \ge 1$, $\rho \in (0, R]$. Тогда имеет место неравенство

$$\mathscr{E}_{n-1}(f)_{q,\rho} \le R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \mathscr{E}_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_{q,R}. \tag{12}$$

Существует функция $f_0 \in H^{(r)}_{q,R}$, для которой в (12) достигается знак равенства.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$\sup_{f \in H^{(r)}_{q,R}} \frac{\mathscr{E}_{n-1}(f)_{q,\rho}}{\mathscr{E}_{n-1}\big(f^{(r)}\big)_{q,R}} = R^r \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{1}{\alpha_{n,r}}.$$

Отметим, что некоторые вопросы приближение аналитических функций рассмотрены в работах [5,6].

Литература

1. ***A.N.Kolmogorov.*** Zur Grossenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. *– Ann. of Math. – 1935. – V. 36. – 521–526 P.*

2. ***С.Б.Стечкин.*** Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций. *– Известия Ак. наук СССР. Сер. матем. – 1953. – Т. 17. – С. 461–472.*

3. ***В.И.Смирнов, В.И.Лебедев.*** Конструктивная теория функций комплексного переменного. *– М. Из-во. Наука. – 1964. – 440 С.*

4. ***К.И.Бабенко.*** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. *– Изв. АН СССР. – 1958. – Т. 22. – № 5, – С. 631–640.*

5. ***Л.В.Тайков.*** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций. *– Матем. заметки. – 1967. – Т. 1. – № 2. – С. 155–162.*

6. ***Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.*** О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди. *– Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т. 27. – № 4. – С. 239–254.*

7. ***Шабозов М.Ш., Кадамшоев Н.У.*** Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана *– Матем. заметки. – 2021. – Т. 110. – Вып. 2. – С. 266–281.*

УДК 517.5

Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,R}$ $(1 \le q \le \infty,\ R \ge 1)$

Шабозов М.Ш.[1], Юсупов Г.А.[2]

[1]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, Душанбе, Таджикистан; shabozov@mail.ru

[2]Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, Душанбе, Таджикистан; G_7777@mail.ru

Вычислению точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге функций в различных нормированных пространств, посвящен достаточно много работ (см, например, [1-4] и приведенную в них литературу). Целью данной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных значений колмогоровских и бернштейновских n-поперечников классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geq 1$.

Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Говорят, что функция $f \in A(U_R)$ $(0 < \rho < R)$ принадлежит банахову пространству $H_{q,R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$, если конечна норма

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} := \lim_{\rho \to R-0} \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(\rho e^{(it)})\right|^q dt \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty; \\ \max\limits_{0 \leq t < 2\pi} \left|f(\rho e^{it})\right|, & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Хорошо известно, что норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f \in H_{q,R}$, т.е.

$$\|f\|_{q,R} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f\big(Re^{it}\big)\right|^q dt \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty; \\ ess\sup \Big\{ \left|f\big(Re^{it}\big)\right| : \ 0 \leq t < 2\pi \Big\}, & q = \infty. \end{cases}$$

В случае $R = 1$ полагаем $U := U_1$, $H_q = H_{q,1}$ и $\|f\|_q := \|f\|_{q,1}$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ — множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше n. Равенством

$$E_{n-1}(f)_{q,R} := \inf \Big\{ \left\|f - p_{n-1}\right\|_{q,R} : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1} \Big\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in H_{q,R}$ элементами множество $\mathscr{P}_{n-1}$ в пространстве $H_{q,R}$. Производную m-го порядка функции $f \in A(U_R)$ определим как обычно

$$f^{(m)}(z) := d^m f(z)/dz^m = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} z^{k-m},$$

где $\alpha_{k,m} := k(k-1)\dots(k-m+1),\ k \geq m,\ k, m \in \mathbb{N},\ \alpha_{k,0} = 1,\ \alpha_{k,1} = k.$

Имеет место следующая

Теорема 1. Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $R \geq 1$ при любом $1 \leq q \leq +\infty$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \leq \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}, \tag{1}$$

где знак равенства в (1) достигается для функции $f_0(z) = z^n$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место равенство

$$\sup_{f \in H_{q,R}^{(m)}} \frac{E_{n-1}(f)_q}{E_{n-m-1}\big(f^{(m)}\big)_{q,R}} = \frac{1}{R^{n-m}\alpha_{n,m}}.$$

Через $W^{(m)}H_{q,R}$ $\big(m \in \mathbb{Z}_+,\, W^{(0)}H_{q,R} \equiv H_{q,R},\ 1 \leq q \leq \infty, R \geq 1\big)$ обозначим множество функций $f \in H_{q,R}^{(m)}$, у которых $\|f^{(m)}\|_{q,R} \leq 1$.

Теорема 2. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ при любых $1 \leq q \leq \infty$, $R \geq 1$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}\big(W^{(m)}H_{q,R}\big) = \sup \Big\{ E_{n-1}(f)_q : f \in W^{(m)}H_{q,R} \Big\} = \frac{R^{-(n-m)}}{\alpha_{n,m}}.$$

Для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ *модуль непрерывности первого порядка производной* $f^{(m)}$ *определим равенством*

$$\omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R} := \sup_{|h|\le t}\left\|f^{(m)}\big(Re^{i(\tau+h)}\big)-f^{(m)}\big(Re^{i\tau}\big)\right\|_q.$$

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+, n > m$, $1 \le q \le \infty$, $R \ge 1$. Тогда для произвольной функции $f \in H_{q,R}^{(m)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_q \le \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}} \int\limits_0^{\pi/(n-m)} \omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R}dt,$$

которая обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in H_{q,R}^{(m)}$.

Пусть S *– единичный шар в* H_q, $\mathfrak{M}$ *– выпуклое центрально-симметричное множество из* H_q, $\mathscr{L}_n \subset H_q$ *–* n*-мерное подпространство. Величины*

$$b_n(\mathfrak{M};H_q) = \sup\big\{\sup\big\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\mathscr{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}\big\}:\ \mathscr{L}_{n+1}\subset H_q\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M};H_q) = \inf\big\{\sup\big\{\inf\{\|f-\varphi\|:\ \varphi\in\mathscr{L}_n\}:\ f\in\mathfrak{M}\big\}:\ \mathscr{L}_n\subset H_q\big\}$$

называют соответственно бернштейнтовским и колмогоровским n-поперечниками *множество* $\mathfrak{M}$ *в* H_q. *Указанные* n*-поперечники монотонны по* n *и связаны неравенством [5]*

$$b_n(\mathfrak{M},H_q) \le d_n(\mathfrak{M},H_q).$$

Пусть функция $\Phi(u)$ *определена, неотрицательна, выпукла вниз на отрезке* $[0,\pi]$, $\lim\limits_{u\to0+}\Phi(u)=\Phi(0)=0$ *и для любых* $\lambda\in[0,1]$ *и* $t\in(0,\pi]$ *удовлетворяет неравенству*

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}\lambda \le \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)} \le \frac{\lambda}{\pi/2-(\pi/2-1)\lambda}. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что среди всех функций $\Phi(t) := t^{1+\alpha}$, *где* $0\le\alpha\le1$ *только одна функция с* $\alpha=\pi/2-1$ *удовлетворяет ограничению (2).*

Класс $W_{q,R}^{(m)}(\Phi)$ *состоит из всех функций* $f\in H_{q,R}^{(m)}$, *для которых при любом* $k\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $k>m$ *выполняется условие*

$$\int\limits_0^{\pi/k}\omega\big(f^{(m)},t\big)_{q,R}dt \le \Phi(\pi/k).$$

Теорема 4. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $n>m$, $R\ge1$, $1\le q\le\infty$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2). Тогда справедливы равенства

$$b_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi);H_q\big) = d_n\big(W_{q,R}^{(m)}(\Phi);H_q\big) = \frac{n-m}{4R^{n-m}\alpha_{n,m}}\Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right).$$

Литература

1. **Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.** *Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди* H_2. – Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 5. – С. 796–800.

2. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** *Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций.* – Докл. РАН. – 2002. – Т. 382. – № 6. – С.747–749.

3. **Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш.** *О поперечниках классов функций, аналитических в круге.* – Матем. сборник. – 2010. – Т. 201. – № 8. – С. 3–22.
4.**Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.** *О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди.* – Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т. 27. – № 4. – С. 239–254.
5.**Тихомиров В.М.** *Некоторые вопросы теории приближений.* – М., МГУ, 1976.

УДК 517.55

ЗАДАЧА ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ДЕКАРТОВОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Шаимкулов Б.А.,[1] Бозоров Ж.Т.[2]
[1] Национальный университет Узбекистана; shoimkba@rambler.ru
[2]Термезский государственный университет; jorabek.bozorov.89@mail.ru

Вопрос о возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на всей границе этой области, достаточно хорошо изучен [1]. Представляет интерес задача описания функций, заданных на части границы, которые могут быть голоморфно продолжены в фиксированную область. Различные решения этой задачи для одномерного и многомерного случая можно найти в [2-5]. Пусть

$$D_1 = \left\{ Z_1 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] :\, Z_1 {Z_1}^* < I^{(m)} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ Z_2 \in \mathbb{C}\left[n \times n\right] :\, Z_2 \overline{Z_2} < I^{(n)} \right\}$$

являются соответственно классическими областями первого и второго типа [5] и

$$S_1 = \left\{ \xi_1 \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] :\, \xi_1 {\xi_1}^* = I^{(m)} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \xi_2 \in \mathbb{C}\left[n \times n\right] :\, \xi_2 \overline{\xi_2} = I^{(n)} \right\}$$

соответственно их остовы, где $Z^* = \overline{Z}'$ эта матрица сопряжена и транспонирована к матрице Z; $I^{(m)}$ и $I^{(n)}$ - соответственно единичные матрицы с размерами и , под неравенством между матрицами $ZZ^* < I$ мы понимаем, что все собственные значения матрицы ZZ^* меньше единицы. Декартово произведение областей D_1 и D_2 обозначим через

$$D = D_1 \times D_2 = \left\{ Z = (Z_1; Z_2) \in D :\, Z_1 \in D_1,\, Z_2 \in D_2 \right\},$$

остов S области D представляет собой декартово произведение остовов S_1 и S_2 областей D_1 и D_2:

$$S = S_1 \times S_2 = \left\{ \xi = (\xi_1; \xi_2) \in S :\, \xi_1 \in S_1,\, \xi_2 \in S_2 \right\}.$$

Определение [5]. Если для функции , которая голоморфна в области , выполняется следующее соотношение

$$\sup_{0 \le r < 1} \int\limits_S \left| F\left(r\xi\right) \right|^p d\mu\left(\xi\right) < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

то F называется функцией принадлежащей к классу Харди в области и обозначается
$F \in H^p\left(D\right)$, где $\mu\left(\xi\right)$ — нормированная мера Лебега на остове $S\left(D\right)$.

В данной работе рассматривается задача о голоморфном продолжении функций, заданных на остове области D, т. е. изучена задача существования функции, совпадающей с функцией f и интегрируемой со своим квадратом, значение которой задано на остове и принадлежащей к классу Харди в области . Для этого рассмотрим интеграл типа Бохнера – Хуа Ло-кена

$$\int\limits_S \frac{f(\xi)\,d\mu}{\det^m(I - Z_1\xi_1^*)\det^{\frac{n+1}{2}}\left(I - Z_2\overline{\xi}_2\right)}. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения: $D_\beta = \left\{Z : (-1)^{\beta_1}(I - Z_1Z_1^*) > 0,\, (-1)^{\beta_2}\left(I - Z_2\overline{Z}_2\right) > 0\right\}$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_j = \overline{0,1}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $F_\beta(Z)$ - значение интеграла (1) в соответствующих областях D_β.

Согласно теореме Картана [6] для области в пространстве существует система полных ортогональных однородных голоморфных полиномов $\left\{\varphi_\alpha^k(Z)\right\}$. Дополним эту систему до полной ортогональной системы в пространстве $L^2(S, d\mu)$ и с помощью системы разложим функции в ряд:

$$F_\beta(Z) = (-1)^{\gamma(m,n,\beta)} \sum_{\alpha,k} a_{\alpha,\beta}^{(k)} \varphi_{\alpha,\beta}^{(k)}(Z) \tag{2}$$

Систему, определенную выше, но не участвующую в разложениях (2), обозначим через $\{\psi\}$. В соответствии с выше изложенным справедлива следующая теорема о скачке.

Теорема 1. Пусть функция $f(\xi) \in L^2(S, d\mu)$ ортогональна к системе $\{\psi\}$ на остове S, тогда функции $F_\beta(Z) \in H^2(D_\beta)$ имеют радиальные предельные значения почти всюду на остове S, а также имеет место равенство

$$F_{(0,0)}(Z)\big|_S + \left\{\sum_\beta (-1)^{\gamma(m,n,\beta)} F_\beta(Z)\right\}\Bigg|_S = f(\xi).$$

Теперь приведем теорему, отвечающую на основной вопрос.

Теорема 2. Пусть $f(\xi) \in L^2(S, d\mu)$. Для того, чтобы существовала функция $F(Z) \in H^2(D)$, совпадающая почти всюду на остове с функцией $f(\xi)$, необходимо и достаточно что бы функция $f(\xi)$ была ортогональна к системе $\{\psi\}$ и функции $F_\beta(Z)$ были равны нулю в областях D_β, $|\beta| > 0$.

Литература

1. **Хенкин Г.М., Чирка Е.М.** *Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных* Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. - М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 4. - с. 13 - 142.
2. **Айзенберг Л.А.** *Формула Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* - Новосибирск: Наука, 1990. - 248 с.
3. **Худайберганов Г.** *О возможности голоморфного продолжения в матричную область функций, заданных на куске ее границы Шилова* Доклады РАН. - 1994. Т. 339, No 5. - с. 598 - 599.
4. **Шаимкулов Б.А.** *О возможности голоморфного продолжения в шар Ли функций, заданных на части сферы Ли* Сиб.матем.журн. 2003. Т. 44, No 6. - с. 1400 - 1406.
5. **Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.** *Анализ в матричных областях.* Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. -293 с.

UDC 517.55

Некоторые свойства автоморфизмов классической области первого типа

Эркинбоев К.С.,[1,2] Юсупбаева Х.[1]
[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek;

[2]Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми;
qerkinboyev@gmail.com, dreamer98997@gmail.com

Первый тип классической областы: $\Re_1(m,n)$-каждая точка области состоит из матриц, состоящих из m строк и n столбцов, удовлетворяющих следующему условию

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0,$$

где $I^{(m)}$-единичная квадратная матрица m-го порядка, Z^* - транспонированная матрица, сопряженная с матрицей Z [1]. Автоморфизмы $\Re_1(m,n)$-классической области первого типа имеют вид:

$$\varphi(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{1}$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$AA^* - BB^* = I^{(m)},\ AC^* = BD^*,\ CC^* - DD^* = -I^{(n)}. \tag{2}$$

Автоморфизмы классической областы (1) также можно представить в виде:

$$\varphi(Z) = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZD^* + C^*), \tag{3}$$

где коэффициенты (3) удовлетворяют условиям:

$$B^*B - D^*D = -I^{(n)},\ B^*A = D^*C,\ A^*A - C^*C = I^{(m)}. \tag{4}$$

Упростим автоморфизмы вида (1) следующим образом:

$$\varphi(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} = A\left(Z + A^{-1}B\right)\left(D^{-1}CZ + I\right)^{-1}D^{-1}. \tag{5}$$

Если положим $A = Q,\ A^{-1}B = -P,\ D = R$, то (1) будет иметь вид:

$$\varphi_P(Z) = Q(Z-P)(I - P^*Z)^{-1}R^{-1}. \tag{6}$$

Тогда из (2) получаем

$$Q(I - PP^*)Q^* = I^{(m)}, R(I - P^*P)R^* = I^{(n)}. \tag{7}$$

Свойства автоморфизмов $\varphi_P(Z)$ приведем в следующей теореме.

Теорема. Для автоморфизма $\varphi_P(Z) = Q(Z-P)(I-P^*Z)^{-1}R^{-1}$ матричного шара первого типа $\Re_1(m,n)$ имеют место следующие свойства:

$\mathbf{1}^0$.

$$\varphi_P(P) = 0,\ \varphi_P(0) = -QPR^{-1}.$$

Если также $QP + PR = 0$, то выполняются следующие условия:

$$\varphi_P(P) = 0\,,\ \ \varphi_P(0) = P;$$

$\mathbf{2}^0$. Для дифференциала автоморфизма области $\Re_1(m,n)$ имеют место выражения

$$d(\varphi_P(P)) = QdZR^*, d(\varphi_P(0)) = (Q^*)^{-1}dZR^{-1},$$

где $d(\varphi_P(P))(d(\varphi_P(0)))$ - дифференциал автоморфизма (6) в точке $Z = P\ (Z = 0)$;

$\mathbf{3}^0$.Для всех $Z, W \in \Re_I(m,n)$

$$\det\left(I - \langle\varphi(Z), \varphi(W)\rangle\right) = \frac{\det\left(I - \langle P,P\rangle\right)\cdot\det\left(\left(I - \langle Z,W\rangle\right)\right)}{\det\left(I - \langle Z,P\rangle\right)\cdot\det\left(I - \langle P,W\rangle\right)},$$

$$\det\left(I-\left\langle \varphi_P\left(Z\right),\varphi_P\left(Z\right)\right\rangle\right)=\frac{\det\left(I-\langle P,P\rangle\right)\det\left(I-\langle Z,Z\rangle\right)}{\det\left(I-\langle Z,P\rangle\right)\det\left(I-\langle P,Z\rangle\right)}.$$

4^0.Если для автоморфизма (6) имеют место следующие соотношения $QP+PR=0$, $R=R^*$, $Q=Q^*$ то $\varphi_P\left(\varphi_P\left(Z\right)\right)=Z$ (свойство инволюции);

5^0. $\varphi_P\left(Z\right)$ будет гомеоморфизмом.

Эта теорема является анологом теоремы 2.2.2 из [2]

REFERENCES

1. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

2. **Рудин У.** *Теория функций в единичном шаре из* . – М.: Мир,1984. – 456 с.

УДК 517.55

ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ПО СОВОКУПНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Йулдашев У. З.

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека; umaryuldashev32@gmail.com

Данная заметка посвящена задачам продолжения функций многих комплексных переменных, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечения. Первый результат в этом направлении принадлежит Хартогсу ([1], Hartogs F.) доказавшему, что если голоморфная в области $D\times\{|w|<r\}\subset C_z^n\times C_w$ функция $f(z,w)$ при каждом фиксированном $z\in D$ голоморфна в круге $|w|<R, R>r>0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $D\times\{|w|<R\}$ (основная лемма Хартогса). К настоящему времени этот результат обобщался во многих направлениях и имеет много приложений.

Более окончательный результат при минимальных условиях на множество сечений, вдоль которых есть такое продолжение, получен в работе А.Садуллаева и Е.М.Чирки [2]: пусть $f(z,w)$ голоморфна в области $D\times V\subset C_z^n\times C_w$ и при каждом фиксированном z^0 из некоторого неплюриполярного множества $E\subset D$ функция $f(z^0,w)$ переменного w продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (конечного) множества особенностей. Тогда $f(z,w)$ голоморфно продолжается в $(D\times C)\setminus S$, где S - замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $D\times C$.

В работе [3] доказан следующий результат.

Теорема 1. Рассмотрим голоморфную в области $D\times\{|w|<r\}\subset C_z^n\times C_w, r>0$, функцию $f(z,w)$ такую, что при каждом фиксированном $z\in D$ функция $f(z,w)$, голоморфная в круге $|w|<r$, однозначна в C_w , т.е. $W_f(z)\subset C_w$. Положим $W=U_{z\in D}W_f(z)$. Тогда

1) открытое ядро W^0 является областью (т.е. оно связанное), причем множество $P=\text{пр}_D(W\setminus W^0)$ плюриполярно в D;

2) функция $f(z,w)$ голоморфно продолжается в W^0 ;

3) если $\rho(z,w)=\rho(z,\partial W_f(z))$ расстояние от точки (z,w) до границы $\partial W_f(z)$ при фиксированном $z\in D$, то регуляризация $(-ln\rho(z,w))^*$ плюрисубгармоническая функция в W^0.

Ситуации, когда особое множество $C\setminus W_f(z), z\in D$, дискретно или полярно рассмотрены в работах М.Казаряна, А.Садуллаева и Е.М.Чирки, которые легко вытекают из сформулированной теоремы 1 (см. [3]).

Из теоремы 1 также следует следующий результат для функций, имеющих “толстое” множество особенностей вдоль фиксированного направления. Рассмотрим произвольное множество $F\subset\overline{C}_w\setminus\{|w|<r\}, r>0$, и под ёмкостью этого множества будем понимать обычную ёмкость (трансфинитный диаметр) ограниченного множества $\tilde{F}$, где $\tilde{F}$ образ множества F при отображении $w\to\frac{1}{w}$, т.е. положим $Cap_\infty F:=Cap\tilde{F}$.

Теорема 2 ([4]) . Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в области $D\times\{|w|<r\}, r>0$, и при каждом фиксированном $z\in D$ однозначно продолжается по w . Если для произвольного фиксированного z^0 из некоторого неплюриполярного множества $E\subset D$ функция $f(z^0,w)$ голоморфно продолжается в $\{z=z^0\}\setminus F(z^0)$, причем $Cap_\infty F(z^0)\le\alpha$, то f продолжается голоморфно по совокупности переменных в $(D\times C)\setminus S$, где S - псевдовогнутое множество в $D\times C$ такое, что

$$Cap_\infty S_z\le\frac{1}{r^{1+\omega^*(z,E,D)}\cdot\alpha^{\omega^*(z,E,D)}}\qquad(1)$$

для произвольного $z\in D$, $S_z=S\cap\{z\}$ и $\omega^*(z,E,D)$ - плюрисубгармоническая мера (P-мера) множества E относительно области
$D:\omega^*(z,E,D)\in psh(D)$ и $\omega^*|_D\le0$, $\omega^*|_E\le-1$

В этой заметке мы обобщаем эту теорему. Пусть $S\subset D$ - замкнутое связное нигде не плотное множество со связным дополнением. Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 3 Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в области $(D\backslash S)\times\{|\omega|<r,\}$ и при каждом фиксированном $z\in D\backslash S$ однозначно продолжается по w. Если для произвольного фиксированного из некоторого неплюриполярного множества $E\subset D\backslash S$ функция $f(z^0,w)$ голоморфно продолжается в $\{z=z_0\}\backslash F(z^0)$, причем $Cap_\infty F(z^0)\le\alpha$, то f продолжается голоморфно по совокупности переменных в $((D\backslash S)\times C)\backslash\tilde S$ где $\tilde S$- псевдовогнутое множество в $(D\backslash S)\times C$ такое, что

$$Cap_\infty\tilde S_z\le\frac{1}{r^{1+\omega^*(z,E,D\backslash S)}\cdot\alpha^{\omega^*(z,E,D\backslash)}}\qquad(2)$$

для произвольного $z\in D\backslash S$, $\tilde S_z=\tilde S\cap\{z\}$ и $\omega^*(z,E,D\backslash S)$ - плюрисубгармоническая мера (P-мера)) множества относительно области $D:\omega^*(z,E,D\backslash)\in psh(D\backslash S)$ и $\omega^*|_{D\ \backslash S}\le0$, $\omega^*|_E\le-1$

Для доказательства этой теоремы нам нужно следующее утверждение, известное как теорема о двух константах:

Если функция $u(z)$ плюрисубгармоническая в области $D\subset C^n$, $u|_D\le M$ и на некотором (неплюриполярном) множестве $E\subset D$ сужение $u|_E\le m$, то для всех $z\in D$ имеет место неравенство

$$u(z)\le M\lfloor1+\omega^*(z,E,D)\rfloor-m\omega^*(z,E,D)\qquad(3)$$

Доказательство теоремы 3 Без нарушения общности можно предполагать, что при фиксированном $z^0\in E$ функция $f(z^0,w)$ голоморфно не продолжается в точки, принадлежащие $F(z^0)$. Пусть $D_0\subset\subset D\backslash S$ произвольная область. Тогда согласно теореме 1 f голоморфно продолжается в $(D_0\times C)\backslash\tilde S$, где $\tilde S$- псевдовогнутое в $D_0\times C$ множество такое, что $\tilde S_{z^0}=F(z^0)$ и, следовательно, $Cap_\infty\tilde S_{z^0}=Cap_\infty F(z^0)\le\alpha$ для произвольного $z^0\in E\setminus\Pi$, причем Π- плюриполярное подмножество в D_0.Из теоремы Слодковского [5] следует, что функция $ln(Cap_\infty\tilde S_z)$ плюрисубгармоническая в D_0 , причем

$$ln(Cap_\infty\tilde S_z)\le ln\alpha,z\in E\backslash\Pi,ln(Cap_\infty\tilde S_z)\le ln\frac{1}{r},z\in D_0,\qquad(4)$$

Второе неравенство (4) следует из того факта, что образ множества $\tilde S_z$ при отображении $w\longrightarrow\frac{1}{w}$ лежит в круге $|w|<\frac{1}{r}$ для произвольного $z\in D_0$ и $Cap\{\ |w|<\frac{1}{r}\}=\frac{1}{r}$.Тогда согласно теореме о двух костантах из неравенств (4) получаем, что
$ln(Cap_\infty\tilde S_z)\le[1+\omega^*(z,E\backslash\Pi,D_0)]ln\frac{1}{r}-\omega^*(z,E\backslash\Pi,D_0)ln\alpha,z\in D_0$. Поэтому

$$Cap_\infty\tilde S_Z\le\frac{1}{r^{1+\omega^*(z,E\backslash\Pi,D_0)}\cdot\alpha^{\omega^*(z,E\backslash\Pi,D_0)}},z\in D_0\qquad(5)$$

Если учесть, что для любого плюриполярного множества $\Pi\subset D_0$ имеет место равенство $w^*(z,E\backslash\Pi,D_0)=w^*(z,E,D_0)$ и что $D_0\subset\subset D\backslash S$ произвольная область, то из неравенства (5) вытекает справедливость утверждения. ►

Литература.

1.Hartogs F. Zur theorie der analytischen Funktione nmehrerer Veranderlichen //Math. Ann. 1906. v. 62. p. 1-88.

2. Садуллаев А.С., Чирка Е.М.О продолжении функций с полярними особенностями //Мат.сб.1987,т. 132(174) №3, с.383-390.

3. Туйчиев Т.Т. . Продолжение функций вдоль фиксированного направления.// Сибирский математический журнал. 1988, т.29, №3, с. 142-147.

4. Туйчиев Т.Т. Об особенностях функций по направлению и по совокупности.// Некоторые вопросы анализа и алгебры: Сб.науч. тр. ТашГУ - Ташкент,1994,с.124-136.

5. Slodkowski Z. Analytic set – valued functions and spectra // Math. Annalen.- 1981.- v. 256, № 3.- p. 363-386.

УДК 517.55

БРЕМЕРМАН-ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИ ҲАҚИДА

Ярашев Ш.
Ўзбекистон Миллий Униворститети; sharofyarashev211@gmail.com

Маълумки, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва уларнинг татбиқларида Дирихле масаласи, ҳамда уни ечиш муҳим аҳамиятга эга. Текисликда гармоник функциялар қанчалик муҳим аҳамиятга эга бўлса кўп комплекс ўлчовли фазода плюрисубгармоник функциялар ва улар билан боғлиқ бўлган масалаларни ўрганиш шунчалик муҳимдир.
Айтайлик, чегараланган $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ соҳа бўлиб, $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ узлуксиз функция бўлсин. Бремерман [1] да қуйидаги масалани қараган: Ω соҳанинг чегараси $\partial\Omega$ да аниқланган h функцияни бутун Ω соҳага плюрисубгармоник давом эттириш мумкинми?
Шу ишда Бремерман Ω соҳа қатъий псевдоқаварик бўлган ҳолда масалани ижобий ҳал қилган. Кейинрок, Бедфорд ва Тейлорлар масаланинг ечими Монже-Ампер тенгламасини қаноатлантиришини исботлашган. Қўйилган масаланинг q –плюрисубгармоник ва q –псевдоқаварик соҳалар учун умумлашмалари Хант, Мюррей ва Слодковскийлар томонидан ўрганилган [2, 3].
Ушбу мақолада қуйидаги Бремерман – Дирихле масаласи қаралади:
Фараз қилайлик, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ соҳа чегараси C^2 синфга тегишли бўлган чегараланмаган қатъий псевдоқаварик соҳа бўлиб, $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ узлуксиз функция бўлсин. Шундай $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ функцияни топиш керакки
1) u функция $\overline{\Omega}$ да юқоридан ярим узлуксиз,
2) u функция Ω соҳада плюрисубгармоник,
3) $u_{\partial\Omega} = h$
шартлар бажарилсин.
Биз Бремерман – Дирихле масаласини ечишдан аввал у билан боғлиқ бўлган қуйидаги масалани қараймиз: текисликда чегараси Жордан чизиғидан иборат $D \subset \mathbb{C}$ бир боғламли соҳа берилган бўлиб, ∂D чегарада узлуксиз бўлган $u(\xi)$ функция аниқланган бўлсин. Шундай $u(z) \in h(D) \cap C(\overline{D})$ функцияни топиш керакки, $u_{\partial D} = u(\xi)$ шарт бажарилсин.
Бу масалага Дирихле масаласи дейилади. Дирихле масаласи қуйидаги теорема ёрдамида ечилади.
Теорема 1. Чегараси Жордан чизиғи ∂D дан иборат бўлган бир боғламли D соҳанинг чегарасида узлуксиз бўлган ихтиёрий $u(\xi)$ функцияни D соҳага гармоник давом эттириш мумкин. Хусусан, $U = \{|z| < R\}$ доира учун бу масала ушбу

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\xi$$

Пуассон интеграли ёрдамида ечилади. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ чегараси C^2 га тегишли бўлган соҳа бўлсин. $p \in \partial\Omega$ нуқта ва U тўплам p нинг $\mathbb{C}^n$ даги очиқ атрофи бўлсин.
Бремерман-Дирихле масаласининг ечимини келтириш учун бизга қуйидаги таъриф керак бўлади.
Таъриф 2. C^2 синфга тегишли бўлган $p : U \to \mathbb{R}$ функция учун

$$D \cap \Omega = \{z \in U : \rho(z) < 0\}$$

ва $\partial\Omega \cap U$ да $d\rho \neq 0$ бўлса, унда $\rho(z)$ функцияга U нинг ΩU учун *аниқловчи функцияси* дейилади. Айтайлик, ушбу

$$\overline{\partial}\partial\rho(p) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(p)}{\partial z_j \partial z_k} dz_j \wedge d\overline{z_j}$$

ифоданинг **Леви формаси** бўлсин. Агар $L_\rho(p)$ Леви формаси мусбат аниқланган бўлса, унда Ω соҳа p нуқтада **қатъий псевдоқаварик** дейилади.
Бу таъриф аниқловчи функция ρ га боғлиқ бўлмайди. Ω Чегараланган қатъий псевдоқавариқсоҳа учун $\overline{\Omega}$ нинг атрофида плюрисубгармоник бўлган глобал аниқловчи функция мавжуд бўлади, яъни $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ тенглик ўринли бўлади. бу ерда ρ функция нинг $\overline{\Omega}$ атрофида қатъий плюрисубгармоник ва $\partial\Omega$ да $d\rho \neq 0$
Бремерман [1] Ω да, қатъий псевдоқавариқ чегараланган соҳа бўлса, у ҳолда Перрон-Бремерман функцияси $u_{\Omega,k}$ нинг $\partial\Omega$ да узлуксиз бўлган $P_{\Omega,k}$ синфнинг элементи бўлишини ва $u_{\Omega,K}|_{\partial\Omega} = h$ тенгликнинг бажарилишини, яъни $u_{\Omega,k}$ функциянинг Бремерман-Дирихле масаласининг ечими бўлишини исботлаган. Уолш эса [4] да $u_{\Omega,k}$ функциянинг ҳатто $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлишини кўрсатган. Шундай қилиб, Ω соҳа қатъий псевдоқавариқ чегараланган соҳа бўлса, $u_{\Omega,K}$ функция Бремерман-Дирихле масаласининг узлуксиз максимал ечими бўлар экан.
Биз бу докладда келтирилган натижалардан умумийроқ бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз.
Теорема 3. Айтайлик, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ қатъий псевдоқавариқ чегараланган соҳа, $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ эса C^2 синфга тегишли бўлган функция бўлсин. у ҳолда Бремерман-Дирихле масаласининг ечими бўлган Перрон-Бремерман функцияси $u_{\Omega,k}$ $\overline{\Omega}$ да Липщиц синфига тегишли бўлади.
Изоҳ. Умумий ҳолда чегараланмаган соҳалар учун Бремерман-Дирихле масаласи ечимга эга бўлиши шарт эмас. [5] да Щербина ва Томассина ушбу $\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : Imw > |z|^2 + (Rew)^2\}$ қатъий қавариқпараболоид учун шундай узлуксиз $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ функцияга мисол қуришганки, Ω соҳада плюрисубгармоник ва $\lim\limits_{\xi \to z} \sup u(\xi) \leq h(z), \forall z \in \Omega$ шартни қаноатлантирувчи u функция учун албатта $u \equiv -\infty$ бўлади.

А д а б и ё т л а р.

1. **Bremermann H.J.** *On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Silov boundaries.* Trans. Amer. Math. Soc, 91(1959), 246-276..
2. **Hunt L.R. and Murray John J.** *q-plurisubharmonic functions and a generalized Dirichlet problem.* Michigan Math. J. 25 (1979) № 3, 299-316.
3. **Slodkowski Zbigniew.** The *Bremermann-Dirichlet problem for q-plurisubharmonic functions.* Ann Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 11(1984), №2, 303-326.
4. **Walsh J.B.** The *Continuity of envelopes of plurisubharmonic functions.* J.Math. Mech. 18(1968/1969), 143-148.
5. **Shcherbina N. and Tomassini G.** *The Dirichlet problem for Levi-flat graphs over unbounded domains.* Internat. Mat.Res. Notices. (1999), №3, 111-151.

3 – ШЎЪБА.
ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

УДК 514.126

SIRTLARNI NOCHIZIQLI ALMASHTIRISHDAGI INVARIANTLARI

Artiqbayev A.,[1] Axmedov I.[2]
[1] Toshkent davlat transport universiteti; aartykbaev@mail.ru
[2]Urganch davlat universiteti;

Uch o‘lchovli affin fazo A_3, koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo‘lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ - bu fazoning bazis vektorlari bo‘lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2,\ agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2,\ agar\ x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ta’rif 1. $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi [1].

(1) skalyar ko‘paytma majrux skalyar ko‘paytma deyiladi. Majrux skalyar ko‘paytmasi psevdoevklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo‘ladi.

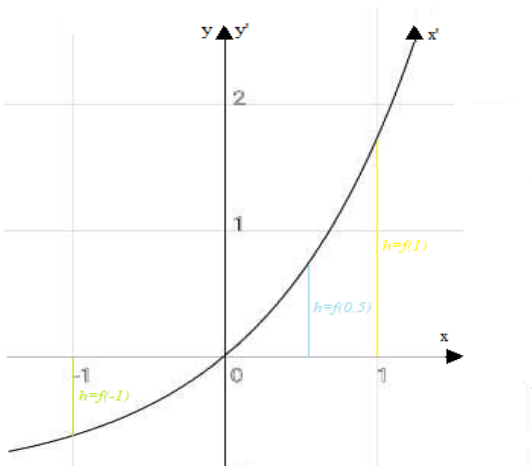
Ma’lumki, Galiley tekisligida harakat

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = hx + y + b \end{cases}$$

chiziqli almashtirishdan iborat bo’lib, $\vec{a} = (a;b)$ vektorga parallel ko‘chirish va $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$ matrisali almashtirishdan iborat [2]. Bu yerda $DetA = 1$. Bu A matritsa Geyzenberg gruppasi elementi bo’ladi [3].

Galiley tekisligida quyidagi nochiziqli almashtirishni qaraylik:

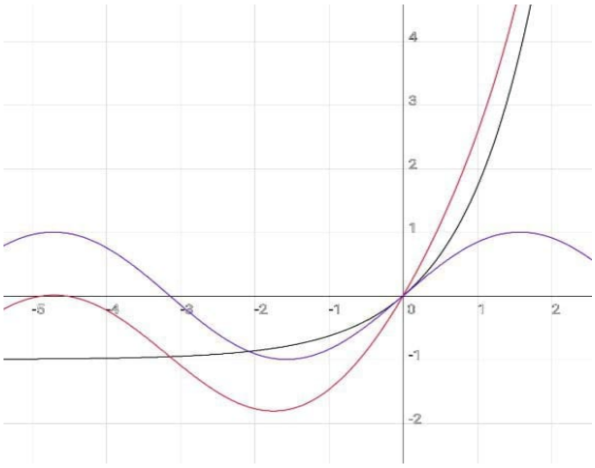
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = f(x) + y \end{cases} \tag{2}$$



Rasm 1.

Bu almashtirishda Oy o’qidagi nuqtalari o’zgarmasdan, $x' = x_0 \neq 0$ barcha qolgan nuqtalari Oy o’qiga parallel $h = f(x_0)$ masofaga sirpanadi(1-rasm).

Tasdiq 1. Tekislikda (2) nochiziqli almashtirish bajarilganda har qanday $y(x)$ chiziq $y'(x) = y(x) + f(x)$chiziqqa o‘tadi (2-rasm).



Rasm 2.

Biz (2) nochiziqli almashtirishda saqlanadigan kattaliklarni o'rganamiz.

Tekislikda Ox o'qini kesib o'tuvchi birorta elementar egri chiziqni qaraylik.

Lemma 1. (2) chiziqli almashtirishda egri chiziqning Ox o'qi bilan kesishish nuqtasidagi egriligi o'zgarmaydi.

Bizga quyidagi tenglama bilan berilgan regulyar sirt berilgan bo'lsin:

$$\vec{r} = \vec{r}(u', v') = x(u', v')\vec{i} + y(u', v')\vec{j} + z(u', v')\vec{k}.$$

Quyidagi egri chiziqli koordinatalar almashtirishini qaraylik:

$$\begin{cases} u' = u, \\ v' = g(u) + v. \end{cases} \tag{3}$$

Teorema 1. (3) nochiziqli almashtirishda regulyar sirtning to'la (Gauss) egriligi o'zgarmaydi.

Литература

1. **Артыкбоев А., Соколов Д.Д.** *Геометрия в целом в пространстве-время.* Т.: Фан. 1991. 179 с.

2. **Artykbaev A., Sultanov B.M.** *Invariants of Surface Indicatrix in a Special Linear Transformation.* Mathematics and statistics.Volume 7,№4, 2019.pp. 107-119.

3. **Dairbekov N. S.** *Mappings with bounded distortion on Heisenberg groups.* Siberian mathematical journal.may-June, 2000. Volume 41. p. 567-590.

UDK 514.742

MINKOVSKIY TEKISLIGIDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING INVARIANTLARI

Aslonov J.O.,[1] Homidov A.R.[2]

[1,2] O'zbekiston milliy universiteti; jasurbek05@mail.ru

R_1^n Minkovskiy fazosida skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n.$$

Minkovskiy fazosida x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ ko'rinishida ifodalanadi. Skalyar ko'paytma manfiy bo'lganda, Minkovskiyda masofa ham mavhum qiymatlar qabul qilishi mumkin. Bunday hollarda kvadrat ildizning qiymatlari musbat bo'lishi uchun quyidagi hollar tanlanadi:

– agar $\langle v, v\rangle > 0$ bo'lsa, tekislik koordinatali;
– agar $\langle v, v\rangle < 0$ bo'lsa, vaqt koordinatali;
– agar $\langle v, v\rangle = 0$ bo'lsa, yorug'lik koordinatali bo'ladi.

Ta'rif. Butun ratsional koeffitsiyentli

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$$

funksiya va bu funksiyada

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilganda hosil bo'ladigan

$$f' = {a'}_{11}{x'}^2 + 2{a'}_{12}x'y' + {a'}_{22}{y'}^2 + 2{a'}_1x' + 2{a'}_2y' + a'$$

funksiyaning koeffitsiyentlari orasida

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) = I({a'}_{11}, {a'}_{12}, {a'}_{22}, {a'}_1, {a'}_2, a')$$

tenglik bajarilsa, ortogonal invariant deyiladi.

Teorema. Minkovskiy tekisligida

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$$

funksiyaning ortogonal invariant quyidagicha bo'ladi:

$$I_1 = a_{11} - a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix},$$

bu yerda I_2 soni $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ funksiyaning diskriminanti.

Adabiyotlar

1. **Aslonov J.O., Homidov A.R.** *Ikki o'lchovli psevdoriman ko'pxilligida almashtirishlar gruppasi.* "Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari"nomli konferensiya materiallari. Andijon. 2022. 330-333.
2. **Homidov A.R.** *Psevdoriman ko'pxilligida almashtirishlar gruppasi.* "Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari"nomli xalqaro ilmiy anjuman. Buxoro. 2022. 91-92.
3. **Бишоп К., Криттенден К.** *Геометрия многообразний.* М. Мир, 1967.
4. **Моденов П.С.** *Аналитическая геометрия.* Издательство Московского Университета. 1969.

УДК 515.123

UNIFORM SPACES AND ITS HYPERSPACES

Beshimov R. B.[1], Safarova D. T.[2]
[1]University of Uzbekistan named after M. Ulugbek; rbeshimov@mail.ru
[2]University of Uzbekistan named after M. Ulugbek; safarova.dilnora87@mail.ru

Definition 1 [1]. Let X be a nonempty set. A family $\mathcal{U}$ of covers of a set X is called uniformity on X if the following conditions are satisfied:

(P1) If $\alpha \in \mathcal{U}$ and α is inscribed in some cover β of the set X, then $\beta \in \mathcal{U}$.

(P2) For any $\alpha_1 \in \mathcal{U}$, $\alpha_2 \in \mathcal{U}$ there exists $\alpha \in \mathcal{U}$, which is inscribed in α_1 and α_2.

(P3) For any $\alpha \in \mathcal{U}$, there exists $\beta \in \mathcal{U}$ strongly star inscribed in α.

(P4) For any x, y of a pair of different points of X, there exists $\alpha \in \mathcal{U}$ such that no element of α contains both x and y.

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X, satisfying conditions (P1) - (P3) is called pseudo-uniformity on X and a pair $(X, \mathcal{U})$ is called a pseudo-uniform space.

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X, satisfying conditions (P1) - (P4) is called uniformity on X and a pair $(X, \mathcal{U})$ is called a uniform space.

Proposition 1 [1]. For any uniformity of $\mathcal{U}$ on X, the family

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subset X : \text{for each}\, x \in O\, \text{exists}\, \alpha \in \mathcal{U}\, \text{such that}\, \alpha(x) \subset O\}$$

is a topology on X and the topological space $(X,\, \tau_{\mathcal{U}})$ is a T_1-space.

The topology of $\tau_{\mathcal{U}}$ is called the topology generated or induced by the uniformity of $\mathcal{U}$.

A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called a compact if the set X with the topology induced by the uniformity of $\mathcal{U}$ is a compact [2].

Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space and $\exp X$ the set of all nonempty closed subsets of the space $(X,\, \tau_{\mathcal{U}})$. For each $\alpha \in \mathcal{U},$ put $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$, where

$$\left\langle \alpha' \right\rangle = \left\{F \in \exp X :\ F \subseteq \cup\alpha' \,\text{and}\, F \cap A \neq \varnothing \,\text{for each}\, A \in \alpha' \right\}.$$

Proposition 2 [1]. If $\mathcal{B}$ is the base of a uniform space $(X, \mathcal{U})$, then $P(\mathcal{B}) = \{P(\alpha) :\ \alpha \in \mathcal{B}\}$ forms a base of some uniformity $\exp\mathcal{U}$ on $\exp X$.

A uniform space $(\exp X,\ \exp\mathcal{U})$ is called a hyperspace of closed subsets of a uniform space $(X, \mathcal{U})$, and uniformity $\exp\mathcal{U}$ is called Hausdorff uniformity on $\exp X$.

Remark 1 [1]. Let $\exp_c X$ be the set of all nonempty compact subsets of the uniform space $(X, \mathcal{U})$. For each $\alpha \in \mathcal{U}$, put $K(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha \,\text{and}\, \alpha' \text{ is finite}\}$. Note that $K(\alpha)$ is the cover of the set $\exp_c X$.

Corollary 1 [3]. Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space. Then $w\,(\mathcal{U}) = w\,(\exp\mathcal{U})$.

Corollary 2 [3]. If the uniform space $(X, \mathcal{U})$ is metrizable, then its hyperspace $(\exp X, \exp\mathcal{U})$ is also metrizable.

A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called uniformly connected, and uniformity $\mathcal{U}$ is connected if any uniformly continuous mapping $f : (X, \mathcal{U}) \to (D, \mathcal{U}_D)$ of the uniform space $(X, \mathcal{U})$ into any discrete uniform space $(D, \mathcal{U}_D)$ is constant.

Theorem 1 [4]. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly paracompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly paracompact.

Corollary 3. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly connected if and only if the uniform space $(\exp_c X,\, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly connected.

Definition 2 [1]. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called uniformly pseudocompact if every uniformly continuous real-valued function defined on $(X, \mathcal{U})$ is bounded.

Theorem 2. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly pseudocompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly pseudocompact.

Let us give examples of the property P of uniform covers of uniform spaces:

(1) covers of brevity $\leq n$;

(2) star-finite covers;

(3) point-finite covers;

(4) finite covers;

(5) covers of power $\leq \tau,\ \tau \geq \aleph_0$.

A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called P-precompact if the uniformity $\mathcal{U}$ has a base $\mathcal{B}$ consisting of covers with property P.

Theorem 3. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is P-precompact if and only if a uniform space $(\exp_c X,\, \exp_c \mathcal{U})$ is P-precompact, where properties P is a uniformly point-finite cover of uniform space.

Литература

1. **Borubaev A.A.** *Uniform topology.// Bishkek: Ilim, 2013. (in Russian)*
2. **Engelking R.** *General Topology.//Berlin. Helderman, 1986.*
3. **Michail E.** *Topologies on spaces of subsets.//Trans. Amer. Math. Soc, Vol.71, No. 1, pp. 152-172, 1951.*
4. **Beshimov R.B., Safarova D.T.** *Some topological properties of a functor of finite degree //Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.42, No.12, pp.2744-2753, 2021*

УДК 517.8

QUTB KOORDINATALAR SISTEMALARINI TADBIQLARI

Beshimova D. R.[1], Bozorova D. A.[2]
[1,2]Buxoro davlat Universiteti; Drbeshimova@gmail.com, samsungjjj719@gmail.com

Qutb koordinatalar sistemasi ikki o'lchamli koordinatalar sistemasi bo'lib, unda tekislikdagi har bir nuqta qutb burchagi va qutb radiusi deb ataluvchi ikkita son orqali aniqlanadi. Ikkita nuqta orasidagi munosabatni radius va burchaklar orqali ifodalash qulay bo'lgan hollarda qutb koordinatalar sistemasidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Dekart yoki to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida bunday munosabatlar trigonometrik tenglamalarni qo'llash orqali amalga oshiriladi. Qutb koordinatalar sistemasi nol nur yoki qutb o'qi deb ataluvchi o'q orqali beriladi. Bu nur chiquvchi nuqtaga koordinata boshi yoki qutb deyiladi. Tekislikdagi har qanday nuqta ikkita qutb koordinata-radius va burchak orqali aniqlanadi. Radius (radial koordinata) odatda r harfi bilan belgilanib, nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teng. Burchak koordinata ko'p hollarda qutb burchagi yoki azimut deb ham yuritiladi. Bu miqdor φ harfi bilan belgilanib, berilgan nuqtaga tushish uchun qutb o'qi buriladigan (soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalish) burchakka teng.

Shu tarzda aniqlangan radial koordinata (radius) 0 dan ∞ gacha bo'lgan qiymatni qabul qilishi mumkin. Burchak koordinata esa $0\circ$ dan $360\circ$ qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

Burchak va radius tushunchalari eramizdan avvalgi birinchi ming yillik davrida ham ma'lum bo'lgan. Grek astronomi Gipparx turli burchaklar uchun vatarlar uzunliklari jadvalini yaratgan. Samoviy jismlarning joylashuv o'rnini aniqlashda qutb koordinatalar sistemasidan foydalanilganligi haqida ma'lumotlar mavjud. Arximed o'zining "Spirallar" asarida Arximed spirali deb ataluvchi funksiya tavsiflangan bo'lib, bu funksiya radiusi burchakdan bog'liqdir. Biroq grek tadqiqotchilarning ishlarida koordinatalar sistemasini aniqlash to'liq rivojlantirilmagan.

IX asrda fors matematigi Xabbash-al-Xasib kartografik proyeksiya va sferik trigonometriya metodlaridan foydalanib, qutb koordinatalar sistemasidan markazi sferaning biror nuqtasida bo'lgan boshqa koordinatalar sistemasiga o'tish masalasini o'rgangan.

Buyuk vatandoshimiz, astronom Abu Rayhon Beruniy qutb koordinatalar sistemasi tavsifi qanday bo'lishi haqidagi g'oyalarni ilgari surgan. U taxminan 1025-yilda birinchilardan bo'lib samoviy sferaning qutb ekvi-azimutal tekis taqsimlangan proyeksiyasini tavsiflagan.

Qutb koordinatalar sistemasini formal koordinatalar sistemasi sifatida kiritish bo'yicha turlicha qarashlar mavjud. Qutb koordinatalar sisitemasining paydo bo'lishi tarixi olib borilgan tadqiqotlarning to'liq bayoni Garvard universiteti professori Julian Louvel Kulijning "Qutb koordinatalar sistemasining paydo bo'lishi" nomli ishida yoritilgan.

Endi grafik tasvirlar qismiga o'tamiz. Yuqorida aytib o'tganimizdek, har bir nuqta qutb koordinatalar sistemasida ikkita koordinata -r yoki ρ (radial koordinata) va φ yoki θ (burchak koordinata, qutb burchagi, faza burchagi, azimut, pozitsion burchak) orqali aniqlanadi. r koordinata nuqtadan markazgacha yoki koordinata sistema qutbigacha bo'lgan masofaga mos keladi. φ burchak esa $0\circ$ li nurdan soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda hisoblangan burchakka teng.

φ burchak koordinatani topishda quyidagi ikkita holatni inobatga olish kerak:

1) $r=0$ bo‘lsa, φ burchak istalgan haqiqiy son bo‘lishi mumkin;
2) $r\neq 0$ bo‘lsa, φ ning asosiy qiymatini odatda $[0;2\pi)$
yoki $(-\pi;\pi]$ intervaldan tanlanadi.
φ burchakning $[0;2\pi)$ intervaldagi qiymatini hisoblashda ushbu formuladan foydalanish mumkin:

$$\varphi=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & \text{agar } x>0,\quad y\geq 0;\\ \arctan\frac{y}{x}+2\pi, & \text{agar } x>0,\quad y<0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & \text{agar } x<0;\\ \frac{\pi}{2}, & \text{agar } x=0,\quad y>0;\\ \frac{3\pi}{2}, & \text{agar } x=0,\quad y<0;\\ -, & \text{agar } x=0,\quad y=0.\end{cases}$$

φ burchakning $(-\pi,\pi]$ intervaldagi qiymatini hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$\varphi=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & \text{agar } x>0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & \text{agar } x<0,\quad y\geq 0;\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & \text{agar } x<0,\quad y<0;\\ \frac{\pi}{2}, & \text{agar } x=0,\quad y>0;\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{agar } x=0,\quad y<0;\\ -, & \text{agar } x=0,\quad y=0.\end{cases}$$

Ikki karrali integralda qutb koordinatalar sistemasiga o‘tishda Yakobi determinant hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Заитов А. А.** *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебное пособие.* -Т.: “Тафаккур авлоди”, 2020 йил.
2. **Alixonov S.** *Matematika o‘qitish metodikasi.* – Toshkent, 2011.
3. **Pogorelov A. V.** *Geometriya* – Toshkent, 2011.
4. **Azamov A., Haydarov B. va boshqalar.** *Geometriya* –T.: Yangiyo‘l poligraf servis, 2013.

УДК 517.588

Dezarg teoremasining ba’zi tatbiqlari haqida

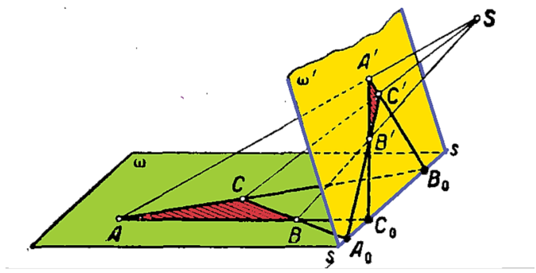
Davletov D.E., Abdimo‘minov M.
Toshkent davlat pedagogika universiteti,
Termiz davlat universiteti,Termiz shahridagi Prezident maktabi
de_davletov@mail.ru; masudjonabdimuminov1999@gmail.com

Uchburchaklarga oid ayrim masalalarda nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatlarini aniqlovchi teoremalarni bilish muhimdir. Bunaqa teoremalardan biri Dezarg teoremasidir.

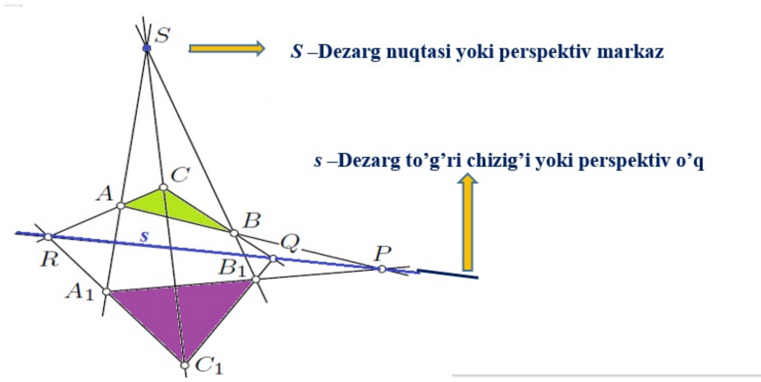
Jirar Dezarg (1593-1662;boshqa ma’lumotlarga ko‘ra 1591-1661)buyuk fransuz matematigi proektiv va chizma geometriyaga asos slogan. Dezarg geometriyaga birinchi bo‘lib xosmas nuqtalar va to‘g‘ri chiziq tushinchasini kiritgan. Dezarg xayotligida uning go‘yalari va ishlariga o‘sha zamonning buyuk matematiklari Dekart, Ferma va B.Paskalgina tushinib baho berishgan. Faqat XIX asrning boshlaridagina Dezargning g‘oyalari tan olinib, umuman e’tirof etila boshladi. Ma’lumotlarga ko‘ra Dezarg harbiy enjiner bo‘la turib, aniq matematik asoslangan amaliy amallar bilan qiziqqan. Quyosh soatlari va toshga o‘yib ishlov berish masalalariga ba’gishlagan ishlari ham shunga bag‘ishlangan.

Konfiguratsion teoremalardan muhim teorema- Dezarg teoremasi nomi bilan mashhur teorema bilan tanishamiz.

Teorema. Agar ABC va $A'B'C'$ dan iborat ikkita uch uchliklarning mos uchlarini birlashtiruvchi AA‘, BB‘ va CC‘ to‘g‘ri chiziqlar biror S nuqtadan o‘tsa, u holda bu uch uchliklarning mos tomonlari kesishishidan hosil bo‘lgan uchta nuqta bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi.



Endi ikkita uchburchaklar bitta tekislikda yotgan holatni ko‘rib chiqamiz.



Dezarg teoremasiga ikkilik prinsipini qo‘llasak:

Teorema. Agar ABC va $A'B'C'$ dan iborat ikkita uch uchliklarning mos tomonlari kesishishidan hosil bo‘lgan uchta nuqta bitta to‘g‘ri chiziqda yotsa u holda bu uch uchliklarning mos uchlarini birlashtiruvchi AA', BB' va CC' to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtadan o‘tadi.

Perspektiv markaz va perspektiv o‘q orqali ifodalasak: Teorema. Ikkita uch uchlik perspektiv markazga ega bo‘lishi uchun ular perspektiv o‘qqa ega bo‘lishi zarur va yetarlidir. Endi Dezarg teoremasining ba’zi tatbiqlari bilan tanishamiz.

1-masala. Evklid tekisligida bitta parallelogrammning qarama-qarshi uchlari mos holda ikkinchi parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari (yoki uchlarining davomlari) da joylashgan. Ikki parallelogrammning simmetriya markaiz umumiy ekanligini isbotlang.

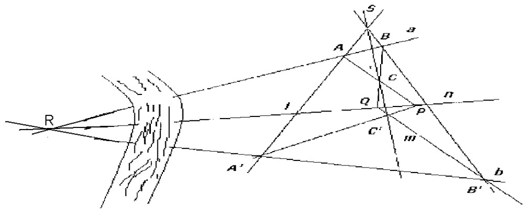
Isbot. $ABCD$ va $A1B1C1D1$ parallelogrammlar masalaning shartlarini qanoatlantirsin. Parallelogrammning simmetriya markazi, uning dioganallari kesishgan nuqta bilan ustma- ust tushadi, shuning uchun $ABCD$ va $A1B1C1D1$ parallelogrammning simmetriya markazlari ustma-ust tushishini isbot qilish uchun $AC, BD, A'C'vaB'D'$ dioganallarining bir nuqtada kesishuvini isbot qilish yetarlidir. $A'BB'vaC'DD'$ uchburchaklarni qarab chiqamiz. Bu uchburchaklarning mos tomonlari paralleldir, shuning uchun Dezargning teskari teoremasiga asosan bu uchburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi $A'C', B'D'vaBD$ to‘g‘ri chiziqlar bitta S nuqtada kesishadi. Endi AC to‘g‘ri chiziqning S nuqtadan o‘tishini isbot qilishgina qoladi. Buni $AA'D'vaCC'B'$ uchburchaklarga Dezargning teskari teoremasini tadbiq qilib isbot etish mumkin.

2-masala. Daryoning o‘ng tomonida P, chap tomonida K paxta punktlari mavjud bo‘lib, chizmada ko‘rsatilgan a va b to‘g‘ri chiziqlar R dan o‘tishi ma’lum. R va P punktlar orasidagi eng qisqa yo‘lning daryoning o‘ng tomonidagi qismini, faqat chizg‘ichdan foydalanib toping.

Yechish. a va b to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan S nuqta olamiz. S nuqtadan a va b to‘g‘ri chiziqlarni kesuvchi l, m va n to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz, (P nuqtadan o‘tuvchi) bu to‘g‘ri chiziqlarni a va b to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalarini $a\bigcap l = A$

$b\bigcap l = A',\ a\bigcap n = B,\ \ b\bigcap n = B'$ deb olamiz.

AP to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz, u $m\bigcap AP$ nuqtada, $A'P$ to‘g‘ri chiziq $m\bigcap A'P$ nuqtada kesishadi. Hosil bo‘lgan D’BC va A’B’C’ uchburchaklarning mos tomonlari $BC\bigcap B'C' = Q$ hosil qiladi.



Dezarg teoremasiga asosan R, Q, P bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Biz yuqorida Dezarg teoremasi ko‘p sohada tadbiq qilinishi mumkin ekanligini ko‘rdik. Ayniqsa Dezarg teoremasi, faqat chizg‘ich yordamida yechiladigan masalalarda juda qo‘l keladi. Bundan tashqari tekislikning chegaralangan qismida, xosmaslikda va to‘g‘ri chiziqlar bilan bog‘liq masalarda katta yordam beradi. Shularni e’tiborga olib, Dezarg teoremasini chuqur o‘rganishga undaymiz

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **N.D.Dodajonov, M.Sh.Jo‘raeva.** *Geometriya. 1-qism,* Toshkent. O‘qituvchi, 1996 y. (o‘quv qo‘llanma)
2. **N.D.Dodajonov, Yunusmetov R., Abdullaev A.** *Geometriya. 2-qism, Toshkent.* .O‘qituvchi, 1996 y. (o‘quv qo‘llanma)
3. **Holme A.** *Geometry* Germany 2013

УДК 517.8

Karno-Karateodori fazosida bir o‘lchamli sath sirtlari

Djanabayev K.D.,[1] Bayturayev A.M.[2]
[1,2] O‘zbekiston Milliy universiteti; akimchik84@mail.ru, abayturaev@mail.ru

Ushbu ishda Karno-Karateodori fazosidan Yevklid fazosiga hc-differensiallanuvchi akslantirishlar sath sirtlarining metrik xossalari o‘rganiladi.

Karno-Karateodori fazosida uzluksiz hc-differensiallanuvchi akslantirishlarni qaraymiz. Bu akslantirishlar uchun har bir $g \in M$ nuqtada $dimH_gM = dimT_gM - 1 = n$ bo‘lib, M fazoni hc-differensiali syurektiv bo‘lgan n-o‘lchamli evklid fazosiga o‘tkazsin. Bunday akslantirishlarning sath sirtlari egri chiziq bo‘lib, subriman metrikada Xausdorf o‘lchovi ikkiga teng bo‘ladi [1].

Aytaylik, $(n+1)$-o‘lchamli M Karno-Karateodori fazosining gorizontal rassloyeniyasi H_gM bo‘lib, har bir $g \in M$ nuqtada $dimH_gM = n$ bo‘lsin. Gorizontal qism rassloyeniyalarning bazis vektor maydonlarini $X_1, X_2, ..., X_N$ kabi belgilaymiz. Urinma rassloyeniyalarning vertikal tashkil etuvchilarining bazisi yagona maydondan iborat bo‘lib, uni Z bilan belgilaymiz. Karno lokal gruppasi G^g ning Li algebrasi g nuqtada $\hat{X}_1^g, \hat{X}_2^g, ..., \hat{X}_n^g, \hat{Z}^g$ bazisga ega bo‘ladi. Bu bazis $\theta_g(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ lokal koordinatalarda quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\hat{X}_i^g = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} c_{ki}(g) x_k \frac{\partial}{\partial z},\ i = 1, ..., n,$$

$$\hat{Z}^g = \frac{\partial}{\partial z},\ c_{ij}(g) = -c_{ji}(g),\ i, j = 1, ..., n.$$

Bu yerda $\left[\hat{X}_i^g, \hat{X}_j^g\right] = 2c_{ij}(g)\hat{Z}^g$ xosmas kommutator.

Qulaylik uchun nuqtani θ_g lokal koordinatalarda $\theta_g(x,z)$ koʻrinishida yozamiz, bu yerda $x \in R^n$, $z \in R$. Gruppaviy amal quyidagi qoida boʻyicha aniqlanadi

$$\theta_g(x,z) \cdot \theta_g(x',z') = \theta_g \left(x + x', z + z' + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(g) x_i x'_j \right).$$

Lokal d_∞^g metrika esa ushbu $d_\infty^g(u,v) = \|v^{-1}u\|_\infty$ munosabat bilan beriladi, bu yerda $\|\theta_g(x,z)\|_\infty = max\{|x|, |z|^{\frac{1}{2}}\}$.

Biz $f \in C_H^1(M, R^n)$ akslantirishlar sath sirtlarining geometriyasini oʻrganamiz, bu yerda har bir $g \in M$ nuqta uchun $n = dimH_gM = dimT_gM - 1$.

Tasdiq. Berilgan $f : M \to R^n$ akslantirishning hc-differensiali ushbu

$$\hat{D}f(g) = \begin{pmatrix} X_1 f_1 & \dots & X_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_n & \dots & X_n f_n \end{pmatrix} (g)$$

kvadrat matritsa bilan aniqlanadi va u maksimal rangga ega boʻlishi uchun $det\hat{D}f(g) \neq 0$ boʻlishi zarur va yetarlidir.

Teorema. Akslantirish $f : M \to R^n$ ning sath sirtlari topologik chiziq boʻladi.

Adabiyot

1. **Басалаев С.Г.** *Поверхности уровня отображений пространств Карно-Каратеодори*, Вестник НГУ. Серия: механика, математика, информатика. 2013. Т 13 выпуск 4.

УДК 515.125

In the Galilean space, oval surfaces can not be defined completely by the first quadratic form

Ergashaliyev M.Y.
National University of Uzbekistan, ergashaliyevmagrurbek@gmail.com

Certainly, [1] - Galilean space becomes affine 3-space, two $X(x_1, y_1)$; $Y(x_2, y_2)$, scalar product of vectors is defined by following formula:

$$(X,Y) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 + z_1 z_2, & x_1 x_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

If formula of surface is given with vector function that:

$$\bar{r}(u,v) = ui + y(u)j + z(u,v)k,$$

the first quadratic form of surface: $ds^2 = du^2$, and if $u = const$, following formula is confirmed:

$$ds^2 = Gdv^2$$

Here, there is $G = y_v^2 + z_v^2$.

Complete Curvature of surface can be computed with below formula:

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

There is $D = F_u - \frac{1}{2}E_v$in above formula is said as defect of curvature. Convex oval surface in Euclidian space is defined only with together it's the first quadratic form [2]. Theorem: In Galilean space, convex oval surface can not be defined only with it's the first quadratic form.

Литература

1. **A.V.Pogorelov,** *Extrinsic geometry of convex surfaces*, (1973).
2. **A.A.Artykbaev, D.D.Sokolov**, *Geometry as a Whole in Flat space-time*, Tashkent, Fan, 1-179 (1991), (in Russian).

УДК 515.12

On outer idempotent probability measures

Eshimbetov M. R.
Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky; mr.eshimbetov@gmail.com

The theory of idempotent measures belongs to idempotent mathematics, i. e. the area of mathematics based on the replacement of ordinary arithmetic operations by idempotent ones. Idempotent mathematics might be considered as a part of the theory of order-preserving functionals (see, [1]). Its connection with traditional mathematics is described by an informal principle [2], according to which there is a heuristic correspondence between important, interesting and useful constructions of the latter and similar results of idempotent mathematics. In this thesis, we study the functor of idempotent measures in the category of compact Hausdorff spaces. In traditional mathematics, it corresponds to a functor of probability measures. The concept of an idempotent measure finds numerous applications in various fields of mathematics, mathematical physics, and economics. In particular, such measures arise in dynamic optimization problems [3]; the analogy between Maslov integration and optimization was also noted in [4].
Let X be a compact Hausdorff space and $\mathfrak{B}(X)$ a the system of Borel subsets of X. We denote $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)\bigcup\{+\infty\} = [0, +\infty]$. The symbol Φ denotes the directed sets, and Δ an arbitrary index sets. Following [5], we enter the following notion.
Definition 1. A set function $\mu\colon\ \mathfrak{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ is said to be an idempotent measure on X if the following conditions hold

1) $\mu(\varnothing) = 0$;
2) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ for any $A, B \in \mathfrak{B}(X)$;
3) $\mu\left(\underset{\phi\in\Phi}{\cup} A_\phi\right) = \sup\limits_{\phi\in\Phi}\{\mu(A_\phi)\}$ for every increasing net $\{A_\phi, \phi \in \Phi\} \subset \mathfrak{B}(X)$ such that $\underset{\phi\in\Phi}{\cup} A_\phi \in \mathfrak{B}(X)$.

Remark 1. Every idempotent measure μ is increasing, i. e. for $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ if $A \subset B$ then $\mu(A) \le \mu(B)$.

The set of all idempotent measure on X we denote by $M(X)$. If $\mu(X) = 1$, the idempotent measure μ is called an idempotent probability measure on X. We denote

$$I(X) = \{\mu \in M(X) : \mu(X) = 1\}.$$

A set

$$\text{supp } \mu = [X \setminus \cup\{A \in \mathfrak{B}(X) : \mu(A) = 0\}]_X$$

we said as a support of idempotent measure μ.

The following statement is an equivalent definition of the support.
Lemma 1. The support of any idempotent measure μ can be defined by the following equality:

$$\text{supp } \mu = \cap\{[C]_X : C \in \mathfrak{B}(X), \mu(X \setminus C) = 0\}.$$

Theorem 1. For every $\mu \in I(X)$ we have $\mu \in I(\text{supp } \mu)$.

Proof. Let's put $M = \text{supp } \mu = \cap\{[C]_X : C \in \mathfrak{B}(X), \mu(X \setminus C) = 0\}$ and let $\mu(X \setminus C) = 0$ for some $C \in \mathfrak{B}(X)$. Since $C \subset [C]_X$ imply $X \setminus [C]_X \subset X \setminus C$. Then from this $\mu(X \setminus C) = 0$ we have $\mu(X \setminus [C]_X) = 0$.

If we take into account

$$X \setminus M = X \setminus \cap\{[C]_X : C \in \mathfrak{B}(X), \mu(X \setminus C) = 0\} = \cup\{X \setminus [C]_X : C \in \mathfrak{B}(X), \mu(X \setminus C) = 0\}$$

then we have

$$\mu(X \setminus M) = \sup\{\mu(X \setminus [C]_X) : C \in \mathfrak{B}(X), \mu(X \setminus C) = 0\} = 0.$$

Hence

$$\mu(X) = \mu\left((X \setminus M) \cup M\right) = \max\{\mu(X \setminus M), \mu(M)\} = 1.$$

Therefore, $\mu(M) = \mu(\text{supp } \mu) = 1$, i. e. $\mu \in I(\text{supp } \mu)$.

The theorem 1 proved.

For a map $f\colon X \to Y$ of compact Hausdorff spaces X and Y we define a map

$$I(f)\colon I(X) \to I(Y)$$

by the rule

$$I(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad B \in \mathfrak{B}(Y).$$

An outer idempotent measure of an arbitrary subset $A \subset X$ defines as

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \supset A, B \in \mathfrak{B}(X)\}.$$

So, we got an extension μ^* of μ. Now Remark 1 may be improved as following.

Remark 2. For every idempotent measure μ its extension μ^* is increasing, i. e. if $A \subset B$ then $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Theorem 2. For any pair of $A, B \subset X$ and every idempotent measure we have

$$\mu^*(A \cup B) = \max\{\mu^*(A), \mu^*(B)\}.$$

References

1. **Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.** *Functor of weakly additive τ-smooth functionals and mappings.* Ukrainian Mathematical Journal. 2009. Vol. 61, No 9. p. 1380-1386.

2. **Banakh T. O.** *Topology of probability measures spaces, I: The functors P_τ and $\hat{P}$.* Matematychni Studii. 5(1995) P.65-87.

3. **Eshimbetov M. R.** *Luzin measurable functions and idempotent τ-smooth measures (Russian).* Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.7, No. 2., 136-142(2021).

4. **Eshimbetov M. R.** *On extensions and restrictions of τ-maxitive idempotent measures.* Uzbek Mathematical Journal, Valume 65, Issue 3, 71-80(2021).

5. **Puhalskii A.** *Large deviations and idempotent probability.* Chapman & Hall/CRC, Vol.500, (2001).

УДК 517.12

Some topological properties of topological groups

Fayzullaeva D.[1], Mukhamadiev F.[2]
[1] National University of Uzbekistan;
[2] Yeoju Technical Institute in Tashkent;
[1]fayzullayevadilnavoz@mail.ru, [2]farhodgm@nuu.uz

A *paratopological group* G is a group G with a topology on the set G that makes the multiplication mapping $G \times G \to G$ continuous, when $G \times G$ is given the product topology.

For a group G, the inverse mapping $In : G \to G$ is defined by the rule $In(x) = x^{-1}$, for each $x \in G$.

A *topological group* G is a paratopological group G such that the inverse mapping $In : G \to G$ is continuous [1].

Theorem 1. Suppose that a topological group G satisfies at least one of the following conditions:
1) $\{1\}$ is closed in G,
2) G is first countable,
3) G is totally ordered with the order topology.
Then G is separable if and only if it is weakly separable.

Corollary 1. Suppose that a topological group G satisfies at least one of the following conditions:
1) $\{1\}$ is closed in G,
2) G is first countable,
3) G is totally ordered with the order topology.
Then $d(G) = wd(G) = \omega$.

Theorem 2. Suppose that a topological group G satisfies at least one of the following conditions:
1) $\{1\}$ is closed in G,
2) G is first countable,
3) G is totally ordered with the order topology.
Then G is locally separable if and only if it is locally weak separable.

Corollary 2. Suppose that a topological group G satisfies at least one of the following conditions:
1) $\{1\}$ is closed in G,
2) G is first countable,
3) G is totally ordered with the order topology.
Then $ld(G) = lwd(G) = \omega$.

References

1. **Arhangel'skii A., Tkachenko M.** *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Series in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientific, Paris - Amsterdam, (2008). p.795.

УДК 515.12

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar giperfazosining funksional xossasi

Ismoilov D. I.
Termiz davlat universiteti; ismoilov2812@mail.ru

Aytaylik X- topologik T_1- fazo bo'lsin. X fazoning barcha bo'sh bo'lmagan yopiq qism to'plamlar oilasini $expX$ ko'rinishda belgilaylik. Quyidagi ko'rinishdagi barcha to'plamlar $expX$ to'plamda topologiya bazasini tashkil etadi.

$$O\left\langle U_1\ , ..., U_n\right\rangle = \left\{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, F \bigcap U_i \neq \varnothing, i = 1, 2, ..., n\right\}$$

bu yerda, $U_1, ..., U_n$ lar X- fazodagi ochiq to'plamlar ketma-ketligi. Yuqoridagi baza orqali $expX$ da kiritilgan topologiya Vietoris topologiyasi deyiladi. $expX$ to'plam esa Vietoris topologiyasi bilan birgalikda X fazoning eksponensial fazosi yoki giperfazosi deyiladi [1].

Quyidagi $f(x) \to x$ da $(f(n))_{n\in\omega}$ ketma-ketlikni qaraylik. Agar $|ran(f)| = \omega$ bo'lsa, u holda f notrivial ketma - ketlik deyiladi. X fazoning S qismi shu fazoda notrivial yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi: Ushbu $S \in [X]^\omega$ va har bir $x \in U$, $U \in \tau_x$ uchun $(f(n))_{n\in\omega}$ ketma - ketlik bilan aniqlangan $x \in S$ mavjud. U holda biz x nuqtani S ning limit nuqtasi yoki $S \to x$ deymiz. [2] .

X fazo uchun quyidagi to'plamlar berilgan bo'lsin:

$$K(X) = \{A \in expX - A \ \ kompakt\} \ \ va$$

$$S_c(X) = \{S \in K(X): \ \ S - X \ \ da \ \ notrivial \ \ yaqinlashuvchi \ \ ketma - ketlik\}$$

Aniqki, $S_c(X)$ to'plam $expX$ ning qism to'plami bo'ladi. Biz endi $S_c(X)$ da $expX$ dagi Vietoris topologiyasi yordamida keltirilgan topologiya aniqlashimiz mumkin.

Ta'rif. τ cheksiz kardinal son, X va Y topologik fazolar bo'lsin. $f : X \to Y$ funksiya, agar X ning har bir $A(|A| \leq \tau)$ qism fazosi uchun $f|_A$ qisqartirib akslantirish uzluksiz bo'lsa, τ - uzluksiz deyiladi. X fazoning funksional tesnotasi quyidagicha aniqlanadi [3]:

$$t_0(X) = min\{\tau : Xdagi \ \ har \ \ qanday - \tau \ \ uzluksiz \ \ funksiya - uzluksiz\}$$

Teorema. Har qanday X Tixonov fazosi va har qanday τ sanoqsiz regulyar kardinal son uchun quyidagi munosabatlar ekvivalentdir.

$$t_0(X) \leq t_0(S_c(X))$$

Литература

1. **Fedorchuk V.V., Filippov V.V** *General topology. The basic constructions*, Moscow, 2014.
2. **D. Maya, P.P. Covarrubias, R.P. Mendoza** *Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences* , Math. Slovaca 68 (2018), No. 2, 431-450. 2010, том 201, номер 1, 103-128. – Ташкент: «Фан», 1987. – 144 с.
3. **O.Okunev, A.R.Paramo** *Functional tightness, R-quotient mappings and products*, Topology and its Applications 228 (2017) 236-242.,

УДК 517.12

Some topological properties of locally separable spaces

Karordinov S.R.
National University of Uzbekistan; qaroridinov.sardor1@gmail.com

A subset D of a topological space X is called a dense set in X, if $[D] = X$. Define the density $d(X)$ of X by $d(X)$ =min$\{|D| : D$ is a dense subset of $X\}$.

We say that the local density of a topological space X is τ at a point x, if τ is the smallest cardinal number such that x has a neighbourhood of density τ in X. The local density at a point x is denoted by $ld(x)$. The local density of a topological space X is defined as the supremum of all numbers $ld(x)$ for $x \in X$: $ld(X) = \sup\{ld(x) : \ x \in X\}$. It is known that, for any topological space we have $ld(X) \leq d(X)$.

A topological space X is *locally separable* at a point $x \in X$ if x has a separable neighbourhood. A topological space X is *locally separable* if X is locally separable at every point $x \in X$ [1].

We say that the weak density of the topological space is $\tau \geq \aleph_0$, if τ is the smallest cardinal number such that there exists a π-base coinciding with τ of centered systems of open sets, i.e. there is a π-base $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$, where B_α is a centered system of open sets for each $\alpha \in A$, $|A| = \tau$.

Weak density of topological space X is denoted by $wd(X)$. If $d(X) = \tau \geq \aleph_0$, then $wd(X) \leq \tau$. Similarly, if Y is dense in X-topological space, then $wd(Y) = wd(X)$.

Topological space X is said a local weak τ-dense at a point $x \in X$, if τ is the smallest cardinal number such that x has a neighbourhood of weak density τ in X. Local weak density at a point x is denoted by $lwd(x)$. The local weak density of a topological space X is defined as the supremum of all numbers $lwd(x)$ for $x \in X$: $lwd(X) = \sup\{lwd(x) : \ x \in X\}$. If X is a space of local density τ and

$f : X \to Y$ is open continuous "onto"mapping, then Y is space of local density τ. The quotient map $\pi_n^s : X^n \to SP^nX$ is an open, closed continuous onto mapping.

A *pseudometric space* is a pair (X, ρ) consisting of a set X and a function ρ defined on the set $X \times X$, assuming non-negative real values, and satisfying the following conditions:
1) $\rho(x, x) = 0$ for every $x \in X$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ for all $x, y \in X$;
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ for all $x, y, z \in X$.

Theorem. Let X is pseudometric space, then:
1) $d(X) = wd(X)$;
2) $ld(X) = lwd(X)$.

Corollary. Let X is pseudometric space, then:
1) The space X is separable if and only if the space X is weakly separable;
2) The space X is locally separable if and only if the space X is locally weakly separable.

References

1. **Engelking R.** *General topology*, Sigma series in pure mathematics; Berlin: Helderman, (1989). Vol. 6. p. 535.

УДК 515.12

Equivalence of spaces of idempotent probability measures

Kholturaev Kholsaid Fayzullayevich [1], Kurbanov Khamidjon Xujaniyozovich [2]
[1] Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers;
[2] Academy of the Armed Forces of the Republic of Uzbekistan;
[1]xolsaid_81@mail.ru, [2]qhamid_83@mail.ru

In this paper, it is shown that each topological transformations group on a Tychonoff space (in particular, on a compact Hausdorff space) generates a topological transformations group on the space of idempotent probability measures. Further, it is proved that a continuous map between spaces of idempotent probability measures is equivariant if the map that induces it between the original Tychonoff spaces is equivariant. Hence it follows that a continuous map between spaces of idempotent probability measures is an equivalence if the map that induces it between given Tychonoff spaces is an equivalence (more detailed information about topological transformations group one can find in [1], [4], [5]).

Consider the set $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\}$ with two algebraic operations: addition $\oplus$ and multiplication $\odot$ defined as follows $u \oplus v = \max\{u, v\}$ and $u \odot v = u + v$ where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers.

Recall (see, for example, [3]) that for a compact set X by $C(X)$ denote the Banach algebra of continuous functions $\varphi : X \to \mathbb{R}$ equipped with pointwise algebraic operations and the norm $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. On the set $C(X)$, we define the operations $\oplus$ and $\odot$, respectively, according to the rules $(\varphi \oplus \psi)(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$ and $(\varphi \odot \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $x \in X$, φ, $\psi \in C(X)$.

A functional $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ is called a *idempotent probability measure* on X if:

1) $\mu(c_X) = c$ (*normalization*), where c_X is a constant function that takes the value $c \in \mathbb{R}$ everywhere on X;

2) $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$ (max-plus-*homogeneity*), where $\varphi \in C(X)$, $c \in \mathbb{R}$;

3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ (max-plus-*additivity*), where φ, $\psi \in C(X)$.

The set of all idempotent probability measures on X is denoted by $I(X)$. It is easy to see that the idempotent probability measure μ is order-preserving, i. e. the inequality $\varphi \leq \psi$ implies $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$, $\varphi,\ \psi \in C(X)$. Therefore, since $-\|\varphi\| \leq \varphi \leq \|\varphi\|$ for every $\varphi \in C(X)$, then for every $\mu \in I(X)$ we have $\mu(\varphi) \in [-\|\varphi\|,\ \|\varphi\|]$. Therefore, $I(X) \subset \prod\limits_{\varphi\in C(X)} [-\|\varphi\|,\ \|\varphi\|] \subset \mathbb{R}^{C(X)}$. Consider $I(X)$ as a subspace of the Tychonoff product $\mathbb{R}^{C(X)}$ of number lines. The base of neighborhoods of the measure $\mu \in I(X)$ is formed by [2] sets of the form

$$\langle \mu;\ \varphi_1, \dots,\ \varphi_n;\ \varepsilon\rangle = \{\nu \in I(X):\ |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\},$$

where $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. This topology is called the *pointwise convergence topology* . It is known [2] that for a compact set X the space $I(X)$ equipped with the pointwise convergence topology is compact.

Let $f\colon X \to Y$ be a continuous map of compact sets. The map $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$, defined by the equality $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, $\varphi \in C(X)$, continuous. Hence, the operation I is a functor acting in the category *Comp* of compacts and their continuous maps. Note that compact sets are objects, and continuous maps are morphisms of the category *Comp*. Thus, the functor I puts the object X of the category *Comp* to the object $I(X)$ of the same category, and the morphism $f\colon X \to Y$ of the category *Comp* into the morphism $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ of this category.

Since the functor I is normal, the functor I puts the embedding $i\colon A \hookrightarrow X$ to the embedding $I(i)\colon I(A) \hookrightarrow I(X)$. In other words, if A is a closed subset of the compact set X, then $I(A)$ is also a closed subset of the compact set $I(X)$. Idempotent probability measure $\mu \in I(X)$ *is concentrated* [2] on a closed subset A of the compact set X if $\mu(\varphi) = 0$ for any continuous function $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, such that $\varphi(x) = 0$ for all $x \in A$. An idempotent probability measure $\mu \in I(X)$ is concentrated on a closed subset A of the compact X if and only if $\mu \in I(A)$. The smallest (with respect to $\subset$) closed set on which the measure μ is concentrated is called its *support* and is denoted by $\mathrm{supp}\mu$. The normality of the functor I implies that the functor I preserves intersections of closed subsets. From here

$$\mathrm{supp}\mu = \cap\{A:\ A \text{ closed in } X \text{ and } \mu \in I(A)\}.$$

Consider one of the natural extensions of the functor I from the category of compact Hausdorff spaces and their continuous maps to the category of Tychonoff spaces and their continuous maps. Let X be a Tychonoff space, βX its compact Stone-Cech extension. By definition, the set $I_\beta(X)$ is given by the equality

$$I_\beta(X) = \{\mu \in\ I(\beta X):\ \mathrm{supp}\,\mu \subset\ X\}.$$

Elements of the set $I_\beta(X)$ are called idempotent probability measures with compact support. The set $I_\beta(X)$ is considered as a subspace of the compact Hausdorff space $I(\beta X)$. If $f\colon X \to Y$ is a continuous map of Tychonoff spaces, then it can be shown that $I(\beta f)(I_\beta(X)) \subset I_\beta(Y)$, where βf is the (unique) extension of the map from f to βX. Therefore, it is natural to define the map $I_\beta(f)\colon I_\beta(X) \to I_\beta(Y)$ as the restriction $I_\beta(f) = I(\beta f)|_{I_\beta(X)}$. Thus, we have constructed an extension I_β of the functor I from the category of compact Hausdorff spaces and their continuous maps to the category of Tychonoff spaces and their continuous maps. Further, in this article, the extension I_β of the functor I, for brevity, will also be denoted by I; by $C_b(X)$ we denote the algebra of continuous bounded functions on the Tychonoff space X.

For a Tychonoff space X put

$$I(\mathrm{Homeo}\,(X)) = \{I(g):\ g \in \mathrm{Homeo}\,(X)\}.$$

Proposition 1. *For an arbitrary Tychonoff space X we have*

$$I(\mathrm{Homeo}\,(X)) \subset \mathrm{Homeo}\,(I(X)).$$

Proposition 2. *For an arbitrary Tychonoff space X we have*

$$I(\mathrm{Homeo}\,(X)) = \mathrm{AHomeo}\,(I(X)).$$

Here AHomeo $(I(X))$ *is the group of all* max-*plus-affine homeomorphisms of the space* $I(X)$.

Theorem 1. *The set $I(G)$ is a topological group with respect to the operation $I(\alpha_{g_1})I(\alpha_{g_2}) = I(\alpha_{g_1 g_2})$. Moreover, $I(\alpha_{\mathrm{e}})$ is a unit of the group $I(G)$ and $I(\alpha_g)^{-1} = I(\alpha_{g^{-1}})$, $g \in G$.*

Now for α it is possible to define the action $\alpha^I\colon\ I(G) \times I(X) \to I(X)$ by the rule

$$\alpha^I(I(\alpha_g),\, \mu) = I(\alpha_g)(\mu).$$

Proposition 3. *For the topological transformation groups $(G,\, X,\, \alpha)$, the triple $(I(G),\, I(X),\, \alpha^I)$ is a topological transformation groups.*

Proposition 4. *If the set $A \subset X$ is G-invariant, then the set $I(A)$ is $I(G)$-invariant.*

Proposition 5. *For the topological transformation groups (G, X, α), we have*

$$\ker \alpha^I = I(\ker \alpha).$$

Here $\ker \alpha^I = \{I(\alpha_g) \in I(G) \,:\, I(\alpha_g)(\mu) = \mu, \forall \mu \in I(X)\}$, $I(\ker \alpha) = \{I(\alpha_g) \in I(G) \,:\, g \in \ker \alpha\}$. Proposition 5 immediately implies

Corollary 1. *The action α^I is effective if and only if the action α is effective.*

Proposition 6. *Let $X = \{x_1,\, \ldots,\, x_n\}$ be a finite discrete space, G an arbitrary permutation group (supplied by the discrete topology) of the set X. Then, for each free action α of the group G on the space X, the corresponding action α^I of the group $I(G)$ on the space $I(X)$ is semi-free. In this case, the only point in the space $I(X)$ that remains motionless under the action of all elements of $I(G)$ is the measure* $\bigodot\limits_{i=1}^{n} 0 \odot \delta_{x_i}$.

It is clear that if G is a compact group, then $I(G)$ is also a compact group.

Theorem 2. *The action $\alpha^I\colon\ I(G) \times I(X) \to I(X)$ of the compact group $I(G)$ on the space $I(X)$ is a closed map.* The next statement follows from Theorem 2.

Corollary 2. *If G is a compact group and X is some G-space, then for any closed set $A \subset I(X)$ the set $I(G)(A)$ is closed in $I(X)$ and for compact A the set $I(G)(A)$ is compact.*

Theorem 3. *If $f\colon\ X \to Y$ is an equivariant map of one G-space to another, then $I(f)\colon\ I(X) \to I(Y)$ is also an equivariant map of $I(G)$-spaces.*

Corollary 3. *If $f\colon X \to Y$ is an equivalence of G-spaces X and Y, then $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ is an equivalence of $I(G)$-spaces $I(X)$ and $I(Y)$.*

References

1. **Glen E., Bredon.** *Introduction to compact transformation groups*, – Academic Press. New York – London, 1972.

2. **Zaitov A.A., Ishmetov A.Y.** *Homotopy Properties of the Space $I_f(X)$ of Idempotent Probability Measures*, Mathematical Notes, 2019, vol. 106, no. 3-4, p. 562–571.

3. **Zaitov A.A.** *Geometrical and topological properties of a subspace $P_f(X)$ of probability measures*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2019, no. 10, p. 28–37

4. **Smirnov Yu.M.** *On equivariant embeddings of G-spaces*, Russian Math. Surveys, 1976, vol. 31, no. 5, 198–209.

5. **Hsiang W.Y.** *Homology theory of topological transformation groups* – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

UDC 515.12

On the space of semiadditive functionals and Dugundji compacta

Kurbanov Kh.X.
Academy of the Armed Forces of the Republic of Uzbekistan; qhamid_83@mail.ru

Recall the following definition from [1]. Let Y be a compact Hausdorff space, X closed in Y, $C(X)$ and $C(Y)$ Banach spaces of continuous real functions on X and Y, respectively. A linear operator $\Lambda\colon\ C(X) \to C(Y)$ is called a regular extension operator if the following conditions are met:
(Λ1) for any $f \in C(X)$, the narrowing of the function Λf on X coincides with f;
(Λ2) $f \geq 0$ implies $\Lambda f \geq 0$;
(Λ3) if f is a constant then Λf is also a constant.

A compact Hausdorff space X is called a Dugundji compacta if for any compact Y containing X, there is a regular expention operator $\Lambda\colon\ C(X) \to C(Y)$.

For a Hausdorff space X, a topological group G let $(G,\, X,\, \alpha)$ be a topological transformations group [2], where $\alpha\colon G \times X \to X$ is the action of G on X, i. e.
(α1) $\alpha(h,\, \alpha(g,\, x)) = h(g(x))$ for all $g,\, h \in G$ and $x \in X$;
(α2) $\alpha(\mathrm{e},\, x) = x$ for all $x \in X$, here e is the unit of G.

Definition 1. The functional $\mu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ is called:

1. *weakly additive* if $\mu(\varphi + c_X) = \mu(\varphi) + c$;
2. *order-preserving* if for any pair $\varphi,\, \psi \in C(X)$ the inequality $\varphi \leq \psi$ follows $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$;
3. *normed* if $\mu(1_X) = 1$;
4. *positively homogeneous* if $\mu(t\varphi) = t\mu(\varphi)$ for all $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\, +\infty)$;
5. *semiadditive* if $\mu(\varphi + \psi) \leq \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ for all $\varphi,\, \psi \in C(X)$.

For a compact Hausdorff space X we denote by $OS(X)$ the set of all functionals $\nu\colon\ C(X) \to \mathbb{R}$ satisfying the above five conditions, and for brevity these functionals are called *semiadditive functionals*. In this paper for a compact Hausdorff space X we establish that under some conditions the space $OS_n(X)$ is a Dugundji compacta.

For a natural number n by $OS_n(X)$ we denote the set of all semiadditive functionals the supports of which contain no more than n-points [3]. For each n the set $OS_n(X)$ is closed in $OS(X)$. We put

$$OS_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} OS_n(X),$$

$$OS_{nn}(X) = OS_n(X) \setminus OS_{n-1}(X) = \{F \in OS(X) :\ |F| = n\}.$$

Lemma 1. For any positive integer n and an arbitrary infinite compact Hausdorff space X we have $[OS_{nn}(X)]_{OS(X)} = OS_n(X)$.

Let $(G,\, X,\, \alpha)$ be a topological transformations group. For a space X and a group G we put

$$OS(G,\, X) = \{\Phi \in \mathrm{Homeo}\,(OS(X)) :\ \text{ there exists } g \in G \text{ such that } \Phi|_X = g\}$$

and define a map $OS(\alpha)\colon\ OS(G,\, X) \times OS(X) \to OS(X)$ putting

$$OS(\alpha)(\Phi,\, \mu) = \Phi(\mu).$$

Lemma 2. For each $\mu \in OS(X)$, $g \in G$ and $\Phi \in OS(G, X)$ such that $g = \Phi|_X$ we have

$$\mu \in \langle \nu; U_1, \ldots, U_n; \varepsilon\rangle \iff \Phi(\mu) \in \langle \Phi(\nu); g(U_1), \ldots, g(U_n); \varepsilon\rangle, \qquad \nu \in OS(X).$$

For a family $\{\gamma\}$ of open coverings of the space $OS(X)$ we define a set $O_\gamma = \{\Phi \in OS(G, X) : \forall \mu \in OS(X), \exists W \in \gamma, \Phi(\mu) \in W \Leftrightarrow \mu \in W\}$.

We put $\mathcal{N}(\mathrm{E}) = \mathcal{N}_{OS(G,X)}(\mathrm{id}_{OS(X)}) = \{O_\gamma :\ \gamma \text{ is an open cover of } OS(X)\}$.

Lemma 3. The family $\mathcal{N}(\mathrm{E})$ forms a neighborhoods system of the neutral element $\mathrm{E} = \mathrm{id}_{OS(X)}$ in $OS(G, X)$.

Proposition 1. For an open action $\alpha\colon\ G \times X \to X$ the map $OS(\alpha)\colon\ OS(G, X) \times OS(X) \to OS(X)$ is open.

Proposition 2. For an open action $\alpha\colon G \times X \to X$ and every positive n the action $OS(\alpha)\colon\ OS(G, X) \times OS_{nn}(X) \to OS_{nn}(X)$ is open.

For the case (weakly) d-open actions the following stricter variants of Proposition 2 hold.

Proposition 3. For each d-open action $\alpha\colon G \times X \to X$ and every positive n the action $OS(\alpha)\colon\ OS(G, X) \times OS_n(X) \to OS_n(X)$ is d-open.

Proposition 4. For any weakly d-open action $\alpha\colon G \times X \to X$ and each positive n the action $OS(\alpha)\colon\ OS(G, X) \times OS_n(X) \to OS_n(X)$ is weakly d-open.

Let an action on X be weakly d-open, the family $\mathscr{O} \subset \mathcal{N}_G(e)$ such that:

(i) for any $O, U \in \mathscr{O}$ there exists $V \in \mathscr{O}$ such that $V \subset O \cap U$;

(ii) for each $O \in \mathscr{O}$ there is $U \in \mathscr{O}$ such that $U^2 \subset O$ and $U^{-1} \subset O$.

If, in additional the conditions (i) and (ii), the family $\mathscr{O}$ satisfies following condition:

(iii) for every $O \in \mathscr{O}$ and $g \in G$ there exists $V \in \mathscr{O}$ such that $gVg^{-1} \subset O$, then X in the topology $\tau_{\mathscr{O}}$ is a G-space (not necessarily Tychonoff) [2].

Let X be a G-space with a weakly d-open action, satisfying the following property:

(s) for every points x and their neighborhoods W there exists such (countable) family $\mathscr{O}_{xW} \subset \mathcal{N}_G(\mathrm{e})$, satisfying the conditions (i)–(iii), for which there is $O \in \mathscr{O}_{xW}$ and $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \varnothing$.

Then for a family $\mathscr{F}$ of equivariant factor maps on X the family $L = \{f \in \mathscr{F}; p_{fh}, f, h \in \mathscr{F}, f \geq h; \mathscr{F}\}$ is a consisted weakly multiplicative equivariant system (corresponding μ-system) of maps on X [2].

Now we can list the main results of the present work.

Theorem 1. If $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ is a consisted system of continuous maps on X, then the family $OS(L) = \{OS\,(f_\alpha), OS\,(f_{\beta\alpha}); A\}$ of continuous maps on $OS\,(X)$ also is a consisted system.

Corollary 1. If a consisted system $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ of continuous maps on X is weakly multiplicative, then the consisted system $OS(L) = \{OS\,(f_\alpha), OS\,(f_{\beta\alpha}); A\}$ of continuous maps on $OS\,(X)$ is also weakly multiplicative.

Corollary 2. If a consisted system $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ of continuous maps on X is open (d-open), then the consisted system $OS(L)$ of continuous maps on $OS\,(X)$ also is open (d-open).

Lemma 4. If a consisted system $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ of continuous maps on X is equivariant, then the consisted system $OS(L)$ continuous maps on $OS(X)$ is also equivariant.

Lemma 5. If a consisted system $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ of continuous maps on X is μ-system, then the consisted system $OS(L)$ of continuous maps on $OS\,(X)$ is also μ-system.

Theorem 2. If a space X is an *od*-space (d-space), then the hyperspace $OS\,(X)$ is also an *od*-space (d-space).

Theorem 3. Let a space X be a G-space with open action, satisfying property (s). Then the hyperspace $\exp X$ is an *od*-space with consisted weakly multiplicative equivariant open μ-system of maps. If X is compact, then $OS_n(X)$ is a Dugundji compacta.

References

1. **Pełczyński A.** *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1970.
2. **Kozlov K. L., Chatyrko V. A.** *Topological transformation groups and Dugundji compacta.* Sb. Math., (2010), 201(1), 103–128.
3. **Zaitov A. A., Kurbanov Kh. X.** *When is the space of semi-additive functionals an absolute (neighbourhood) retract?.* Proceedings of the International Geometry Center Vol. 15, no. 2 (2022) pp. 86–99.

УДК 517.12

Some hereditary cardinal invariants of spaces of compact maximal linked systems

Muhiddinova G.[1], Mukhamadiev F.[2]
[1] National University of Uzbekistan; [1]muhiddinovagulzoda@mail.ru
[2] Yeoju Technical Institute in Tashkent; [2]farhodgm@nuu.uz

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked*, if any two elements of ξ intersect. Any linked system can be upgraded to a maximum linked system (MLS). But such upgrade, as a rule, is not one valued. A linked system of space is MLS, if and only if it possesses the following completeness property: "If a closed set $A \subset X$ intersects with every element of ξ, then $A \in \xi$". We denote λX as the set of all MLS of the space X. For the close set $A \subset X$ we consider $A^+ = \{\xi \in \lambda X : \ A \in \xi\}$. For the open set $U \subset X$ we consider

$$O\left(U\right) = \left\{\xi \in \lambda X : \text{ there exists } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\right\}.$$

The family of sets of the form $O\left(U\right)$ covers the set λX $\left(O\left(X\right) = \lambda X\right)$. So, it forms an open prebase of the topology on λX. The set λX, equipped with this topology, is called as the superextension of the space X [1]. Let X be topological space and λX be its superextension. MLS $\xi \in \lambda X$ is called compact, if it contains at least one compact element, and is denoted by CMLS. The space $\lambda_c X = \{\xi \in \lambda X : \ \xi \text{ is CMLS}\}$ we call as compact super kernel (or compact superextension) of the topological space X. It is clear that $\lambda_c X \subset \lambda X$. We see that $\lambda^* X \subseteq \lambda_c X \subseteq \lambda X$ for topological T_1-space X. If the space X is compact, then we have the equality $\lambda_c X = \lambda X$. If the space X is discrete, then we have another equality $\lambda^* X = \lambda_c X$. The basement of the CMLS ξ in X is the family $\mathtt{F}(\xi) = \{F \in \xi : \ \ F \text{ is a compact}\}$.

Suppose that $\lambda_c^n X = \underbrace{\lambda_c \lambda_c \lambda_c \ldots \lambda_c}_{n \ times} X$, then we have following results.

Theorem 1. Let X is dyadic compactum, then:
1) $hd(\lambda_c^n X) = hd(X)$,
2) $h\pi w(\lambda_c^n X) = h\pi w(X)$,
3) $hsh(\lambda_c^n X) = hsh(X)$,
4) $hc(\lambda_c^n X) = hc(X)$.

Theorem 2. Let X is Dante's space, then:
1) $hd(\lambda_c X) = hd(\lambda X) = hd(X)$,
2) $h\pi w(\lambda_c X) = h\pi w(\lambda X) = h\pi w(X)$,
3) $hsh(\lambda_c X) = hsh(\lambda X) = hsh(X)$,
4) $hc(\lambda_c X) = hc(\lambda X) = hc(X)$.

Corollary. Let X is dyadic compactum, then:
1) The space $\lambda_c^n X$ is hereditarily separable if and only if the space X is hereditarily separable;
2) The space $\lambda_c^n X$ is hereditarily separable if and only if the space $\lambda_c X$ is hereditarily separable;
2) The space $\lambda_c^n X$ is hereditarily separable if and only if the space λX is hereditarily separable.

References

1. **Makhmud M.** *On cardinal invariants of spaces of linked systems*, Vestnik Moskow State University Ser. 1. Mat. Mekh. (1995). No. 4. 14–19

UDK 514.174

TEKISLIKDA BERILGAN MUNTAZAM KO'PBURCHAKLARNING MINKOVSKIY AYIRMASI HAQIDA

Nuritdinov J. T.

O'zbekiston milliy universiteti; nuritdinovjt@gmail.com

Turli xil konfiguratsiyaga ega bo'lgan to'plamlarning Minkovskiy ayirmasi turli sohalardagi yuzaga keladigan muammolarni hal qilish uchun qo'llaniladi. Xususan, muhandislik loyihalash muammolariga, ma'lumotlar tasnifiga, tasvirni tahlil qilish va qayta ishlashga, robotlar harakatini rejalashtirishga, real vaqtda to'qnashuvni aniqlashga va boshqa ko'plab zamonaviy sohalarga keng tadbiqlari mavjud. Bugungi kunda differensial o'yinlar yordamida amaliy masalalarni hal qilishda Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini taqribiy hisoblash muhim o'rin tutmoqda. [1] ishda to'plamlarning Minkovskiy ayirmasining ta'rifi va asosiy geometrik xossalari keltirilgan. [2],[3] maqolalarda tekislikda berilgan uchburchaklar va kvadratlarning Minkovskiy ayirmasini topish masalasi yechilgan. Quyida tekislikda berilgan ikki muntazam n burchaklar Minkovskiy ayirmasini topishga doir tadqiqotlarimiz natijasini keltiramiz.

$\mathbb{R}^2$ Evklid tekisligida P^A va P^B muntazam n burchaklar mos ravishda $A_1, A_2, ..., A_n$ va B_1,B_2,...,B_n uchlari orqali berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar yordamida P^A va P^B muntazam ko'pburchaklarning tomonlariga mos vektorlarni ifodalab olamiz:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_1, \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_2, ..., \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{a}_n, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \vec{b}_1, \overrightarrow{B_2B_3} = \vec{b}_2, ..., \overrightarrow{B_nB_1} = \vec{b}_n. \tag{2}$$

1-teorema. $\mathbb{R}^2$ Evklid tekisligida berilgan P^A va P^B muntazam ko'pburchaklarning $P^A \overset{*}{-} P^B$ Minkovskiy ayirmasi bo'sh bo'lmasligi uchun quyidagi munosabatning bajarilishi zarur va yetarli:

$$\frac{|\vec{a}_1|}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \geq \frac{\left|\vec{b}_1\right|}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n} - \alpha_i\right). \tag{3}$$

Bu yerda α_i – $\vec{a}_1$ va $\vec{b}_i$, $i = \overline{1,n}$ vektorlar orasidagi burchaklarning eng kichigi.

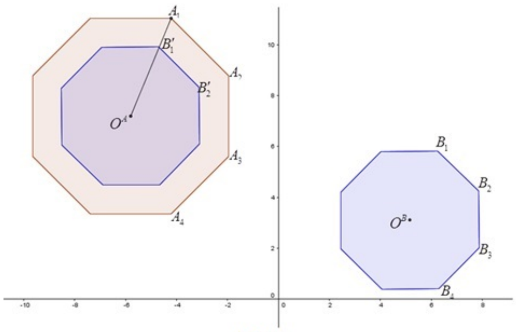
Isbot. P^A muntazam ko'pburchak bo'lgani uchun unga ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazi bir nuqtada bo'ladi. Bu nuqtani O^A deb belgilaymiz. Xuddi shu kabi P^B ko'pburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazini O^B kabi belgilaymiz. $P^A \overset{*}{-} P^B \neq \varnothing$ degani P^B to'plamni P^A to'plamning ichiga joylashtirish mumkin ekanligini anglatadi. Buning uchun O^B nuqtani O^A nuqta ustiga tushguncha P^B to'plamni parallel ko'chiramiz, ya'ni P^B to'plamni $\overrightarrow{O^BO^A}$ vektor bo'ylab parallel ko'chiramiz. Bunda ikkita holat bo'xlishi mumkin.

Birinchi holatda,$\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{b}_1$, $\vec{a}_2 \uparrow\uparrow \vec{b}_2, ..., \vec{a}_n \uparrow\uparrow \vec{b}_n$ bo'ladi (1-rasm). Bunday vaziyatda $B_1, B_2, ..., B_n$nuqtalarni $\overrightarrow{O^BO^A}$ vektor bo'ylab parallel ko'chirishdan hosil bo'lgan obrazlari $B'_1, B'_2, ..., B'_n$ nuqtalar O^AA_i, $i = \overline{1,n}$ to'g'ri chiziqlarda joylashib qoladi. $B'_1, B'_2, ..., B'_n$ nuqtalar P^A muntazam ko'pburchakga(bu yerda ko'pburchakning ichidagi nuqtalar ham ko'pburchakga tegishli deb qaralgan) tegishli bo'lishi uchun

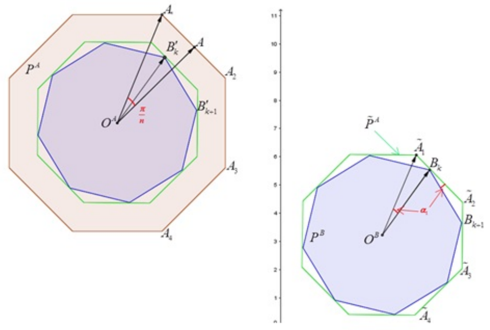
$$\left|O^AA_i\right| \geq \left|O^AB'_i\right|, \; i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

munosabat bajarilishi zaruriy va yetarlidir. $O^AB'_i$, $i = \overline{1,n}$ kesmalarning uzunligi P^B ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga teng, ya'ni

$$\left|O^AB'_i\right| = \frac{\left|\vec{b}_1\right|}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \; i = \overline{1,n}, \tag{5}$$



1-rasm



2-rasm

tenglik o‘rinli. $O^A A_i$, $i = \overline{1,n}$ kesmaning uzunligi esa P^A ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga teng, lekin uni P^A ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi orqali ifodalasak

$$\left|O^A A'_i\right| = \frac{|\vec{a}_1|}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)},\ i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{b}_1$ bo‘lgani uchun $\alpha_i = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \left\{\arccos\left(\frac{\langle \vec{a}_1, \vec{b}_i\rangle}{|\vec{a}_1||\vec{b}_i|}\right)\right\} = 0$ bo‘ladi. Bundan (6) tenglikni

$$\left|O^A A'_i\right| = \frac{|\vec{a}_1|}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \alpha_i\right)},\ i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

kabi yoza olamiz. (7) va (5) tengliklarni (4) munosabatga olib borib qo‘ysak (3) shart kelib chiqadi.

Ikkinchi holatda $\vec{a}_i \nparallel \vec{b}_j; i,\, j = \overline{1,n}$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi ya’ni P^A va P^B ko‘pburchaklarning birorta ham tomonlari o‘zaro parallel bo‘lmaydi (2-rasm). Bu holatni o‘rganishda $\alpha_i = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \left\{\arccos\left(\frac{\langle \vec{a}_1, \vec{b}_i\rangle}{|\vec{a}_1||\vec{b}_i|}\right)\right\}$ - $\vec{a}_1$ va $\vec{b}_i, i = \overline{1,4}$ vektorlar orasidagi burchaklarning eng kichigini aniqlab olamiz.

Aytaylik bu burchak $\overrightarrow{A_1A_2}$ vektor va $\overrightarrow{B_kB_{k+1}}, k = \overline{1,n}(B_{n+1} = B_1)$ vektorlar orasidagi burchak bo‘lsin. U holda, boshi O^A nuqtada, oxiri esa A_1A_2 kesmaning markazidagi A nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{O^AA}$ vektorni quramiz. Bu vektor boshi O^A nuqtada oxiri B'_k nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{O^AB'_k}$ vektor bilan $\frac{\pi}{n} - \alpha_i$ burchak tashkil etadi. $B'_1, B'_2, ..., B'_n$ nuqtalar P^A muntazam ko‘pburchakka tegishli bo‘lishi uchun $\overrightarrow{O^AB'_k}$ vektorning $\overrightarrow{O^AA}$ vektorga ortogonal proyeksiyasi uzunligi $\overrightarrow{O^AA}$ vektor uzunligidan katta bo‘lmasligi zarur va yetarli, ya’ni

$$\left|\overrightarrow{O^AA}\right| \geq \left|\overrightarrow{O^AB'_k}\right| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n} - \alpha_i\right). \tag{8}$$

$\overrightarrow{O^A A}$ vektor uzunligi P^A muntazam ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusiga teng,

$$\left|\overrightarrow{O^A A}\right| = \frac{|\vec{a}_1|}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \tag{9}$$

$\overrightarrow{O^A B'_k}$ vektorning uzunligi esa P^B muntazam ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga teng,

$$\left|\overrightarrow{O^A B'_k}\right| = \frac{\left|\vec{b}_1\right|}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \tag{10}$$

(9) va (10) tengliklarni (8) munosabatga olib borib qo‘ysak (3) munosabatni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.Mamatov, J.Nuritdinov. Some Properties of the Sum and Geometric Differences of Minkowski. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2020. Volume 8. pp.2241-2255.

2. Nuritdinov J.T. On Minkowski difference of triangles. Bull. Inst. Math. Vol.4/6, 2021, pp. 50-57. [In Uzbek]

3. Nuritdinov J.T. About the Minkowski difference on a plane.// Scientific Reports of Bukhara State University. 2021. Volume 3. pp. 13-30.

УДК 514.126

GALILEY FAZOSIDA SIRTLARNING DIFFERENSIAL XARAKTERISTIKALARI

Sultanov. B.M.,[1] Atabayev. M.U.[2]

[1,2] Urganch davlat universiteti; bek_4747@bk.ru

Uch o‘lchovli affin fazo A_3, koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo‘lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ - bu fazoning bazis vektorlari bo‘lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2,\, agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2,\, agar\, x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ta’rif 1. $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi [1].

(1) skalyar ko‘paytma majrux skalyar ko‘paytma deyiladi. Majrux skalyar ko‘paytmasi psevdoevklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo‘ladi.

„To’la geometriya” geometriadagi klassik masalalardan berilgan metrika bo’yicha qavariq sirt mavjudligi masalasidir. Agar metrika manfiy Gauss egriligiga ega bo’lsa, unda qo’yilgan masala boshqacha xarakter hosil qiladi. Manfiy Gauss egriligi egarsimon sirt bilan bog’langan. Galiley fazosidagi egarsimon sirt, Yevklid fazosida ham o’zining maxsusligini saqlaydi. Galiley fazosidagi siklik sirt, Yevklid fazosidagi egarsimon sirt ko’rinishida bo’ladi. Galiley fazosida sirtga bog’lik asosiy tushunchalar A.Artiqbayevning monografiyasida berilgan [1].

Galiley fazosida F sirt berilgan bo’lsin. Bu sirtda M nuqta olamiz va bu nuqta orqali sirtni maxsus tekislik bilan kesamiz. Kesganimizda $u = const$ egri chiziq hosil bo’ladi. Bu egri chiziqning M nuqtasining urinma vektori assimtotik yo’nalish bilan ustma-ust tushsa u holda bu nuqta siklik nuqta deyiladi [2].

Ta’rif 2. Hamma nuqtalari siklik bo’lgan sirtni siklik sirt deb ataymiz.

Galiley fazosida siklik sirt tushunchasini A.Artiqbayev tomonidan kiritilgan [2]. Siklik sirtlarning asosiy xossalari E.Kurbanov tomonidan o’rganilgan [3;4]. Biz siklik sirtni differensial xarakteristikalari berilganda uni mavjudligini ko’rsatamiz.

Bizga R_3^1 Galiley fazosida F siklik sirt quyidagi tenglama bilan berilgan bo'lsin:

$$z = z(x, y)\ ,\ \ (x, y) \in D\,. \tag{2}$$

Teorema 1. Galiley fazosida to'la egriligi berilgan

$$-(\varphi(x, y))^2 \in C(D), K = -\varphi^2(x, y)$$

funksiya bo'lgan siklik sirt har doim mavjud.

Birinchi kvadratik forma va musbat to'la egrilikning berilishi Yevklid fazosida qavariq sirtni aniqlash uchun yetarlidir. Lekin Galiley fazosida birinchi kvadratik formani berilishi, sirt shu fazoda izometrikligini bildiradi [5]. Bundan tashqari, Galiley fazosida to'la izometriklilik mavjud.

Aytaylik Oxy tekislikka bir qiymatli proyeksiyalanadigan, $C^2(\pi)$ tegishli $W(\pi)$ sirt (2) tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Teorema 2. Agar tekislikda aniqlangan $\varphi(x, y) > 1$ va $\mu(x, y)$ funksiyalar berilsa, birinchi kvadratik formasi $\varphi(x, y)$ va egrilik defekti $\mu(x, y)$ ga teng bo'lgan $W(\pi)$ ga tegishli sirt mavjud.

Литература

1. **Артыкбоев А., Соколов Д.Д.** *Геометрия в целом в пространстве-время.* Т.: Фан. 1991. 179 с.

2. **Артикбаев А.** *Классификация точек поверхности в Галилеевом пространстве.* Исследование по теории поверхностей в многообразиях знакопостоянной кривизны. Л., 1987. стр. 11-15.

3. **Курбонов Э.К.** *О поверхности Галилеева пространства.* УзМЖ, 2005, №1, стр. 51-56.

4. **Курбонов Э.К.** *Циклические поверхности Галилеева пространства.* Автореферат диссертатции на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Т.: 2006.

5. **Султанов Б.М.** *Изометрия поверхностей в галилеевом пространстве* R_3^1 Дан.Р.Уз. 2020. №4. Стр. 3-6.

УДК 514.126

GALILEY FAZOSIDA SIRTLARNI EGISH

Sultanov. B. M.,[1] Egamberganova. F. M.[2]

[1,2] Urganch davlat universiteti; bek_4747@bk.ru

Uch o'lchovli affin fazo A_3, koordinatalar boshi $O(0, 0, 0)$ nuqtada bo'lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - bu fazoning bazis vektorlari bo'lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2,\ agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2,\ agar\, x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ta'rif 1. $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi [1].

(1) skalyar ko'paytma majrux skalyar ko'paytma deyiladi. Majrux skalyar ko'paytmasi psevdoevklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo'ladi.

Galiley fazosi metrikasida izometriya tushunchasi Yevklid fazosidagi izometriyadan farq qiladi. Buning asosiy sababi shundaki, masofa boshqacha aniqlanganligidadir [3]. Bu fazoda sirtni yoyilmasi tushunchasini Yevklid fazosiga o'xshash aniqlaymiz. Galiley fazosi metrikasining xossalari sirtdagi ikki nuqta va tekislikdagi tegishli nuqtalar orasidagi masofa bir xil tartibli va teng bo'lishi, sirtni tekislikka yoyishga imkon beradi.

Ta'rif 2. Agar $F \subset R^1_3$ sirtning xar bir nuqtalari va Oxy tekislikdagi G soha nuqtalari orasida bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, xar bir mos nuqtalaridagi masofa birinchi tartibli va teng bo'lsa, G soha F sirtning tekislikdagi yoyilmasi deyiladi.

Yevklid fazosida faqat qavariq ko'pburchaklar, silindrik sirtlar va konuslar yoyilmaga ega. Galiley fazoning majrux metrikasi kengroq sirtlar sinfini yoyish imkonini beradi.

Teorema 1. Kengligi $[a, b]$ va Oxy tekislikka bir qiymatli proyeksiyalanuvchi $F \in R^1_3$ sirt yoyilmasi Oxy tekislikda $a \leq x \leq b$ orolig'da G sohada bo'ladi.

Aytaylik D - soha Oxy umumiy tekislikdagi soha bo'lsin, shu bilan birga $D = \{(x, y) \in R^1_2 : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, bu yerda $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – $[a, b]$ da uzluksiz funksiyalar. Ushbu $F : z = f(x, y) \quad (x, y) \in D$ sirtni qaraylik, bunda sirtning chegarasi D soha chegarasiga bir qiymatli proyeksiyalansin.

Teorema 2. Berilgan $F : z = f(x, y)$ sirt Oxy tekisligidagi yoyilmasi $G = \{(x, y) \in R^1_2 : a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + f_y^2(x, y)}dy\}$ soha bo'ladi.

Литература

1. **Артыкбоев А., Соколов Д.Д.** *Геометрия в целом в пространстве-время.* Т.: Фан. 1991. 179 с.
2. **Artykbaev A.** *Recovering convex surfaces from the extrinsic curvature in Galilean space.* Mat. Sb. (N.S.), Volume 119, Number 2, (1982), 204-224.
3. **Шарипов А.С.** *Поверхности, изометричные по сечениям, их свойства.* Автореферат диссертатции на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тошкент, 2000.

УДК 517.8

Sath sirtlari hosil qiluvchi qatlamalar

Xayrullayeva I.F.[1],Bayturayev A.M.[2]
[1,2] O'zbekiston Milliy universiteti;
[1]irodaxayrullayiva@gmail.com [2]abayturaev@mail.ru

Ushbu ishda zamonaviy geometriya ob'ektlaridan biri bo'lgan qatlamalarning bir sinfi differensiallanuvchi funrsiyalar sath sirtlari yordamida hosil bo'ladigan qatlamalarning xossalari o'rganilgan.

Ta'rif [1]. Bizga sanoqli bazaga ega bo'lgan M topologik fazo berilgan bo'lsin. Bu fazoning $\forall p \in M$ nuqtasi R^n fazoning biror ochiq qism to'plami $D \subset R^n$ ga gomeomorf $\exists U_p$ atrofga ega bo'lsa, M topologik fazo n o'lchamli topologik ko'pxillik deyiladi.

Ta'rif [1]. Silliq M ko'pxillikning chiziqli bog'lanishli $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ qism to'plamlari oilasi k o'lchamli $(0 < k < n\ )$ C^s-qatlama deyiladi, agar u quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

$(F_I\ )$: $\bigcup\limits_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

$(F_{II}\ )$: barcha $\alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta$lar uchun $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_{III}): Har bir $p \in M$ nuqta uchun shunday $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^(s)$,$p \in U_\lambda$ lokal koordinatalarni tanlash mumkinki, $\forall \alpha \in B$ uchun $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ bo'lsa u holda $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ to'plamning chiziqli bog'lanishlilik komponentalari:

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, ..., x_n = c_n\}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$- o'zgarmas sonlar.

Bir nechta differensiallanuvchi funksiyalar sath sirtlari hosil qiluvchi qatlamalarni misollarda ko'ramiz.

1-misol. Bizga ushbu $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning sath sirtlari

$$L_\alpha = \{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+2z=\alpha, \alpha\in R^1\}$$

to'plamdan iborat bo'lib, $gradf=\{2x,2y,2\}\neq 0$ bo'lgani uchun $x^2+y^2+2z=\alpha$ tenglikdan $z=(\alpha-\frac{x^2+y^2}{2})$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\alpha=0$ holda $z=-\frac{x^2+y^2}{2}$ tenglik bilan aniqlanuvchi, uchi koordinata boshida bo'lgan paraboloidni, $\alpha>0$ va $\alpha<0$ hollarda ham o'qi O_z koordinata o'qi bo'lgan paraboloidlarni hosil qilamiz. Demak, berilgan funksiya sath sirtlari qatlamlari paraboloidlardan iborat bo'lgan qatlama hosil qilar ekan.

2-misol. Evklid tekisligida aniqlangan $f(x,y)=x^2-y^2$ funksiyani qarasak, bu funksiyaning sath chiziqlari

$$L_\alpha = \{(x,y)\in R^2 : x^2-y^2=\alpha, \alpha\in R^1\}$$

to'plamdan iborat. Bu to'plamga tegishli bo'lgan nuqtalar to'plami $\alpha\neq 0$ bo'lsa, $x^2-y^2=\alpha$ tenglik bilan aniqlanuvchi giperbolalar oilasidan iborat, agar $\alpha=0$ bo'lsa, $x^2-y^2=\alpha=0$ tenglik bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Shunday qilib, bu funksiya sath chiziqlari tekislikdagi giperbolalarlardan va ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqdan iborat qatlama hosil qiladi.

Yuqorida qaralgan misollarning birinchisidagi funksiya kritik nuqtalarga ega emas, ixtiyoriy nuqtada $|gradf|^2=\sqrt{4x^2+4y^2+4}>0$ munosabat o'rinli. Bu funksiya sath sirtlari hosil qiluvchi qatlama qatlamlari o'rasida diffeomorfizm qurish mumkin. Ikkinchi misolda qaralgan funksiya kritik nuqtaga ega, $gradf=\{2x,-2y\}$ bo'lib, koordinata boshida nol vektorga aylanadi. Bu holda nuqtalari giperbolalar va ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq hosil qiluvchi to'plamlar orasida diffeomorfizm mavjud emas.

Teorema. Evklid fazosida kritik nuqtaga ega bo'lmagan differensiallanuvchi funksiyalar sath sirtlari hosil qiluvchi qatlamalarning qatlamlari o'zaro diffeomorf bo'ladi.

Adabiyotlar

1. **Тамура И.** *Топология слоений. М.: Мир, 1979 г.*
2. **Байтураев А.** *Геометрия слоений коразмерности один.// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ташкент, 2011 г.*

UDC 515.12

Topological transformation group on hyperspace and Dugundji compacta

Zaitov A. A.[1], Beshimova D. R.[2],
[1]Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering; adilbek_zaitov@mail.ru
[2]Bukhara State University; Drbeshimova@gmail.com

Recall the following definition from [1]. Let Y be a compact Hausdorff space, X closed in Y, $C(X)$ and $C(Y)$ Banach spaces of continuous real functions on X and Y. The linear operator $\Lambda\colon C(X)\to C(Y)$ is called a regular extension operator if the following conditions are met:
(Λ1) for any $f\in C(X)$, the narrowing of the function Λf on X coincides with f;
(Λ2) $f\geq 0$ follows $\Lambda f\geq 0$;
(Λ3) if f is a constant then Λf is also a constant.

A compact Hausdorff space X is called a Dugundji compacta if for any compact Y containing X, there is a regular expention operator $\Lambda\colon C(X)\to C(Y)$.

For a Hausdorff space X, a topological group G let (G, X, α) be a topological transformations group [2], where $\alpha\colon G\times X\to X$ is the action of G on X, i. e.
(α1) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = h(g(x))$ for all $g, h\in G$ and $x\in X$;

($\alpha 2$) $\alpha(\mathrm{e}, x) = x$ for all $x \in X$, here e is the unit of G.

Let X be a T_1-space. By $\exp X$ we denote a set of all nonempty closed subsets of X [3]. A family of sets $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{F \in \exp X : F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i, F \cap U_1 \neq \varnothing, \ldots, F \cap U_n \neq \varnothing\}$ forms a base of a topology on $\exp X$, where $U_1, \ldots, U_n$ are open nonempty sets in X. This topology is called *the Vietoris topology.* A space $\exp X$ equipped with the Vietoris topology is called a *hyperspace* of X. For a compact X Hausdorff space its hyperspace $\exp X$ is also a compact Hausdorff space. In this paper for a compact Hausdorff space X we establish that under some conditions the space $\exp_n X$ is a Dugundji compacta.

For a natural number n by $\exp_n X$ we denote the set of all n-point subsets of a compact Hausdorff space X [3]. For each n the set $\exp_n X$ is closed in $\exp X$. We put

$$\exp_\omega X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n X,$$

$$\exp_{nn} X = \exp_n X \setminus \exp_{n-1} X = \{F \in \exp X : |F| = n\}.$$

Lemma 1. For any positive integer n and an arbitrary infinite compact Hausdorff space X we have $[\exp_{nn} X]_{\exp X} = \exp_n X$.

Let (G, X, α) be a topological transformations group. For a space X and a group G we put

$$\exp(G, X) = \{\Phi \in \mathrm{Homeo}\,(\exp X) : \text{ there exists } g \in G \text{ such that } \Phi|_X = g\}$$

and define a map $\exp\alpha\colon \exp(G, X) \times \exp X \to \exp X$ putting

$$(\exp\alpha)(\Phi, F) = \Phi(F).$$

Lemma 2. For each $F \in \exp X$, $g \in G$ and $\Phi \in \exp(G, X)$ such that $g = \Phi|_X$ we have

$$F \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \in \langle g(U_1), \ldots, g(U_n)\rangle.$$

For a family $\{\gamma\}$ of open coverings of the hyperspace $\exp X$ we define a set

$$O_\gamma = \{\Phi \in \exp(G, X) : \forall F \in \exp X, \exists W \in \gamma, \Phi(F) \in W \Leftrightarrow F \in W\}.$$

We put

$$\mathcal{N}(\mathrm{E}) = \mathcal{N}_{\exp(G, X)}(\mathrm{id}_{\exp X}) = \{O_\gamma : \ \gamma - \text{open cover of hyperspace } \exp X\}.$$

Lemma 3. The family $\mathcal{N}(\mathrm{E})$ forms a neighborhoods system of the neutral element $\mathrm{E} = \mathrm{id}_{\exp X}$ in $\exp(G, X)$.

Proposition 1. For an open action $\alpha\colon G \times X \to X$ the map

$$\exp\alpha\colon \exp(G, X) \times \exp X \to \exp X$$

is open.

Proposition 2. For an open action $\alpha\colon G \times X \to X$ and every positive n the action

$$\exp\alpha\colon \exp(G, X) \times \exp_{nn} X \to \exp_{nn} X$$

is open.

The condition of openness of the action $\alpha\colon G \times X \to X$ in Proposition 2 is essential.

Exercise 1. Consider a space $(D,\, \tau_D)$, in which all single-point sets are closed, and there are at least n points, say $d_1,\, \dots,\, d_n \in D$, for which the sets $\{d_i\}$ are not open, $i = 1,\, \dots,\, n$. A set

$$G_{\{d_1,\dots,d_n\}} = \{g \in \mathrm{Homeo}\,(D) : \, g(d_i) = d_j, \quad i,\, j = 1,\, \dots,\, n\}$$

forms a group with respect to the operation of composition maps. Let $\mathfrak{A} = \{\gamma\}$ be a family open coverings of space D. Using a neighborhood system

$$\mathcal{N}(g) = \{O_\gamma(g) : \, \gamma \in \mathfrak{A}\},$$

where

$$O_\gamma(g) = \{h \in G_{\{d_1,\dots,d_n\}} : \, \forall x \in D,\, \exists U \in \gamma,\, g(x) \in U \wedge h(x) \in U\}, \qquad g \in G_{\{d_1,\dots,d_n\}},$$

we equip the set $G_{\{d_1,\dots,d_n\}}$ with a topology, making it a Hausdorff topological space. Thus, $G_{\{d_1,\dots,d_n\}}$ is a topological group. Note that an action $\alpha\colon\, G_{\{d_1,\dots,d_n\}} \times D \to D$ is not open. Indeed, for an open neighborhood O of neutral element $\mathrm{e} = \mathrm{id}_D$ and points $d_i \in D$ a set

$$Od_i = \{g(d_i) : \, g \in O\} = \{d_j\}$$

is closed, but not open. Then $\mathrm{int}(Od_i) = \varnothing$ and $d_i \notin \mathrm{int}(Od_i)$, $i,\, j = 1,\, \dots,\, n$.

Now let us show the action $\exp\alpha\colon\; \exp\,(G_{\{d_1,\dots,d_n\}},\, D) \times \exp_{nn} D \to \exp_{nn} D$ also is not open. Actually, for every neighborhood O of neutral element $\mathrm{id}_{\exp\, D}$ a set

$$O\{d_1, \dots, d_n\} = \{\Phi(\{d_1, \dots, d_n\}) : \, \Phi \in O\} = \{\{d_1, \dots, d_n\}\}$$

is closed in $\exp D$, but not open in it. Then $\{d_1, \dots, d_n\} \notin \mathrm{int}(O\{d_1, \dots, d_n\}) = \varnothing$.

For the case (weakly) d-open actions the following stricter variants of Proposition **??** hold.

Proposition 3. For each d-open action $\alpha\colon\, G \times X \to X$ and every positive n the action

$$\exp\alpha\colon\;\exp(G,\, X) \times \exp_n X \to \exp_n X$$

is d-open.

Proposition 4. For any weakly d-open action $\alpha\colon\, G \times X \to X$ and each positive n the action

$$\exp\alpha\colon\;\exp(G,\, X) \times \exp_n X \to \exp_n X$$

is weakly d-open.

Let an action on X be weakly d-open, the family $\mathscr{O} \subset \mathcal{N}_G(e)$ such that:

(i) for any $O,\, U \in \mathscr{O}$ there exists $V \in \mathscr{O}$ such that $V \subset O \cap U$;

(ii) for each $O \in \mathscr{O}$ there is $U \in \mathscr{O}$ such that $U^2 \subset O$ and $U^{-1} \subset O$.

If, in additional the conditions (i) and (ii), the family $\mathscr{O}$ satisfies following condition:

(iii) for every $O \in \mathscr{O}$ and $g \in G$ there exists $V \in \mathscr{O}$ such that $gVg^{-1} \subset O$, then X in the topology $\tau_{\mathscr{O}}$ is a G-space (not necessarily Tychonoff) [2].

Let X be a G-space with a weakly d-open action, satisfying the following property:

(s) for every points x and their neighborhoods W there exists such (countable) family $\mathscr{O}_{xW} \subset \mathcal{N}_G(\mathrm{e})$, satisfying the conditions (i)–(iii), for which there is $O \in \mathscr{O}_{xW}$ and $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap (X \setminus W) = \varnothing$.

Then for a family $\mathscr{F}$ of equivariant factor maps on X the family $L = \{f \in \mathscr{F};\, p_{fh},\, f,\, h \in \mathscr{F},\, f \geq h;\, \mathscr{F}\}$ is a consisted weakly multiplicative equivariant system (corresponding μ-system) of maps on X [2].

Here are the main results of the notice.

Theorem 1. If $L = \{f_\alpha,\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ is a consisted system of continuous maps on X, then the family $\exp(L) = \{\exp\, f_\alpha,\, \exp\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on $\exp X$ also is a consisted system.

Corollary 1. If a consisted system $L = \{f_\alpha,\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on X is weakly multiplicative, then the consisted system $\exp(L) = \{\exp\, f_\alpha,\, \exp\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on $\exp X$ is also weakly multiplicative.

Corollary 2. If a consisted system $L = \{f_\alpha,\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on X is open (d-open), then the consisted system $\exp(L)$ of continuous maps on $\exp X$ also is open (d-open).

Lemma 4. If a consisted system $L = \{f_\alpha,\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on X is equivariant, then the consisted system $\exp(L)$ continuous maps on $\exp(X)$ is also equivariant.

Lemma 5. If a consisted system $L = \{f_\alpha,\, f_{\beta\alpha};\, A\}$ of continuous maps on X is μ-system, then the consisted system $\exp(L)$ of continuous maps on $\exp X$ is also μ-system.

Theorem 2. If a space X is an od-space (d-space), then the hyperspace $\exp X$ is also an od-space (d-space).

Theorem 3. Let a space X be a G-space with open action, satisfying property (s). Then the hyperspace $\exp X$ is an od-space with consisted weakly multiplicative equivariant open μ-system of maps. If X is compact, then $\exp_n X$ is a Dugundji compacta.

References

1. **Pełczyński A.** *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1970.
2. **Chatyrko V.A., Kozlov K. L.** *The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions.* Proc. 9-th Prague Topological Symposium, Topol. Atlas, North Bay, ON, Praga, 2002, p. 15-21.
3. **Zaitov A. A., Jumaev D. I.** *Hyperspace of the* Π*-complete spaces and maps.* Eurasian Math. J., Vol. 12, no. 2, 2021, p. 104-110.

УДК 515.125

Метод фармализма в полуевклидових пространствах

Артикбаев А., Тиллаев Д.
Тошкент давлат транспорт университет, Тошкент, Узбекистан;
aartykbaev@mail.ru, donyorbektillayevadu@gmail.com

Полуевклидова пространства R_n^m-характерна тем, что метрика пространства распадает на две части [1].

Первая част метрики

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_m^2.$$

Когда $ds_1^2 = 0$, рассматривается втарая част

$$ds_2^2 = dx_{m+1}^2 + dx_{m+2}^2 + ... + dx_n^2.$$

При решения задач в псевдоевклидовом пространстве применяются метод фармализма, заключающаяся в том, что система координат одновременно считается системой координат евклидова пространства. Такой фармалный подход позваляет решит многие задачи техники.

Для полуевклидова пространства мы предлагаем другой формальный подход к решению задач геометрии.

Напомним [2], некоторый такой формальный подход применем для изотропного пространства R_3^2.

Формальный подход для изотропного пространства R_3^2 состоит в следующим.

Пусть $Oxyz$-система координат в R_3^2 тогда на плоскости Oxy-переходим в полярные координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда каждая точки на плоскости $Oxy-$имеет координаты $A(\rho,\varphi)$. Причем $A(\rho,\varphi) = A(\rho,\varphi+2\pi k)$. Мы принимаем формально точки $A(\rho,\varphi)$ и $A_k(\rho,\varphi+2\pi k)$ $-$за разные точки плоскости. Таким способом достигаем равенство нулю первой части первой квадратичной формы. Появляется возможность рассмотрение второй части первой квадратичной формы поверхности.

С помощью такого формального подхода можно изучать свойство многолистных поверхностей.

В многомерных полуевклидовых поверхностях когда $m \geq 2$, так-же можно применит сферические координаты, причем кратные точка считает за различные точки.

Применение этого формализма позволяет изучать свойства поверхностей в R_n^m.

Литература

1. **Артикбаев А., Соколов Д.Д.** *Геометрия в целом в плоском пространстве времени*, Фан. 1991, -173 стр.

2. **Тиллаев Д. Халилов М.** *Формализм и касательное отображение в пространстве*, Uz academia Ilmiy-uslubiy jurnali, 2021, Vol. 2, №23, 86-93.

УДК 514.742

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

Аслонов Ж.О.[1], Мамашарипова Ш.М.[2]

[1,2] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; jasurbek05@mail.ru

Пусть $M-$ гладкое многообразие. На M определим векторное поле X.

Определение 1.[1] Векторное поле X на M задается касательными векторами $X_x \in T_xM$ в каждой точке $x \in M$, такими, что X_x гладко меняется от точки к точке.

В локальных координатах $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ векторное поле имеет вид

$$X = X^1(x)\frac{d}{dx^1} + X^2(x)\frac{d}{dx^2} + \dots + X^m(x)\frac{d}{dx^m},$$

где каждая $X^i(x)$ гладкая функция от $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Определение 2.[2] Индексом векторного поля вдоль кривой называется число оборотов, совершаемых векторным полем при обходе вдоль этой кривой (Обход совершается против часовой стрелки; обороты считаются с учетом направления. Кривая не должна проходить через особые точки векторного поля).

Определение 3.[2] Интегральная кривая векторного поля X - это гладкая параметризованная кривая $x = \varphi(e)$, касательный вектор к которой в каждой точке совпадает со значением векторного поля v в этой точке: $\phi(\varepsilon) = X|_{\varphi(x)}$, для всех ε.

В локальных координатах $x = \varphi(e) = (\varphi^1(e), \varphi^2(e), \dots \varphi^m(e))$ должна быть решением автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{de} = X^i(x), \quad i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Пусть дано векторные поля ν и ω таковы, что на M у них нет особых точек в каждой точке X. Этой окружности векторы $\nu(X)$ и $\omega(X)$ симметричны относительно касательной. Тогда имеет место следующая

Лемма.[2] Сумма индексов особых точек полей ν и ω, лежащих внутри окужности, равна 2.

Теорема-1. Пусть каждой точке x эллипсоида сопоставлен некоторый ненулевой вектор $\nu(x)$ трехмерного пространства. Вектор ν непрерывно зависит от точки эллипсоида (не обязательно касается эллипсоида). Тогда существует вектор $\nu(x)$ перпендикулярный к касательной плоскости в точке x.

Теорема-2. Если число особых точек гладкого векторного поля на эллипсоиде конечно, то сумма их индексов равна двум.

Теорема-3. Сумма индексов особых точек гладкого векторного поля на торе равна нулю.

Следствие. На торе можно построить векторное поле без особых точек.

Литература

1. **Олвер П.** *Приложения групп Ли диференциальным уравнениям.* Москва, 1989 г.
2. **Прасолов П.П.** *Наглядная топология.* Москва: МЦНМО. - 1995. - 111 с.
3. **Мамашарипова Ш.М.** *Геометрия орбит векторных полей на цилиндре.* Тезисы докладов научной конференции "Новые теоремы молодых математиков-2022". Наманган, 13-14 мая 2022 г. С. 60-61.

УДК 515.12

О SDAP свойствах подпространств пространства вероятностных мер $P(X)$ бесконечного компакта X.

Жураев Т.Ф.[1], Монгиев А.И., Эшмирзаева Г.Ж.
[1]Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан; e-mail:tursunzhuraev@mail.ru

Аннотация. Исследуются геометрические и топологические свойства различных гомотопических всюду плотных подмножеств, являющихся граничными множествами компакта $P(X)$ и SDAP, свойства подпространств пространства $P(X)$всех вероятностных мер для бесконечного компакта X. А также рассматривается гомотопические плотные свойства Александровского расширения подпространств вида $P(U)$ и $P_\omega(U)$ пространства $P(X)$ для всюду плотных подмножеств $U \subset X$ бесконечного компакта X.

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ также является компактом (P сохраняет вес). Далее оно, содержа симплексы сколь угодно большого числа измерений, бесконечномерны. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$, как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2., гомеоморфен гильбертову кубу $Q = I^{\aleph_0}$. С другой стороны пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на X, снабженное слабейшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \to R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U открытое в X множество).

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $supp(\mu)$- это наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т.е. $supp(\mu) = \bigcap\{A : A = \bar{A},\ \mu \in P(A)\}$;

$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leq n\}-$множество всех мер μ с не более чем n носителями, $P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)-$множество всех вероятностных мер μ с конечными носителями.

Пусть X бесконечный метрический компакт. Для любого $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ положим $S_P(A) = \{a \in P(X) : supp(a) \bigcap A \neq \emptyset\}$. Необходимо отметить, что если A открыто в X и $A \neq X$, то подмножество $S_P(A)$ открыто в $P(X)$. Это следует из полунепрерывности снизу отображения $supp_{_P}(a) : P(X) \to \exp X$[9].

Определение [1]. Говорят, что X пространство X обладает сильно дискретным аппроксимационным свойством (обозначается через SDAP), если для каждого отображения $f : Q \times N \to X$ и каждого покрытия $U \in cov(X)$ существует отображение $\bar{f} : Q \times N \to X$ такое, что $(\bar{f}, f) \prec U$ и семейство $\{\bar{f}(Q \times n) : n \in N\}$ дискретно в X.

Напомним, что подпространство A пространства X гомотопически плотным в X, если существует такая гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$, что $h(x,0) = id_X$ и $h(X \times (0,1]) \subset A$. Подмножество $A \subset X$ называется гомотопически пренебрежимо в X, если $X \backslash A$ гомотопически плотно в X [1].

Теорема 1. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n \subseteq ...$ последовательность бесконечных таких компактных подмножеств, что $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ локально компактного.

Тогда

а) $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i)$ гомотопически плотно в $A(\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i))$, где $A(\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i))$ одноточечное Александровская компактификация локально компактного пространства $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i)$;

б) $A(\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i)) \in AR$;

в) $A(\bigcup_{i=1}^{\infty} P(K_i)) \simeq Q$;

Теорема 2. Для любого бесконечного компакта X и замкнутого $A \subset X$ такого, что $X \backslash A$ всюду плотно и $X \backslash A \neq X$. Тогда пространство $S_P(A)$ обладает свойством SDAP.

Следствие 1. Для любого бесконечного компакта X и его непустого замкнутого подмножество $A \subset X$ такого, что $X \backslash A$ всюду плотно в X и $X \backslash A \neq X$. Тогда пространство $P(X) \backslash P(X \backslash A)$ удовлетворяет свойству SDAP.

Следствие 2. Для любого непустого подмножества $A \subset X$ отличного от самого компакта X пространства:

а) $P(X \backslash A)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$;

б) $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$;

в) $S_P(X \backslash A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Теорема 3. Для любого всюду плотного открытого подмножества U бесконечного компакта X отличного от X, пространство $P(U)$ обладает SDAP свойством.

Следствие 3. Для любого бесконечного компакта X и его непустого замкнутого подмножества $A \subset X$ такого, что $X \backslash A$ всюду плотно в X и $X \backslash A \neq X$ тогда $P(X) \backslash P_\omega(X \backslash A)$ удовлетворяет свойству SDAP.

Литература

1. **Banakh T., Radul T., Zarichny M.** *Absorbing sets in infinite-dimensional Manifolds* Math Studies Monogh. Ser. V.1. VNTL Publishers, 1996.

2. **Федорчук В.В.** *Вероятностные меры в топологии* Успех.мат.наук, 1991, Т.46, вып. (277), с.41-80.

3. **Жураев Т.Ф.** *Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов* М.МГУ. 1989, канд.дис. 90с. *УДК 517.956*

О ГЕОМЕТРИИ СИНГУЛЯРНЫХ СЛОЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Касимов О.Ю.[1], Турсунов Б.А.[2]

[1] Денауского института предпринимательства и педагогики; odilbek.qosimov84@mail.ru

[2] Каршинский государственный университет; bakbarovich@mail.ru

В настоящее время, в мире, одной из актуальных проблем современной геометрии является изучение геометрии слоений и сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей

Киллинга. В то же время хорошо изучена и геометрия субмерсий, порожденных орбитами векторных полей Киллинга. Геометрия слоений, порожденных субмерсиями находят различные приложения во многих областях прикладных наук, в частности в физике. Применение результатов по геометрии слоений в других областях науки, в частности для решений задач механики, теории динамических систем являются актуальными научными направлениями.

Особое внимание было уделено изучению теории слоений, которая является интенсивно развивается во многих странах мира, в частности изучению геометрии слоений, порожденных субмерсиями, геометрии и топологии сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей, изучению группы изометрий слоеных многообразий.

В этой области работали многие ученые, в том числе J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap, M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus и узбекские ученые А. Нарманов, А. Шарипов, Ж. Аслонов, А. Байтураев, С. Саитова, Г. Кайпназарова провели научные исследования.

Напомним, что

Определение 1. *Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденные потоками векторным полем X, состоит из изометрий.*

В случае, когда $M = R^n$, то векторное поле $X = \sum\limits_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0,\ i \neq j,\ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Тепер напомним что, наиболее важную операцию над векторными полями, называемую скобку Ли, или коммутатор этих векторных полей. Эту операцию можно рассматривать как дифференцирование функции. Пусть X и $Y-$ гладкие векторные поля на многообразии M, то их скобка Ли $[X, Y]-$ такое единственное векторное поле, действующее на все гладкие функции $f : M \to R$ со следующим условием $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Легко проверяется, что если X и Y является векторными полями Киллинга, то скобка Ли $[X, Y]$ этих полей на самом деле тоже является векторными полями Киллинга. Пусть векторные поля X, Y в локальных координатах задаются следующими равенствами соответственно $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда i-я координата скобки Ли $[X, Y]$ этих двух векторных полей имеет следующий вид:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right).$$

Пусть M - гладкое многообразие размерности n, D - семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 2. *Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x из M, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что*

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)).$$

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением.

Пусть $M-$гладкое многообразие размерности n, $A-$максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geq 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s, если $0 \leq s \leq r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s

многообразии M обозначим через A^s. Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 3. *Разбиение F многообразия M на подмногообразия L_α называется гладким сингулярным слоением, если выполнены следующие условия:*

1) $\bigcup\limits_{\alpha\in B} L_\alpha = M$;

2) *Для всех $\alpha, \beta \in B$ имеет место обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$;*

3) *Каноническая инъекция $i : L_\alpha \to M$ является погружением;*

4) *Для каждой точки $x \in M$ существует C^r- карта (φ, U), содержащая точку x такая, что $\varphi(U) = V_1 \times V_2$, где V_1- окрестность начало в R^k, V_2- окрестность начало в R^{n-k}, $k-$есть размерность слоя, проходящего через точку x;*

5) $\varphi(x) = (0, 0)$;

6) *Для каждого подмногообразия L_α такого, что $L_\alpha \cap U \neq \varnothing$, имеет место равенство $L_\alpha \cap U = \varphi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{v \in V_2 : \varphi^{-1}(0, v) \in L_\alpha\}$.*

Подмногообразии L_α называются слоями сингулярного слоения F. Если размерность слоев сингулярного слоения одинаковы, то слоение называется регулярным слоением. Слой L слоения F называется регулярным, если размерность слоя L максимален. Слой L слоения F называется сингулярным, если он не является регулярным.

Пусть $D = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ семейство гладких векторных полей в R^3, где

$$X_1 = \{z; 0; -x\}, X_2 = \{-y; x; 0\}, X_3 = \{-y; x; 1\}, X_4 = \{0; 0; 1\}.$$

Поток векторного поля X_1, X_2, X_3, X_4 порождает следующую однопараметрическую группу преобразований

$$X_1^\xi : (x, y, z) \to \{xcos\xi - zsin\xi, y, xsin\xi + zcos\xi\}, \xi \in R.$$

$$X_2^\zeta : (x, y, z) \to \{xcos\zeta - ysin\zeta, xsin\zeta + ycos\zeta, z\}, \zeta \in R.$$

$$X_3^\psi : (x, y, z) \to \{xcos\psi - ysin\psi, xsin\psi + ycos\psi, z + \psi\}, \psi \in R.$$

$$X_4^\tau : (x, y, z) \to \{x, y, z + \tau\}, \tau \in R.$$

Для этих семейств векторных полей справедлива следующая теорема.

Teorema.1. *Орбиты семейство векторных полей $D_1 = \{X_1, X_2\}$ порождают сингулярное слоение F, пространства R^3, регулярными слоями которого являются концентрические сферы. Сингулярными слоем слоения F являются одна точка.*

Teorema.2. *Орбиты семейство векторных полей $D_2 = \{X_3, X_4\}$, $D_3 = \{X_2, X_4\}$ порождают сингулярное слоение F, пространства R^3, регулярными слоями которого являются концентрические цилиндры. Сингулярными слоем слоения F являются одна прямая.*

Литературы

1. **Tamura I.** Topology of foliations: an introduction. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., 2006.

2. **Narmanov A. Ya., Qosimov O.Yu.** On the Geometry of the Set of Orbits of Killing Vector Fields on Euclid Space, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 55,39-49 (2020), (Scopus, CiteScore IF=0.6)

3. **Нарманов А.Я., Аслонов Ж.О.** Геометрия орбит векторных полей Киллинга. Узбекский математический журнал, 2012, 2. ст.77 – 85.

Дифференциал тенгламаларнинг геометрик масалаларни ечишда аҳамияти.

Курбанов К.П.

Термиз, Ўзбекистон;

kurbanovkamol@mail.ru

Табиатшунослик ва техника фанларининг к ўпгина масалалари дифференциал тенгламаларга олиб келиниб ҳал қилинади. Жумладан геометрик масалаларни ечишда дифференциал тенгламаларнинг аҳамияти катта. Амалий масалаларни ечиш уч босқичдан иборат:

1. Дифференциал тенгламаларни (дифференциал тенгламалар системасини) тузиш;

2. Тузилган дифференциал тенгламани (дифференциал тенгламалар системасини) интеграллаш, яьни ечимини топиш.

3. Топилган ечимни текшириш. Дифференциал тенглама (дифференциал тенгламалар системасини) тавсифловчи жараённи хоссаларини ўрганиш. Хулосалар чиқариш ва тавсияномалар бериш. Дифференциал тенгламалар тузиб, геометрик мазмундаги масалаларни ечишдаҳосиланинг геометрик маьноси муҳим аҳамиятга эга.

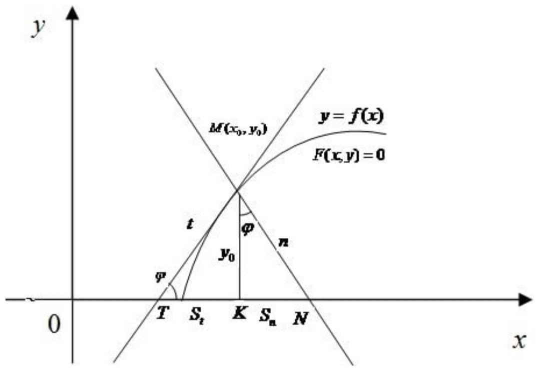
$y = f(x)$ ёки $F(x, y) = 0$ тенглама билан аниқланувчи эгри чизиқнинг нуқтасига ўтказилган уринма тенгламаси

$$y - y_0 = {y'}_0(x - x_0) \tag{1}$$

кўринишга эга. Бунда ${y'}_0 - y'$ ҳосиланинг $M(x_0, y_0)$ нуқтадаги қиймати. Уриниш нуқтасида уринмага перпендикуляр бўлган т ўғри чизиқэгри чизиқнинг нормали деб аталади. Нормал т ўғри чизиқтенгламаси

$$x - x_0 + {y'}_0(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

кўринишга эга. Т ўгри бурчакли координаталар системасида уринма ва нормал билан боғлик б ўлган 4 та кесма бор (1-чизма)



1-чизма

$t = TM-$ уринма кесмаси; $S_t = TK-$ уринма ости кесмаси; (уринма кесмасининг ox ўқдаги проекцияси); $n = NM-$ нормал кесмаси; $S_n = KN-$ нормал ости кесмаси; (нормал кесмасининг ox укдаги проекцияси); $KM = |y_0|$ ва $tg\phi = {y'}_0$ б ўлганлигини эьтиборга олсак бу т ўртала кесма узунликларини y_0 ва ${y'}_0$ миқдор орқали ифодалаш мумкин.

$$t = |TM| = \left|\frac{y}{{y'}_0}\sqrt{1 + {{y'}_0}^2}\right|; \quad n = |NM| = \left|y_0\sqrt{1 + {{y'}_0}^2}\right|;$$

$$S_t = |TK| = \left|\frac{y_0}{{y'}_0}\right|; \quad S_n = |KN| = \left|y_0{y'}_0\right|. \tag{3}$$

(3) формулаларни келтириб чиқариш учун т ўгри бурчакли учбурчаклар : TMK ва KMNни қараймиз . Т ўгри бурчакли ΔTKM дан: $\frac{KM}{TM} = \sin\phi \Rightarrow MT = \frac{KM}{\sin\phi}$

$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}}, \sin\phi = \frac{tg\phi}{\sqrt{1+tg^2\phi}}$ маьлум формулаларга к ўра

$$TM = \frac{KM}{\frac{tg\phi}{\sqrt{1+tg^2\phi}}} = \frac{KM\sqrt{1+tg^2\phi}}{tg\phi} = \left|\frac{y_0}{y'_0}\sqrt{1+{y'_0}^2}\right|$$

$$\frac{MK}{TK} = tg\phi \Rightarrow TK = \frac{MK}{tg\phi} \Rightarrow TK = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right|.$$

T ўгри бурчакли ΔMKN дан:

$$\frac{MK}{MN} = \cos\phi \Rightarrow MN = \frac{MK}{\cos\phi} = MK\sqrt{1+tg^2\phi} = \left|y_0\sqrt{1+{y'_0}^2}\right|;$$

$$\frac{KN}{MK} = tg\phi \Rightarrow KN = MKtg\phi = \left|y_0 y'_0\right|$$

Юқорида келтирилган тушунчаларни асослаш мақсадида битта геометрик масалани ечамиз.

Масала. Уринма ости кесмасининг узунлиги уриниш нуктасининг абсциссасидан икки марта катта б ўлган эгри чизиқни топинг.

Ечиш . Уринма ости кесмаси : $TK = \left|\frac{y}{y'}\right|$. Масала шартига к ўра $\frac{y}{y'} = 2x$ дифференциал тенгламани оламиз. Бу дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

$$2xy' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + c \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 2p,$$

$$c = \frac{1}{2}\ln 2p \Rightarrow \ln y = \ln\sqrt{2px} \Rightarrow y = \sqrt{2px} \Rightarrow y^2 = 2px.$$

Демак излана ётган эгри чизиқ$y^2 = 2px$ параболадан иборат б ўлади.

Адабиётлар

1. **Салохиддинов М.С , Насриддинов Г.Н** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент. "Узбекистон"1994.
2. **Демидович В.П** *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* М. "Наука"1990.

УДК 53C40, 53C42

ПОЛНЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ${}^2R_5$

Мамадалиев Б. М.
Ферганский государственный университет; mamadaliyev_botirjon@mail.ru

Пусть кривая γ заданная векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{1}$$

в псевдоевклидовом пространстве ${}^2R_5$ [1]. Формула Френе для кривой (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{ds} = k_1\vec{\xi_2} \\ \frac{d\xi_2}{ds} = -k_1\vec{\xi_1} + k_2\vec{\xi_3} \\ \frac{d\xi_3}{ds} = -k_2\vec{\xi_2} + k_3\vec{\xi_4} \\ \frac{d\xi_4}{ds} = k_3\vec{\xi_3} + k_4\vec{\xi_5} \\ \frac{d\xi_5}{ds} = k_4\vec{\xi_4} \end{cases}$$

где $\left\{\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_5\right\}$ – базис кривой γ [2], [3].

Рассмотрим линейчатые поверхности определяемые формулами:

$$\vec{r}(u,\ \ v) = \rho(u) + v\vec{\xi}_1, \tag{2}$$

$$\vec{r}(u,\ \ v) = \rho(u) + v\vec{\xi}_2, \tag{3}$$

$$\vec{r}(u,\ \ v) = \rho(u) + v\vec{\xi}_5. \tag{4}$$

Лемма. Касательные плоскости линейчатых поверхностей (2), (3) евклидова а поверхности, (4) плоскость Минковского.

Теорема 1. Условия $k_4 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы поверхности заданные уравнениями (2), (3), (4) были полными поверхностями в ${}^2R_5$.

Литература

1. **Артыкбаев А, Соколов Д. Д.** *Геометрия в целом в плоском пространстве времени*, Ташкент, «Фан», 1991. – 180 с.

2. **Аминов Ю. А.** *Геометрия подмногообразий*, Киев, «Наукова думка», 2002. – 468 с.

3. **Аминов Ю. А, Наседкина Я.С.** *Условия принадлежности двумерной поверхности из E_5 гиперсфере или гиперплоскости*, Математические заметки, 2013, том 94, выпуск 2, 163-174 с.

УДК 515.12

О некоторых гомотопически плотных подпространствах гиперпространства $\exp X$ определенного континиуме Пеано X.

Рахматуллаев А. Х.[1], Давлетов Д. Э.[1], Жувонов К. Р.[2]

[1]Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами; olimboy56@gmail.com,de_davletov@mail.ru

[2] ТИИМСХ, Национальный исследовательский университет; qamariddin.j@mail.ru

Аннотация. Исследуется топологические свойства типа всюду плотные гомотопические плотные и гомотопические ничтожны подпространства. Замкнутые $Z-$множества гиперпространства $\exp X$ определенные континиуме Пеано. А так же рассматривается пространства состоящих из всех конечных подмножеств $\exp_\omega(X)$ пространства $\exp X$, которое является $\sigma - Z-$множеством в пространстве $\exp X$. При исследование подпространств используя $A(N)R$ свойств, показывается пространство $S_{\exp}(x_0)$ всех элементов пространства $\exp X$ пересекающихся с точкой $x_0 \in X$ является ℓ_2-гильбертовым пространством.

Пусть X топологическое пространство. Гиперпространство $\exp X$ пространства состоит из непустых замкнутых компактных подмножеств пространства X с топологией Выеториса, базу которую составляют множества видахъ [1]:

$< V_1, V_2, ..., V_n >= \{A \in \exp X : A \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$ и $A \bigcap V_i \neq \emptyset$ для каждого i $\}$;

где $\exp X = \{A \subseteq X : \bar{A} = A, A \neq \emptyset\}$.

Если d есть метрика в пространстве X, то на гиперпространств $\exp X$ с Выеторисовской топологией вводится метрика Хаусдорфа следующем образом $d_A(A, C) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon(C)$ и $C \subset B_\varepsilon(A)\}$ континиум это по определению связный компакт.

Определение [2]. Пространство X называется континиум-связным, если каждая разных пара точек пространства X содержится подконтиниуме в X. Пространство называется локально связным континиумом, если существует база континиумом-связным подмножеств.

Континиум X называется континиумом Пеано, если X локально связно.

В работе [3] пространство $\exp X \in ANR$ (AR), если X локально континиум-связно (связно и локально континиум-связно).

Если X локально континиумсвязно то метрика d на пространстве X удовлетворяет следующему свойству:

(*) для каждых точек $x, y \in X$, если $d(x,y) < \varepsilon$ тогда такой существует подконтиниум K, что $diamK < \varepsilon$ и $\{x, y\} \subset K$.

Рассмотрим метрику $d(x,y) = \inf\{diam_{d_0}(K) : K \subset X$ есть подконтиниум содержашие точки x и $y\}$, где d_0 некоторая метрика на пространстве X. Заметим, что все локально континиумсвязные пространства удовлетворяет условию (*).

Пусть X локально компактно и локально связно. Пусть d некоторая метрика на X. Мы пологаем, что замкнутое подмножество $A \subset X$ компактно, тогда и только тогда, когда $diamX < \infty$.

Напомним, что топологическое пространство Y называется абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе K (записываетсяY $\in A(N)R(K)$), если $y \in K$ и для всякого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество $h(y)$ пространства X из класса K, множество $h(y)$ является ретрактом (окрестностным) пространства X.

Пусть X топологическое пространство. Множество $A \subset X$ называется гомотопически плотным в X, если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такая, что $h(x,0) = id_X$ и $h(X \times [0,1]) \subset A$.

A множество $A \subset X$ гомотопически пренебрежимо в X, если $X \backslash A$ гомотопически плотно в X.

Для нормальных функтор $F : Comp \to Comp$, имеющих бесконечные степени для любого компакта X и его подмножества A отличного от самого X имеет место следующая 2 равенства:

$$F(X \backslash A) = F(X) \backslash S_F(A) \tag{1}$$

$$F(X) \backslash F(A) = S_F(X \backslash A) \tag{2}$$

в частности для функтора $\exp X$

$\exp(X \backslash A) = \exp(X) \backslash S_{\exp}(A)$ (1‘)

$\exp X \backslash \exp A = S_{\exp}(X \backslash A)$ (2‘)

Предложение 1. Для любого компакта X и любого его не пустого подмножества A отличного от самогоа компакта X подпространство $S_{\exp}(A)$ всюду плотно в $\exp X$.

Предложение 3. Пусть пеановский континиум, тогда подпространство $\exp_{\nabla\omega}(X)$ гомотопически плотно в $\exp X$.

Следствие 3. Для любого пеановского континиума X и для любого $n \in N$ подпространства

а) $\exp_n X$ есть $Z-$множество в $\exp X$;

б) $\exp_\omega X$ есть $\sigma - Z-$множество в $\exp X$.

Теорема 1. Для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ пеановского компакта отличного самого X подпространство $S_{\exp}(A)$ гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2.

Литература

1. **Curtis D. W.** *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets* Top. Appl., 1986. V.22. №1. p.p. 97-107.

2. **Banakh T., Radul T., Zarichny M.** *Absorbing sets in infinite-dimensional Manifolds* Math Studies Monogh. Ser. V.1. VNTL Publishers, 1996.

3. **Curtis D.W.** *Boundary sets of the Hilbert cube* Top. Appl., 1986. V.23. №2. pp. 163-172.

УДК 515.12

Существование седловой поверхности с заданной функцией угла между асимптотическими направлениями в галилеевом пространстве.

Сафаров Т. Н.

Термезский государственный университет; tolqin.1986@mail.ru

В галилеевом пространстве R_3^1 -поверхности с отрицательной кривизной разделяются на два класса -седловые и циклические. Циклическими называются поверхности один из асимптотических направлений всегда принадлежит особой плоскости галилеева пространства [1].

Седловы считаются поверхности асимптотические направления не совпадает с особой плоскостью.

Пусть седловая поверхность F -задана векторным уравнением

$$\overline{r}(u,v) = u\overline{i} + v\overline{j} + z(u,v)\overline{k}$$

в галилеевом пространстве.

Тогда асимптотические направления поверхности F определяются по уравнением

$$\frac{dv}{du} = \frac{-Z_{uv} \pm \sqrt{Z_{uu}Z_{vv} - Z_{uv}^2}}{Z_{vv}}$$

Галилеево угол θ между асимптотическими направлениями определяется по формуле

$$\theta = \frac{2\sqrt{Z_{uu}Z_{vv} - Z_{uv}^2}}{Z_{vv}} \cdot \sqrt{1 + Z_v^2}.$$

Теорема 1. Если задана положительная функция $\varphi(x,y) \in C^2$, то в галилеевом пространстве существуют седловая поверхность угол между асимптотическим направлениями равно заданной функции.

Литература

1. **А.Артыкбоев., Д.Д.Соколов.** *Геометрия в целом в пространстве-время . Т.: Фан. 1991. 179 с*,

2. **И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер , Б.Е Кантор** *Введение в дифференциальную геометрию "в целом"*, Москва.: Наука, 1973

УДК 139.57

ω^ω - база и пространства G -симметрической степени.

Турсуналиева Н. К.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;
tursunaliyevanargiza96@mail.ru

Определение [1, 2]. Топологическое пространство X называется имеющим ω^ω -базу, если для каждой точки $x \in X$, пространство X имеет базу окрестностей точки $(U_\alpha[x])_{\omega^\omega}$ такой, что $U_\beta[x] \subset U_\alpha[x]$ для всех $\alpha \leq \beta$

Понятие ω^ω -база играет важную роль в теории функциональных пространств, топологических векторных пространств и топологических групп.

На n -й степени X^n компакта X действует симметрическая группа S_n всех перестановок как группа перестановок координат. Множество орбит этого действия с фактор-топологией обозначим через SP^nX . Рассмотрим фактор отображение $\pi_n^S : X^n \to SP^nX$ ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$ орбиту этой точки. Таким образом, точки пространства SP^nX – это конечные подмножества (классы эквивалентности) произведения X^n . При этом, две точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n)$ считаются эквивалентными, если существует такая перестановка $\sigma \in S^n$, что $y_i = x_{\alpha(i)}$ для всех $i = 1, 2, ..., n$ [3].

Пространство SP^nX называется n -й симметрической степенью пространства X . Назовем отношения эквивалентности, посредством которых пространства SP^nX и $expX$ получаются из X^n , соответственно, отношениями симметрической и гиперсимметрической эквивалентности.

Понятие симметрической степени допускает обобщения. Пусть G - произвольная подгруппа группы S_n . Тогда она также действует на X^n как группа перестановок координат. Соответственно на X^n возникает отношение -симметрической эквивалентности. Фактор-пространство произведения X^n по отношению G -симметрической эквивалентности называется G -симметрической степенью пространства X и обозначается через $SP^n_G X$.

Теорема 1. Если X обладает ω^ω -база, то X^2 такие обладает ω^ω -база.

Следствие 1. Если X обладает ω^ω -база, то X^2 $n \in N$ такие обладает ω^ω - база.

Утверждение 1 [3]. Пусть X есть T_1 -пространство, n - натуральное число и G - произвольная подгруппа группы перестановок S_n. Тогда отображение $\pi^S_{n.G} : X^n \to SP^n_G X$ является открыто-замкнутым.

Теорема 2. Если X обладает ω^ω -база, то $SP^n_G X$ такие обладает ω^ω -база.

Следствие 2. Функтор SP^n_G сохраняет ω^ω -база.

Литература

1. **Шенг Р., Фенг З** *On ω_ω -bases and ω^ω -weak bases// Houston Journal of Mathematics.* 2020, p. 507-518.

2. **Banakh T.** *Topological spaces with an ω^ω -base. Dissertationes mathematicae,* Warszawa 2019.

3. **Федорчук В. В., Филиппов В. В.** *Общая топология. Основные конструкции. Москва,* Физматлит, 2006.

4. **Бешимов Р.Б., Жураев Р.М.** *Топологические свойства пространства G -симметрической степени // Геометрия и топология, Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и ее приложения.* Тематические обзоры, 2021, том 197, стр. 78–87.

УДК 515.12

Эквивалентность пространств идемпотентных вероятностных мер

Эшкобилова Д. Т.
Термезский государственный университет; dilrabotermez@mail.ru

Пусть (G, X, α) – группа топологических преобразований. Для пространства X и группы G положим $I(G, X) = \{\Phi \in \mathrm{Homeo}\,(I(X)) :$ существует $g \in G$ такой, что $\Phi|_X = g\}$. Ясно, что для пространства X множество $I(G, X)$ – группа относительно операции композиции гомеоморфизмов, а $I(\alpha_e) = I(\mathrm{id}_X) \equiv \mathrm{id}_{I(X)}$ – нейтральный элемент группы $I(G, X)$. Тогда для любого $g \in G$ имеем $I(g) \in I(G, X)$.

Теперь для α можно определить действие $I(\alpha)\colon\ I(G, X) \times I(X) \to I(X)$ по правилу

$$I(\alpha)(\Phi, \mu) = \Phi(\mu), \qquad (\Phi, \mu) \in I(G, X) \times I(X).$$

Теорема 1. Для любой группы топологических преобразований (G, X, α) множество $G_I(X)$ является нормальным делителем группы $I(G, X)$. При этом для g, g_1, $g_2 \in G$ имеем

$$I(\alpha_{g_1})I(\alpha_{g_2}) = I(\alpha_{g_1 g_2}) \text{ и } I(\alpha_g)^{-1} = I(\alpha_{g^{-1}}).$$

Следствие 1. Для любой группы топологических преобразований (G, X, α) группа G является нормальным делителем группы $I(G, X)$.

Теорема 2. Если множество $A \subset X$ является G-инвариантным, то множество $I(A)$ является $I(G, X)$-инвариантным.

Лемма 1. Для каждых $\mu \in I(X)$ и $\Phi \in I(G, X)$ имеет место $\mathrm{supp}\ \Phi(\mu) = \{g(x) : x \in \mathrm{supp}\ \mu\}$, где g – элемент группы G такой, что $\Phi|_X = g$.

G-инвариантность множества $A \subset X$ в теореме 2 существенна.

Пример 1. Рассмотрим компакт $X = [0, 1]$, его подмножество $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ и гомеоморфизм $h\colon X \to X$, заданное равенством $h(x) = 1 - x$. Тогда $h([\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]) = [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$, следовательно, $h|_A$ не является гомеоморфизмом подпространства $A \subset X$ на себя.

Следующие важные утверждения легко извлекаются из леммы 1.

Следствие 2. Пусть $\Phi \in I(G, X)$. Тогда для каждой меры $\mu \in I(X)$, допускающей разложение $\mu = \oplus\lambda(x) \odot \delta_x$, мера $\Phi(\mu)$ допускает разложение следующего вида

$$\Phi(\mu) = \underset{x\in\operatorname{supp}\,\mu}{\oplus} \gamma(\lambda(x)) \odot \delta_{g(x)},$$

где g – элемент группы G такой, что $\Phi|_X = g$, а $\gamma\colon [-\infty, 0] \to [-\infty, 0]$ – некоторая полунепрерывная сверху функция.

Следствие 3. Для каждых $\mu \in I(X)$ и $g \in G$ имеет место $\operatorname{supp} I(g)(\mu) = \{g(x) : x \in \operatorname{supp}\,\mu\}$.

Отметим, что для транзитивного действия α действие $I(\alpha)$ группы $I(G, X)$ транзитивно. Однако, это утверждение не верно для сужения $I(\alpha)|_{G_I(X)}$ действия $I(\alpha)$ на нормальный делитель $G_I(X)$.

Пример 2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ (все эти три точки – различные). Пусть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

– группа перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. Действие $\alpha\colon G\times X \to X$ группы G на пространстве X определим по правилу $\alpha(g, x_i) = x_{g(i)}$. Тогда α – транзитивное действие. При этом $\alpha_g(x_i) = x_{g(i)}$. Ясно, что $I(\alpha_g)(0 \odot \delta_{x_1} \oplus 0 \odot \delta_{x_2} \oplus 0 \oplus \delta_{x_3}) = 0 \odot \delta_{x_1} \oplus 0 \odot \delta_{x_2} \oplus 0 \oplus \delta_{x_3}$ для каждого $g \in G$. Таким образом, для никакой идемпотентной вероятностной меры ν не существует элемент $I(\alpha_g)$ нормального делителя $G_I(X)$ группы $I(G, X)$, для которого было бы $I(\alpha_g)(\mu) = \nu$, здесь $\mu = 0 \odot \delta_{x_1} \oplus 0 \odot \delta_{x_2} \oplus 0 \oplus \delta_{x_3}$. Следовательно, $I(\alpha)|_{G_I(X)}$ не является транзитивным.

Теорема 3. *Если $h\colon X \to Y$ – эквивариантное отображение одного G-пространства в другое, то $I(h)\colon I(X) \to I(Y)$ также – эквивариантное отображение $I(G, \cdot)$-пространств.*

Следствие 4. *Если $h\colon X \to Y$ – эквивалентность G-пространств X и Y, то $I(h)\colon I(X) \to I(Y)$ – эквивалентность $I(G, \cdot)$-пространств $I(X)$ и $I(Y)$.*

Литература

1. **Madirimov M., Zaitov A.A.** *Equivariant maps of probability measures space (Russian). Bulletin of Institute of Mathematics*, 2021, Vol. 4, №3, 66-74.

2. **Козлов К.Л., Чатырко В.А.** *Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи*, Матем. сб., 2010, том 201, номер 1, 103-128. – Ташкент: «Фан», 1987. – 144 с.

3. **Zarichnyi M.M.** *Spaces and maps of idempotent measures*, Izv. Math., 74:3(2010), 481–499.

4. **Borubaev A.A., Eshkobilova Д.Т.** *The functor of idempotent probability measures and maps with uniformity properties of uniform spaces*, Eurasian Math. J., 2021, V. 12, № 3, 29-41.

5. **Эшкобилова Д.Т.** *Об одной группы топологических преобразований пространства идемпотентных вероятностных мер*, Бюллетень института математики (принято к печати), 2022.

5 – ШЎЪБА. СУНЪИЙ ИНТЕЛЛЕКТ ВА НЕЙРОТЎРЛИ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

UDK: 004.9:159

SHAXS HARAKATLARINI TANIB OLISHDA ZONDLASHNING AFZALLIKLARI VA KAMCHILIKLARI

Axatov A. R.[1], Ximmatov I. Q.[2]
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti; [1]akmalar@mail.ru, [2]ximmatov010889@gmail.com

Zondlashning afzalliklari sifatida biz quyidagilarni keltiramiz:

- Inson va texnikaning o'zaro aloqasi.Robotlar juda aniq va tez insonlarga yordam berishar edi agar ular 3D zondlashuvini, inson harakatlarini va hissiyotlarini tushunishganida. masalan, robotlar insonlarni 3D zondlashuviga qarab yiqilayotgan (qulayotgan) odamni tez aniqlab qulashga qarshi amallarni bajargan bo'lar edi[1]. Robotlar insonlarning hayotida faqatgina yordamchigina bo'lib qolmay balki kompyuterlarni boshqarishda va ular bilan ishlashda eng samaralidir. Bundan tashqari odamlar o'zlarining zondlashuvini va harakatlanishlarini ishlatib Microsoft Kinect sensorlari orqali bir qancha o'yinlar o'ynashlari mumkin[2].

- Avtonom boshqaruv. Avtonom boshqariladigan avtomobillar piyodalar yo'lagidan o'tishda har xil ko'ngilsiz voqealarni oldini olishi uchun piyodalarning harakatlarini ya'ni zondlashuvini va ular qilayotgan harakatiga qarab nima qilmoqchi ekanligini tushunishi kerak.

- Videokuzatuvlar. Hozirgi vaqtda videokuzatuvlar insonlar havfsizligi uchun juda katta ro'l o'ynamoqda[3]. Bunda inson zondlashuvini (3D harakatlar) ni aniqlab videokuzatuv orqali kerakli bo'lgan insonlarni tez va oson topish mumkin bo'ladi.

- Robototexnika. Robototexnika rivojlanishning eng tez rivojlanayotgan sohalaridan biri bo'ldi. Robotni protsedurani bajarish uchun dasturlash zerikarli va ko'p vaqt talab qiladigan bo'lsa-da, chuqur o'rganish yondashuvlari yordamga kelishi mumkin. Muayyan vazifani bajarish uchun zarur bo'lgan aniqlik darajasiga erishish uchun mustahkamlovchi o'rganish kabi usullar simulyatsiya qilingan muhitdan foydalanadi va robotni o'rgatishda muvaffaqiyatli ishlatilishi mumkin.

- Biomexanika va tibbiyot. Harakatlar va zondlashuvlar inson sog'lig'ining qay darajada ekanligini yaqqol ko'rsatib berishi mumkin. 3D Harakatlarining davomiyligi bilan insonlarning sog'lig'ini kuzatib borish va uning axvoli haqida ma'lumotlardan ketma-ket xabardor bo'lib turish mumkin[4]. 3D pozalar orqali insonlarni to'g'ri harakatlantirish va bu orqali turli xil jaroxatlar (travma) lardan qochish mumkin. Bundan tashqari shifokorlar insonlarning zondlashuvini aniqlash orqali masofadan turib bemorlarni masofaviy diagnostika va reabilitatsiya qila olish imkoniga ega bo'ladilar.

- Sport sohasida. Bugungi kunda sport sohasida deyarli har bir ma'lumotlar tahliliga tayanadi. Shaxs harakatlarini aniqlash aniqlash sportchilarga texnikasini yaxshilashga va yaxshi natijalarga erishishga yordam beradi. Bundan tashqari, raqibning kuchli va zaif tomonlarini tahlil qilish va o'rganish uchun foydalanish mumkin, bu esa professional sportchilar va ularning murabbiylari uchun bebahodir.Insonlarning zondlashuvini aniqlash orqali video yozuvlar va videokuzatuvlarga qarab sport sohasida samaradorliklarni oshirish mumkin. Bunday samaradorliklar sportsmenlarning sog'liqlari haqida va ularning yo'nalishiga qarab bajarishi kerak bo'lgan mashqlarini yanada aniq qilib ko'rsatib bergan bo'lar edi. Va shu bilan bir qatorda insonlarga bir qancha sport turlarini o'rgatar edi. Masalan, suzish, futbol,kurash va h.k.

- Psixologiya. Insonlar harakatini zondlashuvini aniqlash bilan birgalikda biz insonlarning psixologik holatini hamda hattoki hssiyotlarini ham aniqlashimiz mumkin.

Zondlashning kamchiliklari bu- so'nggi paytlarda shaxs harakatlarini tanib olishda zondlash keng qo'llanilishi tufayli tobora ommalashib borayotgan tadqiqot mavzusiga aylandi[5]. Biroq bunda ham bir qancha o'ziga xos muammolar albatta topiladi. Shaxs harakatidagi zondlashda shaxsning xarakatigina emas balki uning turli xil rang barang kiyimlari, shaxs ishtirok etayotgan murakkab fon, tanadagi ko'zga korinmas o'zgarishlar va boshqalarni o'z ichiga oladi. Umuman olganda, har xil fikrlarga asoslanib, 3D pozasini baholash uchun har xil turdagi kirish ma'lumotlari qo'llaniladi va shuning uchun tegishli vazifalar ham farqlanadi. Tasvirlarni ajratish uchun soyalar va ma'lum o'lchamdagi ob'ektlar kabi vizual belgilardan foydalanish mumkin. Biroq, bunday ma'lumotni bevosita tasvirlardan olish juda qiyin [6].

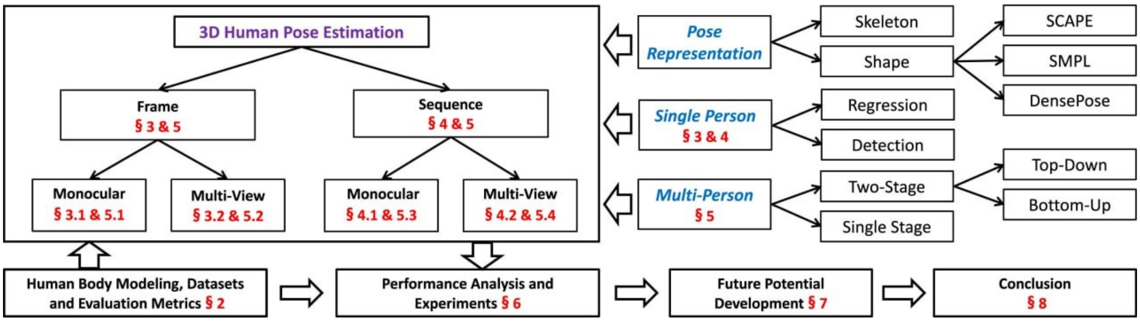


Рис. 4: Shaxsni 3D pozasini baholash strukturasi

Yuqoridagi rasmdan ko'rinib turibdiki Shaxsni 3D pzasini baholash 2 turga va 3 bosqichli jarayonga asoslanadi.

Xulosa. Inson pozasini shakllantirib olishda kameralardan olinayotgan tasvirlarni tezkor tahlil qilish va qayta ishlash jarayonnida shaxs harakatlanayotgan bo'lsa ham uni bo'g'imlarini ajratib olgan holda skletini shakllantirish masalasi muhim masala sifatida yechimini izlamoqda ushbu masalani hal qilishda biz Time-Off-Flight kameralari yoki sensorli va harakatni sezuvchi kameralardan foydalanamiz. Ushbu olingan tasvirlarni neyron tarmoqlari orqali chuqur tahlil qilish algoritmlari asosida tezkor qayta ishlash imkoniga ega bo'lamiz. Bu esa bizga shaxsni xulq atvorinni shakllantirish va uning psixologik xarakterini ifodalash algoritmlarini va neyron tarmoqlarini qo'llagan holda psixologik jihatdan identifikatsiya qilish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Nilesh Barla.** *Guide to Human Pose Estimation.//* handbook.: July.2022. P. 32-33.
2. **Kunj Shah.** *Human Pose Estimation using OpenCV in Deep.//* handbook.: Jul 9, 2020.
3. **Alejandro Newell, Kaiyu Yang, and Jia Deng.** *Stacked Hourglass Networks for Human Pose Estimation.//*26 Jul 2016 P. 3-4.
4. **Seung-Taek Kim a, Hyo Jong Lee.** *International Journal of Applied Mathematics Electronics and Computers.*
5. **Jinbao Wang, Shujie Tan, Xiantong Zhen, Ling Shao.** *Computer Vision and Image Understanding.//* September 2021, P. 1.2.
6. **Jinbao Wang, Shujie Tan, Xiantong Zhen, Feng Zheng, Zhenyu He, Ling Shao.** *"Deep 3D human pose estimation: A review."* Journal of "Computer Vision and Image Understanding" Volume 210, September 2021, 103225.

UDK 519.68:007.5

SUN'IY INTELLEKTDAN TA'LIM TIZIMIDA FOYDALISH ISTIQBOLLARI.

Berdiyeva O. B.[1], Qarshiyev J. M.[2].
[1,2] Surxondaryo viloyati pedagoglarni yangi metodikalarga o'rgatish milliy markazi;
oygulberdiyeva@inbox.uz, j.m.q@gmail.com

Jahon iqtisodiyoti global pandemiya sharoitida tarmoqlarning o'zgarishi, bu jarayonning raqamlashuvi, mobillashuvi, barcha sohalarga sun'iy intelektning joriy etilishi bilan bog'liq muhim davrni boshdan kechirmoqda.

Shu kabi sohalardan biri bu ta'lim tizimidir, ko'pchilik sun'iy intellektning ta'limda qo'llanilishini "robot o'qituvchilar"sifatida tushunishadi, bu haqiqatdan biroz farq qiladi. Sun'iy intellektni shaxsiylashtirilgan ta'lim tizimlarida, ma'lumotlarni izlash, chat-botlar, bolalar uchun maxsus ta'lim tizimlarida, inklyuziv ta'lim tizimlarida, o'quv jarayonining nazorat tizimlarida, o'quvchilar bilimini baholash tizimlarida uchratishimiz mumkin. Bunday tizimlaridan foydalanib, nafaqat o'quvchilarning bilimlarini oshirish balki, o'qituvchilarning yukini kamaytirishi ham mumkin.

Sun'iy intellekt darslari Koreya maktablarida 2021 yil ikkinchi semestridan boshlab joriy etiladi. Kelgusi yili mavzular maktab o'quv dasturiga kiritilgach, o'rta maktabning 2 va 3-sinflari o'quvchilari sun'iy intellekt kursiga kirish yoki sun'iy intellekt matematikasi saboqlarini olishlari mumkin [1-2].

Xitoy va Amerika Qo'shma Shtatlari sun'iy intellekt sohasidagi ilmiy tadqiqot va ta'lim sohalarida yetakchilik qilmoqda. Bu davlatlarda dunyoning mashhur oliy ta'lim va ilmiy tadqiqot dargohlari joylashishi bilan bir qatorda davlatlar innovatsion faoliyatni qo'llab-quvvatlovchi mexanizmlarni ham to'liq tartibga solgan va muassalarga katta hajmdagi moliyaviy ko'mak ko'rsatib kelmoqda. Natijada Xitoy va AQSH dunyo mamlakatlaridan ko'plab bilimli mutaxassislarni o'ziga keng jalb etmoqda.

Mamlakatimizda ilm fanni rivojlanitirish maqsadida juda katta qadamlar tashlanib, har bir sohada raqamli texnologiyalardan foydalanish orqali ijtimoiy iqtisodiy sohalarda katta natijalarga erishish mumkinligini hayotning o'zi ko'rsatib turibdi.

Shu ustuvor vazifalarning yana bir tasdig'i sifatida, O'zbekiston Respublikasini 2019-2021 yillarda innovatsion rivojlantirish strategiyasida keltirilgan vazifalardan kelib chiqqan holda 2021-2022 yillarda O'zbekistonda sun'iy intellektni rivojlantirish strategiyasiga oid prezident farmoni loyihasi muhokamaga qo'yildi.

Farmonning maqsadi - sun'iy intellekt sohasida milliy ilmiy tadqiqot va rivojlantirish faoliyatlarini tizimli tarzda yo'lga qo'yish hamda ta'limni samarali isloh etishdan iborat [3].

Strategiyaning asosiy vazifasi - 2021 - 2022 yillarda sun'iy intellektni rivojlantirish strategiyasida belgilangan maqsadni amalga oshirishda inson resurslarini ratsional safarbar etish va raqamli mahsulotlarni yaratish hamda qo'llanilishini rag'batlantirishdan iboratdir.

"Raqamli O'zbekiston - 2030"Strategiyasiga muvofiq hamda sun'iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish va ularni mamlakatimizda keng qo'llash, raqamli ma'lumotlardan foydala- nish imkoniyatini va ularning yuqori sifatini ta'minlash, ushbu sohada malakali kadrlar tayyor- lash uchun qulay shart-sharoitlar yaratish maqsadida "Sun'iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to'g'risida"gi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining qarori qabul qilindi. Bu qarorda mamlakatimizdagi iqtisodiyot tarmoqlari va ijtimoiy sohada, davlat boshqaruvi tizimida sun'iy intellekt texnologiyalarini ishlab chiqish va ulardan foydalanishda yagona talablar, javobgarlik, xavfsizlik va shaffoflikni belgilovchi normativ-huquqiy bazani ishlab chiqish maqsad qilib olingan.

O'zbekiston Respublikasi ta'lim tizimiga ham dastlabki sun'iy intellekt tizimlari "Aqlli maktab"dasturi orqali kirib kelganligi barchamiz uchun quvonarli holatdir.

Ta'kidlash lozimki sun'iy intellekt tizimlari asosida ishlab chiqilgan "Aqlli maktab"dasturining ta'lim tizimiga joriy etilishi bir qancha afzalliklarni beradi:

Bilim sifatini avtomatik tarzda baholash. Sun'iy intellekt bu borada bir qancha usullarni taklif eta oladi. Garchi insonlar tomonidan baholashning o'rnini to'liq bosa olmasada, sifat jihatidan unga yaqinroq bo'la oladi.

Sun'iy intellekt tizimlariga asoslangan "Aqlli maktab"dasturiy ta'minoti ham maktablarda o'qituvchilarning vaqtlarini tejash; qisqa fursatda o'quvchilar, fanlar, mavzular, sinflar kesimida ta'limdagi bo'shliqlarni aniqlash; o'quvchilarning aqliy va jismoniy rivojlanishlarini tahlil qilib borish va boshqa bir qancha imkoniyatlarni yaratib maktab boshqaruvida yengilliklar bermoqda.

O'quvchilarning xulq-atvorini kuzatib borish. Sun'iy intellekt tizimlari turli tahlillar o'tkazib o'quvchilarning ma'naviy, ruhiy, axloqiy jarayonlarini ham bilimlarni o'zlashtirishi bilan bir vaqtda kuzatib borish imkonini beradi. Buning natijasida dastur o'quvchilar nafaqat aqlan va jismonan, balki ma'naviy jihatdan ham rivojlanib borishiga o'z hissasini qo'shadi.

"Aqlli maktab"dasturi aynan o'quvchilarning o'zlashtirishi jarayonida hosil bo'lgan bo'shliqlarni, o'zlashtirishida mavzular kesimida uzilishlarni, o'zlashtirish darajasi past o'quvchilar va fanlardan qobiliyatli o'quvchilarni grafik va boshqa ko'rinishlarda chiqarib berishi orqali aynan qaysi o'quvchi bilan va qaysi mavzular bo'yicha individual tarzda shug'ullanish lozimligini aniqlab beradi.

Sun'iy intellekt tizimlarining maktablarga joriy etilishi o'qituvchilarning ko'plab ishlarini optimallashtiradi va avtomatlashtiradi. Bu esa o'qituvchilarga o'zining o'quvchilari bilan ishlash va ta'lim sifatini oshirish uchun ko'proq vaqt ajratishlariga olib keladi.

Sun'iy intellekt hozirgi kunda quyidagi jarayonlar ko'rinishida ta'limni o'zgartirishni davom ettirmoqda:

-o'quvchilarga ta'lim olish jarayonida sun'iy intellekt bilan individual va samarali ta'lim berili- shi mumkin;

-test va baholash tizimlari orqali talabalar va o'quvchilar uchun sun'iy intellekt yordamida yangi o'lchovlar qo'lga kiritishlari mumkin;

-tabaqalashtirilgan va individual ta'limdan yana-da samarali va keng foydalanish mumkin;

-ta'limda juda muhim o'rin tutadigan teskari aloqa sun'iy intellektga ega talabalar ehtiyoj- lariga mos ravishda avtomatlashtirilishi mumkin.

Sun'iy intellekt texnologiyalari orqali har qanday sohani o'zgartirish imkoniyati mavjud, ammo bu imkoniyatlar cheksiz emas. Sun'iy intellektning asosiy kamchiligi shundaki, ma'lumotlardagi har qanday noaniqliklar natijaga ta'sir ko'rsatadi. Ya'ni kiritilayotgan ma'lumotlar aniq bo'lishi, sun'iy intellekt tizimlari xatosiz ishlashini ta'minlaydi. Ma'lum bir soha uchun yaratilgan sun'iy intellekt tizimi boshqa soha uchun natija bermaydi. Bu degani qishloq xo'jaligi uchun mo'ljallangan tizimni tibbiyot sohasida qo'llab bo'lmaydi. Yoki firibgarlikni aniqlash uchun tuzilgan tizim mashinani boshqarolmaydi yoxud yuridik yordam ko'rsatolmaydi. Boshqacha qilib aytganda, ushbu tizimlar juda tor ixtisoslashuvi bilan ajralib turadi. Tizimlar bitta aniq vazifani bajarish uchun mo'ljallangan va ular inson kabi ko'p vazifalikdan yiroqdir. Bundan tashqari, o'zini o'zi o'rganish tizimlari mustaqil emas.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **N.A.Ignatev** *Ma'lumotlarni intellektual tahlil qilish.* - 24 -36 b.
2. **N.O.Raxmiov** *Intellektual o'qitish tizimlarida bilimlarni ifodalash modellari.* TATU xabarlari. - Toshkent. - 2010. No4. - СЃ.64-68.
3. **M.M.Kadirov** *"Axborot texnologiyalari"fanidan o'quv qo'llanma. 1-qism.* Sano-standart"nashriyoti. - 2018. 192-237.b

UDC 004.891.3

Breast density classification using Baddeley's K-inhom method for analyzing spatial distribution data

Fazilov Sh. Kh.[1], Abdieva Kh. S.[2], Sobirova G. D.[3]
[1] Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence; sh.fazilov@mail.ru
[2] Department of Software Engineering, Samarkand State University,; orif.habiba1994@gmail.com
[3] Department of Computer science and technologies, Samarkand State University, ; sobir1970@mail.com

Baddeley's K-inhom method is employed to extract spatial information based on feature points. The K-inhom method is a variant of Ripley's K function [1-3], and both are statistical analysis schemes used for studying qualitative or quantitative characteristics of spatialized data[4-5]. Generally, the K-inhom function for onedimensional data can be described as follows:

$$K_{\text{inhom}}(r) = \frac{1}{D}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\frac{1\left\{\|x_i - x_j\| \leq r\right\}}{\overline{\lambda}(x_i)\overline{\lambda}(x_j)}c(x_i, x_j; r) \tag{1}$$

$$D = \frac{1}{W}\sum_{i}\frac{1}{\overline{\lambda}(x_i)} \tag{2}$$

$$c(x_i, x_j; r) = \frac{\|x_i > r\|}{\sum\limits_{j}\frac{\|x_i > r\|}{\overline{\lambda}(x_i)}} \tag{3}$$

where, $1\{\|x_i - x_j\| \leq r\}$ represents an indicator which is worth 1 if the distance between point x_i and x_j is less than or equal to r or 0 otherwise; $c(x_i, x_j; r)$ relates to the correction of edge effects and W to the region of interest. A function $c(x_i, x_j; r)$ is implemented as for edge corrections. $\overline{\lambda}(x_i)$ indicates an intensity function around point x_i, which is defined by the number of neighbouring points (x_j) expected in a small area with x_i in the centre, but $\overline{\lambda}(x_i)$ is not known in practice. Instead, "$\overline{\lambda}(x_i)$" is used in Eq. [1-3] as the estimate of $\overline{\lambda}(x_i)$, which is implemented by a non-parametric method. K-inhom function, including the edge correction function c and the parameter of λ, has been implemented in the R package, "spatstat", as a standard function.

References

1. **Baddeley, A. J., Moller, J., & Waagepetersen, R.** *Non- and semi-parametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns.* Statistica Neerlandica, 2000. 54(3), pp. 329-350. https://doi.org/10.1111/1467-9574.00144.
2. **Baddeley, A., Turner, R.** *Practical Maximum Pseudolikelihood for Spatial Point Patterns.* Australian & New Zealand Journal of Statistics, 2000. 42(3), 283-322. https://doi.org/10.1111/1467-842X.00128
3. **Baddeley A., Adrian J., Edge Rubak, & R Turner.** (2015). *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R. Chapman & Hall/CRC Interdisciplinary Statistics.*
4. **O.R.Yusupov, Kh.S.Abdiyeva, A.Primov.** *"Preprocessing and segmentation of digital mammogram images for early detection of breast cancer".* IJARSET, vol.8, issue 9, 2021.
5. **Yusupov, O.R, Abdiyeva Kh.S.** *"An Overview of Medical Image Segmentation Algorithms".* European Multidisciplinary Journal of Modern Science. 2022.

UDC 004.891.3

Multifractal analysis for the detection of microcalcifications in mammograms

Fazilov Sh. Kh.[1], Abdieva Kh. S.[2], Sobirova G. D.[3]
[1]Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence; sh.fazilov@mail.ru
[2]Department of Software Engineering, Samarkand State University; orif.habiba1994@gmail.com
[3] Department of Computer science and technologies, Samarkand State University; sobir1970@mail.com

Image texture properties that are effective in classification tasks can be described using multifractal analysis, which depends on the choice of local measures[1-5]. Let $\mu_w(p)$ denote a multifractal measure function, where p is the central pixel in a square window of size $w \times w$. Then, a local singularity coefficient, Holder exponent or α-value, can be calculated to reveal variation of the selected $\mu_w(p)$ function within the neighbourhoods of the pixel p .

$$\mu_w(p) = Cw^{\alpha_p}, \quad w = 2i+1,\, i = 0, 1, \ldots, d$$

$$\log(\mu_w(p)) = \alpha_p \log(w) + \log(C),$$

Where C is an arbitrary constant and d is the total number of windows used in the computation of α_p. The value of α_p can be estimated from the slope of a linear regression line in a log-log plot where $\log(\mu_w(p))$ is plotted against $\log(w)$. Commonly used multifractal measures for calculating α are outlined below:

$$\text{Maximum:}\mu_w(p) = \max_{(k,l)\in\Omega} g(k,l)$$

$$\mu_w(p) = 1 - \min_{(k,l)\in\Omega} g(k,l)$$

$$\text{Summation: } \mu_w(p) = \sum_{(k,l)\in\Omega} g(k,l)$$

$$\text{Summation: } \mu_w(p) = \#\left\{(k,l)|g(p) \cong g(k,l),\, (k,l) \in \Omega\right\}$$

Where $g(k,l)$ represents the intensity value of a pixel at position (k,l); Ω denotes the set of all neighbourhood pixels of p in the window; # is the number of pixels in a set. Pixel intensity values are normalized into the range of [0, 1] when considering Maximum and Inverse-Minimum measures[6]. Such normalization brings better image enhancing results when computing the Holder exponent due to the amplifying effect of the logarithmic function.

References

1. **Carneiro, G., Nascimento, J., Bradley, A. P.** *Unregistered multiview mammogram analysis with pre-trained deep learning models, in: Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention.* Intervention - MICCAI 2015, Springer, 2015, pp. 652-660

2. **O.R.Yusupov, Kh.S.Abdiyeva, A.Primov.** *"Preprocessing and segmentation of digital mammogram images for early detection of breast cancer".* IJARSET, vol.8, issue 9, 2021.

3. **Yusupov, O.R, Abdiyeva Kh.S.** *"An Overview of Medical Image Segmentation Algorithms".* European Multidisciplinary Journal of Modern Science. 2022.

4. **Fazilov, Sh.Kh; Yusupov, O.R; Abdiyeva, Kh.S.** *"Mammography Image Segmentation in Breast Cancer Identification using the Otsu Method".* Web of Scientist: International Scientific Research Journal, vol-3,issue-8, 196-205 pp.

5. **Abdiyeva Kh.S, Yusupov O.R.** *Prediction of breast cancer using random forest algorithm*, "Innovative ideas in the creation of information communication technologies and software" collection of lectures of the Republican scientific and technical conference, Volume I, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khorazmi, Samarkand branch,pp. 17-18.

6. **Oliver A., Freixenet J., Marti J., Perez E., Pont J., Erika R.E., Denton, Zwiggelaar R.,** *A review of automatic mass detection and segmentation in mammographic images.* , Med. Image Anal. 14 (2) (2010) 87-110.

UDC 004.8

Overview of Educational Data Mining

Samandarov E.P.
Institute of irrigation and agricultural mechanism engineers of Tashkent;
samandarerka87@gmail.com

Educational Data Mining is in general what you call Data Mining/Machine Learning, but, the datasets that the aforementioned techniques are applied on are purely вЂњeducationalвЂќ datasets. The context of вЂњeducationalвЂќ here is anything that a human might use to learn (any skill/knowledge) at any point of time in itвЂ™s life. This ranges from learning the alphabets all the way to rocket sciences. The main aim is to learn about how humans learns in a particular setting and what can be done to make this learning (learning can be of multiple types as well) more effective. The main focus of EDM is in the university/school setting where вЂњdataвЂќ pertaining to the learning mechanisms (and outcomes) of students is something that is primarily studied upon. The вЂњdataвЂќ here might be the content they are studying about, the methods that they use to study (includes teachers), the behavior that they display while learning, the results when they are tested on what they learned etc. The field usually intertwines with educational psychology and has actively supported fields like computational psychology and learning sciences with some of itвЂ™s nuanced findings. Basically, primary purpose(s) of Educational Data Mining can be described as:

- Learning how humans learn
- Predicting student learning outcomes/behaviour
- Improving existing learning models
- Learning about the difference of learning outcomes with age
- Studying effects of educational support

The advent of information technology in various fields has lead the large volumes of data storage in various formats like records, files, documents, images, sound, videos, scientific data and many new data formats. The data collected from different applications require proper method of extracting knowledge from large repositories for better decision making. Knowledge discovery in databases (KDD), often called data mining, aims at the discovery of useful information from large collections of data. The main functions of data mining are applying various methods and algorithms in order to discover and extract patterns of stored data. Data mining and knowledge discovery applications have got a rich focus due to its significance in decision making and it has become an essential component in various organizations. Data mining techniques have been introduced into new fields of Statistics, Databases, Machine Learning, Pattern Reorganization, Artificial Intelligence and Computation capabilities etc. There are increasing research interests in using data mining in education. This new emerging field, called Educational Data Mining, concerns with developing methods that discover knowledge from data originating from educational environments. Educational Data Mining uses many techniques such as Decision Trees, Neural Networks, NaГЇve Bayes, K- Nearest neighbor, and many others. Using these techniques many kinds of knowledge can be discovered such as association rules, classifications and clustering. The discovered knowledge can be used for prediction regarding enrolment of students in a particular course, alienation of traditional classroom teaching model, detection of unfair means used in online examination, detection of abnormal values in the result sheets of the students, prediction about students' performance and so on.

Data mining is the process to extract new aspects and patterns from a large data set using the methods at the crossing of machine learning, statistics, and database systems. It is also a field of knowledge discovery in databases (KDD), which is the area of discovering the distinct and potentially beneficial information from large amounts of data set. The data mining specializing in the educational domain is called as Educational Data Mining (EDM). EDM refers to the techniques, tools, and research designs utilized to obtain information from educational records, typically online logs, and examination results, and then analyses this information to formulate conclusions. EDM is theory-oriented and focuses on the connection to pedagogical theory. Presently, little empirical evidence exists to support a theoretical framework able to gain wide acceptance in the scientific community. Given that in the real world there is a great diversity of different learning contexts, they determine the analytical approaches utilized by EDM. Therefore, how EDM can be beneficial in real educational practices, as demonstrated in the research, could be crucial.

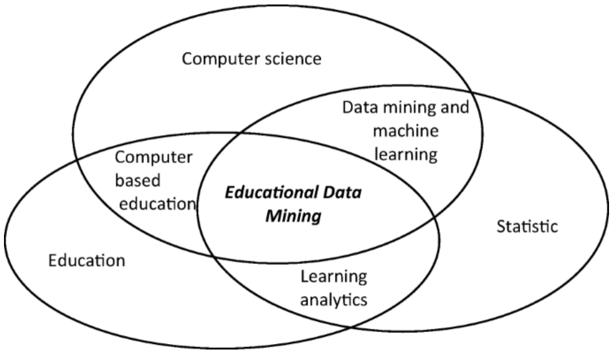


Рис. 5: Educational Data Mining.

These domain-specific challenges and opportunities suggest the need for a specialized community of researchers, working at the intersection of AI, data-mining and computing education research. The goal of Educational Data Mining for Computer Science Education (CSEDM) is to bring this community together to share insights for how to understand and support learning in the domain of CS utilizing CS educational data and AI. This field is nascent but growing, with researching in computing education increasingly using data analysis approaches, and researchers in the EDM community increasingly studying CS datasets. The objective of the CSEDM workshop is to facilitate a discussion among this research community, with a focus on how data mining can be uniquely applied in computing education research. Researchers, faculty and students are encouraged to share their AI- and data-driven approaches, methodologies and experiences where data is transforming the way students learn Computer Science (CS) skills.

References

1. **Baradwaj B. K., Pal S.** *Mining educational data to analyze students' performance.* РЎ.: //arxiv preprint arxiv:1201.3417. 2012.
2. **Romero C., Ventura S.** *Educational data mining: A survey from 1995 to 2005.* РЎ.: //Expert systems with applications. 2007. РЎ. 33. в–.1. РЎ. 135-146.
3. **Huebner R. A.** *A Survey of Educational Data-Mining Research.* РЎ.: //Research in higher education journal. 2013. Рў. 19.

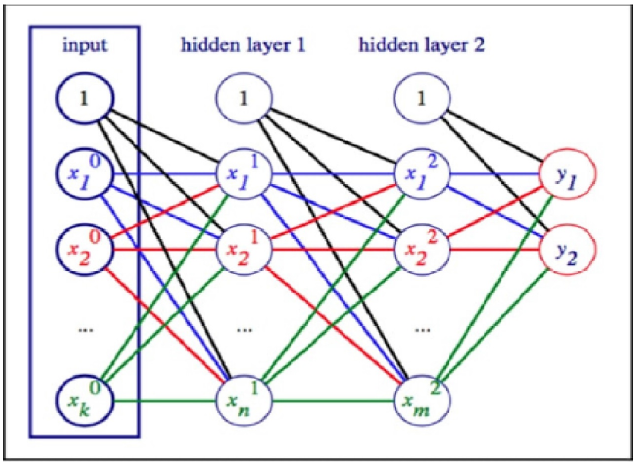
MSC 68T07

On Numerical Methods for Solving Ordinary Differential Equations by using Artificial Neural Networks.

Suvanov Sh. Sh. [1], Tilavov A. M, [2]
[1]Samarkand State University shakhzod_suvanov@samdu.uz
[2]Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy asliddintm@mail.ru

There are various numerical methods for solving both ordinary and partial and other types of differential equations. Depending on the problem, some of them can be implemented successfully, but unfortunately, others, for instance Euler method, do not provide necessary numerical solution for some equations. So it is important to use modern and universal methods for these kind of problems in order to get solution with high accuracy. Nowadays universal method for finding numerical solution to differential equations is called artificial neural networks which is part of machine learning techniques [1].

A Neural Network is consisted of layers and there are one or more neurons in every layer. A neuron is mathematical function that receives one or more input values and transforms these values into single numerical value by using special mathematical functions which are called activation functions. [2] The first layer is called input layer, the last one is output layer. Between them there can be one or layers depending on the problem that is being solved. These layers are called hidden layers.



Pic. 1. Multi-layer sequential network [2].

For this reason, this method is called artificial neural networks, because itвЂ™s illustration is similar to the picture of human brain. In some cases, an ordinary differential equation can be solved explicitly, but the solution may be less useful to get values in some points. So in such kind of situations, instead of solving ODE, its much more beneficial to use numerical methods, for example, ANN.

Consider the following initial value problem of ODE:

$$\frac{dy}{dx} = yx - y^2, \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

This is a Bernoulli equation that its solution is

$$y(x) = \frac{2e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot erfi\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) - \sqrt{2\pi} \cdot erfi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2e^{\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

where $erfi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{t^2} dt$.

As a result of this, it is much helpful to use numerical methods for equation (1), instead of calculating the values of (2).

In addition, well-known numerical methods are usually iterative. Before starting calculating, the step is fixed. After the solution is obtained, if we want to know the solution in between steps, then again the procedure is to be repeated from the initial stage [3]. Not only ANN may be one of the methods that this kind of iteratins can be avoided. Moreover by changing ANN structures high accuracy can be obtained [4].

References

1. **Starmer J.** *The StatQuest Illustrated Guide to Machine Learning!!!*
2. **Vasilev I.** *Python Deep Learning. Second edition.*
3. **Chakraverty S., Mall S.** *Artificial Neural Networks for Engineers and Scientists Solving Ordinary Differential Equations.* CRC Press. 2017.

4. **Suvanov Sh.** *A new technique of artificial neural network model for heart disease prediction.* Problems of Computational and Applied Mathematics. 2022, 2(39): 150-159.

УДК 004.93

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ КЛАССАМИ

Бабаджанов А.[1], Байжуманов А.[2], Сайманов И.[3]
[1,3]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
19_sim_92@mail.ru,islambeksaymanov@gmail.com
[2]Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан;
absattar52@mail.ru

Введения

В последние годы большое развитие получило решение прикладных задач классификации распознавания и прогнозирования. Во многих реальных случаях схема решения остается одинаковой, множество возможных решений разбивается на подмножества таким образом, что в одно подмножество попадают решения, близкие в некоторой метрике. В дальнейшем решения, попавшие в одно подмножество не различаются, а все объекты, соответствующие этим решениям зачисляются в один класс. Информация описываются прошлый опыт представляется в следующем виде: различные объекты некоторым образом описываются и их описания разделяются на конечное число непересекающихся классов. При возникновении нового объекта принимается решение о зачислении его в тот или другой класс. Предлагается выбрать такой обобщенный алгоритм, чтобы на нем достигалось экстремальное качество прогнозирования. Рассмотрим алгоритмические модели для решения классификационных задач. Можно выделить среди этих моделей наиболее часто встречающиеся при решение задач прикладного характера.

Модели, построенные по принципу разделения

Во многих задачах, где описания объектов задаются наборами значений числовых признаков, объекты, принадлежащие разным классам, могут быть разделены поверхностями достаточно простого вида. В качестве примера можно привести гиперплоскость вида:

$$\sum_{i=f}^{n} a_i x_i + a_{n+1} = 0$$

Модели, построенные по этому принципу, различаются, главным образом, заданием класса поверхностей, среди которых выбирается поверхность или набор поверхностей, разделяющий классифицируемые объекты разных классов.

Модели построенные на принципе потенциалов

Основой построения этих моделей является следующий принцип. Сила притяжения прямо пропорционально произведению масс и обратно пропорционально квадрату расстояния. Другими словами, при рассмотрении объектов, принадлежность которых одному из классов известна, можно различными способами задать массу этого множества, расстояние от множества до распознаваемого объекта и выбрать в качестве функции принадлежности объекта тому или иному классу величину, являющуюся функцией, монотонно возрастающей от массы и монотонно убывающей от расстояния.

Статистические модели. Эти модели формируются на основе аппарата математической статистики и используется для случаев, когда могут быть определены вероятностные характеристики классов. Алгоритмы, принадлежащие статистическим моделям, переводят обучающую информацию и описания объектов в числовую матрицу и по элементам этой матрицы формируются информационные векторы для классифицируемых объектов. Элементами этой числовой матрицы могут быть вероятности вхождения объектов по классам.

Заключение.

В данной работе предложено рассмотрение различных моделей распознавания образов. Исследовано рассмотрение моделей в виде двух операторов: распознающего оператора и решающего правила. Над распознающими операторами определены алгебраические операции и на основе применения этих операторов создано семейство распознающих алгоритмов. Для модели голосования построена верхняя оценка гарантирующая полноту расширения.

Литература

1. **Kabulov A., Saymanov I., Yarashov I., Muxammadiev F.** *Algorithmic method of security of the Internet of Things based on steganographic coding.* 2021 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), - 2021. -pp. 1-5.
2. **Kabulov A., Normatov I., Urunbaev E., Muhammadiev F.** *Invariant continuation of discrete multi-valued functions and their implementation.* 2021 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), - 2021. -pp. 1-6.

УДК 004.4:681.03

Матнларни сентиментал таҳлил қилиш учун машинани ўқитишга асосланган алгоритмлар

Кобилов С.С.[1], Раббимов И.М.[2], Каримов И.К.[3]
[1,2,3]Самарқанд давлат университети;
kobsam@yandex.ru, ilyos.rabbimov91@gmail.com, islom.k1995@gmail.com

Сўнгги ўн йилликларда электрон тижорат платформалари, ижтимоий тармоқ, блог каби онлайн фаолиятлар оммалашиши натижасида Интернетдан фойдаланиш кескин ошди. Структураланмаган онлайн матндан қийматли маълумот олиш матнли маълумотларни интеллектуал технологиялар ёрдамида сентиментал таҳлил қилиш, фикрларни таҳлил қилиш, ҳис-туйғулар ва позицияни таснифлаш иловалари билан амалга оширилади. Сентиментал таҳлилда фойдаланувчиларнинг Twitter, YouTube, Telegram ва Facebook каби ижтимоий тармоқплатформаларидан олинган ижобий ёки салбий фикри автоматик равишда аниқланади [1, 2]. Бу ишда биз ўзбек тилидаги матнларни сентиментал таҳлил қилиш учун матннинг статистик, сўз туркуми ва эможи асосидаги белгилар векторини шакллантириш ҳамда унга машинани ўқитиш алгоритмларини қўллаб интеллектуал таҳлилни амалга ошириш алгоритмини муҳокама қиламиз.

Ишимизда матнларни сентиментал таҳлил қилиш учун стандарт ёндашувга асосланган архитектура фойдаланилган. Унинг негизида фойдаланувчиларнинг шар?ларига дастлабки ишлов бериш, матндан информатив белгиларни ажратиш ва таснифлаш алгоритмларини қўллаш ётади. Жараён икки босқич: ўқитиш ва назорат босқичларида амалга оширилади. Ўқитиш босқичида сентиментал таҳлил қилиш моделини тайёрлаш учун YouTube-дан олинган ҳамда ижобий, салбий каби синфларга ажратилган ўзбек тилидаги фильм шарҳлари тўпламидан фойдаланилади. ҳар бир шарҳматнига дастлабки ишлов берилиб, белгилар вектори билан ифодаланилади. Матннинг белгилар вектори статистик белгиларга, сўз туркумига асосланган белгиларга ва эможи асосидаги белгиларга бўлинади. Назорат босқичида фильмларнинг янги шарҳларига дастлабки ишлов берилади ва ўқитиш босқичидаги каби белгилар вектори шакллантирилади. Ўқитилган сентиментал таҳлил қилиш модели сентиментал синфи номаълум бўлган фильм шарҳини ижобий ёки салбий деб таснифлаш учун ишлатилади. Ушбу баҳолашда биз иккита сентиментал синф турини кўриб чиқдик, яъни ижобий ва салбий. Шунинг учун таснифлаш модели иккилик. Архитектура умумлаштирилган, шу асосда уни кўп синфли сентиментал таҳлилда ва бошқа Интернет манбаларидаги матнларни сентиментал таҳлил қилишда фойдаланиш мумкин [3]. Дастлабки ишлов берилган ҳар бир фильм шарҳлари учун статистик, сўз туркумига ва эможига асосланган белгилар векторини ҳисоблаш жараёни ва натижаларини кўриб чиқамиз. қуйидаги белгилашларни киритамиз. Ω - лотин алифбоси ҳарфларидан иборат чекли белгилар тўплами, $\Omega = \{A, \ldots, Z,\ a, \ldots,\ z\}$; ψ - махсус белгилар тўплами, $\psi = \{(,), [,], \#, \beta, +, -, @, =, \ldots,\ \}$; N - рақамлар тўплами, $N = \{0, \ldots, 9\}$. ε - ҳеч қандай белгисиз бўш сатр ва унинг узунлиги нолга тенг; c_{sp} - пробел белгиси; Ω^A - лотин алифбоси бош ҳарфларидан иборат чекли белгилар тўплами, $\Omega^A = \{A, \ldots, Z\}$; Ω^a - лотин алифбоси кичик ҳарфларидан иборат чекли белгилар тўплами, $\Omega^a = \{a, \ldots, z\}$; $|w|$ - w белгилар кетма-кетлигидаги белгилар сони; $|w|_a$ - w белгилар кетма-кетлигида a белгининг учраш сони; $\Omega^{sp} = \Omega \bigcup \{c_{sp}\}$ - лотин алифбоси ва пробеллардан иборат тўплам; Ω^* - Ω алифбодан фойдаланиб тузиш мумкин бўлган барча сўзлар тўплами; ξ - тиниш белгилар тўплами, $\xi = \{., !, ?, , :, ;\}$; $S = \{S_1,\ S_2, \ldots,\ S_{15}\}$ - сўз туркумлари тўплами; S_1 - от сўз туркумига оид сўзлар тўплами; атоқли от, феъл, сифат, сон, олмош, равиш, ёрдамчи, тенг боғловчи, эргаштирувчи боғловчи, модал, ундов, тақлид, ёрдамчи сўзлар, ноаниқ(тушунарсиз, маъносиз) каби бошқа сўзлар тўпламини мос равишда $S_2, \ldots,\ S_{15}$ билан белгилаймиз. λ - эможилар тўплами; $\hbar$ - эможиларга мос сентиментал вазн қийматлари тўплами.

Матннинг статистик белгиларини ажратиш учун қуйидаги ҳисоблашлар бажарилади. D_i шарҳдаги бача белгилар сони $x_{i,1} = |D_i|$; D_i шарҳдаги бўшлиқ белгисидан бошқа барча белгилар $x_{i,2} = |D_i| - |D_i|_{c_{sp}}$; D_i шарҳдаги махсус белгилар $x_{i,3} = \sum_{j=1}^{|\Psi|} |D_i|_{\psi_j}$, бу ерда $\psi_j \in \Psi$, $j = \overline{1,\ |\Psi|}$, ψ_j - махсус белги; D_i шарҳдаги кичик ҳарфлар сони $x_{i,4} = \sum_{j=1}^{|\Omega^a|} |D_i|_{\Omega_j^a}$, бу ерда $\Omega_j^a \in \Omega^a$, $j = \overline{1,\ |\Omega^a|}$, Ω_j^a - лотин алифбосидаги кичик ҳарф; D_i шарҳдаги бош ҳарфлар сони $x_{i,5} = \sum_{j=1}^{|\Omega^A|} |D_i|_{\Omega_j^A}$, бу ерда $\Omega_j^A \in \Omega^A$, $j = \overline{1,\ |\Omega^A|}$, Ω_j^A - лотин алифбосидаги бош ҳарф; D_i шарҳдаги рақамлар сони $x_{i,6} = \sum_{j=1}^{|N|} |D_i|_{n_j}$, бу ерда $n_j \in N$, n_j - N тўпламдан олинган рақам; D_i шарҳдаги барча сўз шакллари сони $x_{i,7} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} |D_i|_{\Omega_j^*}$бу ерда $\Omega_j^* \in \Omega^*$, Ω^* - D_i шарҳдаги сўзлар тўплами; D_i шарҳдаги уникал сўзлар сони $x_{i,8} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_1\left(\Omega_j^*,\ D_i\right)$, бу ерда $\varphi_1(a,\ b) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |b|_a > 0 \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a сўз b матнда камида бир марта учраса 1 қиймат, акс ҳолда 0 қиймат қайтарувчи функция; D_i шарҳдаги барча уникал сўзлар узунликларининг ўрта арифметик қиймати $x_{i,9} = \frac{1}{|\Omega^*|} \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right)$, бу ерда $\varphi_2(a,\ b) = \begin{cases} |a|, \text{ агар } |b|_a > 0 \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a сўз b матнда камида бир марта учраса a сўзнинг ҳарфлар сонини, акс ҳолда 0 қиймат қайтарувчи функция; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг максимал қиймати $x_{i,10} = \max\left(\left\{x_j \middle| x_j = \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right),\ j = \overline{1,\ |\Omega^*|}\right\}\right)$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг минимал қиймати $x_{i,11} = \min\left(\left\{x_j \middle| x_j = \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right)\right\}\right)$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг ўрта арифметик қиймати $x_{i,12} = \frac{1}{|\Omega^*|} \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right) \cdot |D_i|_{\Omega_j^*}$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг ўрта квадратик четланиш қиймати $x_{i,13} = \sqrt{\frac{1}{|\Omega^*|} \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \left(\varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right) - \mu\right)^2}$, бу ерда $\mu = \frac{1}{|\Omega^*|} \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right) \cdot |D_i|_{\Omega_j^*}$ - D_i шарҳдаги сўзлар узунликларининг ўрта арифметиги; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг дисперсияси $x_{i,14} = \frac{1}{|\Omega^*|} \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \left(\varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right) - \mu\right)^2$, D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг куртоз коэффициенти $x_{i,15} = \frac{\sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \left(\varphi_2\left(\Omega_j^*, D_i\right) - \mu\right)^4}{|\Omega^*| \cdot x_{i13}^4}$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг асимметрия коэффициенти $x_{i,16} = \frac{\sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \left(\varphi_2\left(\Omega_j^*, D_i\right) - \mu\right)^3}{|\Omega^*| \cdot x_{i13}^3}$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг 25% процентиль қиймати $U = sort\left(\left\{x_j \middle| x_j = \varphi_2\left(\Omega_j^*,\ D_i\right),\ j = \overline{1,\ |\Omega^*|}\right\}\right)$,

$n = \left[\frac{25}{100} \times N\right]$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг 25% процентиль қиймати $x_{i,17} = U_{\left[\frac{25}{100}\cdot|U|\right]}$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг 50% процентиль қиймати $x_{i,18} = U_{\left[\frac{50}{100}\cdot|U|\right]}$; D_i шарҳдаги барча сўзлар узунлигининг 75% процентиль қиймати $x_{i,19} = U_{\left[\frac{75}{100}\cdot|U|\right]}$; D_i шарҳдаги тиниш белгилар сони $x_{i,21} = \sum_{j=1}^{|\xi|} |D_i|_{\xi_j}$; D_i шарҳдаги узунлиги 4 белгидан кам бўлган сўзлар сони $x_{i,21} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_3\left(\Omega_j^*,\, D_i\right)$, бу ерда $\varphi_3\left(a,\, b\right) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |b|_a > 0 \text{ ва } |a| < 4 \\ 0, \text{ акс ?олда} \end{cases}$ - a сўзни b матнда мавжудлиги ва унинг узунлиги 4 белгидан кам эканлигини текшириш функцияси; D_i шарҳдаги hapax legomena-лар сони $x_{i,22} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_4\left(\Omega_j^*,\, D_i\right)$, бу ерда $\varphi_4\left(a,\, b\right) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |b|_a = 1 \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a сўзнинг b матнда hapax-legomena эканлигини аниқлаш функцияси; D_i шаркдаги hapax dilegomena-лар сони $x_{i,23} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_5\left(\Omega_j^*,\, D_i\right)$, бу ерда $\varphi_5\left(a,\, b\right) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |b|_a > 1 \\ 0, \text{акс ҳолда} \end{cases}$ - a сўзнинг b матнда hapax dilegomena эканлигини аниқлаш функцияси.

Матннинг сўз туркумига асосланган белгиларини ажратиш учун қуйидаги ишлар амалга оширилади. D_i шарҳдаги от сўз туркумига оид сўзлар сони $x_{i,24} = \sum_{j=1}^{|\Omega^*|} \varphi_6\left(\Omega_j^*,\, S_1\right)$, бу ерда $\varphi_6\left(a,\, A\right) = \begin{cases} 1, \text{ агар } a \in A \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a сўзнинг A сўз туркумига тегишлилигини аниқлаш функцияси. Худди шундай атоқли от, феъл, сифат, сон, олмош, равиш, ёрдамчи, тенг боғловчи, эргаштирувчи боғловчи, модал, ундов, тақлид, ёрдамчи сўз туркумларига оид сўзлар ва ноаниқ(тушунарсиз ёки маъносиз) сўзлар сони юқоридаги каби аниқланади.

Матннинг эможига асосланган белгиларини ажратиш учун қуйидаги ҳисоблашлар бажарилади. D_i шарҳдаги барча эможилар сони $x_{i,39} = \sum_{j=1}^{|\lambda|} |D_i|_{\lambda_j}$, бу ерда $\lambda_j \in \lambda$ - эможи. D_i шарҳдаги барча эможилар сентиментал вазн қийматларининг ўрта арифметик қиймати $x_{i,40} = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=1}^{|\lambda|} \hbar_j * |D_i|_{\lambda_j}$, бу ерда $\hbar_j$ - λ_j эможига мос келувчи сентиментал вазн қиймат; D_i шарҳдаги ижобий эможилар сонини $x_{i,41} = \sum_{j=1}^{|\lambda|} \varphi_7\left(\lambda_j,\, D_i,\, \hbar_j\right)$, бу ерда $\varphi_7\left(a,\, b,\, c\right) = \begin{cases} |b|_a, \text{ агар } c > 0 \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a эможининг b матнда мавжудлиги ва унинг c сентиментал вазн қиймат асосида ижобий эканлигини аниқловчи функция. D_i шар?даги салбий эможилар сони $x_{i,42} = \sum_{j=1}^{|\lambda|} \varphi_8\left(\lambda_j,\, D_i,\, \hbar_j\right)$, бу ерда $\varphi_8\left(a,\, b,\, c\right) = \begin{cases} |b|_a, \text{ агар } c < 0 \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$ - a эможининг b матнда мавжудлиги ва унинг c сентиментал вазн қиймат асосида салбий эканлигини аниқловчи функция.

Матннинг статистик белгилар сони 23 та, сўз туркуми асосидаги белгилар сони 15 та, эможи асосидаги белгилар сони 4 та ва белгилар векторининг умумий ўлчови 42 га тенг.

ҳосил қилинган белгилар векторини машинани ўқитиш [4] алгоритмларидан Намунага асосланган классификатор (IBk), Нейрон тармоқлари (NN), Таянч векторли машина (SVM), Тасодифий ўрмон (RF), C4.5 қарор дарахти (J48), Хатоликларни камайтириш дарахти (RT). Байес классификаторини (BN) қўллаб сентиментал таҳлил амалга оширилди. Алгоритмларнинг ишлаш натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Алгоритм номи	IBk	NN	SVM-poly	SVM-rbf	J48	RF	RT	BN
Таснифлаш аниқлиги	80,26	82,72	84,55	84,39	83,46	**85,25**	84,12	75,34

Ишимизда YouTube-даги фильм шарҳларини сентиментал таҳлил қилиш масаласи кўриб чиқилди. Тажрибавий натижаларга кўра энг яхши аниқликни тасодифий ўрмон қарорлари дарахти алгоритми қайд этди. Тармоқдаги катта ҳажмли маълумотни таҳлил қилиш ва жамиятнинг маълум бир фаолият ҳақидаги фикрларини билиш учун сентиментал таҳлил алгоритм ва иловалари кенг қўлланилади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. **Успенская Е. О.** *Исследование методов анализа тональности текста на основе машинного обучения* // Современная наука и молодые учёные: сборник статей. –2022. –С.46-48.

2. **Kuriyozov E., Matlatipov S.** *Building a new sentiment analysis dataset for Uzbek language and creating baseline models* // Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings. – 2019. – Vol. 21. – №. 1. PP. 1-3.
3. **Rabbimov I., Mporas I., Simaki V., Kobilov S.** *Investigating the Effect of Emoji in Opinion Classification of Uzbek Movie Review Comments* // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12335, 2020. PP. 435-445.
4. **Хенрик Б., Джозеф Р., Марк Ф.** *Машинное обучение* . –СПб.: Питер, 2017, -336 с.
УДК 519.95

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ ФИШИНГОВЫХ АТАК

Марахимов А.[1], Худайбергенов К.[2], Чориев Х.[3], Насриддинов А.[4]
[1]Термезский государственный университет, Термез, 190111, Узбекистан; termizdu@umail.uz
[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан; kabul85@mail.ru2
[3]Термезский государственный университет, Термез, 190111, Узбекистан; hachcorp@mail.ru3
[4]Термезский государственный университет, Термез, 190111, Узбекистан; nalouddin@gmail.com4

Абстракт : Фишинговые веб-сайты относятся к атаке, когда киберпреступники подделывают официальные веб-сайты, чтобы заманить людей к доступу, чтобы незаконно получить личность пользователя, пароль, конфиденциальность и даже свойства. Эта атака представляет большую угрозу для не опытных пользователей сети Интернет и становится все более и более сложнее. Многие предложения по выявлению фишинговых веб-сайтов показали свою эффективность и преимущество методов для обнаружения и классификации, унифицированной указателя ресурсов (URL). Хотя для обнаружения и классификации фишинговых атак было предложено несколько подходов, подходы машинного обучения и искусственного интеллекта на основе URL-адресов обеспечивают более высокие результаты производительности, но все они зависят от используемого набора признаков. Для повышения точности фишинга обнаружение веб-сайтов, в статье предлагается новая модель на основе дерево решении и набор признаков для устройств Интернета вещей (IoT), которые имеет ограниченные возможности и низким энергопотреблением. В настоящем исследовании рассматривается, как выбор набора признаков из обучающихся набор данных, который существенно повышает скорость и производительность классификации фишинговых атак в устройствах IoT. Согласно экспериментальным и сравнительным результатам реализованных алгоритмов классификации, алгоритм кусочно линейный дерево решении, основанными на новых функции активации, обеспечивает наилучшую производительность с точностью 97,50 для обнаружения фишинговых URL-адресов.

Ключевые слова : дерево решении, классификатор, фишинговая атака, URL-ресурс, обучающая выборка, машинное обучение.

1. Введение С появлением сети Интернет стало ясно, что происходит новая технологический прогресс в киберпреступлениях. В рамках этого прогресса многие сферы бизнеса и информационных технологии перешли от традиционных сервисов к онлайновым формам. Наряду с информационной технологией и использованием преимущества повсеместного распространения онлайн операции многие правонарушения также переместились в онлайн формам, то есть киберпреступления. На сегодняшний день одним из самых распространенных вариантов кибератак является атаки фишинга. В 2019 году глобальное мошенничество с онлайн-банковские транзакции составило 1920 млн долларов, из них 318 млн долларов приходится на фишинговые атаки [1], что делает его одним из самых эффективных и распространённых мошенничеств в сети Интернет [2].

Обычных пользователей веб-броузеров просить вводит свои личные данные во время фишинговой атаки, обычно через унифицированный указатель ресурсов (URL). Как правило, URL-адрес в веб-броузере, использующийся в фишинговой атаке, маскируют, используя длинные последовательности буквенно-цифровых символов и/или вводя символы, похожие на исходный URL-адрес (например, www.mibank.com вместо www.mybank.com). Если вредоносный URL-адрес доставляется на устройства с маленькими экранами (например, мобильные телефоны, планшеты, гаджеты и т.д.), фишинговая атака становиться еще более эффективна и результативным для кибермошенников [8]. В веб-броузерах адресная строка для ввода адреса веб-сайта обычно уменьшена или иногда скрыта от пользователя сети Интернет. Такие устройства составляют набор устройств так называемый Интернет вещей (англ. Internet of Things, IoT) [3]. Многие устройства IoT используются для обмена сообщениями, документами, слушание онлайн радио, просмотр фильмов, покупки товаров в сети Интернет, общения с друзьями/коллегами и т.д. Учитывая эти факты, что цели кибератак считается переходит на устройства IoT и их пользователей становиться все больше и больше [11]. Кроме того, фишинговая кибератака, которая, как ожидается, будет расти быстрее, чем любые другие, который очень привлекателен для киберпреступников из-за физических особенностей и низкой уровня безопасности таких устройств как IoT.

Учитывая особенности фишинговых атак, исследование сосредоточено на изучении признаков в обучающих наборов данных для повышения производительности алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта для обнаружения и классификации фишинга. Однако, в многих работах по обнаружению и классификации фишинговых атак, большинство из них были сосредоточены на определении того, какой классификатор работает лучше с учетом предварительно определенных признаков, полученных с помощью сторонних сервисов и источников обучающих набор данных, которые находится в общедоступных репозиториях [4]. В этих работах также используются сложные структуры данных и представления данных в сочетании с интенсивными вычислительными процессами, что делает их непригодными для использования в устройствах IoT. Кроме того, некоторые работы приобретают признаки посещения подозрительной веб-страницы, подразумевая, что они стали жертвой атаки. Устройства IoT характеризуются ограниченными вычислительными возможностями и низким энергопотреблением, что делает не пригодным таких методов и алгоритмов классификации для использования в этих системах [5].

В таких случаях такие алгоритмы классификации, работающие в устройствах IoT, должны быть легкими, энергоэффективными и рекомендуется избегать использования сложных структур данных, а используемые источники набор обучающих данных и их признаки должны быть настолько простыми, насколько это возможно. Учитывая вышеуказанные требования, в этой работе предлагается метод на основе дерево решении который предложено в [6] для обнаружения фишинговых URL-адресов в средах IoT, которое максимально увеличивает скорость обнаружения и точность классификации фишинговых атак. Выбор набора признаков имеет решающее значение для предложения подхода к обнаружению фишинга, применимого на практике. Кроме того, предлагаемый метод позволяет обнаруживать атаки в режиме реального времени и атаки нулевого дня, не зависит от сторонних сервисов.

Основными вкладами этой статьи являются:

1. Выбор признаков из набор обучающих данных для обнаружения и классификации фишинговых URL-адресов, именно подходящее для систем IoT;

2. Служить отправной точкой для исследователей и практиков в разработке решений задач классификации фишинговых атак для систем с ограниченными свойствами как IoT.

2. Основные понятия и методы для фишинговых атак.

2.1. Фишинговые атаки.

Фишинговые атаки могут осуществляться через URL-адреса из веб-броузера пользователей. Как правило, фишинговые атаки на основе URL-адресов в основном выполняются путем встраивания специальных слов и/или символов в URL-адреса:

(а) генерируется похожие слова, но с не значительными ошибками;

(б) содержать набор специальных символов/букв для перенаправления веб-страницы;

(в) применяют укороченные и/или излишне слишком длинные URL-адреса, не пригодным для понимая;

(д) используют привлекательные ключевые слова, которые кажутся правильными;

(е) в большинство случаях добавляются в ссылку вредоносный файл, который после автоматической скачивания переходит в устройство IoT жертва-пользователя.

Одним и подходов к обнаружению и классификации фишинговых URL-адресов основан на черных списках, которые опираются на репозиторий уже классифицированных веб-сайтов (https://phishtank.com). Этот подход является высокоскоростным и эффективным, но имеет некоторые недостатки. Например, URL-адрес, не существующий в наборе обучающих данных, не будет правильно классифицирован, особенно URL-адреса атак нулевого дня. В таких подходах, обнаруженных в методах на основе черных списков, что традиционные алгоритмы машинного обучения достаточно хорошо решает задачи с проблемами обнаружения фишинговых URL-адресов [7-11]. Эти требования особенно подходят для применения для устройств IoT из-за их относительно низкой вычислительной мощности и ресурсов.

2.2. URL-адрес

Данное исследование связано с фишинговые атаками, поэтому в настоящей работе анализируется данные относящейся адресам, который называется унифицированным указателем ресурсов (URL), который можно найти в стандарте RFC1738. Общий вид URL-адресов показаны на Рис. 1.

2.3. Методы и алгоритмы для классификации фишинговых URL-адресов

Широко распространенная методика, используемая для фишинговых атак это создание очень большого количество URL-адресов с разными всевозможными вариантами. Это дает возможность отвлекает внимание обычных Интернет-пользователей, и это значит, что вероятность успешной фишинговой атаки возрастает в несколько раз порядок. В URL-адресной строке вводится несколько косых черт, указывающих на несколько каталогов в URL-адресе и выглядящих правильными для не опытных пользователей IoT устройств. Точно так же введение нескольких точек и некоторых символов/цифр в доменное имя для создания нескольких субдоменов создает ощущение правильного URL-адреса.

Такие сгенерированные вредоносные URL-адреса очень часто заменяют буквенно-цифровые символы другими, т.е. символами Unicode и/или шестнадцатеричным представлением символов. Текст английского языка имеет относительно низкую энтропию, т.е. он предсказуем, и при введении разных символов энтропия меняется сильнее. Следовательно, использование энтропии может привести к обнаружению и правильной классификации вредоносных URL-адресов.

Учитывая такие аспекты фишинговых атак, в этой статье основное внимание уделяется предложению облегченного представления URL-адресов и более производительного алгоритма для обнаружения и классификации фишинговых URL-ресурсов в системах IoT. Киберпреступники во время фишинговой атаки очень часто доставляет вредоносный URL-адрес с помощью обычных приложении (электронной почты, Telegram, Tweeter, Facebook и т.д.). Если не опытный пользователь сети Интернета получает доступ к фишинговому URL-адресу, вредоносные действия будет работать на пользу киберпреступника.

Литература

1. **R.J. Anderson, C. Barton, R. Bohme, R. Clayton, M.J.G. van Eeten, M. Levi, T. Moore, S. Savage, in: R. Bohme (Ed.)** *Measuring the Cost of Cybercrime, The Economics of Information Security and Privacy.* Springer, 2013, pp. 265-300.

2. **Q. Cui, G.-V. Jourdan, G.V. Bochmann, I.-V. Onut, J. Flood.** *Phishing Attacks Modifications and Evolutions, in: J. Lopez, J. Zhou, M. Soriano (Eds.), Computer Security, Springer International Publishing, Cham,.* 2018, pp. 243-262.

3. **L. Atzori, A. Iera, G. Morabito.** *Understanding the Internet of Things: definition, potentials, and societal role of a fast evolving paradigm.* Ad Hoc Networks. 56 (2017) 122-140.

4. **O.K. Sahingoz, E. Buber, O. Demir, B. Diri.** *Machine learning based phishing detection from URLs.* Expert Systems and Applications. 117 (2019) 345-357.
5. **M.T. Suleman, S.M. Awan.** *Optimization of URL-Based Phishing Websites Detection through Genetic Algorithms.* Automatic Control and Computer Sciences. 53 (2019) 333-341.
6. **Marakhimov A.R., Kudaybergenov J.K., Khudaybergenov K.K., Ohundadaev.** *U.R. A multivariate binary decision tree classifier based on shallow neural network. Scientific and Technical Journal of Information Technologies.* Mechanics and Optics, 2022, 22(4), pp. 725-733.
7. **S. Afroz, R. Greenstadt.** *Phishzoo: Detecting phishing websites by looking at them.* in: Fifth IEEE International Conference on Semantic Computing, 2011.
8. **S. Sheng, B. Wardman, G. Warner, L. Cranor, J. Hong.** *An empirical analysis of phishing blacklists.* 2009.
9. **S. Haruta, H. Asahina, I. Sasase.** *Visual similarity-based phishing detection using image and CSS with target website finder.* in: IEEE Global Communications Conference, 2017.
10. **S. Abdelnabi, K. Krombhoiz, M. Fritz.** *WhiteNet: Phishing website detection by visual whitelists.* in: Cryptography and Security, 2019.
11. **Peng, I. Harris, Y. Sawa.** *Detecting phishing attacks using natural language processing and machine learning.* in: IEEE 12th International Conference on Semantic Computing(ICSC), 2018.
12. **Yazan Ahmad Alsariera.** *Ai meta-learners and extra-trees algorithm for the detection of phishing websites.* IEEE Access 8 (2020) 142532-142542.
13. **A. Tewari, B.B. Gupta.** *Security, privacy and trust of different layers in Internet-of-Things (IoTs) framework.* Future Gener. Comput. (2020).
14. **Sahingoz OK, Buber E, Demir O, Diri B.** *Machine learning based phishing detection from URLs.* Expert Systems and Applications. 2019. Vol.117, pp.345-57.
15. **Shekokar NM, Shah C, Mahajan M, Rachh S.** *An ideal approach for detection and prevention of phishing attacks.* Procedia Computer Science. 2015. pp.49-82.
16. **Nezhad JH, Jahan MV, Tayarani-N M-H, Sadrnezhad Z.** *Analyzing new features of infected web content in detection of malicious webpages.* ISC International Journal of Information Security. 2017. Vol. 9(2), pp. 63-83.
17. **Rao RS, Pais AR.** *Detection of phishing websites using an efficient feature-based machine learning framework. Neural Computing and Applications.* 2019. vol. 31, pp.3851-3873.

УДК 517.55

ВЫБОР И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЙРО-НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Марахимов А.[1], Худайбергенов К.[2], Жалелов Р.[3],Болтаев Ж.[4],Абдирайимов Х.[5]
[1]Термезский государственный университет, Термез,190111, Узбекистан; termizdu@umail.uz
[2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; kabul85@mail.ru
[3]Термезский государственный университет, Термез,190111, Узбекистан; rustem_jalelov92@mail.ru
[4]Термезский государственный университет, Термез,190111, Узбекистан; boltayev.jahongir@gmail.com
[5]Термезский государственный университет, Термез,190111, Узбекистан; khusanabdirayimov@gmail.com

Абстракт. Сложные системы характеризуются большим числом входов-выходов и элементов, связи между элементами носят разнотипный, нелинейный характер. Часть информации о системе представлена в качественном виде. Функционирование системы происходит в условиях нечеткости и неопределенности. В этом случае, как правило, получение закона распределения параметров, воздействующих на систему, становится трудной, часто неразрешимой за ограниченное время задачей. В этих условиях, одним из современных математических подходов для решения задач идентификации, является теория лингвистической переменной, базирующаяся на нечетких множествах и нечеткой логики. В соответствии с этой теорией, модель объекта представляет собой так называемую нечеткую базу знаний в виде совокупности логических высказываний «ЕСЛИ-ТО», которые связывают лингвистические оценки входных и выходных параметров объекта.

В данной работе рассмотрено вопросы разработки нечетко-множественной модели сложных систем в классе «ЕСЛИ-ТО» для задач идентификации нелинейных зависимостей и оптимизация параметров нейросетевой модели. Следует отметить, что MLP сети (Multilayer Perceptron) и нечеткий-MLP часто используют концепцию обратного распространения для обучения. Производительность предложенной модели сравнивалась с реализацией классической модели MLP, разработанной для тех же задач.

Ключевые слова: Нечеткие множества, нечеткая логика, нейронные сети, нейросетевые технологии, нечетко-множественные модели, идентификация сложных систем, обучающая выборка, машинное обучение.

1.Введения

В основе современной теории идентификации лежит моделирование исследуемых объектов при помощи уравнений (дифференциальных, разностных и т. п.). При этом сложность того или иного объекта самым непосредственным образом влияет на качество построения его модели. Если для описания некоторых объектов применяется информация, которая не может быть выражена количественно - так называемая семантическая, т. е. смысловая, качественная информация, то классическая теория оказывается плохо приспособленной для таких случаев. Основные причины малоэффективности или же вообще неприспособленности традиционных методов моделирования к подобным ситуациям состоят в следующем [1]:

- не все входные и выходные параметры объекта могут описываться количественно;
- между рядом входных и выходных параметров невозможно установить количественные зависимости;
- существующие способы моделирования объектов приводят к таким громоздким конструкциям, что их практическое применение оказывается невозможным.

Таким образом, при моделировании объектов, которые характеризуются вышеуказанными особенностями, возникает проблема построения так называемых логико-лингвистических моделей, то есть моделей, в которых средства обработки информации основаны на логике, а экспериментальные данные представляются в лингвистической форме [2]. Такие модели должны основываться на системах знаний об исследуемом объекте, которые представляют собой концентрацию опыта специалистов (экспертов) в данной области.

Одним из таких современных формальных аппаратов для обработки экспертной естественно языковой информации является теория лингвистической переменной, базирующаяся на нечетких множествах. В соответствии с этой теорией, модель объекта представляет собой так называемую нечеткую базу знаний в виде совокупности логических высказываний «ЕСЛИ-ТО», которые связывают лингвистические оценки входных и выходных параметров объекта. Адекватность таких моделей к данным эксперимента определяется качеством функций принадлежности, при помощи которых лингвистические оценки превращаются в количественную форму. Но поскольку функции принадлежности определяются экспертными методами, адекватность таких нечетких моделей целиком зависит от квалификации экспертов. Иначе говоря, проблема адекватности известных нечетких моделей остается открытой. А когда привлечение экспертов для построения модели оказывается невозможным по причине их отсутствия, в таком случае возникает проблема извлечения лингвистических знаний об объекте из экспериментальных данных [3]. Таким образом, актуальность поднятой проблемы обусловлена тем, что для моделирования многих объектов есть смысл применять логиколингвистические модели, дающие возможность преодолеть трудности моделирования классическими методами.

2. Постановка задачи. Будем предполагать, что идентифицируемая сложная система имеет нелинейная зависимость и представлена выборкой данных «входы–выход»:

$$(X_r, y_r), r = \overline{1, M}, \tag{1}$$

где $X_r = (x_{r,1}, x_{r,2}, ..., x_{r,n})$ - входной вектор в r-й паре обучающей выборки и y_r – соответствующий выход; M – количества объектов на выборки.

Задача обучения нечеткой модели Мамдани по выборке (1) сводится к поиску вектора (P, B), который обеспечивает:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(y_r - F(X_r; B, C, W))^2} \longrightarrow min, \tag{2}$$

где B и C – векторы параметров настройки функций принадлежности; W –вектор весов правил нечеткой базы знаний; $F(X_r; B, C, W)$ - результат вывода для входного вектора X_r по нечеткой модели с параметрами (P, B).

Выход нечеткой модели зависит от ее структуры - базы правил и параметров: функций принадлежностей, реализаций логических операций, метода дефаззификации, а также коэффициентов функций принадлежностей в заключениях правил для модели типа Мамдани. Нахождение структуры и параметров нечеткой модели, обеспечивающих минимальное значение критерия (2) и является задачей идентификации.

3. Нейро-нечеткая идентификация Для решения поставленной задачи предлагается нейро-нечеткий модель, в которых зависимость между входами и выходом описана базой знаний из нечетких правил класса «ЕСЛИ-ТО». Если мы будем использовать базу знаний в формате Мамдани, то Нейро-нечеткую сеть можно представить в следующем виде:

$$(\Pi_i : \text{ ЕСЛИ } (x_1 = a_1^{j1})\text{И } (x_2 = a_2^{j2})(\text{с весом } \omega_{jp}) \; TO \; y = d_j \tag{3}$$

где Π_i -i-й правила базы знаний, $a_i^{jp} \in A_i$ - нечеткий терм, оценивающий переменную x_i ; A_i- лингвистическая терм множества, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}, p = \overline{1, k}$; ω_{jp} - весовой коэффициент; d_j- нечеткое заключение j-го правила; m - количество правил в базе знаний;

Данной модифицированной нечеткой базе знаний будет соответствовать следующая система нечетких логических уравнений:

$$\mu^{d_j}(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{p=1}^{k}\Big(\omega_{jp}\Big[\bigwedge_{i=1}^{n}\mu^{a_i^{jp}}(x_i)\Big]\Big), j = \overline{1, m} \tag{4}$$

где $\mu^{a_i^{jp}}(x_i)$ - функция принадлежности входа x_i нечеткому тему a_i^{jp}; $\mu^{d_j}(x_1, x_2, ..., x_n)$- функция принадлежности выхода y нечеткому тему d_j ;

Если модель объекта с дискретным выходом, которому соответствует нечеткая база знаний (4), можно представить в более компактном виде:

$$\mu^{d_j}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu^{d_j}(X, B, C, W), j = \overline{1, m} \tag{5}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вектор входных переменных; $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ и $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - векторы параметров настройки функций принадлежности ; $W = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ - вектор весов правил нечеткой базы знаний;

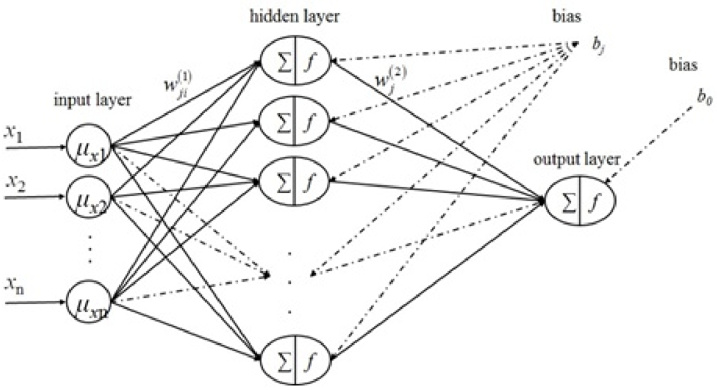
В этой модели мы использовали функцию принадлежности колоколообразного типа. Следует отметить, что функция принадлежности этого типа рассматривается в из-за его простоты. Однако, другие типы функция принадлежности также могут быть реализованы для архитектура нечеткого многослойного персептрона.

Задача идентификации для объекта с непрерывным выходом может быть сформулирована следующим образом: найти такую матрицу, которая бы удовлетворяла ограничениям на диапазоны изменения параметров (P,B) и обеспечивала (2).

Для дискретного случая:

$$\sum_{p=1}^{M}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\mu^{d_j}(X_p,B,C,W)-\mu_p^{d_j}\right)^2\right\}=\min_{B,C,W} \tag{6}$$

Архитектура предлагаемой нейро-нечеткой сети (нечеткой MLP сети) состоит из нескольких слоев нейронов [1,4]. На первый слой (входной слой-0) подаётся входные данные, после этого эти входные данные распределяется на входы слой-1. В слое-0 не производиться вычисление, его можно считать, как сенсорный слой. Последний слой – является выходным слоем, который выводит обработанные данные. Между входным и выходными слоями количество скрытых слоев может быть увеличено или уменьшено на основе задачи, для которой разработана модель.



Архитектура нечеткого многослойного персептрона

В общем случае, выходной сигнал y, в архитектуре нечеткого многослойного персептрона можно определить следующим образом:

$$y=\sum_{j=1}^{N}\omega_{jk}^{(1)}\Phi\left(\sum_{i=1}^{M}\omega_{ij}^{(2)}x_i+p_j^{(2)}\right)+p^{(1)}, \tag{7}$$

где $\Phi(\cdot)$ - один из функции активации, например $f(x)=\frac{1}{1+exp^{-x}}$; $\omega_{jk}^{(1)}$, $\omega_{ij}^{(2)}$ - весовые коэффициенты, $p^{(1)}$,$p_j^{(2)}$ - пороговые значение,

Обновление значений весовых коэффициентов и пороговых значений вычисляется следующим образом:

$$\omega_{ij}^{(2)new}=\omega_{ij}^{(2)old}+\Delta\omega_{ij}^{(2)},\ p_j^{(2)new}=p_j^{(2)old}+\Delta p_j^{(2)} \tag{8}$$

$$\Delta\omega_{ij}^{(2)}=\eta E\Phi,\ \Delta p_j^{(2)}=\eta E\Phi \tag{9}$$

$$\omega_{jk}^{(1)new}=\omega_{jk}^{(1)old}+\Delta\omega_{jk}^{(1)},\ p^{(1)new}=p^{(1)old}+\Delta p^{(1)} \tag{10}$$

$$\Delta\omega_{jk}^{(1)} = \eta E\Phi' x^{(i)} y' \omega_{jk}^{(1)},\ \Delta p^{(1)} = \eta E\Phi' y' \omega_{jk}^{(1)} \tag{11}$$

где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

Процесс обучения нейро-нечеткой сети аналогичен процедуре обучения традиционных нейронных сетей по правилу «back-propagation». Обучения этого алгоритма тоже состоит из двух фаз - прямого и обратного хода.

Вычисление степени принадлежности значений входных величин к лингвистическим термам по формуле (11).

$$\mu^j(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - b_i^j}{c_i^j}\right)^2},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m} \tag{12}$$

Соответственно коэффициенты a_i и c_i будут обновляться следующими формулами:

$$\frac{\partial\mu^j(x_i)}{\partial c_i^j} = \frac{2a_i^j (x_i - b_i^j)^2}{\left(\left(c_i^j\right)^2 + \left(x_i - b_i^j\right)^2\right)^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial\mu^j(x_i)}{\partial b_i^j} = \frac{2\left(c_i^j\right)^2 (x_i - b_i^j)}{\left(\left(c_i^j\right)^2 + \left(x_i - b_i^j\right)^2\right)^2},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m} \tag{14}$$

На выходе используется метод дефаззификации центра тяжести для получения четкой величины. Считается что, данный метод дефаззификации обеспечивает наилучшие показатели точности и скорости настройки нечеткой модели.

4.Заключение.Разработана нечеткая МЛП для идентификации нелинейных систем. Полученные результаты показывают, что предлагаемая модель сходится к ее минимальному RMSE в течение 600-700 эпох и достигает коэффициента сходимости 93-95%. Из результатов в проведенных вычислительных экспериментов можно считать, что предлагаемая нечеткая модель значительно превосходит МЛП по скорости обучения и точности. А также, проведенные вычислительные эксперименты показывают, что нечеткость в экспериментальных данных не является препятствием для идентификации нелинейных зависимостей.

Возможности использования нечеткой обучающей выборки и нейро нечетких модели может найти применение в систем управлении, медицине и других прикладных областях, где экспериментальные данные для идентификации изучаемой зависимости «входы-выход» формируются на основе субъективного характера.

Литература

1. Поспелов Д.А. *Логико-лингвистические модели в системах управления.* - М.: Энергоатомиздат, 1981. - 229 с.

2. Митюшкин Ю. И., Мокин Б. И., Ротштейн А. П. *Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний.* — Вінниця: Універсум, 2002.

3. Marakhimov, A.R., Khudaybergenov, K.K. *A Fuzzy MLP Approach for Nonlinear System Identification.* - Journal of Mathematical Sciences (United States)this link is disabled, 2022, 265(1), pp. 43–51.

4. Пегат А. *Нечеткое моделирование и управление.* — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.

УДК 519.95

Обнаружение фишинга с помощью модели глубокого обучения

Марахимов А.Р.,[1] Охундадаев У.Р.[2]
[1]Термезский государственный университет; termizdu@umail.uz
[2]Национальный университет Узбекистана; ulugbek_1122@mail.ru

Фишинговые веб-сайты представляют собой онлайн-атаку с использованием социальной инженерии, ведущую к утечке конфиденциальной информации, краже личных данных и повреждению имущества путем выдачи себя за законное лицо [1-2]. Фишеры стремятся обмануть онлайн-пользователей, чтобы получить их финансовую информацию, такую как номера кредитных карт, пароль и т.д., которые представляют большую угрозу для пользователей Интернета, и это явление сейчас становится все более и более серьезным. Согласно отчету о тенденциях фишинговой активности (отчет APWG, 2021г.), опубликованному группой по борьбе с фишингом, общее количество фишинговых сайтов, обнаруженных APWG в 1, 2, 3 и 4 кварталах 2018 г., достигает 263538, 233040, 151014 и 138328 соответственно. Между тем, в отчете RSA Online Fraud Report (2021г.) показано, что в 2020 году фишинговые атаки обошлись глобальным организациям в 4,6 миллиарда долларов убытков, и в последние годы эта цифра растет.

В качестве улучшения для обнаружения фишинга были применены методы глубокого обучения, такие как долговременная кратковременная память (LSTM), сети глубокого доверия и сверточная нейронная сеть (CHC), чтобы избежать субъективности, вызванной извлеченными вручную функциями [3-4]. Основополагающий принцип глубокого обучения для этого улучшения заключается в том, что признаки не разрабатываются инженерами-людьми, а извлекаются из данных с помощью процедуры обучения общего назначения. Однако эти подходы к глубокому обучению по-прежнему сталкиваются с проблемой неудовлетворительной точности.

Более того, большинство упомянутых выше методов машинного обучения и глубокого обучения не учитывают проблему несбалансированных обучающих наборов данных. Проблема возникает из-за того, что легитимных URL-адресов значительно больше, чем фишинговых. В этой ситуации классификатор узнает больше признаков от мажоритарного класса, что может привести к необъективным результатам [2].

Литература

1. **Y. Peng., Z. Guangzhen, Z. Peng.** (2019). *Phishing Website Detection Based on Multi-dimensional Features Driven by Deep Learning.* IEEE Access, 7, 15196-15209.
2. **Verma R, Das A.** *What's in a URL: fast feature extraction and malicious URL detection.* In: Proceedings of the 3rd ACM on International Workshop on Security And Privacy Analytics. New York, NY, USA: ACM; 2017. p. 55–63.
3. **Zhang H, Liu G, Chow T, Wenyin L.** *Textual and visual content-based anti-phishing: a bayesian approach.* IEEE Trans. Neural Netw. 2011;22:1532–46.
4. **Bahnsen, A.C., et.al** *(2017). Classifying phishing URLs using recurrent neural networks.* 2017 APWG Symposium on Electronic Crime Research (eCrime), 1-8.

УДК 519.95

Интеллектуальная система обнаружение фишинга на основе алгоритма дерево решения по URL-адресам

Охундадаев У.Р.[1]
[1]Национальный университет Узбекистана; ulugbek_1122@mail.ru

Из-за быстрого развития сетевых технологий многие виды повседневной деятельности, такие как онлайн магазины, электронный банкинг, социальные сети, электронная коммерция и т.д., переносятся в сеть Интернет. Открытая, анонимная и неконтролируемая инфраструктура Интернета обеспечивает удобную платформу для кибератак, которая представляет серьезные уязвимости безопасности не только для сетей, но и для обычных пользователей Интернета, даже для опытных. Хотя осторожность и опыт пользователя важны, невозможно полностью предотвратить попадание пользователей в фишинговую аферу [1]. Потому что, чтобы повысить эффективность фишинговых атак, злоумышленники также учитывают личностные характеристики Интернет пользователя, особенно для обмана относительно опытных пользователей [2]. Кибератаки, нацеленные на Интернет пользователей, приводят к массовой потере конфиденциальной/личной информации и даже денег пользователей, общая сумма которых может достигать миллиардов долларов в год [3].

Фишинговые атаки используют уязвимости интернет-пользователей, поэтому для защи-ты пользователей необходимы дополнительные системы поддержки. Механизмы защиты делятся на две основные группы: за счет повышения осведомленности пользователей и за счет использования некоторых дополнительных программ. Из-за уязвимости интернет- пользователя злоумышленник может даже атаковать некоторых опытных пользователей, используя новые методов и, прежде чем предоставить конфиденциальную информацию, они считает, что эта страница является законной. Поэтому программные системы обнару-жения фишинга предпочтительнее в качестве систем поддержки принятия решений для пользователя. Наиболее предпочтительными методами являются черные/белые списки, об-работка изображений, веб-страницы, обработка естественного языка, Машинное обучение и др.

Исследователи считают, что, когда для преодоления различных фишинговых атак предлагаются какие-то новые решения, злоумышленники приходят с уязвимостями решения и производят новые типы атак. Поэтому настоятельно рекомендуется использовать гибридные модели вместо единого подхода менеджера по безопасности сетей.

Литература

1. **Greene K., Steves M., Theofanos M.** *No Phishing beyond this Point in Computer.* IEEE, 2018, vol. 51, no. 6, pp. 86-89. doi: 10.1109/MC.2018.2701632.
2. **Curtis, S. R., Rajivan, P., Jones, D. N., Gonzalez, C.** (2018). *Phishing attempts among the dark triad: Patterns of attack and vulnerability.* Computers in Human Behavior, 87, 174–182.
3. **Shaikh, A. N., Shabut, A. M., Hossain, M. A.** (2016). *A literature review on phishing crime, prevention review and investigation of gaps.* In 10th international conference on software, knowledge, information management and applications (SKIMA) (pp. 9–15).

6 – ШЎЪБА. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ ВА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

UDC 519.957

On the global solvability of one nonlinear cross-diffusion problem not in divergence form with nonlinear boundary conditions

Aripov M.[1], Atabaev O.X.[2]
[1] National University of Uzbekistan; mirsaidaripov@mail.ru
[2] Andijan State University; odiljonatabaev@gmail.com

We consider following nonlinear cross-diffusion problem not in divergence form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right), x>0, t>0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(v^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right), x>0, t>0 \tag{1}$$

with nonlinear boundary

$$-u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^{k_1}}{\partial x}\right|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = v^{q_1}(0,t), t>0$$

$$-v^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^{k_2}}{\partial x}\right|^{p_2-2}\frac{\partial v}{\partial x}|_{x=0} = u^{q_2}(0,t), t>0 \tag{2}$$

and initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x), x>0,$$

$$v(x,0) = v_0(x), x>0 \tag{3}$$

where $0 \le \alpha_i \le 1$, $m_i \ge 1$, $k_i \ge 1$, $p_i \ge 2$, $q_i > 0$ $(i=\overline{1,2})$ - numerical parameters, $t>0$ and $x \in R$, functions $u = u(t,x) \ge 0$ and $v = v(t,x) \ge 0$ is solution.

This system has been proposed as a mathematical model for many physical problems, for example parabolic systems like (1)-(3) appear in population dynamics, chemical reactions, heat transfer, etc [1]-[4]. In particular , the equation (1) can be used to describe unsteady flow in porous liquid media, where there is a power-law dependence of the shear stress on the displacement velocity under variable conditions.

In this paper, using self-similar analysis, the global solvability of the Fujita type for problem (1)вЂ“(3) is established, in particular, the global solvability of weak solutions of system (1) is proved by the method of standard equations[3] and the comparison principle [1].

Theorem 1. If

$$(\alpha_1(p_1-1)+p_1q_1)(\alpha_2(p_2-1)+p_2q_2) \le (m_1+k_1(p_1-2)+p_1-1)(m_2+k_2(p_2-2)+p_2-1)$$

then every solution of the problem is global.

Literature

1. **Samarski A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., and Mikhailov A.P.** *Blow-up in quasilinear parabolic equations.*, Berlin; New York: De Gruyter, 2011, 554 p.
2. **Aripov M., Matyakubov A.S.** *To the properties of the solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form.* Universal Journal of Computational Mathematics, 2017, 5 (1), P. 1-7.

3. **Aripov M.M., Sadullaeva Sh.A.** *Computer modeling of nonlinear diffusion processes.* Tashkent. 2020, 670 p.

UDC 519.644

The coefficients of the optimal quadrature formula for numerical integration of the right Riemann-Liouville integral

Babaev S. S.[1,2], Idieva Sh. Sh. [1], Bakhronov Sh. A.[1], Allaberdiev O. B.[3]
s.s.boboev@buxdu.uz; bssamandar@gmail.com
[1]Bukhara State University;
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, UzAS;
[3] Termez State University;

In this work we consider a quadrature formula the following form

$$\int_t^1 \frac{\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

where, $0<\alpha<1$, $h=\frac{1-t}{N}$, $t<1$, $x_\beta = h\beta + t$ and function φ belongs to the linear space $W_2^{(1,0)}[t,1]$ which is defined as

$$W_2^{(1,0)}[t,1] = \{\varphi : [t,1] \to \mathbb{R} | \varphi' \text{ is abs.cont, and } \varphi \in L_2[t,1]\}.$$

And norm of the function in this space is denoted as

$$\|\varphi\|_{W_2^{(1,0)}} = \sqrt{\int_t^1 \left(\varphi'(x) + \varphi(x)\right)^2 dx}.$$

Corresponding error functional for this quadrature formula has the following form

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[t,1]}(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta).$$

Here, C_β are coefficients of quadrature formula (1), $\varepsilon_{[t,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[t,1]$, and $\delta(x)$ is Dirac's delta function.

The main task of this work as follow.

Problem 1. Find the coefficients $\mathring{C}_\beta$ that give minimum value to $\|\ell\|_{W_2^{(1,0)*}[t,1]}$, and calculate

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(1,0)*}[t,1]} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{W_2^{(1,0)*}[t,1]}.$$

In this work we solve Problem 1 and have the following

Theorem 1. *Coefficients of the optimal quadrature formula (1) with equal spaced nodes in the space $W_2^{(1,0)}[t,1]$ have the following forms*

$$C_0 = \frac{1}{1-e^{2h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k e^{2h})h^{\alpha+k}}{k!(\alpha+k)},$$

$$C_\beta = \frac{1}{1-e^{2h}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)} \left((\beta+1)^{\alpha+k}(e^{-h\beta} - (-1)^k e^{h\beta+2h}) \right.\right.$$

$$+\ (\beta-1)^{\alpha+k}(e^{-h\beta+2h}-(-1)^k e^{h\beta})+(\beta)^{\alpha+k}(1+e^{2h})((-1)^k e^{h\beta}-e^{-h\beta})\Big)\Big],$$

$$\beta=1,2,\ldots,N-1,$$

$$C_N=\frac{1}{1-e^{2h}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{t-1+2h}-(-1)^k e^{1-t})((1-t-h)^{\alpha+k}-(1-t)^{\alpha+k})}{k!(\alpha+k)}.$$

TENGMAS ORALIQLARDA QURILGAN LOKAL INTERPOLYATSION KUBIK SPLAYN MODELINING SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISHDA QO'LLANILISHI

Baxromov S. A.[1], **Qobilov S. Sh.**[2], **To'xtasinov M. G'.**[3], **Karimov D. Q.**[4]
[1,3,4] Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti;
[2]Muhammad Al-Xorazmiy nomidagi Toshkent Axborot texnalogiyalar universiteti;
sayfiddinbahromov@gmail.com; qobilov.sirojiddin92@gmail.com; tmarufjon981@gmail.com;
karimovdavlatyor91@gmail.com;

Ushbu ishda qaralgan tengmas oraliqlarda qurilgan lokal kubik splaynlar funksiyalar yordamida eksperimental ma'lumotlar asosida signallarni modelini qurish va raqamli ishlov berish jarayonlari amalga oshirildi. Yana shuni aytishimiz mumkinki tengmas oraliqlarda qurilgan kubik splayn modellari signallarga raqamli ishlov berishda yaxshi natijalar beradi, bu esa signallarni raqamli ishlash natijasida mutaxasislarning to'g'ri qaror qabul qilishini ta'minlaydi.

1. Tengmas oraliqlarda qurilgan lokal interpolyatsion kubik splayn model

Signallarni raqamli ishlashda uchinchi darajali (kubik) splayn funksiyalar yuqori aniqlikka ega matematik apparat hisoblanadi. Dastlab signallarga raqamli ishlov berishda yaxshi natijalar beruvchi splayn modelni umumiy ko'rinishini beramiz.

$$S_3(f,x)=\sum_{k=1}^{4}\varphi_k(t)f(x_{i+k-2})$$

Bu yerda

$$\varphi_1(t)=\tfrac{11t^2}{12}-\tfrac{5t}{12}-\tfrac{t^3}{2}\qquad \varphi_2(t)=1-\tfrac{9t^2}{4}-\tfrac{t}{4}+\tfrac{3t^3}{2}$$

$$\varphi_3(t)=\frac{7t^2}{4}+\frac{3t}{4}-\frac{3t^3}{2}\qquad \varphi_4(t)=\frac{t^3}{2}-\frac{5t^2}{12}-\frac{t}{12}$$

$$t=(x-x_i)/h,\quad h=x_{i+1}-x_i,\ x\in[x_i,x_{i+1}],\quad t\in[0,\ 1]$$

Ushbu ishda qaralgan lokal interpolyatsion kubik splaynning interpolyatsiya shartlarining bajarilishi xususida teorema isbotlangan.

$$\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(t)=1$$

2. Ushbu ishda qaralgan model asosida geofizik signallarni raqamli ishlov berish.

Ko'rib chiqilgan kubik splayn modellari orqali 1-jadvalda k yeltirilgan geofizik signalni tiklash ko'rib chiqildi. Yuqoridagi ketma-ketlik asosida MATLAB dasturi muhitida uchinchi darajali splayn qurish dasturi ishlab chiqildi va signalga ishlov berishda qo'llanildi (1-rasm).

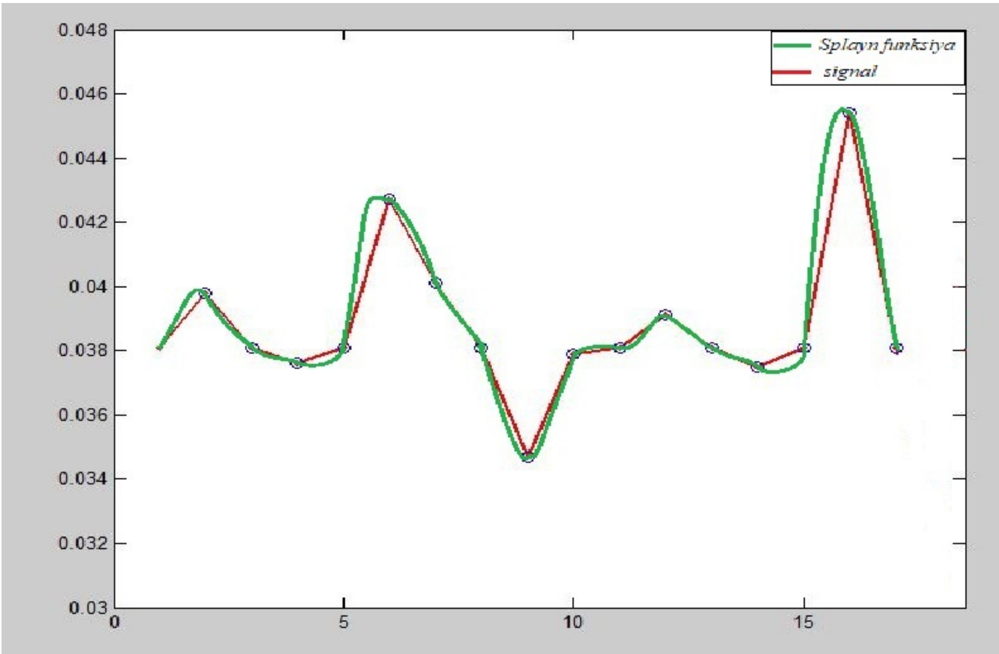
Geofizik signalning qiymatlari.

1-jadval.

в„–	Vaqt, sekund	Amplituda	в„–	Vaqt, sekund	Amplituda
1.	1	0.0381	10.	10	0.0379
2.	2	0.0398	11.	11	0.0381
3.	3	0.0381	12.	12	0.0391
4.	4	0.0376	13.	13	0.0381
5.	5	0.0381	14.	14	0.0375
6.	6	0.0427	15.	15	0.0381
7.	7	0.0401	16.	16	0.0454
8.	8	0.0381	17.	17	0.0381
9.	9	0.0347			

Geofizik signalni tiklash natijalari quyidagi chizmada овЂ™z aksini topgan.

1-rasm.



UDC 519.644

Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in the Sobolev space $K_2(P_m)$

Boltaev N.D. [1], Sodiqov S.S. [2] Xaytaliyev A.A. [3];

nboltayev@list.ru; sarvar.s@umail.uz

[1,2] Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;

[3] Termez State University, Termez, Uzbekistan;

Numerical calculation of integrals of highly oscillating functions is one of the more important problems of numerical analysis, because such integrals are encountered in applications in many branches of mathematics as well as in other science.Standard methods of numerical integration frequently require more computational works and they cannot be successfully applied. The earliest formulas for numerical integration of highly oscillatory functions were given by Filon [1] in 1928. The Filons approach for Fourier integrals

$$I[f;\omega]=\int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx,$$

is based on piecewise approximation of $f(x)$ by arcs of the parabola on the integration interval. Then finite integrals on the subintervals are exactly integrated. Afterwards for integrals with different type highly oscillating functions many special effective methods such as Filon-type method, Clenshaw-Curtis-Filon type method, Levin type methods, modified Clenshaw-Curtis method, generalized quadrature rule, Gauss-Laguerre quadrature are worked out.
We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta). \tag{1}$$

with the error functional

$$\ell(x)=e^{2\pi ipx}\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \tag{2}$$

where C_β,are the coefficients of formula (1), $h=1/N$, $i^2=-1$,$p\in Z$ and $p\neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function. The space $K_2(P_m)$ is defined as follows

$$K_2(P_m)=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}|\ \ \varphi^{(m-1)} - \text{is absolutely continuous and } \ \varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\},$$

and it equipped with the norm

$$\|\varphi|K_2(P_m)\|=\left\{\int\limits_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

where $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^m}{dx^m}+\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$.

The equality (3) defines a semi-norm for which
$\|\varphi\|=0 \iff \varphi(x)=c_1\sin x+c_2\cos x+R_{m-3}(x)$; $R_{m-3}(x)$ is an algebraic polynomial of degree $m-3$, $m\geq 2$.

The corresponding error of the quadrature formula (1) can be expressed in the form

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta\varphi(h\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

and it is a linear functional in the conjugate space $K_2^*(P_m)$ the space $K_2(P_m)$.
By the Cauchy-Schwarz inequality

$$|(\ell,\varphi)|\leq \|\varphi|K_2(P_m)\|\cdot\|\ell|K_2^*(P_m)\|,$$

the error (4) can be estimated by the norm of the error functional (2), i.e.,

$$\|\ell|K_2^*(P_m)\|=\sup_{\|\varphi|K_2(P_m)\|=1}|(\ell,\varphi)|.$$

In this way, the error estimate of the quadrature formula (1) on the space $K_2^*(P_m)$ can be reduced to finding a norm of the error functional ℓ in the conjugate space $K_2^*(P_m)$. Obviously, this norm of the error

functional ℓ depends on the quadrature parameters the coefficients C_γ and the nodes x_γ, $\gamma = 0; 1; ...; N$. The problem of finding the minimal norm of the error functional with respect to coefficients C_γ and nodes x_γ is called as Nikolskii problem, and the obtained formula is called the optimal quadrature formula in the sense of Nikolskii. This problem was first considered by Nikolskii [2]. A minimization of the norm of the error functional ℓ with respect only to coefficients C_γ, when nodes are fixed, is called as a Sards problem. The obtained formula is called the optimal quadrature formula in the sense of Sard. This problem was first investigated by A. Sard [3].
In this paper, using Sobolevs method, we give the solution of Sards problem for an arbitrary number of nodes $N+1$ in the space $K_2(P_m)$. Namely, we find the weight coefficients C_γ such that

$$\|\ell|K_2^*(P_m)\| = \inf_{C_\gamma} |(\ell, K_2^*(P_m))|. \tag{5}$$

Thus, in order to construct the optimal quadrature formula in the sense of Sard in the space $K_2(P_m)$ we need consequently to solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional ℓ of quadrature formulas (1) in the space $K_2(P_m)$.

Problem 2. Find the coefficients C_γ which satisfy equality (5) when the nodes x_β are fixed.
Here we determine the extremal function which corresponds to the error functional ℓ and give a representation of the norm of the error functional (2).

Using a concept of the extremal function for a given functional, we can calculate the norm of the error functional (2) in the space $K_2^*(P_m)$. Following Sobolev [4] we say that the function ψ_ℓ is extremal for the functional ℓ if the following equality holds $(\ell, \psi_\ell) = \|\ell|K_2^*(P_m)\| \cdot \|\psi_\ell|K_2(P_m)\|$.

In this paper, we have solved Problems 1 and 2. At the same time, explicit formulas for the coefficients of optimal quadrature formulas have been obtained, which are convenient for use.

References

1. **L.N.G. Filon,** *On a quadrature formula trigonometric integrals,*Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, 49, pp.38-47.
2. **S.M. Nikol'skii,** *On the question of estimating the approximation with quadrature formulas UMN,* 5, 2 (36), 1950, pp.165-177.
3. **A. Sard,** *Best approximate integration formulas,best approximate formulas,* Amer.J.Math LXXI (1949), pp.90-91.
4. **S.L. Sobolev,** *Introduction to the theory of cubature formulas.* M. Nauka, 1974, pp.808.

УДК 519.6:004.94

ON THE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR FILTRATION PROBLEM WITH A SOURCE AND MULTIPLE NONLINEARITIES

Mamatkulova M.Sh., Rakhmonov Z.R., Ruziqulov O.N.
National university of Uzbekistan; mamatqulova_m@mail.ru, zraxmonov@inbox.ru

We will discuss the next parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right) + u^\beta, \quad (x,t) \in R_+ \times (0, +\infty) \tag{1}$$

with nonlinear boundary condition

$$-\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}(0,t) = u^q(0,t), \;\; t > 0 \tag{2}$$

and initial value condition

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R_+ \tag{3}$$

where $p > 1 + 1/m$, β, $q > 0$, $u_0(x)$ - bounded, continuous, non-negative and nontrivial initial data. Equation (1) occurs in various areas of natural science [1, 3-5]. For example, equation (1) is considered in mathematical modeling of the thermal conductivity of nanofluids, in the study of problems of fluid flow through porous media, in problems of the dynamics of biological populations, polytropic filtration, structure formation in synergetics and nanotechnologies, and in a number of other areas [1-4].

Equation (1) is called a parabolic equation with variable density [1] and in case $m(p-1)-1 > 0$ corresponds to the equation of slow filtration [2,3]. Problem (1)-(3) has been intensively studied by many authors (see [2] and references therein) for various values of numerical parameters.

The aim of this paper is study of the condition of global solvability and unsolvability in time of solutions of problem (1)-(3) by using a combination of various kinds self-similar sub- solutions or super-solutions.

References

1. **M.Aripov.** *Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear problems,* Tashkent, FAN, 1988, 138 p.
2. **Galaktionov V.A., Vazquez J.L.** *The problem of blowup in nonlinear parabolic equations. Discrete and continuous dynamical systems,* 2002, 8 (2), P. 399-433.
3. **Kalashnikov A.S.** *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate secondorder parabolic equations.* Russian. Math. Surveys, 1987, 42 (2), P. 169-222.
4. **Galaktionov V.A., Levine H.A.** *On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary.* Israel J. Math., 1996, 94, P. 125-146.
5. **Galaktionov V.A.** *On global nonexistence and localization of solutions to the Cauchy problem for some class of nonlinear parabolic equations.* Zh.Vychisl.Mat.Mat.Fiz., 1983, 23, P. 1341-1354.

Differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral metod bilan approksimatsiyalash

Normurodov Ch. B.[1], Tursunova B. A.[2], Muhammadiyeva L. L.[3]
[1,2,3]Termiz davlat universiteti; barno.tursunova.2016@mail.ru

Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo'lgan 2-tartibli oddiy differensial tenglama uchun quyidagi masalani qaraylik:

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{2}\frac{du}{dy} = \frac{1}{8}(y+1), u(-1) = u(+1) = 0, y \in [-1,1], \tag{1}$$

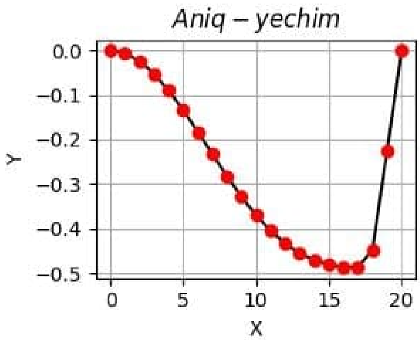
bu yerda ε - kichik parametr. Qaralayotgan masala (1) ning taqribiy yechimini quyidagi

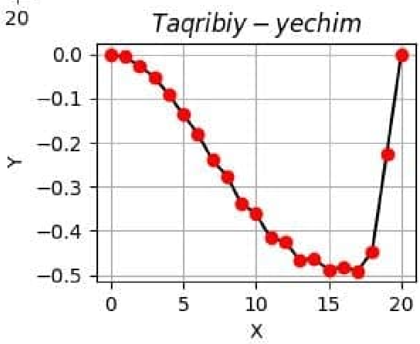
$$u_t(y) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(y), \tag{2}$$

qator ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $T_n(y)$ - birinchi tur Chebishev ko'phadlari. Chebishev ko'phadlari qatori (2) orqali differensial masala (1) quyidagi algebraik tenglamalar sistemasi ko'rinishida yoziladi:

$$Ax = B, \tag{3}$$

bu yerda $x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$,bunda A- berilgan kvadrat matritsa, B - o'ng tomondagi berilgan vektor. Sistema (3) ni yechib, x vektorning konponentalari $a_0, a_1, ..., a_N$ topiladi,ularni (2) ga qo'yib,differensial masala (1)ning taqribiy yechimining Chebishev kollokatsiya tugunlaridagi qiymatlari aniqlanadi.





Differensial masala (1) ning aniq yechimi kichik parametrning $\varepsilon = 10^{-2}$ qiymatida quyidagi ko'rinishda ega[1]:

$$u_a(y) = 0,49 \exp^{-50(y+1)} + 0,125y^2 + 0,245y - 0,37. \tag{4}$$

Chebishev kollokatsiya tugunlaridagi taqribiy yechim (2) va aniq yechim (4)ning qiymatlarini o'zaro taqqoslaymiz. Quyida ushbu yechimlarni taqqoslash natijalari keltirilgan:

$u_a(y)$	$u_t(y)$
0.0	0.0
-0.006	- 0.005
-0.02	-0.026
- 0.05	-0.05
-0.089977	-0.09
-0.13	-0.136
-0.18	-0.179
-0.23	-0.239
-0.28	-0.275
-0.328	-0.3379
-0.37	-0.36
-0.405	-0.4
-0.4337	-0.4
-0.455	-0.46
-0.47	-0.46
-0.48	-0.487
-0.486	-0.48
-0.4869	-0.49
-0.4475	-0.44
-0.225	-0.225
0.0	0.0

Hisoblash natijalari kichik parametr $\varepsilon = 10^{-2}$ va tugunlar soni $N = 20$ bo'lgan holda Python dasturlash tilida tuzilgan dastur asosida olingan.

Natijalarni taqqoslash grafik ko'rinishda quyidagi rasmda keltirilgan.

Литература

1. **Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н.** *О равномерно-сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной.* Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1981, т.12, №2, с.45-56.
2. **Абуталиев Ф. Б., Нормурадов Ч. Б.** *Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости.* Т.: Fan va texnologiya, 2011. 188 с.
3. **Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А.** *Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом.* International conference Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics, Part II, Sept.23-24, 2022; Samarqand, Uzbekistan, pp.38-39

UDC 519.644

EXPLICIT REPRESENTATION OF OPTIMAL COEFFICIENTS FOR HERMITE TYPE QUADRATURE FORMULAS

Nuraliev F. A.[1,2], Kuziev Sh. S.[2], Qudratillayev M. I.[3]
nuraliyevf@mail.ru; shahobiddin.qoziyev.89@gmail.com
[1] Tashkent State Transport University;
[2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics;
[3] Fergana State University.

As is generally known, numerical integration formulas or quadrature formulas are methods for the approximate evaluation of definite integrals. They are needed for the computation of those integrals for which either the antiderivative of the integrand cannot be expressed in terms of elementary functions or for which the integrand is available only at discrete points, for example from experimental data. In addition and even more important, quadrature formulas provide a basic and important tool for the numerical solution of differential and integral equations.

Consider the following general quadrature formula

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{j=0}^{\alpha} C_{\beta j}\varphi^{(j)}(x_\beta) \tag{1}$$

with the error functional

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j C_{\beta j}\delta^{(j)}(x-x_\beta) \tag{2}$$

here $C_{\beta j}$ are the coefficients and x_β are the nodes of the formula (1), $N = 1, 2, ...,$ $\alpha = 0, 1, ...,$ $p(x)$ is a weight function, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval [0,1], $\delta(x)$ is the Dirac delta-function, $\varphi(x)$ is an element of the space B.

The difference

$$(\ell_N, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{j=0}^{\alpha} C_{\beta j}\varphi^{(j)}(x_\beta) \tag{3}$$

is called the error of the quadrature formula (1).

By the Cauchy-Schwarz inequality

$$|(\ell_N, \varphi)| \leq \| \varphi|B \| \cdot \| \ell_N|B^* \|$$

the error (3) of the formula (1) is estimated with the help of the norm of the error functional (2) in the conjugate space B^*, i.e. by

$$\|\ell_N\,|B^*\| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} |(\ell_N, \varphi)|\,.$$

Thus, estimation of the error (3) of the quadrature formula (1) on functions of the space B is reduced to finding the norm of the error functional $\ell_N(x)$ in the conjugate space B^*.

Obviously the norm of the error functional $\ell_N(x)$ depends on the coefficients and the nodes of the quadrature formula (1). The problem of finding the minimum of the norm of the error functional $\ell_N(x)$ by coefficients and nodes is called S.M. Nikolskii problem, and obtained formulas is called optimal quadrature formulas in the sense of Nikolskii. This problem was first considered by S.M. Nikolskii [1]. Minimization of the norm of the error functional $\ell_N(x)$ by coefficients, when the nodes are fixed is called Sard's problem and obtained formulas is called optimal quadrature formulas in the sense of Sard. First this problem was investigated by A.Sard [2].

The results of this paper are related to Sard problem. The norm in $L_2^{(m)}(0,1)$ space is defined as follows [3]

$$\| \varphi(x)\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left\{ \int\limits_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx \right\}^{1/2} \tag{4}$$

and $\int\limits_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx < \infty$. The equality (4) is the semi-norm and $\| \varphi \| = 0$, if and only if $\varphi(x) = P_{m-1}(x)$, where $P_{m-1}(x)$ is a polynomial of degree $m-1$. We consider the following quadrature formula

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0\,[\beta]\varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1\,[\beta]\varphi''(h\beta) \tag{5}$$

with the error functional

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_0\,[\beta]\delta(x-h\beta) + \frac{h^2}{12}(\delta'(x)-\delta'(x-1)) -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N} C_1\,[\beta]\delta''(x-h\beta) \tag{6}$$

in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ for $m \geq 3$. Here $C_0[\beta] = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \beta = 0, N, \\ h, & \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases}$ are known coefficients and $C_1[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ are unknown coefficients of the formula (5), $h = \frac{1}{N}$, N is a natural number.

For the error functional (6) to be defined on the space $L_2^{(m)}(0,1)$ it is necessary to impose the following conditions

$$(\ell_N(x), x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, ..., m-1. \tag{7}$$

As was noted above by the Cauchy-Schwarz inequality, the error of the formula (5) is estimated by the norm $\left\| \overset{\circ}{\ell}_N \right\|_{L_2^{(m)*}}$ of the error functional (6). Furthermore the norm of the error functional (7) depends on the coefficients $C_1[\beta]$. We minimize the norm of the error functional (6) by the coefficients $C_1[\beta]$, we find

$$\left\| \mathring{\ell}_N \left| L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C_1[\beta]} \left\| \ell_N \left| L_2^{(m)*} \right\| . \qquad (8)$$

The coefficients $C_1[\beta]$ which satisfy the equality (8) are called the optimal coefficients and denoted by $\mathring{C}_1[\beta]$.

Thus to construct optimal quadrature formulas in the form (5) in the sense of Sard we have to consequently solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional (6) of the quadrature formula of the form (5) in the space $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Problem 2. Find coefficients $C_1[\beta]$ which satisfy the equality (8).

Problem 1 was solved in [4]. We are dealing with solving Problem 2.

Theorem. The coefficients $C_1[\beta]$, $\beta = 1, 2, ..., N-1$ of the optimal quadrature formulas of the form (5) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ have the following form

$$C_1[\beta] = \sum_{k=1}^{m-3} \left(d_k q_k^{\beta} + p_k q_k^{N-\beta} \right), \qquad \beta = 1, 2, ..., N-1,$$

where d_k, p_k are known, q_k are the roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-6}(q)$, $|q_k| < 1$, h is a small positive parameter.

References

1. **Nikolskii S.M.** To question about estimation of approximation by quadrature formulas. Uspekhi Matem. Nauk, 5:2 (36) (1950). pp. 165.
2. **Sard A.** Best approximate integration formulas. J. Math. 71 (1949).
3. **Sobolev S.L.** Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, 1974.
4. **Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S.** Discrete system of Wiener-Hopf type for composite optimal quadrature formulas, Problems of Computational and Applied Mathematics,- Tashkent, 2022, no. 4. pp. 116-128.

УДК 624.046

Ikki o'lchovli jismlarning kuchlanganlik holatini chekli elementlar usulida diskret modelini yaratish

Odilov J. Q., Poyonov M. B.
Каршинский государственный университет; odilovjahongir1993@gmail.com

Hozirgi davrda kompyuter texnologiyalarining jadal suratlar bilan rivojlanishi, yangidan-yangi amaliy masalalarni sonli yechishga imkon beradi.

Amaliy masalalarni sonli yechish usullaridan biri chekli elementlar usulidir. Chekli elementlar usuli fizika va texnikada uchraydigan differensial tenglamalarni sonli yechish usuli hisoblanadi. Qurilish mexanikasida chekli elementlar usuli patensial energiyani minimallashtirib masalani chiziqli tenglamalar sistemasiga olib kelish imkonini beradi[1].

Ikki o'lchovli dekart koordinatalar tizimida izotrop elastik jism tashqi kuchlar ta'sirida turg'un xolatda bo'lsin. Berilgan tashqi kuch va tabiiy chegaraviy shartlar asosida hosil bo'lgan jismning kuchlanganlik xolatini aniqlash masalasini yechish talab qilinsin [2].

Bu masalani yechish uchun unga teng kuchli bo'lgan variatsion masalaning qo'yilishini ko'ramiz.

Masalaning variatsion ko'rinishi quyidagicha tasvirlanishi mumkin

$$\int\limits_S \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}dS - \int\limits_L \delta\{U\}^T \{P\}\,dL = 0.$$

bu yerda S-jismning yuzasi, L-chegarasi, $\{U\} = \{u, v\}$ - siljish vektorining komponentlari, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$ - deformatsiya vektorining komponentlari, $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx},\ \sigma_{yy},\ \tau_{xy}\ \}$ - ko'chish vektorining komponentlari.

Guk qonuniga asosan kuchlanish va deformatsiya quyidagi munosabat bilan bog'langan.

$$\{\sigma\} = [D]\ \ \{\varepsilon\}$$

bu yerda $[D]$-jismning elastiklik matritsasi.

Ikki o'lchovli xolda jismning elastiklik matritsasi atiga ikkita bog'lanmagan parametrga ega va uning ko'rinishi quyidagicha:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix}$$

bunda E - elastiklik moduli, μ - Puasson koeffitsenti.

Deformatsiya vektori $\{\varepsilon\}$ o'z navbatida siljish vektori bilan quyidagi munosabat bilan bog'langan:

$$\{\varepsilon\} = [B]\,\{U\}\,.$$

Bu yerda $[B]$- gradiyentlar matritsasi bo'lib, qo'yidagi ko'rinishga ega:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Qo'yilgan masala chekli elementlar usuli bilan yechiladi. Bu usulda jism egallab turgan soha kichik xajmga ega bo'lgan chekli elementlarga bo'laklanadi. u, v -siljishlarning approksimatsion funksiyalari har bir chekli element uchun keltiriladi. Asosiy nomalumlar sifatida tugun nuqtalar siljishi olinadi, chunki kichik soha ichidagi siljishlarning approksimatsiyasi uchun sodda funksiyalarni ishlatish imkoni bor [3].

Ko'rilayotgan jismning xususiyatlarini o'rganish chekli o'lchovlarga ega bo'lgan elementlarning xususiyatlarini o'rganishdan boshlanadi.

$e-$ chekli elementning siljish vektori komponentalari quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [IN_1, IN_2, \ldots, IN_N]\,\{g\}^e$$

bu yerda N_i- chekli elementning forma (ko'rinish) funksiyasi, n – chekli elementdagi tugun nuqtalar soni, I - o'lchami 2x2 bo'lgan birlik matritsa, $\{g\}^e = \{u_1\ , v_1, u_2\ , v_2\ , \ldots,\ u_n,\ v_n\}$ - chekli element tugun nuqtalarining siljish vektori.

Har bir chekli element uchun deformatsiya vektori ε va ko'chlanish vektori σ o'zaro quyidagicha bog'lanadi:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\ \ \{g\}^e,\quad \{\sigma\}^e = [D]\ \ \{\varepsilon\}^e$$

Har bir chekli element uchun Lagranj variatsion tenglamasini (1) quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$\left(\int\limits_{S^\ell} [B]^T\,[D]\,[B]\,dV\right)\ \{g\}^e - \int\limits_{L^e} [N]^T\,\{P\}\,dS = 0 \qquad (1)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$[k]^e = \int\limits_{S^e} [B]^T [D] \ [B] \ dS \quad \text{va } \{f\}^e = \int\limits_{L}^{e} [N]^T \ \{P\} \ dL.$$

U holda yuqoridagi (1) tenglamaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$[k]^e \ \{g\} - \{f\}^e = 0$$

bu yerda $[k]^e - e-$ chekli elementning qattiqlik matritsasi, $\{f\}^e$-tugun nuqtalarga keltirilgan kuchlar vektori.

Hal qiluvchi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qurish jarayonini ko‘rib chiqamiz. Jism-ning diskret modelidagi har bir tugun nuqta bir necha chekli elementning tarkibida ishtirok etganligi sababli, shu tugun nuqtaning muvozanat holatini tasvirlovchi tenglamaning satri shu chekli element-larning mos koeffitsiyentlarining yig‘indisini o‘z ichiga oladi. Misol uchun i- chi tugun nuqtaga mos keluvchi qattiqlik matritsasi koyeffitsentlari va unga mos keluvchi tugun nuqtalaridagi tashqi kuchlar vektori quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$\left(\sum_e [k_{i1}]\right)^e \{g_1\} + \left(\sum_e [k_{i2}]\right)^e \{g_2\} + \ldots + \left(\sum_e [k_{im}]\right)^e \{g_m\} - \sum_e \{f_i\}^e = 0,$$

bu yerda $\sum\limits_e \{f_i\}^e - i-$ tugun nuqtaga keltirilgan tashqi kuchlar komponentalarining yig‘indisi.

Tabiiyki bu yig‘indiga faqat i tugun nuqtani o‘z tarkibiga olgan chekli elementlar xissa qo‘shadi. Barcha ko‘rinishdagi tenglamalarni birlashtirganda boshlang‘ich jism diskret modelining umumiy tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$[K] \ \{G\} - \{F\} = 0,$$

bu yerda $[K]$-qattiqlik matritsasining global sistemasi, $\{G\} = \{g_1, \ g_2, \ldots, g_m\}$ $-$jami chekli elementlarning tugun nuqtalari siljishlarining umumiy vektori, $\{F\}$ - xar bir tugun nuqtalarga keltirilgan kuchlar yig‘indisining vektori, m-jismni xosil qiluvchi chekli elementlarning umumiy soni.

Berilgan jismning diskret modelini yaratish, ya’ni uni chekli elementlarga ajratish qo‘yilgan masalani yechishning birinchi qadami xisoblanadi va nazariy asosga ega emas.

Shuning uchun iloji boricha ko‘rilayotgan jismni har tomonlama o‘rganib uni chekli elementlar majmuasi yordamida ifodalash kerak. Har bir xususiy xolda bu jarayorga individual yondashish kerak va chekli elementlar yordamida keraklicha maydalagan holda jismni to‘ldirish kerak. Jismni chekli elementlarga ajratish uch bosqichdan iborat.

Birinchi bosqichda har xil elementar saholarni diskretlash algoritmlari tuziladi, ikkinchi bosqich-da shu elementar sohalar yordamida boshlang‘ich soha xosil qilinadi (bir biriga yondashgan sohalar o‘zaro o‘lanadi) va yakuniy bosqichda jismning diskret modelidagi tugun nuqtalar nomerlari optimal ravishda tayinlanadi.

Ikki o‘lchovli sohalarda ham diskretlash jarayonini avtomatlashtirish mumkin. Chekli elementlar usulining chiziqli algebraik tenglamasining koeffitsiyentlarining ko‘p qismi nollardan iborat bo‘ladi va jismni xosil qiluvchi chekli elementlar va tugun nuqtalarini nomerlash jarayoniga katta ahamiyat berish kerak. Chunki bu jarayon tenglamalar sistemasini yechish vaqtini oshirib yuboradi. Shuning uchun tugun nuqtalar va chekli elementlarni shunday optimal nomerlash kerak-ki, provard natijada tenglamalar sistemasining tuzulishi lenta ko‘rinishiga ega bo‘lishi kerak. Va nolga teng bo‘lmagan koeffitsiyentlar lentasinig uzunligi iloji boricha kichik bo‘lishi kerak. Buning uchun biz jismning diskret modelini tuzish uchun “frontal” usulini qo‘llaymiz. Bu usulni qo‘llash natijasida boshlang‘ich xoldagi diskret modelidagi tugun nuqtalar va chekli elementlar qaytatdan nomerlanadi. Shuning natijasida jismning optimal diskret modeli tuziladi. Odatda, ikki o‘lchovli jismlarni diskretlash uchun to‘rtburchaklardan foydalaniladi. Lekin qulaylirog‘i albatta to‘rtburchakli prizmalardir, chunki ulardan diskret model xosil qilish ancha yengilroqdir va jarayonni vizuallashtirish ravon tasavvur qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Безухов Н.И., Лужин О.В.** *Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.* М.: Высшая школа. - 1994. - 200 с.
2. **Зенкевич О.** *Метод конечных элементов в технике:* М.: Мир -1995. - 541 с.
3. **Сегерлинд Л.** *Применение метода конечных элементов:* М.: Мир - 1987. - 374 с.

УДК 519.6:004.94

ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Rakhmonov Z.R., Alimov A.A.
National university of Uzbekistan; zraxmonov@inbox.ru, akram_alimov@mail.ru

Consider the following nonlinear system of parabolic equations coupled via nonlinear boundary conditions

$$\begin{cases} u_t = \nabla\left(|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2}\nabla u^{m_1}\right), & x \in R_+^N,\ t>0, \\ u_t = \nabla\left(|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2}\nabla v^{m_2}\right), & x \in R_+^N,\ t>0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -|\nabla u^{m_1}|^{p_1-2}\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1} = u^{\beta_1}(0,t)\, v^{q_1}(0,t), & x_1 = 0,\ t>0, \\ -|\nabla v^{m_2}|^{p_2-2}\frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1} = u^{\beta_2}(0,t)\, v^{q_2}(0,t), & x_1 = 0,\ t>0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x>0, \tag{3}$$

where $R_+^N = \left\{(x_1,x')\,|x' \in R^{N-1},\ x_1>0\right\}$, $m_i>1$, $p_i>1+1/m_i$, $\beta_i>0$, $q_i>0$ $(i=1,2)$, u_0 and $v_0(x)$ are nonnegative continuous functions with compact supports in R_+^N.

The nonlinear parabolic system of equations (1) occurs in various applications as a model of biological populations, chemical reactions, heat transfer, filtration, diffusion, etc. For example, $u(x,t)$ and $v(x,t)$ are the densities of two biological populations in the process of migration or the temperatures of two porous materials during heat propagation [1-5].

The nonlinear boundary conditions (2) can be used to describe the influx of energy input at the boundary. For instance, in the heat transfer process (2) represents the heat flux, and hence the boundary conditions represent a nonlinear radiation law at the boundary. This kind of boundary conditions appears also in combustion problems when the reaction happens only at the boundary of the container, for example because of the presence of a solid catalyzer, see [1, 4] for a justification.

In recent years have been intensively studied the problems on blow-up and global existence conditions, blow-up rates to nonlinear parabolic equations [5]. In particular, critical exponents of the Fujita type, which plays an important role in studying the properties of mathematical models of various nonlinear processes, are described by nonlinear parabolic equations and a system of such equations of mathematical physics (see [1-4] and references therein).

The aim of this paper is study of the condition of global solvability and unsolvability in time of solutions of problem (1)-(3) by using a combination of various kinds self-similar sub- solutions or super-solutions. We are established Fujita-type critical exponents and critical exponents for the global existence of the solution of (1)-(3).

We introduce the following notation

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1 p_1(p_2-1)+(p_1-1)}{q_1\beta_2 p_1 p_2 - s_1 s_2}, \alpha_2 = \frac{\beta_2 p_2(p_1-1)+p_2-1}{q_1\beta_2 p_1 p_2 - s_1 s_2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1-\alpha_1(m_1(p_1-1)-1)}{p_1}, \lambda_2 = \frac{1-\alpha_2(m_2(p_2-1)-1)}{p_2},$$

$$s_1 = (p_1-1)(m_1+1)-\beta_1 p_1, s_2 = (p_2-1)(m_2+1)-q_2 p_2.$$

Theorem 1. Assume that $\beta_1 \leq \frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1}$, $q_2 \leq \frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2}$.
If $q_1\beta_2 \leq \left(\frac{(p_1-1)(m_1+1)}{p_1} - \beta_1\right)\left(\frac{(p_2-1)(m_2+1)}{p_2} - q_2\right)$, then every solution of the system (1)-(3) exists globally in time.

References

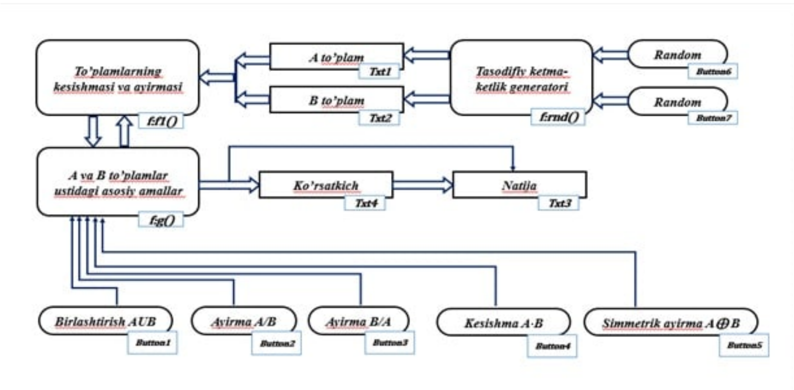
1. **Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L.** *Nonlinear Diffusion Equations,* Singapore: World Scientific, 2001.
2. **M. Aripov.** *Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear Problems,* FAN, Tashkent, 1988.
3. **A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov.** *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
4. **A.S.Kalashnikov.** *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order*, Russian Math. Surveys, 42, (1987), 169-222.
5. **E. Dibenedetto.** *Degenerate Parabolic Equations,* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.

MANTIQIY IFODALARNI HISOBLASH DASTURIY TA'MINOTI

Sayidqulov A.X.,Djurayev S.D, Malikov O.S.
Samarqand davlat universiteti, saidqulov98@bk.ru
Termez davlat universiteti

Masofaviy ta'lim uchun avtomatlashtirilgan o'qitish va nazorat qilish tizimining dasturiy ta'minotini yaratish talabalar mustaqil ta'limini rivojlantirishda muhim ahamiyat kasb etadi.
Mazkur ishda "Mulohazalar algebrasi formulalarining chinlik jadvalini hosil qilish"mavzusiga oid amaliy mashg'ulotlarni bajarish jarayonini namoyish qilish asosida o'qitish va talabalarni mustaqil topshiriqlarini bajarilishini nazoratini amalga oshirish texnologiyasi va dasturiy ta'minoti bayon etiladi.
Dasturni ishlashida ikkita rejim nazarda tutilgan, ya'ni, o'qitish rejimi va nazorat rejimi.
O'qitish rejimida dasturdan foydalanuvchi ushbu amaliy mashg'ulotni bajarish jarayonini to'liq bosqichlarini dastur yordamida kuzatadi. Zarurat bo'lganda yordam tizimi orqali har bir bosqichning bajarilish mazmuniga mos izohlar beriladi.
Dasturda ma'lumotlarni kiritish, chiqarish va tahrirlash uchun quyidagi funksiyalar yaratilgan:
−formulalarni kiritish uchun mantiqiy amallar va yordamchi belgilar uchun palitralar;
−kiritilgan formulalarni sintaktik tahlil qilish;
− formulani binar tarkibiy qismlarga ajratish;
− binary amallar va formula uchun chinlik jadvalini hosil qilish;
talaba mustaqil bajargan vazifani nazoratini amalga oshirish.
Mantiqiy ifodalarni qiymatini hisoblashda ularning yozuvidagi qavslardan qutulish va amallar ketma-ketligini hisoblashda ularning imtiyoziga rioya qilish uchun uni teskari polyakcha yozuvini (T.P.Y) hosil qilish lozim. Bunda, inkor amalining imtiyozi 4, konyunksiya 3, dizyunksiy 2, qolgan amallarniniki 1 va ochilgan qavsniki 0 deb qabul qilinadi.
T.P.Y ga o'tgan ifodalar qiymatini ketma-ket chapdan o'nga tomon hisoblash mumkin. T.P.Y. ni stekdan foydalanib hosil qilamiz.
T.P.Y. ni hosil qilish uchun 3 xil maydon bor deb hisoblaymiz. 1-maydonga berilgan ifoda, 3-maydonga natija yoziladi, 2-maydonda amallar steki hosil qilinadi.
1. 1-maydondagi har bir belgi navbatma-navbat tekshiriladi, agar navbatdagi belgi son yoki o'zgaruvchi bo'lsa, u holda u 2-maydonga yoziladi.
2. Agar belgi-amal ishorasi bo'lsa, u holda berilgan amal imtiyozini (prioritet) tekshiramiz:
a) Agar amallar steki bo'sh bo'lsa, yoki unda mavjud belgining imtiyozi (unda faqat amal belgilari va

ochuchi qavs bo'lishi mumkin) joriy belgi imtiyozidan kichik imtiyozga ega bo'lsa, u holda joriy belgi stekga joylashtiriladi.
b) Agar stek uchidagi belgi joriy belgi imtiyozidan katta yoki teng imtiyozga ega bo'lsa, u holda stekdan belgilarni 3-maydonga ushbu shart bajarilguncha yoziladi va a) bandga o'tiladi.
3. Agar joriy belgi-ochuvchi qavs bo'lsa, u holda uni stekga joylashtiriladi. Agar joriy belgi-yopuvchi qavs bo'lsa, u holda stekdagi belgilar 3-maydonga o'tkaziladi (ya'ni 0 imtiyozli belgi) va qavslar tashlab yuboriladi. Agar 1-maydonda tekshirilmagan belgi qolmasa algoritm o'z ishini tugatadi.
T.P.Y da yozilgan ifodani hisoblash algoritmidan foydalanib mantiqiy ifodalarning chinlik to'plamini tuzish uchun JS dasturlash tili tanlandi. Chinlik to'plamini tuzishda quyidagi ketma-ketlik asosida hisoblash ishlari olib borildi:
1. Berilgan ifodada operandlarning maksimal soni hisoblandi.
2. Operandlar alifbo tartibida saralandi va ularga mos ravishda chinlik jadvalining qiymatlari hosil qilindi. Bunda alifbo tartibida saralangan malumotlarning o'rni qatiy o'zgarmas bo'lishi ta'minlandi va bu orqali stekda operandning qiymatini qo'yish uchun osonlashishga erishildi, ya'ni operandlarning indeksidan foydalanildi.
3. T.P.Y.ga keltirilgan mantiqiy ifodani 2-bandda hosil qilingan qiymatlarni ketma-ket tartibda T.P.Y.ni hisoblash algoritmi bo'yicha hisoblash ishlari olib borildi.
4. Chinlik to'plamni tuzish uchun olingan qiymatlar va ularning natijalari jadval ko'rinishda foydalnuvchiga taqdim etiladi.



Adabiyotlar

1. A.V.Axo, R.Seti, D.D.Ulman. Kompilyator: prinsip, texnologii i instrument. M.: "Vilyams 2003.
2. Kompanies R.I., Mankov Ye.V., Filatov N.E. Sistemnoe programmirovanie: Osnov postroeniya translyatorov + FD.- M.: KORONA print.- 2004.- 255 s.
3. Gordeev A.V., Molchanov A.Yu. Sistemnoe programmnoe obespechenie. - SPb.: Piter, 2002. - 734 s.

KOMPYUTERDA O'QITISHNING IMITATSION MODELI

Sayidqulov A.X., Musurmonqulov O.Z.,Hasanov S.Ch.
Samarqand davlat universiteti, saidqulov98@bk.ru
Termez davlat universiteti magistranti

Vizual imitatsion kompyuter modelidan foydalangan holda diskret matematikani o'qitishning asosiy maqsadi talabalarning matematik modellar va ularni o'rganish algoritmlarini qurish va tahlil qilish ko'nikmalarini shakllantirish, matematika va informatika o'rtasidagi bog'liqlikdan ko'rsatishdan

iboratr.
Diskret matematikada uzluksiz o'qitish bosqichlari o'quvchilarning yoshi, ularning psixologik va jismoniy imkoniyatlari, mashg'ulot davomida erishilgan va hal qilingan turli maqsad va vazifalar bilan belgilanadi.
Ishning asosiy maqsadi - informatika va axborot texnologiyalari asosida o'qitish va nazoratni tashkil qilish treningini loyihalash hamda amalga oshirishdan iborat. Bunday treningning barcha bosqichlarida tinglovchilar zamonaviy axborot olamida samarali faoliyat uchun mavzunan yaxshiroq o'zlashtiradilar, voqelikni o'rganish uchun kuchli vositalardan, shu jumladan, kompyuter texnologiyalaridan foydalanish ko'nikmalarini egallaydilar, hayotiy muammolarni hal qilishda aqliy qobiliyatlarini rivojlantiradilar.
Ta'lim jarayonida vizual modellardan foydalanish predmet sohani o'rganishga qiziqishni oshirishga yordam beradi. Axborot modellarining eng ko'p qo'llaniladigan turlaridan biri to'rtburchaklar jadvalidir.
Imitatsion kompyuter modelining vazifasi: ma'lum bir scenariya asosida talabalarga diskret matematikaning mavzuga doir nazariy tushunchalarni amaliy jihatlarini imitatsiya qilish asosida o'rgatishdir, bu esa amaliy mashqlarni bajarish usullarini o'zlashtirish jarayonini kompyuter dasturidan foydalangan holda samarali tashkil etish imkoniyatlarini ko'rsatishdan iborat.
Vizual imitatsion kompyuter modelining maqsadi diskret matematika to'plamlar ustida eng ko'p qo'llaniladigan asosiy amallarni o'rgatish, bunda, to'plamlar ustida amallarni bajarilish jarayonini tushuntirishda talabalar quydagilarni o'rganadi:
- to'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari, to'plamlar ustida amallarni modellashtirish usullari;
- taklif etilayotgan dasturiy vositadan aniq matematik masalalarni yechishda foydalana olish;
- diskret matematikaning asosiy atamalari, tushunchalari va usullari, aniq matematik muammolarni modellashtirish uchun dasturlash tillari haqida tasavvurga ega bo'lish.

Dasturni ishlash tavsifi.
Dastur quyidagilardan tashkil topgan:
- HTML gipermatn belgilash tilidagi interfeys qismi;
- JavaScript-ning C-ga o'xshash tilidagi funksional qismi.
Interfeys qismida quyidagilar nazarda tutilgan:
- dastur sarlavhasi, muallif haqidagi ma'lumotlar, qayta ishlash vaqti;
- to'plam elementlarini belgilangan maydonlariga kiritish tanlanadi-generatsiya qilish, foydalanuvchi

tomonidan kiritish, fayldan yuklash;
- natijalarni chiqarish maydonlari tanlanadi-konsol yoki tashqi fayl bo'lishi mumkin;
- o'rnatilgan o'qitish, mashq qilish, nazorat ishi topshirish rejimi tanlanadi.
Dasturdan foydalanuvchi, ikkita chekli sonli to'plam ustida ayirma, kesishma, birlashma, simmetrik ayirma amallarini bajarilish jarayonini kuzatish, mustaqil bajarib mashq qilish-mashqni bajarilishda xatoliklar izohlar bilan ko'rsatiladi, nazorat ishi topshirish mumkin.

Adabiyotlar

1. Zaxarova L.E. Algoritm diskretnoy matematiki: Uchebnoe posobie.M., Izd-vo Moskovskogo gosudarsvennogo instituta elektroniki i matematiki , 2002.
2. A.V.Axo, R.Seti, D.D.Ulman. Kompilyator: prinsipr, texnologii i instrument. M.: "Vilyams 2003.
3. Gordeev A.V., Molchanov A.Yu. Sistemnoe programmnoe obespechenie. - SPb.: Piter, 2002. - 734 s.

UDC 681.3.06

Mathematical model of biological populations depending on two previous steps

Seytov Sh. J.[1], Nishonov. S. N.[2], Sirliyeva F. A.[3]
[1]Tashkent state university of economics; sh-seytov@mail.ru
[2]Termiz state university; samad.nishonov@bk.ru
[3]Jizzakh state pedagogical university; sirliyevafarida94@gmail.com

The present paper is devoted to investigation of the modified case of the logistic mapping $x_n = \lambda \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-2})$ which depends on previous two steps. We learned logistic mappings as second-order difference equations. We have classified all Cauchy problems whose solutions are stable, unstable, periodic, and chaotic.

Modified case of the logistic mapping (ML)

$$x_n = \lambda \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-2}) \tag{1}$$

where $|x_n|$ is a number the number of existing population to the maximum possible population [1,3] in millions. The values of interest for the parameter λ means conditions for living.

Definition 1. The filled Julia set K of a mapping (1) is defined as the set of all points x, that have bounded orbits with respect to mapping (1) [2].

Definition 2. Julia set is the common boundary of the filled Julia set $J = \partial K$.

Theorem 1. The mapping (1) has two fixed points $fix(ML) = \{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\}$.

Theorem 2. The fixed point zero is stable for $0 < \lambda < 1$ and unstable for $\lambda > 1$.

Theorem 3. The fixed point $1 - \frac{1}{\lambda}$ is stable for $1 < \lambda < 5/4$ and unstable for $\lambda > 5/4$.

Theorem 4. The mapping (1) has periodic orbits for $5/4 < \lambda < 9/4$.

Theorem 5. The mapping (1) has chaotic orbits for $\lambda > 9/4$.

References

1. **Ganikhodzhayev, R., Seytov, Sh.J.** An analytical description of mandelbrot and Julia sets for some multi-dimensional cubic mappings // IP Conference Proceedings 2021, Vol.2365, Page.050006.
2. **Ganikhodzhaev, R.N., Seytov, Sh.J.** Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings // Global and Stochastic Analysis. 2021. Vol.8, No 3. Page. 41-45.
3. **Ganikhodzhaev, R.N., Seytov, Sh.J.** Mathematical modelling of the evolutions of the populations in the connected two islands // Problems of computational and applied mathematics

2021. Vol.1 (31), Page.24-35.

UDC 681.3.06

Coexistence chaotic behavior on the evolution of the reaction of the chemical systems modeling by three-dimensional quadratic mappings

Seytov Sh. J.[1], Ochilova G.[2]
[1]Tashkent state university of economics; sh-seytov@mail.ru
[2]Jizzakh state pedagogical university; ochilovagulinur85@gmail.com

The present paper is devoted to investigation of the modified case of the logistic mapping $x_n = \lambda \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-2})$ which depends on previous two steps. We learned logistic mappings as second-order difference equations. We have classified all Cauchy problems whose solutions are stable, unstable, periodic, and chaotic.

Let $S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{k=1}^{m} x_k = 1, x_k \geq 0\} \subset R^m$, $(m-1)-$ dimensional simplex in R^n.

Let $H_p = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) : \sum_{k=1}^{m} x_k = p\} \subset R^m$, $p \in R$, $(m-1)$ -dimensional hyperspace in R^m. When $p = 1$ the hyperspace H_1 is the expansion of the $(m-1)$ -dimensional simplex i.e. $S^{m-1} \subset H_1$.

In this paper, we study the properties of the quadratic stochastic operator (q.s.o) in the case $m = 3$, $S^2 \subset H_1$, $V : H_1 \to H_1$.

We investigate the reaction of dynamics of the chemical systems which has three kinds of substances. Let the reaction kinds have a following laws

$$I + I \mapsto I,\ \ II + II \mapsto II,\ \ III + III \mapsto III$$

$$I + II \mapsto II,\ \ II + III \mapsto I,\ \ I + III \mapsto III$$

then the evolution of this chemical system defines by the following mapping

$V_0 : H_1 \to H_1$

$$V_0 : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_2x_3, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_1x_2, \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases} \tag{1}$$

If the reaction have a following laws

$$I + I \mapsto I,\ \ II + II \mapsto II,\ \ III + III \mapsto III$$

$$I + II \mapsto I,\ \ II + III \mapsto II,\ \ I + III \mapsto III$$

then the evolution of this chemical system defines by the following mapping(1) $V_1 : H_1 \to H_1$

$$V_1 : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases} \tag{2}$$

Using a computer program we get a filled Julia set for the mapping (2) on H_1 hyperplane which is depicted in Fig. 1.

Let

$$V = \lambda V_0 + (1 - \lambda)V_1$$

V is the new evolution operator has both of the properties of V_0 and V_1 depends on $0 \leq \lambda \leq 1$.

Theorem 1. Operator V has chaotic orbits (chaotic reactions) and Sharkovsky order bifurcations at the value $\lambda = \frac{1}{2}$ on H_1 .

Theorem 2. The filled Julia set for V is

$$V : \begin{cases} -\frac{1}{2} - \left|x_2 - \frac{1}{2}\right| \leq x_1 \leq \frac{1}{2} + \left|x_2 - \frac{1}{2}\right|, \\ -1 \leq x_2 \leq 2, \\ -\frac{3}{2} - \left|x_2 - \frac{1}{2}\right| \leq x_3 \leq \frac{5}{2} + \left|x_2 - \frac{1}{2}\right|. \end{cases}$$

Theorem 3. Mandelbrot set for V is the set of all values λ

$$M = [0, 1].$$

References

1. **Ganikhodzhaev R. N., Seytov Sh. J.** *Multi-dimensional case of the problem of Von Neumann-Ulam.* Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems 9 (2020), pp. 27-42.
2. **Ganikhodzhaev R. N.** *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments.* Mathematical Manual 183 N 8 (1992), pp. 119-140.
3. **Devaney, R. L.:** *A first course of chaotic dynamical systems*, Addision-Wesley, Boston, 1992.

UDC 519.62

An implicit difference formula for linear differential equation of the first order in the Hilbert space

Shadimetov Kh. M.[1,2], Karimov R. S.[2,3], Muminov Sh. B.[4]
kholmatshadimetov@mail.ru; roziq.s.karimov@gmail.com
[1]Tashkent State Transport University;
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, UzAS;
[3]Bukhara Institute of Natural Resources Management;
[4]Fergana State University;

We consider the difference formula of the following form [1]

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) \cong h \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,1} \varphi'(h\beta), \tag{1}$$

here $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, C_β va $C_{\beta,1}$ are the coefficients, functions φ belong to the Hilbert space $W_2^{(3,2)}(0,1)$, which is defined as follows [2-3]

$$W_2^{(3,2)}(0,1) = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} | \varphi'' \text{ is absolutely continuous, } \varphi''' \in L_2(0,1)\}.$$

The inner product for the functions φ and ψ of the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ is defined as follows

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(3,2)}(0,1)} = \int_0^1 \Big[(\varphi'''(x) + \varphi''(x))(\psi'''(x) + \psi''(x)) \Big] dx. \tag{2}$$

Also, in the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ the norm of φ corresponding to the inner product (2) is determined as follows

$$\|\varphi | W_2^{(3,2)}(0,1)\| = \Big\{ \int_0^1 \Big[(\varphi'''(x) + \varphi''(x))^2 \Big] dx \Big\}^{1/2}.$$

The following difference between the sums given in the formula (1) is called the error of the formula

$$(\ell,\varphi)=\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\varphi\left(h\beta\right)-h\sum_{\beta=0}^{k}C_{\beta,1}\varphi'\left(h\beta\right)$$

The following error functional corresponds to this error

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C_\beta\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C_{\beta,1}\delta'(x-h\beta), \tag{3}$$

where $\delta(x)$ is Dirac's delta-function. Above (ℓ,φ) is the value of the error functional ℓ at the function φ and it is defined as [4]

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx.$$

It should be noted that since the error functional $\ell(x)$ is defined on functions from the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$, this functional satisfies the following conditions [5]

$$(\ell,1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\cdot 1dx=0,\ (\ell,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)xdx=0,\ \text{and}\ (\ell,e^{-x})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)e^{-x}dx=0.$$

From here we get the following equations for the coefficients:

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{\beta=0}^{k}C_\beta=0,\\ \sum\limits_{\beta=0}^{k}C_\beta\cdot(h\beta)=h\sum\limits_{\beta=0}^{k}C_{\beta,1},\\ \sum\limits_{\beta=0}^{k}C_\beta\cdot e^{-h\beta}=-h\sum\limits_{\beta=0}^{k}C_{\beta,1}\cdot e^{-h\beta}.\end{array}$$

Based on the Cauchy-Schwartz inequality, for the absolute value of the error of the formula we have the following estimation

$$|(\ell,\varphi)|\le\|\varphi|W_2^{(3,2)}(0,1)\|\cdot\|\ell|W_2^{(3,2)*}(0,1)\|.$$

Hence, the absolute error of the difference formula in the space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ is estimated by the norm of the error functional on the conjugate space $W_2^{(3,2)*}(0,1)$. From this we get the following problems.

Problem 1. Calculate the square of the norm $\|\ell|W_2^{(3,2)*}(0,1)\|$ of the error functional $\ell(x)$.

From the above formula (3) we can see that the norm $\|\ell|W_2^{(3,2)*}(0,1)\|$ depends on the coefficients C_β and $C_{\beta,1}$. Then we get.

Problem 2. Find the coefficients $C_{\beta,1}=\mathring{C}_{\beta,1}$ that satisfy the equation

$$\|\mathring{\ell}|W_2^{(3,2)*}(0,1)\|=\inf_{\mathring{C}_{\beta,1}}\ \sup_{\|\varphi|W_2^{(3,2)}(0,1)\|\ne 0}\frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi|W_2^{(3,2)}(0,1)\|}.$$

In this case $\mathring{C}_{\beta,1}$ are called *optimal coefficients* and the corresponding difference formula (1) is called the *optimal difference formula*.

In the present work we solve these problems.

Consequently, In this work we obtained to following results.

Theorem 1. *The following expression is valid for the norm of the error functional (3) to the difference formula (1)*

$$\|\ell|W_2^{(3,2)*}\|^2 = -\sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} C_\gamma C_\beta G_3(h\gamma - h\beta) - 2h\sum_{\gamma=0}^{k} C_\gamma \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,1} G_3'(h\gamma - h\beta) +$$

$$+h^2 \sum_{\gamma=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{k} C_{\gamma,1} C_{\beta,1} G_3''(h\gamma - h\beta),$$

where $G_3(x) = \frac{\mathrm{sign}(x)}{2}\Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x - \frac{x^3}{6}\Big)$, $G_3'(x) = \frac{\mathrm{sign}(x)}{2}\Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 - \frac{x^2}{2}\Big)$, *and* $G_3''(x) = \frac{\mathrm{sign}(x)}{2}\Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\Big)$.

Theorem 2. *The optimal coefficients of the implicit difference formula (1) in the Hilbert space* $W_2^{(3,2)}(0,1)$ *are defined by the following formula*

$$\overset{\circ}{C}_{\beta,1} = h^{-1}\Big\{D_2\left(h\beta - hk\right)\Big[f_2(hk) - f_1(hk)\Big] + \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2\left(h\beta + h\gamma\right)\Big[Q_2^{-}(-h\gamma) - f_1(-h\gamma)\Big] +$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty} D_2\left(h\beta - hk - h\gamma\right)\Big[Q_2^{+}(h\gamma + hk) - f_1(h\gamma + hk)\Big]\Big\},$$

where $\beta = 0, 1, ..., k$, $f_1(h\beta) = \frac{1}{4}\left[\left(e^h - 1\right)\left(e^{hk - h\beta - h} - e^{-hk + h\beta}\right) - h^2\left(2k - 2\beta - 1\right)\right]$, $f_2(hk) = \frac{1}{4}\left(e^h + e^{-h} - h^2 - 2\right)$,
and

$$D_2\left(h\beta\right) = \frac{1}{p_2^{(2)}}\begin{cases} A_1\lambda_1^{|\beta|-1} & \text{for } |\beta| \geq 2, \\ -2e^h + A_1 & \text{for } |\beta| = 1, \\ 2C + \frac{A_1}{\lambda_1} & \text{for } |\beta| = 0, \end{cases}$$

here

$$A_1 = \frac{2(1-\lambda_1)^2\left[\lambda_1(e^{2h}+1) - e^h(\lambda_1^2+1)\right]p_2^{(2)}}{\lambda_1 2\left[\lambda_1(1 - e^{2h} + 2he^h) - (1 - e^{2h} - 2he^{2h} - 2h)\right]},$$

$$\lambda_1 = \frac{h(e^{2h}+1) - e^{2h} + 1 - (e^h - 1)\sqrt{h^2(e^h+1)^2 + 2h(1 - e^h)}}{1 - e^{2h} + 2he^h},$$

$$C = \frac{1 - 2he^h + 4e^h - 4e^{3h} + 4he^{2h} - e^{4h} - 2he^{3h}}{1 - e^{2h} + 2he^h},$$

$$p_2^{(2)} = 1 - e^{2h} + 2he^h.$$

References

1. **BabuIska I., Vitasek E., Prager M.** *Numerical processes for solution of differential equations.* - Mir, Moscow, 1969, 369 p.

2. **Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.** *Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in* $W_2^{(m,m-1)}$ *space.* Calcolo, Springer, 2014, V.51, pp. 211-243.

3. **Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.** *Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in* $W_2^{(m,m-1)}$ *space.* BIT Numer Math, Springer, 2013, V.53, pp. 545-563.

4. **Sobolev S.L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* - Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

5. **Hayotov A.R., Karimov R.S.** *Optimal difference formula in the Hilbert space* $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Problems of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, 5(35), 2021, 129-136.

UDK 539.3

IKKI QO'ZG'ALMAS SHAR BILAN IZOTROPIK FAZONING NOSTATSIONAR KO'NDALANG TEBRANISHI

Shukurov A. M.[1], Karimov M. M.[2], Eshmurodov M. R.[3]
[1,2,3]Qarshi davlat universiteti;
ShukurovAmon@yandex.ru, muzaffarkarimov88030@gmail.com, muhiddin0174645@gmail.com

Tutash muhitlarda nostatsionar to'lqin jarayonlarini matematik modellashtirish va ularning tadqiqoti to'lqinlar dinamikasining murakkab hamda dolzarb muammolaridan biri bo'lib, u ko'pgina tadqiqotchilarining e'tiborini o'ziga tortib kelmoqda. Tutash muhitlar to'lqinlar dinamikasining dolzarbligi texnika sohasining rivojlanishi, yangi konstruksiyalarning yaratilishi, hamda geofizika, seysmologiya, neft-gaz qidiruvi, fuqarolik va sanoat qurilishi muammolari bilan aniqlanadi.

Ushbu ish cheksiz chiziqli bir jinsli izotropik fazosida joylashgan absolyut qattiq shar yaqindagi qo'zg'almas qattiq sharning nostatsionar buralishi natijasida yuzaga kelgan ko'ndalang to'lqin tarqalishi jarayonini o'rganishga bag'ishlangan.

Ishning maqsadi - masalaning yechish algoritmini ishlab chiqish va qo'zg'almas qattiq sharlar atrofidagi nuqtalarda nostatsionar ko'ndalang to'lqin jarayonlarini tadqiq etishdir.

Aytaylik, chegaralanmagan bir jinsli chiziqli izotropik fazosida mos ravishda radiuslari R_1 va R_2 bo'lgan qo'zg'almas absolyut qattiq sharlar joylashgan bo'lsin. Ularning markazlari orasidagi masofa l ($l > R_1 + R_2$) ga teng. Muhit harakatini o'rganish uchun ikkita sferik koordinatalar sistemasini kiritilgan: birinchi (r_1,θ_1,ϑ_1) sferik koordinataning boshlang'ich nuqtasi birinchi qattiq shar markazida, ikkinchi (r_2,θ_2,ϑ_2) sferik koordinataning boshlang'ich nuqtasi esa ikkinchi shar markazida joylashgan. Sharlar atrof muhit bilan to'liq ulashishgan.

Vaqtning boshlang'ich $\tau = 0$ momentda birinchi absolyut qattiq shar berilgan qonun $V(\tau,\theta_1)$ bo'yicha o'zi va ikkinchi sharning markazidan o'tuvchi o'q atrofida o'qsimmetrik (ϑ_1 koordinataga bog'liq emas) nostatsionar ko'ndalang buraladi. Bu holda muhitda ko'ndalang to'lqin tarqalish jarayoni yuzaga keladi.

Birinchi absolyut qattiq shar sirtida chegaraviy shart

$$w_1|_{r_1=R_1} = V(\tau,\theta_1) \tag{1}$$

ko'rinishga ega.

Ikkinchi shar sirtida esa ko'chish vektori komponentasi nolga teng

$$w_2|_{r_2=R_2} = 0. \tag{2}$$

Masalaning o'q simmetrikligini hisobga olib, izotropik muhitning nostatsionar harakati vektor potensialning noldan farqli ψ potensialiga nisbatan to'lqin tenglamasi bilan tasvirlanadi:

$$\gamma^2\ddot{\psi} = \Delta\psi - \frac{\psi}{r_i^2\sin^2\theta_i}, \quad \Delta = \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i^2\frac{\partial}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{r_i^2\sin\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sin\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right). \tag{3}$$

Boshlang'ich shartlar - bir jinsli

$$\psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{4}$$

Cheksizlikda to'lqin so'nadi

$$\lim_{r\to\infty}\psi = 0. \tag{5}$$

Bu holda w, $\sigma_{r\vartheta}$, $\sigma_{\theta\vartheta}$ va ψ funksiyalar o'zaro quyidagi munosabatlar bilan bog'langan [5]:

$$\sigma_{r\vartheta} = \eta \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\vartheta} = \frac{\eta}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - w \operatorname{ctg}\theta \right). \tag{6}$$

(1) - (6) boshlang'ich-chegaraviy masala vaqt bo'yicha Laplas integral almashtirishlarini qo'llash hamda Gegenbauer ortogonal ko'phadlari $C_{n-1}^{3/2}(x)$ bo'yicha to'liq bo'lmagan o'zgaruvchi-larni ajratish usuli bilan yechiladi [2]. Bir sferik koordinatalar sistemasidan ikkinchisiga o'tish $K_{n+1/2}(x)$ Bessel funksiyalari uchun [1] qo'shish teoremasi va ularning elementarlar funksiyalar orqali ifodasidan [4] foydalaniladi. Natijada chegaraviy shartlarning qatorlar koeffitsentlariga nisbatan ko'rinishi olinadi.

Boshlang'ich-chegaraviy masala Laplas almashtirishlarining tasvirlar fazosida noma'lum funksiyalarga nisbatan chiziqli cheksiz algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilgan bo'lib, uning yechimi cheksiz qatorlar ko'rinida izlanadi. Cheksiz qatorlarning koeffitsiyentlariga nisbatan rekurrent munosabatlar va ularga boshlang'ich shartlar olingan. Bu rekurrent munosabatlar noma'lum funksiyalarni Laplas integral almashtirishlari parametrining ratsional funksiyalari ko'ri-nishida aniqlashga va bu esa ularning originallarini qoldiqlar nazariyasi yordamida topishga imkon beradi [3].

Laplas almashtirishlarining tasvirlar fazosida ko'chish vektorining komponentasi va kuchlanish tenzorining komponetalari uchun formulalar olingan. Formulalar asosida sonli eksperimentlar o'tkazilgan bo'lib, ularning natijalari grafiklar shaklida tasvirlangan. Grafiklar qattiq shar sirtidan qaytgan to'lqinlarning ta'siri natijasida muhit kuchlanish-deformatsiya holatining o'zgarishini ko'rsatadi. Olingan natijalarni geofizika, seysmologiya va yerosti inshoatlarini loyihalashtirishda foydalanish mumkin.

Adabiyotlar

1. **Ivanov Ye.A.** *Difraksiya elektromagnitnix voln na dvux telax.* - Minsk: Nauka i texnika, 1968. - 584 s.
2. **Kuznetsov D.S.** *Spetsialniye funksii.* - M.: Visshaya shkola, 1985. - 423 s.
3. **Lavrentyev M.A., Shabat B.V.** *Metodi teorii funksii kompleksnogo peremennogo.* - M.: Nauka, 1987. - 688 s.
4. *Spravochnik po spetsialnim funksiyam s formulami, grafikami i tablitsami.* Pod red. M.Abramo-vitsa, I.Stigan. - M.: Nauka, - 1979. - 832 s.
5. **Shukurov O.** *Tutash muhitlarda nostatsionar to'lqin jarayonlari.* Qarshi: Nasaf,2011.-128b.

UDC 519.644

AN APPROXIMATE SOLUTION A METHOD OF ABEL'S INTEGRAL EQUATION IN THE HILBERT SPACE

Hayotov A. R.[1,2], Boytillayev B. A.[1], Turg'unboyev B. Sh.[3]

hayotov@mail.ru, bboytillayev@gmail.com

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek;

[3] Termez State University;

The Abel integral equation is closely related to the concept of fractional integration. Therefore, it is appropriate to solve general Abel integral equation. We consider the following integral equation

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = f(x). \tag{1}$$

This integral equation is called *general Abel integral equation*, where $0 < \alpha < 1$, $x > 0$, $t \in [0;x)$, $f(x)$ is the given function and $y(x)$ is the searching function.

It is known, that the analytical solution of the general Abel integral equation has the form (see, for example, [1]).

$$y(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int\limits_0^x \frac{f'(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \right] \tag{2}$$

It can be seen that in order to find the solution of equation (1), it is necessary to calculate the integral in expression (2). But in many cases it is impossible to find the value of such integrals exactly. Therefore, it is important to calculate the value of such an integral using certain optimal quadrature formulas. In this work, we are engaged in constructing optimal quadrature formula of the following form for the approximate calculation of such integrals in the Hilbert space $W_2^{(1,0)}(0,t)$.

$$\int\limits_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta) \tag{3}$$

where $0 < \alpha < 1$, and the corresponding error functional is

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - h\beta) \tag{4}$$

here, C_β are the coefficients of formula (3), $\varepsilon_{[0,t]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,t]$ and $\delta(x)$ is Dirac's delta function.

Suppose that the function φ belongs to the space $W_2^{(1,0)}(0,t)$. This space is the Hilbert space, which is provided by the following norm

$$\|\varphi\|_{W_2^{(1,0)}} = \sqrt{\int\limits_0^t (\varphi'(x) + \varphi(x))^2 dx}$$

In this case, the main problem is as follows.

Problem 1. Find the coefficients

$$\overset{o}{C}_\beta, \ \beta = 0, 1, ..., N$$

that give the minimum value to the norm $\|\ell\|_{W_2^{(1,0)*}}$ and calculate the following

$$\left\|\overset{o}{\ell}\right\|_{W_2^{(0,1)*}} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{W_2^{(1,0)}}.$$

To solve this problem, first of all, we find the norm of the error functional and we have

$$\|\ell\|^2 = -\left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta C_\gamma G_1(h\beta - h\gamma) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \int\limits_0^t \frac{G_1(x-h\beta)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int\limits_0^t \int\limits_0^t \frac{G_1(x-y)dxdy}{(t-x)^{1-\alpha}(t-y)^{1-\alpha}} \right]. \tag{5}$$

Then, the following analytical expressions were obtained for the optimal coefficients $\overset{o}{C}_\beta$, $\beta = 0, 1, ..., N$ that give the smallest value to this quantity.

$$C_0 = D_1(h)\left(f_1(h) + a^- e^h - \frac{e^{-h}}{4} g_\alpha\right) + D_1(0) f_1(0), \tag{6}$$

$$C_\beta = D_1(h)\left(f_1(h\beta + h) + f_1(h\beta - h)\right) + D_1(0) f_1(h\beta), \qquad \beta = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

$$C_N = D_1(h)\left(\frac{e^{h(N+1)}}{4} g_\alpha + a^+ e^{-h(N+1)} + f_1(h(N-1))\right) + D_1(0) f_1(hN). \tag{8}$$

where $D_1, f_1, g_\alpha,\ a^-,\ a^+$ are known. We have the following result.

Theorem 1. The optimal coefficients for the quadrature formulas of the form (3) in the space $W_2^{(1,0)}(0,t)$ are defined by the formulas (6)-(8).

Numerical results. We also checked the obtained results numerically. And we got high accuracy.

We present the numerical results of quadrature formulas of the form (3).

EXAMPLE 1. Solve the following general Abel‘s integral equation

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = x$$

Note that $\alpha = \frac{1}{2}$; $f(x) = x$. Obviously, the solution will be in the form $y(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{x}$.

Our goal is to calculate the integral with great accuracy

$$\int_0^t \frac{y(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}}$$

Consider a quadrature formula of the form

$$\int_0^t \frac{y(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta)$$

We solved the equation using optimal quadrature formulas, and the resulting approximate solution is compared with the exact and other existing methods, which is reflected in the table

t_i	the exact solution	method OQF	error
0.1	0.10	0.0996	0.0004
0.2	0.20	0.1992	0.0009
0.3	0.30	0.2987	0.0013
0.4	0.40	0.3983	0.0017
0.5	0.50	0.4978	0.0022
0.6	0.60	0.5973	0.0027
0.7	0.70	0.6968	0.0032
0.8	0.80	0.7963	0.0037
0.9	0.90	0.8957	0.0043
1.0	1.00	0.9950	0.0050

EXAMPLE 2. Solve the following general Abel's integral equation

$$\int_{0}^{x} \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{4}}} dt = \frac{128}{231} x^{\frac{11}{4}}$$

Note that $\alpha = \frac{1}{4}$; $f(x) = \frac{128}{231} x^{\frac{11}{4}}$. Obviously, the solution will be in the form $y(x) = x^2$.

We obtained using optimal quadrature formulas, and the resulting approximate solution is compared with the exact and other existing methods, which is reflected in the table

t_i	the exact solution	method OQF	error
0.1	0.0160	0.0160	0.00
0.2	0.0761	0.0762	0.0001
0.3	0.1895	0.1899	0.0003
0.4	0.3619	0.3625	0.0005
0.5	0.5980	0.5989	0.0009
0.6	0.9012	0.9026	0.0013
0.7	1.2749	1.2768	0.0019
0.8	1.7217	1.7241	0.0024
0.9	2.2441	2.2470	0.0029
1.0	2.8444	2.8479	0.0034

In this paper, we constructed an optimal quadrature formula (3) for the approximate calculation of the general Abel integral equation of the form (1), in the space in the sense of Sard. To find the coefficients of the optimal quadrature formula, the extremal function of the functional was found. Using it, the square of the norm of the error functional (5) was calculated. An analytic form of the coefficients giving a conditional minimum to this norm was found. The optimal quadrature formula was obtained by minimizing the norm of the error functional in coefficients. Then, we applied these coefficients to approximate solution of the general Abel integral equation. We showed that weakly integral equations can be solved with higher accuracy using the optimal quadrature formula.

References

1. **Samko S.G.,Kilbas A.A, Marichev O.I.** *Fractional integrals and derivatives and some of their applications.* Nauka i texnika. Minsk 1987. 25-50 pp.

UDC 519.644

An approximation formula for periodic functions in the Hilbert space and its application to CT image reconstruction

Hayotov A. R.[1,2], Khayriev U. N.[1]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, UzAS, hayotov@mail.ru;

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, khayrievu@gmail.com;

The Fourier integrals are broadly used in science and technology, specifically, in the problems of Computed Tomography (CT). It is widely known that when complete continuous X-ray data are accessible, CT images can be reconstructed exactly using the filtered back-projection formula (see, for instance, [2]). This formula consequentially uses the Radon transform, the Fourier transforms, and the back-projection formula. Fourier transforms play an important role in the filtered back-projection method of CT image reconstruction. Since in practice we have finite discrete values of the Radon transform, we have to approximately calculate the Fourier transforms. That reason, one has to consider the problem of approximate work out of the integral

$$I_\varphi(\omega)=\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

where $\omega\in\mathbb{R}$. Such type of integrals for sufficiently large ω is called integrals with *highly* or *strongly oscillating integrands.*

We consider the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}[0,1]$ of complex-valued functions φ defined in the interval $[0,1]$, which possess an absolute continuous on $[0,1]$. We denote by $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1]$ the subspace of $W_2^{(m,m-1)}(0,1]$ consisting of complex-valued, 1-periodic functions (see [1] for details).

Consider a quadrature formula of the following form

$$\int\limits_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx\cong\sum_{k=1}^N C_k\varphi(hk), \tag{2}$$

where $\varphi(x)\in\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}(0,1]$, C_k are coefficients of the quadrature formula and $N\in\mathbb{N}$, $h=1/N$.

The error of quadrature formula (2) is the following difference

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx-\sum_{k=1}^N C_k\varphi(hk). \tag{3}$$

Coefficients that minimize the absolute value of the error (3) with the fixed nodes are called *optimal coefficients* and the are denoted by $\mathring{C}_k$. The quadrature formula with coefficients $\mathring{C}_k$ is called *the optimal quadrature formula in the sense of Sard.*

Theorem 1. *In the space $\widetilde{W}_2^{(m,m-1)}$ the following formulas are valid for the optimal coefficients of the quadrature formula* (2)

$$\mathring{C}_0=\frac{K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m}+(2\pi\omega)^{2m-2}},\mathring{C}_k=\frac{2K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m}+(2\pi\omega)^{2m-2}}\cdot e^{2\pi i\omega hk},$$

$$\text{for } k=1,2,...,N-1,\mathring{C}_N=\frac{K_{\omega,m}}{(2\pi\omega)^{2m}+(2\pi\omega)^{2m-2}}\cdot e^{2\pi i\omega},$$

where $\lambda=e^{2\pi i\omega h}$, $E_{2n-2}(\lambda)$ is the Euler-Frobenius polynomial of degree $(2n-2)$ and

$$K_{\omega,m}=(-1)^{m-1}\cdot\left[\frac{e^{2h}-1}{e^{2h}+1-2e^h\cos(2\pi\omega h)}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{2h^{2n-1}\cdot\lambda E_{2n-2}(\lambda)}{(2n-1)!\cdot(1-\lambda)^{2n}}\right]^{-1}.$$

Now, in this case $m=1$, we obtain an approximation formula for the numerical calculation of the integral (1) with real ω for functions of the space $W_2^{(1,0)}[a,b]$. One of the expansions of the optimal quadrature formula (2) for the case real ω is the approximation formula obtained by assuming the coefficients in Theorem 1 for this case $m=1$ as continuous functions with respect to $\omega\in\mathbb{R}$.

We give the numerical results of CT image reconstruction. One of the most commonly used CT reconstruction algorithms is the filtered back-projection (FBP) [3], the implementation of the FBP consists of four steps: 1) sinogram acquisition, 2) Fourier transform of the sinogram, 3) application of Ram-Lak filter and the Fourier inversion, and 4) back-projection. To show the effect of the proposed optimal quadrature formula, we implement the FBP in two different ways: one uses *fft* and *ifft* for the Fourier transform and its inversion, respectively, and the other uses the proposed the approximation formula.

Algorithm 1 in [2]. Reconstruction algorithm with the approximation formula
1: A sinogram $P(t_m, \theta_k)$ for $t_m \in [a, b], \theta \in [0, \pi]$ is given as a discrete form.
2: Compute the Fourier transform using the proposed approximation formula:

$$S(\omega, \theta) \cong S(\omega, \theta_k) = \sum_{m=0}^{M} \mathring{C}_{m,-\omega} P(t_m, \theta_k),\ \omega \in \mathbb{R}.$$

3: Compute the inverse Fourier transform using the proposed approximation formula:

$$Q(t, \theta) \cong Q(t, \theta_k) = \sum_{n=0}^{N} \mathring{C}_{n,-\omega} S(\omega_n, \theta_k) |\omega_n|.$$

4: Reconstruct the CT image using back-projection:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q(t, \theta) d\theta \cong \frac{\pi}{K} \sum_{k=0}^{K-1} Q(t, \theta_k).$$

Algorithm 1 is the pseudo code of the algorithm for CT image reconstruction using the approximation formula. For Step 2 and Step 3, the approximation formula is used for approximating Fourier integrals. For the numerical experiment, we use an image of a human brain (see Fig. 1). Both are of size 256×256 and the sinograms are generated using half rotation sampling with sampling angle $1°$.

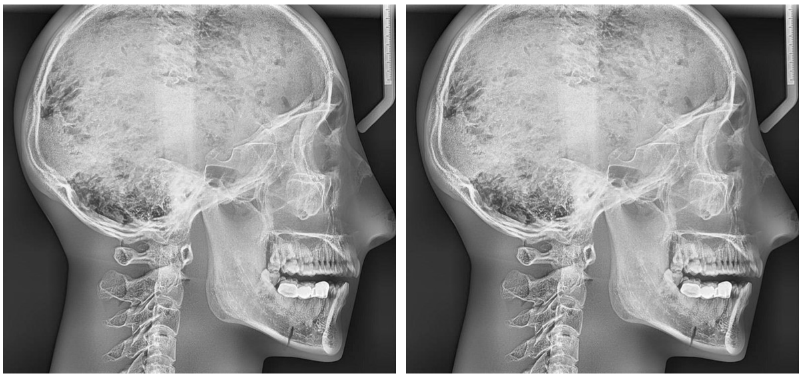


Figure 1. Reconstruction results of the conventional FBP using *fft* and *ifft* (left), using the approximation formula (right)

For the numerical experiments, MATLAB R2021a is used. For the image quality analysis, we compare maximum error (Emax), mean squared error (MSE), and the peak signal-to-noise ratio (PSNR):

$$E_{\max} = \max |I(i, j) - I_{ref}(i, j)|, \mathrm{MSE}(I) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |I(i, j) - I_{ref}(i, j)|^2,$$

$$\mathrm{PSNR}(I) = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{\max}^2}{\mathrm{MSE}(I)} \right),$$

where $I_{\max}$ is the maximum pixel value of the image I. Images of original simulated phantoms are denoted by I_{ref} (Fig. 1).

	conv-FBP *fft* and *ifft*	the appr. formula
$E_{\max}$	0.3458	0.3537
MSE	7.9648e-04	7.2111e-04
PSNR	30.9883	31.4400

Table 1. Quantitative analysis for the reconstructed CT image from FBP using conventional *fft–ifft* and the approximation formula.

The proposed approximation formula produces more improved quality than the conventional FBP particularly in terms of MSE and PSNR.

References

1. **U.N. Khayriev,** *Construction of the exponentially weighted optimal quadrature formula in a Hilbert space of periodic functions, Problems of computational and applied mathematics,* Tashkent, (2022), no. 5, 11–20.
2. **A.R. Hayotov, S. Jeon, C.-O. Lee, Kh.M. Shadimetov,** *Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction,* Filomat, 35 (2021), no.12, 4177-4195.
3. **T. M. Buzug, D. Mihailidis,** *Computed tomography from photon statistics to modern cone beam CT,* Medical Physics 36 (2009)3858–3858.

UDC 519.653

A discrete analogue to the differential operator

Hayotov A.R.[1,2], Kuldoshev H.M.[3]
hayotov@mail.ru; hakimkhm1971@mail.ru
[1] V.I.Romanovskiy Institute of mathematics
[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
[3] Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

Differential, integral and integro-differential equations play an important role in the study of many processes in science and technology. The solutions of these equations make it possible to study these processes. Therefore, it is first attempted to solve these equations analytically. If it is not possible to find analytical solutions, attention is paid to solving these equations numerically. In this case, depending on the initial data, the numerical solutions of the equations can be obtained using interpolation, numerical integration methods or difference schemes. Nowadays, it is important to develop new methods that are optimal in a certain sense and meet the requirements of the time to obtain numerical results with high accuracy. Discrete analogues of differential operators play an important role in constructing optimal interpolation formulas, quadrature and cubature formulas, and optimal difference schemes in Hilbert spaces. In this work, a discrete analogue of the differential operator depending on the sigma parameter is constructed. Some properties of this discrete operator are proved. The construction of this discrete operator uses the Euler-Frobenius polynomial and its properties. At the same time, a new polynomial of even degree is obtained. The discrete operator is expressed by the roots of this polynomial.

UDC 519.653

O‘QLARGA NISBATAN SIMMETRIK FUNKSIYALAR TASVIRLARINI QAYTA TIKLASH

Hayotov A. R.[1,2,3], Husanov A. Z.[2]
hayotov@mail.ru
[1]V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti;
[2]M.Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti;
[3]Toshkent davlat transport universiteti

1979 yilgi meditsina va fiziologiya bo‘yicha Nobel mukofoti 1960 yillar oxiri va 1970 yillarning boshlarida кщmpyuter tomografiyasining rivojlanishi uchun mas’ul bo‘lgan ikki kashfiyotchi muhandislar Allan McLeod Kormak va Godfrey Hounsfieldlarga birgalikda berildi. O‘sha paytda Massachusetsdagi Tufts Universiteti professori bo‘lgan A. Kormak rentgen nurlari ma’lumotlaridan tasvirni tiklash uchun ishlatilishi mukinligi haqida matematik algoritmlarni ishlab chiqdi. Birlashgan qirollikdagi EMI Markaziy Ilmiy Laboratoriyalarinig ilmiy xodimi Hounsfield esa Allan Kormakdan butunlay mustaqil ravishda va taqriban bir vaqtning o‘zida, ishlaydigan birinchi kompyuter tomografiyasini va uning birinchi savdo modelini ishlab chiqdi [1].

Agar biz ikki yoki uch o‘zgaruvchili funksiya integralining barcha mumkin bo‘lgan yo‘nalishlar bo‘yicha qiymatlarini bilsak, qandaydir yo‘l bilan berilgan funksiyani o‘zini tiklay olamizmi?

Teskari masala deb ataladigan ushbu masala XX asr boshlarida (1917 yil) avstriyalik matematik Johann Radon tomonidan yechilgan. Radonning ishi akslantirishlar nazariyasi va integral operatorlardan foydalanichni o‘z ichiga olgan va bu nazariya ko‘lamini kengaytirish orqali funksional analizni rivojlantirishga yordam berdi.

Aslini olganda, A. Kormak Radonning g‘oyalarini qayta kashf qildi, lekin u buni texnologik jarayonlar bu ishni amalga oshirishi mumkin bo‘lgan vaqtda qildi. Radonning nazariyalarini amalga oshirishda bir qancha amaliy to‘siqlar mavjud. Birinchidan, Radonning teskari akslantirish usullari ko‘ndalang kesim bo‘ylab argumentning barcha qiymatlarida funksiyaning holatini bilishni talab qiladi, amalda esa ko‘ndalang kesimning faqatgina diskret nurtalardagi to‘plamida funksiya qiymatlari ma’lum bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, yechimning faqatgina taqribiy qiymatini qayta tiklash mumkin. Ikkinchidan, katta hajmdagi diskret qiymatlarni qayta ishlash va ulardan foydali taqribiy yechim olish uchun zarur bo‘lgan hisoblash quvvati faqatgina oxirgi bir necha o‘n yillar davomida mavjud bo‘ldi. Approksimatsiya usullariga nazariy yondashuvlarning boy va dinamik rivojlanishi, shu jumladan, interpolyatsiya va filtrlardan foydalanish, shuningdek, yaqinlashish va teskarilash atrategiyalarini samarali amalga oshirish uchun kompyuter algoritmlari ushbu muammolarga yechim bo‘ldi. Ushbu matematik va hisoblash yutuqlari bilan bir qatorda, skanerlash mashinalari ma’lumotlarni yig‘ish tezligi va tasvir aniqligi bo‘yicha bir necha avlod yaxshilanishlarni ko‘rdi. Shu bilan birga ularni qo‘llash sohasi miya tasviriga qaratilgan dastlabki qarashlardan sezilarli darajada kengaydi.

Yaqinda, kompyuter tomografiyasi tasvirlarni katta aniqlikda tiklashda optimal kvadratur formulalarni qurish va ularni qo’llash bo‘yicha bir nechta ishlar chop qilindi [2,3,4]. Ushbu maqolalarda m-tartibli hosilasi kvadrati bilan integrallanadigan kompleks-qiymatli davriy va davriymas funksiyalarning $L_2^{(m)}[a,b]$ Sobolev fazosida $\omega \in \mathbb{R}$ bo‘lganda $\int_a^b e^{2\pi i\omega x}dx$ integralini sonli integrallash uchun Sard ma’nosida optimal kvadratur formulalari qurildi. Bu ishlarda d^{2m}/dx^{2m} differentsial operatorining diskret analogidan foydalanib, kvadratur formulaning optimal koeffitsientlar uchun aniq formulalar olindi. Olingan optimal kvadratura formulaning yaqinlashish tartibi $O(h^m)$. Bu formulalarni tadbiqi sifatida avtorlar kompyuter tomografiyasida yaxshi ma’lum bo‘lgan tasvirni qayta tiklash algoritmi bo‘lgan filtrlangan orqaga proyeksiyalash algoritmida bu formulalar qo‘llanildi. Ushbu ishlarda ikkinchi va uchinchi tartibli optimal kvadratur formulalardan foydalangan holda Furye almashtirishi va uning teskarisini yaqinlashtirish orqali tasvirni qayta tiklash algoritmining aniqligi yaxshilandi. Sonli tajribalarda tavsiya etilgan optimal kvadratur formulalari yordamida olingan qayta tiklanga tasvir sifati an'anaviy filtirlangan qrqaga proyeksiyalash bilan solishtirildi. Optimal formulalar yordamida olingan natijalar yaxshiligi ko'rsatildi.

O'qqa nisbata simmetrik bo'lgan funksiyalarni Radon almashtirishini va unga teskari Radon almashtirishini hisoblash kompyuter tomografiyasini qayta tiklashda nisbatan soddaroq masaladir. Bunda hisoblanadigan Radon almashtirishi proyeksiyani hisoblashning aylanish burchagiga bog'liq bol'may Radongacha ancha oldin ma'lum bo'lgan Abel almashtirishidir (masalan, [5] ga qarang). O'qlarga nisbatan simmetrik bo'lgan funksiyaning Radon almashtirishi ma'lum bo'lganda dastlabki funksiyani o'zini topish masalasi quyidagi "tashqi" Abel integral tenglamasini yechishga keltiriladi

$$\int_{|s|}^{\infty} \frac{2rf(r)}{\sqrt{r^2-s^2}}dr = R(s), \tag{1}$$

bu yerda $R(s)$ - o'qqa nisbatan simmetrik $f(r)$ funksiyaning Radon almashtirishi, odatda ma'lum bo'ladi, $f(r)$ esa topilishi kerak bo'lgan funksiyadir. (1) - tenglamaning yechimi quyidagi korisnishga ega (masalan, [5] ga qarang)

$$f(r) = -\frac{1}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_{r}^{\infty} \frac{sR(s)}{\sqrt{s^2-r^2}}ds. \tag{2}$$

Ushbu ishning asosiy maqsadi (2) ko'rinishdagi integrallarni yetarlicha katta aniqlikda taqribiy hisoblashdir. Ushbu ishda biz ma'lum Hilbert fazosida (2) - ko'rinishdagi integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formula qurdik. Shu kvadratur formuladan foydalanib o'qlarga nisbatan simmetrik funksiyalarning Radon almashtirishi ma'lum bo'lganda o'sha funksiyani o'zini yetarlicha katta aniqlikda qayta tikladik.

Reference

1. **Feeman T.G.** *The Mathematics of Medical Imaging A Beginner's Guide.* Second Edition, Springer, Switzerland, 2015.

2. **Hayotov A. R., Jeon S., Lee C.-O.** *On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space* $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, 372 (2020) 112713

3. **Hayotov A. R., Jeon S., Shadimetov Kh.M.** *Application of optimal quadrature formulas for reconstruction of CT images*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, 388 (2021) 113313

4. **Hayotov A. R., Jeon S., Lee C.-O., Shadimetov Kh.M.** *Optimal Quadrature Formulas for Non-periodic Functions in Sobolev Space and Its Application to CT Image Reconstruction*, Filomat 35:12 (2021), 4177-4195

5. **Доля П.Г.** *Введение в математические методы компьютерной томографии.* Учебное пособие, Харьковский Национальный Университет, Харьков, 2015.

UDC 519.644

SAYOZ SUV TENGLAMASIGA QO'YILGAN ARALASH MASALA UCHUN DIFFERENSIAL AYIRMALI SXEMANING TURG'UNLIGI

Xudoyberganov M.U.[1], Sanoqulova Y.Z.[2], Ko'libayeva M.X.[2] , Karshiboyev X.H.[2]
mirzoali@mail.ru; sanaqulovayulduz50@gmail.com; mahliyokuliboyeva@gmail.com; hasanqarshiboyev92@gmail.com
[1] Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti;
[2] A.Qodiriy nomidagi Jizzax davlat pedagogika universiteti.

Bugungi kunga kelib suv resurslarini barqaror boshqarish va ulardan samarali foydalanishni ta‘minlash - dunyoda butun boshli mintaqalar va mamlakatlarning barqaror iqtisodiy taraqqiyotida hal qiluvchi ahamiyat kasb etuvchi masalalardan biriga aylandi. Mazkur masala suv resurslari cheklangan, iqtisodiyoti va aholisi tez o‘sib borayotgan ya‘ni suvga bo‘lgan talabi ortib borayotgan, iqlim o‘zgarishi ta‘sirlari tobora ko‘proq sezilayotgan ya‘ni suv bilan ta‘minlanish sharoiti murakkabrok bo‘lgan Markaziy Osiyo mintaqasidagi yangi iqtisodiy, ijtimoiy, siyosiy va ekologik realliklar sharoitida o‘ta dolzarb va yanada muhimroq ahamiyat kasb etmoqda.

Ochiq kanallarda suv resurslarini h suv sathi balandligi hamda suvning tezligi parametrlarini nazorat qilish orqali samarali boshqarish mumkin. Ushbu masalalar simmetrik t-giperbolik tenglamalar sistemasiga mansub bo‘lgan sayoz suv tenglamasi yoki Saint Venant tenglamalari deb ataluvchi tenglamalarga qo‘yilgan aralash masalalar yordamida yechiladi.

Masalaning qo‘yilish.

$$\begin{cases} \partial_t H + \partial_x (HV) = 0, \\ \partial_t V + \partial_x \left(\frac{kV^2}{2} + gH \right) + \left(\frac{kV^2}{H} - gC \right) = 0 \end{cases}$$

Saint Venant tenglamalar sistemasi [1,2] da :

$$\begin{pmatrix} H(t,x) \\ V(t,x) \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(t,x) \\ V(t,x) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ b(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(t,x) \\ V(t,x) \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

simmetrik t-giperbolik tenglamalar sistemasiga $x = 0$ va $x = L$ chegaralarda

$$H(t,0) = rV(t,0), \quad V(t,L) = sH(t,L) \tag{2}$$

chegarviy shartlarni va $t = 0$ da

$$H(0,x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma_1(s)}{\lambda_1(s)} ds \right) \left(\sqrt{\frac{g}{H^*(x)}} h(x) + v(x) \right)$$

$$V(0,x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\delta_2(s)}{\lambda_2(s)} ds \right) \left(-\sqrt{\frac{g}{H^*(x)}} h(x) + v(x) \right) \tag{3}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi aralash masalani sonli yechish to‘g‘risidagi masalaga keltirilgan, bu yerda:

$a(x) = \varphi(x)\delta_1(x)$, $b(x) = \varphi^{-1}(x)\gamma_2(x)$, $r = k_0 \frac{\varphi_1(0)}{\varphi_2(0)}, s = k_1 \frac{\varphi_2(L)}{\varphi_1(L)}$, $k_0 = \frac{\sqrt{gH*(0)}+b_0H*(0)}{-\sqrt{gH*(0)}+b_0H*(0)}$, $k_1 = \frac{-\sqrt{gH*(L)}+b_1H*(L)}{\sqrt{gH*(L)}+b_1H*(L)}$ berilgan funksiya $h\,(x)\,, v\,(x)$. $h(t,x) = H^*(x)$, $v(t,x) = V^*(x)-$ Saint Venant tenglamasining statsionar yechimlari, $H(t,x)-$ suvning balandligi, $V(t,x)$- aniqlanishi lozim bo‘lgan gorizontal bo‘yicha suv tezligi funksiyalari, $C\,(x) \in C^2\,([0,L]) -$ qiyalik bo‘lib,$C\,(x) = \frac{dB}{dx}$ va $B\,(x)$ orqali balandlik bilan aniqlanadi, g - erkin tushish tezlashishi va k - doimiy ishqalanish koeffitsenti.

Ushbu ishda (1)-(3) masalalarni sonli yechish uchun differesial ayirmali sxema taklif etilgan va taklif qilingan differensial ayirmali sxemaning turg‘unligi isbot qilingan. Differensial ayirmali sxema asosida hisoblash tajribalari o‘tkazilgan.

Adabiyotlar ro‘yxati.

1. **Aloev, R., Berdyshev, A., Akbarova, A.,Baishemirov, Z.** Development of an algorithm for calculating stable solutions of the Saint-Venant equation using an upwind implicit difference scheme. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4(4(112),(2021), 47-56.

2. **Aloev R. D., Eshkuvatov Z. K., Khudoyberganov M. U., Nematova D. E.** The Difference Splitting Scheme for Hyperbolic Systems with Variable Coefficients. Mathematics and Statistics. Vol. 7(3), 2019, pp. 82-89 DOI: 10.13189/ms.2019.070305.

УДК 519.21

ОБ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Абдуллаев У., Давлетбоев Т., Мамбеткаримов Б.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан;
abdullaev.ulmas@mail.ru

Предприятие, занимающееся производственной торговлей, при реализации своей весьма перспективной стратегии опирается на математические модели. Действительно, создание и совершенствование самоорганизующейся системы торгового предприятия на основе информационных технологий и математических моделей является актуальным вопросом на сегодняшний день. Спрос на продукт сначала медленный, затем высокий, а затем снова замедляется, этот процесс можно принимать как продолжительность жизни продукта. После того, как продукт реализуется на рынке, он устанавливает свои позиции, и спрос может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от качества товара. Независимо от того, какую продолжительность жизни он имеет в целом (с небольшими интервалами), спрос будет расти, а позже уменьшаться. С этой целью большинство торговых аналитиков анализируют темпы роста и пытаются получить прогнозные показатели, создавая свои математические модели. В этой работе мы предполагаем что обеспеченность товаром y подчиняется интегральному логарифмически нормальному закону

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(lnz-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dz$$

где $y(t)$ - обеспеченность товаром к моменту времени t; α, σ - неопределенные параметры функции. Если мы заменим $x = \frac{lnz}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma}$ то получим интеграл Гаусса, для которого составлены таблицы значений. Для определения α, σ применяют формулу $x_t = \frac{lnz}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma}$ зная значения $y(t)$ за прошлые годы $t = 1, 2, ...m$, из таблиц для интеграла Гаусса находят x_t. Обозначив, $a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\alpha}{\sigma}$ получают $x_t = alnt - b$. Таким образом, можно установить корреляционную связь между параметрами a, b.

Предположим, что обеспеченность товара в момент времени t не является полностью определенной как выше сказанное, а зависит от некоторых случайных воздействий. Для этого случая вводится стохастическая модель роста обеспеченности товара.

Пусть задача самоорганизующеися системы (система обеспеченности) сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \omega(t)Y(t)(1 + Y(t) - \int_0^t Y(s)ds) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

где $Y(t)$ количество спроса товара в момент времени t, $Y(0)$-начальное число в момент времени $t = 0$, $\omega(t)$-скорость роста в момент времени t.

Теорема. Пусть $Y(t) = \int_0^t Y(s)ds$ тогда задача (1) имеет решение

$$Y(t) = Y(0)exp\left(\int_0^t((\omega(s) - \frac{1}{2}\lambda^2(s))ds + \int_0^t \lambda(s)dW(s))\right)$$

где $\omega(t) = \omega_1(t) + \lambda(t)\frac{dW(t)}{dt}$-шум.

Пусть в задаче (1) интеграл не определен аналитически, тогда мы решим задачу следующим алгоритмом:

- Используем стохастический θ метод[3] для (1).
- Используем эйлеровскую аппроксимацию [2].
- Смоделируем (1) задачу в R и получим результат[1,4-5].

Литература

1. **Bernt Oksendal** *Stochastic Differential Equations and Introduction with Applications.* Springer. - 2003. - 410 p.
2. **Партасарати К.** *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* Пер. с анг/Под ред. В.В. Сазонова.- М.: Мир. - 1983. - 351 с.
3. **Peng Hu and Chengming Huang.** *The Stochastic ?-Method for Nonlinear Stochastic Volterra Integro-Differential Equations.* Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 583930, 13 pages http://dx.doi.org/10.1155/2014/583930Accepted.
4. **Fima C Klebane** *Introduction to Stochastic calculus with applications.* Second Edition, Monash University, Australia. Copyright © 2005 by Imperial College Press.
5. **Peter E. kloeden Eckhard Platen** *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* Originally published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York in 1992. Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1992

УДК 519.642.4

Приближенное решение системы одномерны интегралных уравнений с ядром Гильберта теоретика–числовым методом

Абираев И. М.[1], Исмоилов М. М.[2]
[1] Денауский институт предпринимательства и педагогики;
[2] Термезский государственный университет; imamali.abirayev@gmail.com

Приведем некоторые вспомогательные утверждения и определения

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ принадлежит классу E_n^α, если выполняется оценка $C_f(m_1, ..., m_n) = O((\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n)^{-\alpha})$, где $\alpha-$ действительное число, больше единицы, и константа в символе O не зависит от $m_1, ..., m_n$.

В тех случаях, когда нужно указать велечину этой константы будем вместо E_n^a написать $E_n^a(C)$ и заменять предыдущую оценку неравенством[1,2]

$$|C_f(m_1, ..., m_n)| \leq \frac{C}{(\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n)^{-\alpha}},$$

Определение 2. Целые $a_1, ..., a_n$ называются оптимальными коэффициентами по модулю N, если существуют константы $\beta = \beta(n)$ и $C_0 = C_0(n)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство

$$\sum_{m_1,...m_n=-(N-1)}^{N-1'} \frac{\delta_N(a_1m_1 + ... + a_nm_n)}{\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n} \leq C_0 \frac{\ln^\beta N}{N},$$

где штрих в сумме означает, что суммирование ведется по всем $(m_1, ..., m_n) \neq (0, ..., 0)$. В этом случае константа β называется индексом оптимальных коэффициентов.

Лемма. Пусть функции $f_1(x_1, ..., x_s)$ и $f_2(x_1, ..., x_s)$ принадлежит соответсвенно классам $E_s^a(C_1)$ и $E_s^a(C_2)$. Тогда при любых B_1 и B_2 $f_1f_2 \in E_s^a(AC_1C_2)$ и $B_1f_1+B_2f_2 \in E_s^a(|B_1|C_1+|B_2|C_2)$, где $A \leq [2^{\alpha+1}(3 + 2/(\alpha - 1))]^n$.

Сочетая метод итерации с методом оптимальных коэффициентов , рассмотрим приближенное решения следующей системы сингульных интегралных уравнений

$$y_\tau(x) = f_\tau(x) + \lambda \sum_{j=1}^{s} \int_0^1 ctg\pi(t - x)K_{\tau j}(x, t)y_I(t)dt, \tau = 1, 2, 3, ..., q. \tag{1}$$

Пусть в уравнению (1) свободный член и ядра удовлетворяют условиям :

$$f(x) \in E_1^a(C_1), \quad K(x,t) \in E_2^a(C_2). \tag{2}$$

Применяя теоретика-числовые методы найдём приближенного

Предположим ,что свободные члены $f_i(x)$ и ядра $K_{ij}(x,t)$ системы (1) принадлежат соответственно классам $E_1^a(C_1)$ и $E_2^a(C_2)$, $\alpha > 1$.

Пусть $A = 2^{\alpha+1}(3 + 2/(\alpha+1))$ и параметр λ удовлетворяет условию $|\lambda| < (\alpha-1)/(3\alpha sAC_2)$, C_2- константа класса $E_2^\alpha(C_2)(2)$.

Пусть числа N_1 и M определены равенствами.

$$N_1 = [N^{1/2}\log^{-beta/2} N], \quad M = \left[\frac{(\alpha-1)\log N - (\alpha\beta - \beta + 2)\log\log N}{2(\log\log N - \log((3\alpha-1)|\lambda|sAC_2))}\right] \tag{3}$$

Решение системы (1) будем искать в виде рядов Неймана

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_{in}(x), \quad i = 1, 2, ..., s. \tag{4}$$

Здесь функции $\varphi_{ij}(x)$ подлежат определению.

Подставляя (4) в (1) переставляя порядок интегрирования и суммирования получим.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_{in}(x) = f_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{q} \lambda^n \int_0^1 ctg\pi(t-x)K_{ij}(x,t)\varphi_{j,n-1}(x)dt, i = 1, 2, ..., q$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых λ после некоторых преобразований находим

$$\varphi_{in}(x) = f_i(x), \quad \varphi_{in}(x) =$$

$$= \int_{G_n} \sum_{j_1,...j_n=1} K_{ij_1}(x,t_1)ctg\pi(t_1-x)\prod_{j=2}^{n} K_{j_{l-1}j_l}(t_{l-1},t_l)ctg\pi(t_l-t_{l-1})f_{jn}(t_n dt_1...dt_n)$$

Для краткоски введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \prod_n(x,\bar{t}) = ctg\pi(t_1-x)\prod_{l=1}^{n} ctg(t_l-t_{l-1}), \\ F_{in}(x,\bar{t}) = \sum_{j_1,...,j_n}^{q} K_{ij_1}(x,t_1)\prod_{l=1}^{n} K(t_{l-1},t_l)f_{j_n}(t_n). \end{aligned}\right\}$$

Тогда имеем

$$\varphi_{in}(x) = \int_{G_n}\prod_n(x,\bar{t})F_{in}(x,\bar{t})dt$$

Используя лемму можно показать что $F_in(x,t)$ как функция $t_1,...,t_n$ принадлежит классу $E_n^\alpha(s^nA^nC_2^nC_1)$, а как функция $x,\ t_1,...,t_n$ классу $E_{n+1}^\alpha(s^nA^{n+1}C_2^{n+1}C_1)$[3, 4]. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $N \geq 2^\alpha, \alpha > 1$, Пусть функции $f_i(x)$ и $K_{ij}(x,t)$ принадлежат классам $E_1^\alpha(C_1)$ и $E_2^\alpha(C_2)$ соответственно и величины N_1 и M определены равенствами (3). Если параметр λ удовлетворяет условию $|\lambda| < (\alpha-1)/(3\alpha sAC_2)$, то при любом $i = 1, 2, ..., s$ для решения системы (1) справедливы равенства

$$y_1(x) = f_i(x) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{M}\lambda^n\sum_{k=1}^{M}F_{in}(x, M_{kn})\Psi_{knN_1}(x)+$$

$$+O[N^{-(\alpha-1)/2}log^{0,5(\alpha-1)\beta+M-1}N] \quad i=1,2,...,s,$$

где

$$\Psi_{knN_1(x)} = 2\pi i\left[\left(\sum_{s=1}^{n} m_s\right)x - \frac{K\sum_{s=1}^{k-1}(a_s m_s)}{N}\right] = \sum_{k(\bar{m})<N_1} i^n sign\left[\prod_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{j-1} m_{n-s}\right]e.$$

Литература

1. **Коробов Н.М.** *Теоретико числовые методы в приближенном анализе.* –М.: Физматгиз. 1963. 224 с.
2. **Коробов Н.М.** *О вычислении оптимальных коэффициентов.* // ДАН СССР. 1982 .том 267. №2. С.
3. **Коробов Н.М.** *Тригонометрические суммы и их приложения.* -М.: "Наука" , 1989. 237с.
4. **Исраилов М.И., Шадиметов Х.М.** *Оптимальные коэффициенты Весовых квадратурных формул для сингулярных интегралов типа Коши.* // ДАН РУз. 1991. №11. С. 7-9.

УДК 519.644

Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда в пространстве $S_2(P_2)$

Азамов С.С.[1], Хужамкулов Б.Т.[2], Ишқобилов О.Б.[3]

azamovs@mail.ru; xojamqulovb@mail.ru

[1] Ташкентский государственный транспортный университет;

[2,3] Термезский государственный университет;

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где C_β – коэффициенты и x_β – узлы формулы (1), $x_\beta \in [0,1]$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $S_2(P_2)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi(x)|S_2(P_2)\| = \int_0^1 \left\{\left(\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx. \tag{3}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $S_2^*(P_2)$, где $S_2^*(P_2)$ - сопряженное пространство к пространству $S_2(P_2)$.

По неравенству Коши-Шварца погрешность (3) квадратурные формулы (1) оценивается при помощи нормы

$$\|\ell(x)|S_2(P_2)^*\| = \sup_{\|\varphi(x)|S_2(P_2)\|=1} |(\ell, \varphi)|$$

функционала погрешности (2). Следовательно, оценка погрешности квадратурной формулы (1) на функциях пространства $S_2(P_2)$ сводится к нахождению нормы функционала $\ell(x)$ в сопряженном пространстве $S_2^*(P_2)$.

Основной целью настоящей работы является решение задачи Сарда в пространстве $S_2(P_2)$, т.е. нахождение коэффициентов C_β удовлетворяющие следующее равенство

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}(x)|S_2^*(P_2)\right\| = \inf_{C_\beta} \left\|\ell(x)|S_2^*(P_2)\right\|. \tag{4}$$

Таким образом, для того чтобы построить оптимальную квадратурную формулы типа Сарда в пространстве $S_2(P_2)$ нам нужно последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. *Вычислить норму функционала погрешности $\ell(x)$ квадратурной формулы (1).*

Задача 2. *Найти такие значения коэффициентов C_β при фиксированных узлах x_β, чтобы выполнялось равенство (4).*

В других пространствах эти задачи рассмотрены в работах [1-4].

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Экстремальная функция квадратурной формулы (1) с функционалом погрешности (2) имеет вид*

$$\psi_\ell(x) = G_2(x) * \ell(x) + d_1 \cdot e^{-x} + d_2 \cdot x \cdot e^{-x},$$

где d_1, d_2 – произвольные действительные числа,

$$G_2(x) = \frac{sign(x)}{4}\left(-\operatorname{sh}(x) + x \cdot \operatorname{ch}(x)\right).$$

Теорема 2. *Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда вида (1) в пространстве $S_2(P_2)$ имеют вид*

$$\begin{aligned}
C_0 = \quad & e^{-1} + \frac{4(he^h - he^{h-1} - e^h + 1)}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{e^{2h} - 2he^h - 1}{he^h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)} \times \\
& \times \left(he^h - he^{h-1}\lambda_1^N - e^h + \lambda_1 + he^h\lambda_1^N - he^{h-1} - \lambda_1^N e^h + \lambda_1^{N-1}\right), \\
C_\beta = \quad & \frac{4(e^h - 1)^2}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{(e^{2h} - 2he^h - 1)((e^h - \lambda_1)^2\lambda_1^\beta + (\lambda_1 e^h - 1)^2\lambda_1^N)}{h\lambda_1 e^h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)}, \beta = \overline{1, N-1}, \\
C_N = \quad & e^1 - 2 + \frac{4(he^{h+1} - he^h - e^{2h} + e^h)}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{e^{2h} - 2he^h - 1}{h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)} \times \\
& \times \left(he^1 - h\lambda_1^N - e^h\lambda_1^{N-1} + \lambda_1^N + he^1\lambda_1^N - h - \lambda_1 e^h + 1\right),
\end{aligned}$$

где λ_1 известная величина.

Литература

1. **Соболев С. Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* Наука, Москва 1974.

2. **Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Azamov S.S.** *Optimal quadrature formula in $K_2(P_2)$ space* Applied Numerical Matematics. 2012, -Pp. 1893-1909.

3. **Kuldoshev H. M., Azamov S. S** *Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$*, AIP Conference Proceedings, 2021, v.2365, 020034:1–15.

4. **Azamov S.S.** *An Optimal Quadrature Formula in K2(P3) Space*, AIP Conference Proceedings. -2365, 020024 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0057078.

УДК 519.633.2

Роль критических экспонент в нелинейных параболических задачах

Арипов М.
Национальный университет Узбекистана; mirsaidaripov@mail.ru

Работа посвящена роли критических экспонент на примере следующей задачи Коши для параболического уравнение не дивергентного вида с переменной плотностью, под влиянием нелинейного поглощения ($\varepsilon = -1$) или источника ($\varepsilon = +1$)

$$|x|^n \partial_t u = u^q div \left(|x|^l u^{m-1} \left| \nabla u^k \right|^{p-2} \nabla u \right) + \varepsilon\gamma(t) |x|^{-l} u^\beta, \ u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \ x \in R^N \qquad (1)$$

$$k, m \geq 1, \ p \geq 2, n, l \geq 0, \beta > 1, 0 < q < 1, \varepsilon = \pm 1,), \ 0 < \gamma(t) \in C(0, \infty)$$

Эта задача в частных значениях числовых параметров $k, m, l \geq 1, \ p \geq 2$ характеризующих нелинейную среду, используется как нелынейные математические модели различн?х процессов (см. [1] и приведенную там список литературы) пористой среды, в теории фильтрации, распространение вирусов и др . При исследование качественных свойств решений задачи Коши для нелинейных параболических уравнений с нелинейным источником возникает критические экспоненты типа Фужита впервые показавший этот феноменон для задачи Коши для полулинейного случая уравнения (1) т.е при $q = 0, m = 1, p = 2, l = 1$. Он доказал, что при $p > p_c = 1 + 2/N$ для достаточно малых начальных данных эта задача глобально разрешима, а при $p < p_c = 1 + 2/N$ решение этой задачи при любых не равных нулю начальных данных является неограниченным по временной переменной. Значение $p_c = 1 + 2/N$ называется критической экспонентой типа Фужита. Это значение в случае источника отделяет глобальное решение от неограниченного. В случае наличие поглощения установлено, что характер решения меняется [1-3].
В частности в случае $\gamma(t) = (T+t)^\alpha$ для задачи (1) получена следующая критическая экспонента типа Фуджита

$$\beta > \beta_c = 1 + (\alpha+1)(q + m + k(p-2) - 1) + \frac{(1-q)(p-n-l)(1+\alpha)}{N-l},$$

$\alpha + 1 > 0, N > l, p > n + l$, из которого вытекает все известные ранее критические экспоненты для частных значений числовых параметров. Для медленно меняющих на бесконечности начальных данных установлены значение второй критической экспоненти и асимптотческое поведение решения. Приводятся результаты численных расчетов.

Литература

1. **C. Mu, R. Zeng, and S. Zhou** *Life span and a new critical exponent for a doubly degenerate parabolic equation with slow decay initial values.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 384, no. 2, 2011, pp. 181–191.
2. **Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.** *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений,* М.: Наука, 1987.
3. **Арипов М., Садуллаева Ш. А.** *Компьютерное молелирование нелинейных процессов диффузии.* Ташкент, Университет 2020, 687 с.

УДК 517.957

К качественным свойствам решения двойного нелинейного параболического уравнения с зависящий от времени демпфирующим членом

Арипов М.М.[1], Джаббаров О.Р.[2], Самадова М.Н.[3]
[1]Национальный университет Узбекистана; mirsaidaripov@mail.ru
[2,3]Каршинский государственный университет; oybekjabborov1987@mail.ru, mahbubasamadova88@mail.ru

Рассмотрим в $Q=\{(t,x): t>0,\, x\in R^N\}$ следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=div(u^{l-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u)-g(t,x)u^{q_1}|\nabla u^m|^{p_1} \tag{1}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\, x\in R^N \tag{2}$$

где l, m, $k\geq 1$, $p\geq 2$, p_1, $q_1\geq 0$ заданные числовые параметры, характеризующие нелинейные среды,$\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, функция $u=u(t,x)\geq 0$ - решение. В данной работе мы рассматриваем случаи $g(t,x)=t^\sigma$, $\sigma>0$. Уравнение (1) описывает процессы нелинейной теплопроводности, диффузии, биологической популяции и другие различные процессы [1-5].

Рассмотрим радиально-симметрический случай уравнения (1)

$$u(t,x)=u(t,r);\;\; \frac{\partial u}{\partial t}=r^{1-N}\frac{\partial}{\partial r}(r^{N-1}u^{l-1}\left|\frac{\partial u^k}{\partial r}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial r})-t^\sigma u^{q_1}\left|\frac{\partial u^m}{\partial r}\right|^{p_1}$$

где $r=|x|$, N-измерение пространства.

Различные качественные свойства решений задачи (1),(2) интенсивно изученыразличными авторами (см. [1-5] и приведенную там литературу).

В настоящей работе исследуется вопросы глобальной разрешимости типа Фужита для задачи (1), (2) методом сравнения решений. Исследуется асимптотика автомодельных решений уравнения

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}(\xi^{N-1}\left|\frac{df^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi})+\beta\xi\frac{df}{d\xi}-f^{q_1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p_1}+\alpha f=0.$$

Получаемого путем преобразования

$$u(t,r)=\overline{u}(t)f(\xi)$$

где $\overline{u}(t)=(T+t)^\alpha$, $\xi=|x|\,(T+t)^{-\beta}$, $T\geq 0$, $\alpha,\beta>0$.

$$\alpha=\frac{p_1-p(\sigma+1)}{p_1(l+k(p-2)-1)-p(q_1+mp_1-1)},$$

$p_1(l+k(p-2)-1)-p(q_1+mp_1-1)>0$,

$$\beta=\frac{(\sigma+1)(l+k(p-2)-1)-(q_1+mp_1-1)}{p_1(l+k(p-2)-1)-p(q_1+mp_1-1)}.$$

Рассматривается случаи: быстрая, медленная диффузии и критический случай.

Применяя метод сравнения решений [1] и метод стандартных уравнений [3], получаем оценки решения задачи (1), (2). В частности доказана

Теорема. Пусть $mp_1+q_1-1<(\sigma+1)(l+k(p-2)-1)+\frac{p(\sigma+1)-p_1}{N}$ то есть $\alpha-\beta N<0$, $l+k(p-2)-1>0$, $u(0,x)\leq z(0,x)$, $x\in R^N$. Тогда решение задачи (1),(2) глобально разрешимо и для слабого решения задачи (1),(2) в Q справедлива оценка

$$u(t,x)\leq z(t,x)=\bar{u}(t)(a-b\xi^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{l+k(p-2)-1}},\, b=(k(p-2)+l-1)(1/p)^{p/(p-1)}$$

а для фронта (свободной границы) имеет место оценка

$$[\sum_{1}^{N}(x_i)^2]^{1/2} \geq (a/b_1)^{(p-1)/p}(T+t)^{\beta}.$$

Литература

1. **А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов** *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* – Москва, Наука, 1987.
2. **Hashui Zhan** *The Self-Similar Solutions of a Diffusion Equation.* WSEAS Transaction on Mathematics, 2012 Issue 4, Vol. 12 , 345-356.
3. **Арипов М.М, Садуллаева Ш.А.** *Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии.* Ташкент, Университет, 2020, 670 с.
4. **Арипов М.М., Джаббаров О.Р.** *Оценка и асимптотика решений решение для уравнения параболического типа с двойной нелинейностью с демпфированием.* Бюллетень Института Математики, 2020, № 3, С. 108-118.
5. **Huashui Zhan and Yongping Li** *On the Non-Newtonian Fluid Equation with a Source Term and a Damping Term.* 2018, Article ID 9689476, 10 p.

УДК 519.644

Построение оптимальных квадратурных формул в функциональном пространстве

Ахмадалиев Г. Н.[1], Аликулов А. Б.[2]
ahmadaliyev78@mail.ru, abdullaaliqulov1996@gmail.com
[1] Ташкентский государственный транспортный университет
[2] Термезский государственный университет

Известно, что формулы численного интегрирования или квадратурные формулы являются методами приближенного вычисления определенных интегралов. Они нужны для вычисления тех интегралов, для которых либо первообразная подынтегральной функции не может быть выражена через элементарные функции, либо для которых подынтегральная функция имеется только в дискретных точках, например из экспериментальных данных. Кроме того, что еще более важно, квадратурные формулы обеспечивают основной и важный инструмент для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений.

В теории квадратур существуют различные методы, позволяющие приближенно вычислять интегралы с помощью конечного числа значений подынтегральной функции. В настоящей работе также обсуждается один из методов численного интегрирования и вычисляется оценка погрешности одной оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления определенных интегралов. В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), \tag{2}$$

где C_β коэффициенты формулы (1), $\chi_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0,1]$ и $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Пусть функция φ принадлежит классу функций $K_{2,\omega}$. Здесь $K_{2,\omega}$ это гильбертово пространство, которое определено как [1]

$$K_{2,\omega}\left\{\varphi:[0,1]\to R|\,\varphi' - \text{абс. непр. и}, \varphi''\in L_2\left(0,1\right)\right\},$$

и норма функций в этом пространстве задается формулой

$$\|\varphi\|_{K_{2,\omega}} = \left\{\int\limits_0^1 \left(\varphi''(x)-\omega^2\varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2},$$

при этом $\int_0^1\left(\varphi''(x)-\omega^2\varphi(x)\right)^2dx < \infty$ и $\|\varphi|K_{2,\omega}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = c_1\sinh\omega x + c_2\cosh\omega x$, где c_1 и c_2 постоянные, $\omega\in R\backslash\{0\}$.

Разность

$$(\ell,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx = \int\limits_0^1\varphi\left(x\right)dx - \sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi\left(h\beta\right) \tag{3}$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы (1).

На основании неравенства Коши-Шварца (3)

$$|(\ell,\varphi)| \le \left\|\ell|K^*_{2,\omega}\right\|\cdot\|\varphi|K_{2,\omega}\|$$

абсолютное значение погрешности (3) оценивается нормой

$$\left\|\ell|K^*_{2,\omega}\right\| = \sup_{\|\varphi|K_{2,\omega}\|=1}|(\ell,\varphi)| \tag{4}$$

функционала погрешности (2).

Очевидно, что норма (4) функционала погрешности (2) зависит от коэффициентов и узлов квадратурной формулы (1). Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам получила название задачи С.М. Никольского, а полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского.* В первые эта задача была рассмотрена С.М. Никольским [2]. Минимизация нормы (4) функционала погрешности (2) по коэффициентам C_β при фиксированных узлах называется задачей Сарда, а полученная формула - *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.* Впервые эту задачу исследовал А. Сард [3].

Если требуется найти максимально возможную погрешность построенной квадратурной формулы над пространством $K_{2,\omega}$, то достаточно решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ.

Если требуется построить оптимальную квадратурную формулу в пространстве $K_{2,\omega}$, то достаточно получить решение следующей задачи.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$ дающие наименьшее значение величине $\left\|\ell|K^*_{2,\omega}\right\|$ и вычислить $\|\overset{\circ}{\ell}\,|K^*_{2,\omega}\| = \inf\limits_{C_\beta}\|\ell|K^*_{2,\omega}\|$.

Справедливы следующие

Теорема 1. Коэффициенты оптимальной квадратурной формула вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_{2,\omega}$ имеют вид

$$C_0 = \frac{(\sinh(\omega h)+\omega h)\cosh(\omega h) - 2\sinh(\omega h)}{\omega\cdot\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)} - \frac{(\sinh(\omega h)+\omega h)(\lambda_1^{N-1}+\lambda_1)}{\omega\cdot\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)(\lambda_1^N+1)},$$

$$C_\beta = \frac{4(\cosh(\omega h)-1)}{\omega(\sinh(\omega h)+\omega h)} - \frac{(\omega h - \sinh(\omega h))(\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cosh(\omega h))(\lambda_1^\beta + \lambda_1^{N-\beta})}{\omega\cdot\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)(\lambda_1^{N+1}+\lambda_1)},\ \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C_N = \frac{(\sinh(\omega h)+\omega h)\cosh(\omega h) - 2\sinh(\omega h)}{\omega\cdot\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)} - \frac{(\sinh(\omega h)+\omega h)(\lambda_1^{N-1}+\lambda_1)}{\omega\cdot\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)(\lambda_1^N+1)}.$$

Теорема 2. Для квадрата нормы функционала погрешности справедлива формула

$$\|\ell\|^2 = \frac{3\omega - \sinh(\omega)}{2\omega^5} - \frac{\sinh(\omega h) - \mathrm{h}\sinh(\omega)}{\omega^4(\sinh(\omega h)+\omega h)} + \frac{4(1-\cosh(\omega h)}{\omega^5 h(\sinh(\omega h)+\omega h)}$$

$$+\frac{\sinh(\omega h)-\omega h}{\omega^4\sinh(\omega h)(\sinh(\omega h)+\omega h)}\cdot\left[\frac{2\cosh(\omega h)}{\omega} - \frac{2(\lambda_1^{N-1}+\lambda_1)}{\omega(\lambda_1^N+1)} + \frac{\sinh(\omega h)}{2}\right.$$

$$-\frac{2(\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cosh(\omega h))(\lambda_1^{N-1}-1)}{\omega(\lambda_1^N+1)(\lambda_1-1)} + \frac{h(1-\lambda_1^N)(\lambda_1^2-1)\sinh(\omega h)}{(\lambda_1^N+1)(\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cosh(\omega h))}$$

$$\left.+\ \frac{h(\sinh(\omega)+\lambda_1^N\sinh(\omega h))[\lambda_1^2\cosh(\omega h) - 2\lambda_1 + \cosh(\omega h))}{2(\lambda_1^N+1)(\lambda_1^2+1-2\lambda_1\cosh(\omega h))}\right].$$

Литература

1. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** *Теория сплайнов и ее приложения.* —М.: Мир, 1972. - 316 с.
2. **Никольский С.М.** *К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.* — Успехи матем. наук. Москва, 1950. - Т.5, no 3. - С. 165 -177.
3. **Sard A.** *Best approximate integration formulas, best approximate formulas.* —American J. of Math. - 1949. - LXXI. - pp. 80-91.

УДК 519.644.3

Об одном оптимальном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений

Ахмедов Д.М.[1], Жабборов Х.Х.[2], Шамсиддинов К.Х.[3], Ишқобилов О.Б.[4];
d.akhmedov@mathinst.uz; jabborovx@bk.ru
[1,2] Институт математики имена В.И.Романовского, АН РУз
[3] Ферганский государственный университет, [4] Термез государственный университет

Изучение различных задач математической физики, а также конкретных задач из аэродинамики, электродинамики, теории упругости и других областей естественным образом сводится к сингулярным интегральным уравнениям. При этом плоские задачи сводятся к решению характеристического сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-t}\mathrm{d}x = \varphi(t), \qquad t\in(-1,1). \tag{1}$$

Напомним определение сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши.

Определение 1. Главным значением по Коши особого интеграла $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x-t}dx,\ a<t<b$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx + \int_{t+\varepsilon}^{b}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\right].$$

Известно, что если функция φ на сегменте $[a,b]$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(A)$ с показателем α $(0<\alpha\le 1)$ и коэффициентом A, т.е. если

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le A|x_1-x_2|^\alpha,$$

то существует интеграл $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x-t}dx,\ a<t<b.$

Известно, что уравнение (1) имеет четыре полных аналитических решения, соответствующих значениям параметра k (см. [1], стр. 49-50). В частности, при $k=1$ единственное решение уравнения (1) дается формулой

$$f(t)=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-t)}dx. \tag{2}$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения вида (1) сводится к вычислению весового сингулярного интеграла (2). Поэтому разработка эффективных приближенных методов вычисления сингулярных интегралов имеет большое прикладное значение и является одной из актуальных задач вычислительной математики.

Специальные приемы построения квадратурных формул, равномерно аппроксимирующих по переменной t интеграла (2), предложены в работах Ph. Rabinowitz, S. Santi.

При исследовании метода дискретных вихрей И. К. Лифановым построены эффективные методы вычисления сингулярного интеграла виде (2).

В настоящей работе с использованием функционального подхода построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления интеграла (2) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-t)}dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}\big(C_0[\beta]\varphi(x_\beta-1)+C_1[\beta]\varphi'(x_\beta-1)\big), \tag{3}$$

где $-1<t<1$, $\varphi(x)$ - подынтегральная функция из пространства $L_2^{(2)}(-1,1)$, $C_0[\beta],C_1[\beta]$ - коэффициенты, $x_\beta-1=h\beta-1$ - узлы формулы (3), $h=\frac{2}{N}$, $N=2,3,...,$.

Здесь $L_2^{(2)}(-1,1)$ пространство функций второе обобщенное производное интегрируемы с квадратом.

Норма функций из пространства $L_2^{(2)}(-1,1)$ определяется следующим образом:

$$\left\|\varphi|L_2^{(2)}(-1,1)\right\|=\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left(\varphi''(x)\right)^2dx\right\}^{\frac12}.$$

Погрешностью квадратурной формулы (3) называется разность

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-t)}\mathrm{d}x-\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{N}C_\alpha[\beta]\varphi^{(\alpha)}(x_\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

где

$$\ell(x)=\frac{\varepsilon_{[-1,1]}(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-t)}-\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^\alpha C_\alpha[\beta]\delta^{(\alpha)}(x-x_\beta). \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_{[-1,1]}(x)$—индикатор отрезка [-1,1], $\delta(x)$—дельта - функция Дирака, $\ell(x)$—функционал погрешности квадратурных формул (3).

Поскольку функционал $\ell(x)$ вида (4) определен на пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$, то имеем

$$(\ell, x^\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0,1.$$

Задача построения оптимальных квадратурных формул вида (3) с функционалом погрешности (4) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ при фиксированных узлах $x_\beta - 1$ —это вычисление следующей величины:

$$\| \overset{\circ}{\ell} |L_2^{(2)*}(-1,1)\| = \inf_{C_0[\beta],C_1[\beta]} \left(\sup_{\varphi,\|\varphi\|\neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi|L_2^{(2)}(-1,1)\|} \right), \tag{5}$$

где $L_2^{(2)*}(-1,1)$— сопряженное пространство к пространству $L_2^{(2)}(-1,1)$.

Эта задача состоит из двух частей:

Задача 1. Мы должны вычислить норму $\|\ell\|$ функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(2)*}(-1,1)$

Задача 2. Минимизировать его по коэффициентам $C_0[\beta], C_1[\beta]$ при фиксированных $x_\beta - 1$.

Если найдутся такие коээфициенты $C_0[\beta] = \overset{\circ}{C}_0[\beta], C_1[\beta] = \overset{\circ}{C}_1[\beta]$, которые достигается равенство (5), они называются *оптимальными коэффициентами* и соответствующая формуле называется *оптимальной квадратурной формулой.*

В настоящей работе мы занимаемся решением этой задачи, т.е. будем вычислить норму $\|\ell\|$ функционала погрешности ℓ и минимизировать его по коэффициентам $C_0[\beta], C_1[\beta]$, когда узлы $x_\beta - 1$ фиксированы. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ введенный С.Л.Соболевым. Функция ψ, для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi) = \|\ell|L_2^{(2)*}\| \cdot \|\psi|L_2^{(2)}\|,$$

называется *экстремальной функцией* функционала погрешности ℓ.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема *В пространстве* $L_2^{(2)}(-1,1)$ *оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (3), определяются формулами*

$$\begin{aligned} C_1[0] &= h^{-1}\left[f_1[1] + \tfrac{h}{2} f_0[1] + \tfrac{h}{4}\pi - \tfrac{\pi}{4}(t+2) \right], \\ C_1[\beta] &= h^{-1}\Bigg[f_1[\beta-1] - 2f_1[\beta] + f_1[\beta+1] - \tfrac{h}{2}\Big(f_0[\beta-1] - 2f_0[\beta] + \\ &\qquad + f_0[\beta+1] \Big) + h^2 \sum_{\gamma=0}^{\beta} C_0[\gamma] \Bigg], \quad \beta = \overline{1, N-1} \\ C_1[N] &= h^{-1}\left[f_1[N-1] - \tfrac{h}{2} f_0[N-1] + \tfrac{h}{4}\pi + \tfrac{\pi}{4}(t-2) \right], \end{aligned}$$

где

$$f_0[\beta] \quad = \quad -\mathtt{arcsin}(h\beta-1) + \tfrac{t-(h\beta-1)}{\sqrt{1-t^2}} ln \left| \tfrac{1-t(h\beta-1)+\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{h\beta-1-t} \right|,$$

$$\begin{aligned} f_1[\beta] = -\tfrac{1}{2}\Bigg[&-\sqrt{1-(h\beta-1)^2} + \Big(t - 2h\beta + 2\Big)\mathtt{arcsin}(h\beta-1) - \\ &- \tfrac{(t-(h\beta-1))^2}{\sqrt{1-t^2}} ln \left| \tfrac{1-t(h\beta-1)+\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{h\beta-1-t} \right| \Bigg]. \end{aligned}$$

Литература

1. **Lifanov I.K.** *Method of singular equations and numerical experiment.* M. TOO Yanus, 1995. -520 p.

УДК 519.652

Дискретная система типа Винера-Хопфа одной интерполяционной формулы

Болтаев А. К.[1,2], Шоназаров С. К.[3], Марасулова Д. Ю.[4]
aziz_boltayev@mail.ru; sshon1989@mail.ru
[1] Институт математики имени В.И. Романовского, АН РУз;
[2] Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;
[3] Термезский государственный университет;
[4] Ферганский государственный университет;

Задача интерполяции является одной из самых распространенных задач в теории приближений. Классический метод ее решения заключается в построении интерполяционных полиномов. Однако интерполяционные полиномы имеют ряд недостатков при использовании их для функций с сингулярностями или для недостаточно гладких функций. Доказано, что последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции, не сходится к самой функции. В связи с этим на практике вместо интерполяционных полиномов высокого порядка используются сплайн-функции.

Первые сплайновые функции формировались из отдельных кусков кубических полиномов. Затем это построение было преобразовано, была увеличена степень полинома, изменены граничные значения, но сама идея осталась не изменной. Следующим шагом в развитии теории сплайнов стал результат Д. Холлидея [1], связывающий кубический сплайн И. Шенберга с решением задачи нахождения минимума нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее Карл Де Боор в работе [2] обобщил результат Д. Холлидея. Полученные результаты вызвали огромный интерес, в связи с чем появилось большое количество работ, в которых в зависимости от конкретных требований вариационный функционал подвергался изменениям.

Настоящая же работа посвящена получению систему алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Предположим, что нам дана таблица значений $\varphi(x_\beta), \beta = 0,1,\dots,N$ функции φ в точках $x_\beta \in [0,1]$. Требуется аппроксимировать функцию φ другой, более простой функцией P_φ, т. е.

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta), \tag{1}$$

где $P_\varphi(z) = \sum\limits_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta)$ – интерполяционная формула и

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta) \tag{2}$$

-функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ - коэффициенты, а x_β - узлы интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(m,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^{(m,0)}} = \left[\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right]^{1/2}. \tag{3}$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi)=\varphi(z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta). \tag{4}$$

По неравенству Коши-Шварца абсолютная погрешность (4) оценивается следующим образом

$$|(\ell,\varphi)|\leq\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}\cdot\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}=\sup_{\varphi,\|\varphi\|\neq 0}\frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Поэтому для оценки погрешности интерполяционной формулы (1) по функциям пространства $W_2^{(m,0)}$ требуется найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}$. Отсюда мы получим

Задача 1. *Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$.*

Ясно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β. Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β, в общем случае, нелинейной и сложной задачей. Здесь мы рассматриваем задачу минимизации величины ℓ коэффициентами $C_\beta(z)$ при фиксированных узлах x_β.

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ (если они существуют), удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{W_2^{(m,0)*}}=\inf_{C_\beta(z)}\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \tag{5}$$

называются *оптимальными коэффициентами* и соответствующая им интерполяционная формула

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}_\beta(z)\varphi(x_\beta)$$

называется *оптимальной интерполяционной формулой* в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Таким образом, для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. *Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, удовлетворяющие равенству (5) при фиксированных узлах x_β.*

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, удовлетворяющие равенству (5) называются *оптимальными коэффициентами* интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$.

Основной целью настоящей работы является построение оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ и получить систему линейных алгебраических уравнений для оптимальных коэффициентов в случаях $m-$ нечетных и $m-$ четных.

Предположим $m-$ нечетное, тогда система для оптимальных коэффициентов имеет вид:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(z)G_m(x_\beta-x_\gamma)+d_0(z)e^{-x_\beta}+d_{1,k}(z)e^{-x_\beta\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}\cos\left(x_\beta\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+$$

$$+d_{2,k}(z)e^{-x_\beta\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}\sin\left(x_\beta\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=G_m(z-x_\beta),\ \beta=\overline{0,N}, \tag{6}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\, e^{-x_\gamma} = e^{-z}, \tag{7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\, e^{-x_\gamma \cos\frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x_\gamma \sin\frac{2\pi k}{m}\right) = e^{-z\cos\frac{2\pi k}{m}} \cos\left(z \sin\frac{2\pi k}{m}\right), \tag{8}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\, e^{-x_\gamma \cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x_\gamma \sin\frac{2\pi k}{m}\right) = e^{-z\cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(z \sin\frac{2\pi k}{m}\right). \tag{9}$$

Здесь, $C_\beta(z)(\beta = \overline{0,N})$, $d_0(z)$, $d_{1,k}(z)$, $d_{2,k}(z)(k = \overline{1, \frac{m-1}{2}})$ неизвестные коэффициенты.

Далее, $m-$ четное, тогда система для оптимальных коэффициентов имеет вид:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z) G_m(x_\beta - x_\gamma) + r_{1,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \cos\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) +$$

$$+ r_{2,k}(z) e^{x_\beta \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)} \sin\left(x_\beta \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = G_m(z - x_\beta),\ \beta = \overline{0,N},\ eqno(10)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\, e^{x_\gamma \cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos\left(x_\gamma \sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) = e^{z\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos\left(z \sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right), \tag{11}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\, e^{x_\gamma \cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin\left(x_\gamma \sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right) = e^{z\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin\left(z \sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right). \tag{12}$$

Здесь, $C_\beta(z)(\beta = \overline{0,N})$, $r_{1,k}(z)$, $r_{2,k}(z)(k = \overline{1, \frac{m}{2}})$ неизвестные коэффициенты.

Системы (3)-(9) и (10)-(12) имеют единственное решение. Доказательство единственности решения систем (3)-(9) и (10)-(12) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в работах Соболева [3,4].

Литература

1. **Holladay J. C.** *Smoothest curve approximation.* Math. Tables Aids Comput. 1957. vol. 11. pp. 223-243.

2. **de Boor C.** *Best approximation properties of spline functions of odd degree.* J. Math. Mech. 1963. vol.12. pp. 747-749.

3. **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** *Теория кубатурных формул.* СО АН России, Новосибирск, 1996, 484 с.

4. **Sobolev S.L.** *The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected works of S.L.Sobolev.* Springer US (2006). pp. 561–566.

УДК 532.546

МОДЕЛИРРОВАНИЕ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Бурнашев В.Ф.,[1] Кайтаров З. Д.,[2] Мардаев С.М.[3]
[1,2,3]Самаркандский государственный университет
vladimir.burnash@mail.ru; z.qaytarov@gmail.com

В работе рассматривается задача моделирования напряженно-деформированного состояния насыщенной пористой среды. Моделирование процесса осуществляется в рамках механики многофазной фильтрации с использованием осредненных величин фильтрационно-емкостных параметров с учетом деформации пористой среды. Представлена математическая модель многофазной фильтрации с учетом деформации пористой среды.

Исследование напряженно-деформированного состояния пористой среды и порового давления мотивировано необходимостью решения различных прикладных задач, при добыче полезных ископаемых и строительстве сооружений. Учет перераспределения напряжений и изменения порового давления важен при добыче нефти и газа, когда обеспечение притока добываемого флюида к скважине, происходит за счет закачивания воды в формацию. Кроме того, анализ напряженно-деформированного состояния фундамента и окружающего массива с учетом течения грунтовых вод и возможного обводнения является важным звеном при проектировании строительных сооружений[1].

Математическая модель, описывающая взаимовлияние течения флюида и изменение напряженно-деформированного состояния твердого скелета, впервые была предложена в [2] для вычисления коэффициента проницаемости глины. В этой работе был введен эффективный тензор напряжений, зависящий от деформации скелета и давления флюида.

В настоящее время феноменологическая теория насыщенной пористой среды, предложенная в [3], считается общепризнанной. В [4] рассмотрено применение этой теории для описания водонасыщенных пористых сред. В [5] адаптированы основные уравнения теории для применения к решению геофизических задач. Авторы этой работы переформулировали основные уравнения и рассмотрели дренажное и недренажное состояние насыщенной пористой среды.

Полагаем, что в процессе фильтрации в деформируемой пористой среде участвуют водная - 1 и нефтяная - 2 фаза.

Математическую модель двух фазной фильтрации в деформируемой пористой среде представим в виде ($\rho_1 = const, \rho_2 = const$)

- уравнение сохранения массы 1 фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1) + \frac{\partial}{\partial x}(u_1) = 0, \tag{1}$$

где s_1- насыщенность порового пространства 1 фазой, m – пористость, - скорость 1 фазы.

- уравнение сохранения массы 2 фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_2) + \frac{\partial}{\partial x}(u_2) = 0, \tag{2}$$

где s_2- насыщенность порового пространства фазой 2, u_2 - скорость фазы 2.

- уравнение изменения пористости

$$m = m_0 + \beta_m (p - p_0), \tag{3}$$

где m_0 - коэффициент пористости при$p = p_0$, p – давление, p_0- давление при $p = p_0$;

- уравнения скорости фильтрации фаз

$$u_1 = -\frac{Kk_1}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}, u_2 = -\frac{Kk_2}{\mu_2}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4}$$

где K, k_1, k_2 – абсолютная и относительные фазовые проницаемости, μ_1, μ_2- вязкости фаз;

- изменение абсолютной проницаемости

$$K = K_0\left(\frac{m}{m_0}\right)^n, \tag{5}$$

где K_0- абсолютная проницаемость среды, n- реальное число.

Добавим к системе уравнений очевидное равенство

$$s_1 + s_2 = 1, \tag{6}$$

зависимости для вязкостей

$$\mu_\alpha = const, \quad \alpha = \{1, 2\}, \tag{7}$$

и относительных фазовых проницаемостей

$$k_1 = \begin{cases} \frac{(1-s_2)}{(1-s_{2E})} & s_2 > s_{2E}, \\ 1 & s_2 \leq s_{2E} \end{cases} \tag{8}$$

$$k_2 = \begin{cases} \frac{(s_2-s_{2E})}{(1-s_{2E})} & s_2 > s_{2E}, \\ 0 & s_2 \leq s_{2E} \end{cases} \tag{9}$$

Для вывода уравнения для давления просуммируем уравнения (1) - (2). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(s_1 + s_2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 + u_2\right) = 0.$$

Или, так как $s_1 + s_2 = 1$, то

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 + u_2\right) = 0.$$

Поскольку $m = m\left(p\right)$, то

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$$

и учитывая, что $m = m_0 + \beta_m\left(p - p_0\right)$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(m_0 + \beta_m\left(p - p_0\right)\right) = \beta_m\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Окончательно уравнение давления примет вид

$$\beta_m\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{Kk_1}{\mu_1} + \frac{Kk_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]. \tag{10}$$

Задавая начальные

$$s_1\left(x, 0\right) = s_1^0, \quad s_2\left(x, 0\right) = s_2^0, \quad p\left(x, 0\right) = p^0, \tag{11}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad p\left(l, t\right) = p^*, \;\; s_1\left(0, t\right) = s_1^*, \quad s_2\left(l, t\right) = s_2^*, \tag{12}$$

получим замкнутую систему уравнений (1)-(12), описывающих многофазную фильтрацию с учетом деформации пористой среды.

Представлена математическая модель многофазной фильтрации с учетом деформации пористой среды. Дальнейшее развитие модели связано с определением коэффициентов сжимаемости , получаемых в лабораторных опытах, уточнением описания механизма фильтрации в сжимаемой пористой среде.

Литература

1. **Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д.** *Математическое моделирование многофазной фильтрации с учетом деформации пористой среды.* Проблемы вычислительной и прикладной математики, 3(41). 2022 5-21с.
2. **Terzaghi K.** *The shearing resistance of saturated soils.* Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. 1st. – 1936. – P 54–55.
3. **Biot M. A.** *General Theory of Three Dimensional Consolidation* . Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol. 12. № 2. – P. 155–161.
4. **Biot M. A.** *Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid.* Journal of Applied Physics. – 1955. – Vol. 26. № 2. – P. 182–185.
5. **Френкель Я.И.** *К теории сейсмических и сейсмо-электрических явлений во влажной почве.* Изв. АН СССР. Сер. Географ, и геофиз. – 1944. –Т. 8, № 4. – С. 133–149.

УДК 519.644

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

Давлатова Ф.И.,[1] Ёкубов А.Х.,[2] Хайталиев А.А.[3]
fotimadavlatova733@gmail.com
[1]Институт математики имена В.И. Романовского, АН РУз;
[2]Ферганский государственный университет;
[3]Термезский государственный университет;

В настоящей работе рассматривается задача построение весовой оптимальной квадратурной формулы с производными. При этом предпологается что функции под рассмотрением принадлежат пространству Соболева. Далее, нахождение экстремальной функции функционала погрешности квадратурной формулы, в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала, сводятся к краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая эту краевую задачу получена экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы.Используя экстремальную функцию вычислен квадрат нормы функционала погрешности и получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов дающих минимум $\|\ell\|^2$. Кроме того, найдено решение этой системы, т.е. явно получены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы с производными.

Рассмотрим квадратурную формулу с производной вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,0}[\beta]\,\varphi\left(h\beta\right) + \sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,1}[\beta]\,\varphi'\left(h\beta\right), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_{\omega}^{N}\left(x\right) = \chi_{[0,1]}(x)e^{2\pi i\omega x} - \sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,0}[\beta]\delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_{\omega,1}[\beta]\delta'(x-h\beta), \tag{2}$$

здесь

$$d_{\omega,0}[\beta] = \begin{cases} h\left(\frac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1} - \frac{1}{2\pi i\omega h}\right), & \beta=0, \\ hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h\beta} & \beta=\overline{1,N-1}, \\ h\left(\frac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega}}{1-e^{2\pi i\omega h}} - \frac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi i\omega h}\right), & \beta=N, \end{cases}$$

$$K_{\omega,1} = \left(\frac{\sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^2$$

и $d_{\omega,1}[\beta]$ коэффициенты квадратурной формулы (1), $[\beta]=(h\beta)$, $h=1/N$, N - натуральное число, $i^2=-1$, $\omega-$произвольное число, т.е. $\omega\in R$, $R-$ множество действительных чисел, $\chi_{[0,1]}(x)-$

характеристическая функция отрезка [0,1], $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака. Функции φ принадлежат пространству $L_2^{(m)}(0,1)$, где

$$L_2^{(m)}(0,1)=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}\ |\varphi^{(m-1)},\qquad \varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\}$$

является пространством Соболева, квадратично интегрируемых с производным порядка m и в этом пространстве скалярное произведение двух функция φ и ψ определяется равенством

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int\limits_0^1\varphi^{(m)}(x)\ \bar{\psi}^{(m)}(x)dx,$$

где $\overline{\psi}$ - сопряженная функция к функции ψ, а норма функции φ соответственно определяется формулой

$$\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|=\langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2}.$$

Заметим, что коэффициенты $d_{\omega,1}\left[\beta\right]$ зависят от ω, N и m.

Следующая разность между интегралом и квадратурной суммой

$$(\ell_\omega^N,\varphi)=\int\limits_0^1 e^{2\pi\omega ix}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^N d_{\omega,0}[\beta]\,\varphi\left(h\beta\right)-\sum_{\beta=0}^N d_{\omega,1}[\beta]\,\varphi^{'}\left(h\beta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell_\omega^N(x)\varphi(x)dx \qquad (3)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1). Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, где $L_2^{(m)*}(0,1)$ - сопряженное пространство к пространству $L_2^{(m)}(0,1)$.

Тогда для абсолютного значения погрешности (3) формулы (1), согласно неравенству Коши-Шварца, имеем следующую оценку

$$\left|(\ell_\omega^N,\varphi)\right|\le\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_\omega^N|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|.$$

Это означает, что абсолютное значение погрешности (3) квадратурной формулы (1) оценивается с помощью нормы

$$\left\|\ell_\omega^N|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\sup_{\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|=1}\left|\left(\ell_\omega^N,\varphi\right)\right|$$

функционала погрешности (2).

Наша оптимизационная задача состоит в минимизации нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1) по коэффициентам $d_{\omega,1}[\beta]$ при заданных $d_{\omega,0}[\beta]$, т.е. найти коэффициенты $\overset{\circ}{d}_{\omega,1}[\beta]$ удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_\omega^N|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\inf_{d_{\omega,1}^R[\beta]}\left\|\ell_\omega^N|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|. \qquad (4)$$

Следовательно, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу вида (1) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, нам необходимо решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ_ω^N квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{d}_{\omega,1}\left[\beta\right]$ удовлетворяющие равенству (4).

Коэффициенты $\overset{\circ}{d}_{\omega,1}\left[\beta\right]$ удовлетворяющие равенство (4) называются оптимальными коэффициентами квадратурной формулы (1).

Основным результатом настоящей работы является следующая.

Теорема. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вида (1) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ при $\omega \in R\backslash\{0\}$ и $\omega h \notin Z$ имеют вид

$$d_{\omega,0}[0] = h\left(\frac{K_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1} - \frac{1}{2\pi i\omega h}\right),$$

$$d_{\omega,0}[\beta] = hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega h\beta}, \ \ \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_{\omega,0}[N] = h\left(\frac{K_{\omega,1}e^{2\pi iw}}{1-e^{2\pi i\omega h}} - \frac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi i\omega h}\right),$$

$$d_{\omega,1}[0] = h^{-1}\left(f_{\omega,2}(h) - f_{\omega,2}(0) + \frac{h}{2}g_\omega\right),$$

$$d_{\omega,1}[\beta] = h^{-1}\left(f_{\omega,2}(h(\beta-1)) - 2f_{\omega,2}(h\beta) + f_{\omega,2}(h(\beta+1))\right), \ \ \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_{\omega,1}[N] = h^{-1}\left(f_{\omega,2}(1-h) - f_{\omega,2}(1) + \frac{h}{2}g_\omega\right),$$

где

$$f_{\omega,2}\left(h\beta\right) = (h\beta)^2\left[\frac{hK_{\omega,1}\left(e^{2\pi i\omega h} + e^{2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega h\beta}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)\right)}{4\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)}\right] +$$

$$+ (h\beta)\left[\frac{e^{2\pi i\omega}}{2(2\pi i\omega)^2} - \frac{hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega}}{2\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)} + \frac{h^2K_{\omega,1}}{4}\left(\frac{Ne^{2\pi i\omega}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right) + e^{2\pi i\omega h}\left(1-e^{2\pi i\omega}\right)}{\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)^2}\right)\right] -$$

$$-\frac{2e^{2\pi i\omega h\beta}-1}{2(2\pi i\omega)^3} + \sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^p e^{2\pi i\omega}}{2\,(2-p)!(2\pi i\omega)^{p+1}} - \frac{hK_{\omega,1}e^{2\pi i\omega}}{4\left(1-e^{2\pi i\omega h}\right)} +$$

$$-\frac{h^3K_{\omega,1}}{4}\left[\frac{2q_1\left(\beta\right) - q_2\left(N\right)}{\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)^3}\right];$$

$$q_1(\beta) = e^{2\pi i\omega h}\left[-e^{2\pi i\omega h}\left(1+2\beta\right) + (2\beta-1) - \beta^2\left(1-e^{2\pi i\omega h}\right)^2 + e^{2\pi i\omega h}\left(1+e^{2\pi i\omega h}\right)\right]$$

$$q_2(N) = e^{2\pi i\omega}\left[e^{2\pi i\omega h}\left(1+2N\right) + e^{4\pi i\omega h}\left(1-2N\right) + N^2\left(1-e^{2\pi i\omega h}\right)^2\right] -$$

$$-e^{2\pi i\omega h}\left(1+e^{2\pi i\omega h}\right),$$

$$K_{\omega,1} = \left(\frac{\sin\pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^2.$$

УДК 519.644

Элемент Рисса одной квадратурной формулы в смысле Сарда

Давронов Ж. Р.[1], Аликулов А. Б.[2]
javlondavronov77@gmail.com; abdullaaliqulov1996@gmail.com
[1] Институт математики имена В.И. Романовского, АН РУз;
[2] Термезский государственный университет;

Как известно, приближенное вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики. Это связано с тем, что большинство задач науки и техники приводятся к интегральным или дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определенных интегралов, которые во многих случаях невозможно вычислить точно.

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta] \tag{1}$$

где соответственно, $C[\beta]$ и $[\beta] = h\beta$ называются коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $\varphi(x)$ является элементом пространства Соболева $L_2^{(1,0)}(0,1)$. Норма функций из пространства $L_2^{(1,0)}(0,1)$ определяется следующим образом:

$$\|\varphi|L_2^{(1,0)}(0,1)\| = \left\{ \int_0^1 \left[\, \left(\varphi'(x)\right)^2 + \left(\varphi(x)\right)^2 \,\right] dx \right\}^{1/2}$$

Разность между интегралом и квадратурной суммой, т.е.

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta]$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1), и этой разности соответствует функционал погрешности ℓ, который имеет вид:

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x - [\beta]).$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$- характеристическая функция отрезка $[0,1]$, а $\delta(x)$- дельта функция Дирака. Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве Соболева $L_2^{(1,0)}(0,1)$- это вычисление следующей величины:

$$\|\mathring{\ell}|L_2^{(1,0)*}\| = \inf_{C[\beta]} \sup_{\|\varphi\|\neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi|L_2^{(1,0)}\|}.$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $L_2^{(1,0)*}$, где $L_2^{(1,0)*}$- сопряженное пространство к пространству $L_2^{(1,0)}$. Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\|\ell|L_2^{(1,0)*}\|$ функционала погрешности ℓ в пространстве $L_2^{(1,0)*}$, а потом минимизировать его по коэффициентам $C[\beta]$.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы $\|\ell|L_2^{(1,0)*}\|$ функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л. Соболевым [1-3].

Функция ψ_ℓ, для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\| \cdot \|\psi_\ell\|,$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ.

Имеет место

Теорема 1. Экстремальная функция ψ_ℓ функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы (1) имеет вид:

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G(x)$$

где

$$G(x) = \frac{\mathrm{sign}(x)}{2} \cdot \mathrm{sh}(x).$$

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение (ℓ, ψ_ℓ).

Вычисляя это скалярное произведение получим норму функционала погрешности

$$\|\ell\|^2 = 2\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] \int_0^1 G(x-h\beta)\mathrm{d}x - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C[\beta]C[\gamma]G(h\beta-h\gamma) - \int_0^1\int_0^1 G(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974,– 808 с.
2. **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** *Кубатурные формулы.* Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996. –484 с.
3. **Шадиметов Х.М.** *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева.* –Ташкент: Издательство "Fan va texnologiya 2019. – 224 с.

УДК 519.652

Оптимальная интерполяционная формула точная на алгебраических полиномах и тригонометрических функциях

Дониёров Н.Н.[1], Маматова Н.Х.[2]
negmurod1989@mail.ru; nilufar.mamatova.76@mail.ru
[1]Институт математики им. В.И.Романовского, АН РУз;
[2] Бухарский государственный университет;

В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. Методы интерполирования также используются как приближения функций. Имеются классические и вариационные методы построения интерполяционных формул при приближения функций. Далее, приведем некоторые сведения об этих методах.

1. Классические интерполяционные формулы

Классическими аппаратами приближения функций являются алгебраические или тригонометрические многочлены, а также рациональные дроби.

Пусть даны $N+1$ пары действительных чисел (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., N$. Проблема интерполирования состоит в нахождении такой функции $\Phi = \Phi(x)$, что

$$\Phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, ..., N,$$

и Φ интерполирует $\{y_i\}$ в узлах $\{x_i\}$.

Говорят о полиномиальном интерполировании, если Φ является алгебраическим полиномом, о тригонометрической аппроксимации, если Φ - тригонометрический полином, или о кусочно-полиномиальной интерполяции (или сплайн-интерполяции), если Φ является только локально полиномиальным.

Задача полиномиальной интерполяции - найти полином $\Pi_m(x)$, называемый интерполяционным полиномом, такой, что

$$\Pi_m(x_i) = a_m x_i^m + ... + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

Точки x_i называются *узлами интерполяции.* Известно, что при $N = m$ существует единственный интерполяционный многочлен, в зависимости от построения, называемый интерполяционным *многочленом Лагранжа или Ньютона.*

2. Вариационный метод построения интерполяционных формул

В связи с этим в последнее время усиленно разрабатываются другие аппараты приближения, свободные от недостатка сказанное в выше. Одним из таких аппаратов, зарекомендовавших себя как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, являются так называемые *сплайны.*

Напомним, что впервые идею сглаживания табличных данных при помощи сплайнов, как и саму идею сплайнов, высказал И.Шенберг в 1946 г.

Далее приведем определение полиномиальных сплайнов.

Полиномиальные сплайны.

Обозначим через $L_2^{(m)} = L_2^{(m)}[a,b]$ $(m \geq 1)$ пространство вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, с абсолютно непрерывной $(m-1)$-й производной и суммируемой в квадрате m-й производной, т.е. $\int\limits_a^b \left(f^{(m)}(x)\right)^2 dx < \infty.$

Это пространство является гильбертовым, и норма функций в этом пространстве определяется формулой

$$||f||_{L_2^{(m)}} = \left(\int\limits_a^b \left(f^{(m)}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство сплайн функций.

Определение 1. Обозначим через S пространство определенных на отрезке $[a,b]$ вещественных функций s, удовлетворяющих следующим условиям

(I) $s-$ полином степени $2m-1$ на каждом интервале (x_i, x_{i+1}), $i = 1, ..., N-1$;

(II) $s-$ полином степени $m-1$ на $[a, x_1)$ и $(x_N, b]$;

(III) $s^{(2m-2)}-$ непрерывная функция.

Известно, что такие сплайны имеют следующий общий вид:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i \frac{(x-x_i)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^j,$$

где $x_+^{\alpha} = \begin{cases} x^{\alpha}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ d_i удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i x_i^k = 0$, $k = 0, 1, ..., m-1$.

В случае $m = 1$ полиномиальный сплайн является сплайном первой степени (ломаная), а в случае $m = 2$ кубическим сплайном.

Фундаментальные сплайны.

Обозначим через s_i такую единственную функцию в S, что

$$s_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Тогда $s_i,\ i = 1, 2, ..., N$, образуют базис в S.

Очевидно, что

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} s_i\, y_i$$

и $s_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ называются *фундаментальными сплайнами.*

С.Л. Соболевым рассмотрена следующая задача об оптимальных интерполяционных формулах.

3. Постановка задачи оптимальных интерполяционных формул в гильбертовых пространствах

Рассмотрим задачу об оптимальных интерполяционных формулах, которая впервые поставлена и исследована С.Л.Соболевым. Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x)\varphi(x_k) \tag{1}$$

Формула(1) удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$\varphi(x_k) = P_\varphi(x_k), \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{2}$$

Здесь $C_k(x)$ и x_k -соответственно *коэффициенты и узлы* интерполяционной формулы (1), а функция $\varphi(x)$ является элементом некоторого банахова пространства B.

Разность $\varphi(x) - P_\varphi(x)$ называется *погрешностью* формулы (3).

Одной из основных задач теории интерполирования является отыскание максимума ошибки интерполяционной формулы (1). Значением ошибки (2) в некоторой фиксированной точке z является функционалом над пространством функций φ:

$$(\ell, \varphi) \equiv \varphi(x) - P_\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k(x)\varphi(x_k), \tag{3}$$

где $\ell(x)$ - *функционал погрешности.*

По неравенству Коши-Шварца погрешность (3) интерполяционной формулы (1) оценивается с помощью нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в сопряженном пространстве B^*:

$$|\,(\ell, \varphi)\,| \le ||\varphi||_B \cdot ||\ell||_{B^*}$$

Кроме того, функционал погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $C_k(x)$ и узлов x_k интерполяционной формулы (1). Если наименшее значение

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}(x)|B^* \right\| = \inf_{C_k(x),\, x_k} \|\ell(x)|B^*\| \tag{4}$$

достигается при некотором $C_k(x) = \overset{\circ}{C}_k(x)$ и $x = \overset{\circ}{x}_k$, тогда соответствующая формула называется *оптимальной интерполяционной формулой.*

Таким образом, для построения оптимальных интерполяционных формул последовательно надо решит следующие задачи.

Задача 1. Вычислить норму $\|\ell\|_{B^*}$ функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1).

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k(x)$ и узлы $\overset{\circ}{x}_k$, дающие наименшее значение (4) норме функционала погрешности ℓ.

Отметим, что задача 1 в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ решена С.Л.Соболевым в работе [1].

Настоящая работа посвящена решению задач 1 и 2 в гильбертовом пространстве, которое определяется сдедующим образом:

$$K_2\left(P_m\right)=\left\{\varphi:[0,1]\to R|\ \varphi^{(m-1)}-\text{абс. непр. и }\varphi^{(m)}\in L_2\left(0,1\right)\right\}.$$

В этом пространстве норма функции $f(x)$ задается формулой

$$\|f(x)\|_{K_2(P_m)}=\left(\int\limits_0^1\left(f^{(m)}(x)+\omega^2 f^{(m-2)}(x)\right)^2dx\right)^{1/2},$$

где $\omega\neq 0$ and $\omega\in R$.

Здесь в пространстве $K_2\left(P_m\right)$ нами решены задачи 1 и 2. Построенные формулы в этой работе отличаются от предыдущих тем, что они будут точны не только алгебраическим полиномам, но и тригонометрическим функциям.

Литература

1. **Sobolev S.L.** *On Interpolation of Functions of n Variables* Selected works of S.L. Sobolev, Volume I: Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas, Springer, 2006, pp. 451–456.

УДК 532.546

Релаксациенная дробно-дифференциальная модель фильтрации однородной жидкости в пористой среде

Зокиров М.С.,[1] Абдурахмонов М.С.,[1] Раупов С.Б.[1]
[1,2,]Самаркандский государственный университет, mzokirov45@gmail.com;
[3]Термезский государственный университет;

Многие природные пористые среды имеют фрактальную структуру, моделирование процессов фильтрации в которых требует применения новых подходов, методологий и способов анализа, значительно отличающихся от традиционных. Применительно к нефтяной и газовой промышленности это означает, что классические методы разработки месторождений, основанные на теории течения флюидов через однородные пористые среды, в данном случае недостаточны [1, 2]. Использование классической теории фильтрации однородных жидкостей при упругом режиме на основе закона Дарси иногда приводит к расхождению реальных и теоретических данных [1].

Релаксациенная теория фильтрации житкости, как неклоссическая аномальная фильтрация развивалась в работах [2, 3]. В релаксационных моделях фильтрации аппарат дробных производных использован в [4].

В данной работе в отличие от [4] рассматриваем обобщенную релаксационую дробно-дифференциальную модель, где учитываются одновременно релаксациенные явления как по скорости фильтрации, так и по градиенту давления. На основе такой обобщенной модели выведены уравнения фильтрации. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Оценено влияние порядков дробных производных на распределение давления в среде в различные моменты времени.

Модель фильтрации с двойной релаксацией имеет вид [3]

$$\upsilon+\lambda_\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda_p\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}\right),\qquad(1)$$

λ_υ , λ_p - времена релаксации скорости фильтрации υ и давления p, k -проницаемость среды, μ -вязкость жидкости.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где β^* -коэффициент упругоемкости пласта.

Уравнение (1) здесь записываем в обобщенном виде

$$\upsilon + \lambda_\upsilon D_t^\beta \upsilon = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \lambda_p D_t^\alpha p\right), \tag{3}$$

где D_t^β, D_t^α - операторы дробной производной Капуто [5] .

Дифференцируя уравнения (3) по координате получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \lambda_\upsilon \frac{\partial}{\partial x} D_t^\beta \upsilon = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p + \lambda_p D_t^\alpha p\right). \tag{4}$$

Взяв из уравнения (2) производную порядка β по времени получим следующее уравнение

$$D_t^\beta p \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \beta^* D_t^{\beta+1} p, \tag{5}$$

Используя уравнение (5) запишем уравнение (4) в следующем виде

$$-\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} - \lambda_\upsilon \beta^* D_t^{\beta+1} p = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p D_t^\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right),$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_\upsilon D_t^{\beta+1} p = \kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p D_t^\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right), \tag{6}$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu\beta^*}$- коэффициент пьезопроводности , $0 < \alpha \le 1,\ 0 < \beta \le 1$.

При $\alpha = 1,\ \beta = 1$ из (6) получаем уравнение релаксационной фильтрации [2, 3]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_\upsilon \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}\right). \tag{7}$$

Начальное и граничные условия при фильтрации в конечной среде $[0, L]$ принимаются в следующем виде

$$p(0, x) = 0, \tag{8}$$

$$p(t, 0) = p_0,\ p(t, L) = 0. \tag{9}$$

Для (6) при $\beta > 0$ начальное условие (8) недостаточно. Надо добавить еще одно условие, например

$$\frac{\partial p(0, x)}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (6) решается при условиях (8), (9), (10).

Для численного решения задачи (6), (8), (9), (10) применяем метод конечных разностей. В области $\Omega = \{0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\}$ введем равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j),\ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = L/N,\ t_j = j\tau,\ j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}$, где h - шаг сетки по координату x, τ - шаг сетки по времени.

Разностная аппроксимация уравнения (6) имеет вид

$$\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\tau}+\lambda_v\frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_i^{k+1}-2p_i^k+p_i^{k-1}}{\tau^2}\left((j-k+1)^{2-\beta}-(k-1)^{2-\beta}\right)+\frac{p_i^{j+1}-2p_i^j+p_i^{j-1}}{\tau^2}\right]$$

$$=\kappa\left(\frac{p_{i+1}^{j+1}-2p_i^{j+1}+p_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\lambda_p\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(S_1-2S_2+S_3)\right),$$

$$S_1=D_t^\alpha p_{i+1}^j=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i+1}^{k+1}+p_{i+1}^k}{\tau}\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_{i+1}^{j+1}+p_{i+1}^j}{\tau}\right],$$

$$S_2=D_t^\alpha p_i^j=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_i^{k+1}+p_i^k}{\tau}\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_i^{j+1}+p_i^j}{\tau}\right],\qquad(11)$$

$$S_3=D_t^\alpha p_{i-1}^j=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\sum_{k=0}^{j-2}\frac{p_{i-1}^{k+1}+p_{i-1}^k}{\tau}\left((j-k+1)^{1-\alpha}-(j-k)^{1-\alpha}\right)+\frac{p_{i-1}^{j+1}+p_{i-1}^j}{\tau}\right].$$

На основе (11) приводились численные расчеты при различных исходных данных. Оценено влияние порядков производных α и β на распределение давления.

При уменьшении от 1 наблюдается более интенсивное распределение давления p . Уменьшение же β от 1 приводит к замедленному распределению давления. Оценка влияния λ_p и λ_v при фиксированных α и β показывает, что увеличение λ_pоказывает такое же влиянние, как уменьшение α . Увеличение значения λ_v приводит к замедлению распространения профилей p ,т.е. влияние увеличения λ_v аналогично случаю уменьшения β .

Литература

1. **Ametov, I.M.** *et al, Reservoirs engineering with heavy high-viscous oil. Nedra. Moscow.* : 1985.
2. **Молокович Ю.М, Непримеров Н. Н, Пикуза В.И, Штанин А.В.** *Релаксационная фильтрация.-изд. Казанского университета.* : 1980.-136с.
3. **Алишаев М. Г., Мирзаджанзаде А. Х.** *К учету явлений запаздывания в теории фильтрации* : Нефть и газ. №6, 1975, с. 71-74.
4. **Булавацкй В.М.** *Математические модели и задачи дробно дифференциальной динамики некоторые релаксационных фильтрационных процессов.* : Кибернетика и системный анализ, №5, том 54, 2018, с.57-60.
5. **Caputo M.** *Models of flux in porous media with memory.* : Water Resources Research. Vol. 36. 2000. P. 693-705.

УДК 519.644

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА В ПРОСТРАНСТВЕ $K_2(P_3)$

Курбонназаров А.И. [1] Аминов М.Ш. [2]
mumin_1974@inbox.ru; umarsoliq@gmail.uz

[1] Институт математики имена В.И.Романовского, АН РУз;
[2] Термезский государственный университет;

Рассмотрим следующую квадратную формулу

$$\int_{0}^{1} e^{2\pi i\omega x}\varphi\left(x\right)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta} f\left(x_{\beta}\right), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell\left(x\right) = e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}\left(x\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta}\delta\left(x - x_{\beta}\right) \tag{2}$$

где $x_{\beta} = h\beta$ – узлы формулы, $\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, C_{β} – коэффициенты формулы, $e^{2\pi i\omega x}$ – весовая функция, ω – действительное число, $\varepsilon_{[0,1]}\left(x\right)$ - характерическая функция отрезка $[0, 1]$, $\delta\left(x\right)$ –дельта-функция Дирака.

Положим что функция f принадлежит в гильбертово пространства

$$K_2\left(P_3\right) = \left\{f : [0, 1] \to R |\, f'' - \text{абсолютно непрерывная}, f''' \in L_2\left(0, 1\right)\right\}$$

снабженной с нормой

$$\|f\|_{K_2(P_3)} = \left\{\int_{0}^{1}\left(P_3\left(\frac{d}{dx}\right) f\left(x\right)\right)^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где $P_3\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{d}{dx}$ и $\int_{0}^{1}\left(\left(\frac{d^3}{dx^3} - \frac{d}{dx}\right) f(x)\right)^2 dx < \infty$. Равенство (3) является полунормой и $\|f\| = 0$ тогда и только тогда когда $f\left(x\right) = d_1\sinh\left(x\right) + d_2\cosh\left(x\right) + p_0$. Погрешность формулы (1) имеет вид

$$(\ell, f) = \int_{-\infty}^{\infty}\ell\left(x\right) f\left(x\right)dx = \int_{0}^{1} e^{2\pi i\omega x} f\left(x\right)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta} f\left(x_{\beta}\right). \tag{4}$$

По неравенству Коши-Щварца имеем

$$|(\ell, f)| \leq \|\ell\|_{K_2^*(P_3)} \cdot \|f\|_{K_2(P_3)}.$$

Эта значит, что разность (4) оценивается с помощью нормы функционала погрешности (2).

В настоящей работе мы получим решение задачи Сарда о построении оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $K_2\left(P_3\right)$. А именно, мы найдем такие коэффициенты C_{β}, для которых достигается следующая величина

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{K_2^*(P_3)} = \inf_{C_{\beta}}\|\ell\|_{K_2^*(P_3)}. \tag{5}$$

Для этого мы должны последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Вычислить норму функционала погрешности $\ell\left(x\right)$ квадратурную формулы (1).

Задача 2. Найти такие значения коэффициентов C_{β}, чтобы выполнялось равенство (5).

Следует отметить, что задача построения оптимальных квадратурных формул вида (1) для целых значений ω обсуждены в работах [1] и [2]. А в работах [3,4,5] построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$ при вещественных ω и полученные формулы применены для восстановления изображений компьютерной томографии.

В настоящей работе нами решены задачи 1 и 2. При этом получены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул, которые удобны для использования.

Литература

1. N.D. Boltaev, A.R. Hayotov, Kh.M. Shadimetov, Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in Sobolev space $L_2^{(m)}$, Numerical Algorithms, Springer, (2017), 74: 307–336.
2. N.D. Boltaev, A.R. Hayotov, G.V. Milovanovic, Kh.M. Shadimetov, Optimal quadrature formulas for numerical evaluation of Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$, Journal of Applied Analysis and Computation, (2017), vol.7, no.4, 1233–1266.
3. A.R. Hayotov, S. Jeon, C.-O. Lee, On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics 372 (2020) 112713.
4. A.R. Hayotov, S. Jeon, Kh.M. Shadimetov. Application of optimal quadrature formulas for CT image reconstruction, Journal of Computational and Applied Mathematics 388 (2021) 113313
5. A.R. Hayotov, S. Jeon, C.-O. Lee, Kh.M. Shadimetov. Optimal quadrature formulas for CT image reconstruction in the Sobolev space of non-periodic functions, Filomat, (2021), v.35, no.12, 4177-4195.

УДК 517.977

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Маматов А. Р.
Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова; akmm1964@rambler.ru

Пусть на фиксированном отрезке времени $T = [0, t^*]$, поведение системы,управляемой двумя игроками (участниками), описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + bu + dv, \quad x(0) = D\omega.$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))' - n$-вектор состояния системы в момент t; $u = u(t), v = v(t)$ – значения управляющих воздействий в моментпервого и второго игроков соответственно t; A, D –заданные $n \times n$ и $n \times r$ матрицы; b, d – заданные n-векторы; ω – r-вектор; (штрих) $'$– знак транспонирования.

Совокупность $z(\cdot) = (u(\cdot), \omega)$ из кусочно-постоянной функции $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, непрерывной справа, и вектора ω, удовлетворяющих неравенствам

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T; \omega_* \leq \omega \leq \omega^*,$$

называется управлением первого игрока. Здесь f_*, f^* заданные числа, ω_*, ω^* заданные r-векторы (сравнения векторов – по компонентно).

Кусочно-постоянная функция $v(\cdot) = (v(t), t \in T,)$ непрерывная справа с (возможными) точками разрыва $\tau = \{t_1, t_2, ..., t_l\}, 0 = t_1 < t_2 < ... < t_l < t_{l+1} = t^*$, удовлетворяющая неравенствам

$$g_*(t) \leq v(t) \leq g^*(t), t \in T,$$

называется управлением второго игрока. Здесь $g_*(t), g^*(t), t \in T,$ – заданные кусочно-постоянные функции с множеством квантования τ.

Пусть U, V - множества управлений первого и второго игроков соответственно, $h_i', i \in I = \{1, 2, ..., m\}$ – i–я строка заданной постоянной $m \times n$ матрицы H; $g_i, i \in I - i$ -я - компонента заданного вектора g.

Требуется выбрать управление первого игрока $z^0(\cdot)$, который придает функционалу $J(z(\cdot)) = \min_{v(\cdot) \in V} \sum_{i \in I} |h_i' x(t^*) - g_i|$ значение

$$J(z^0(\cdot)) = \max_{z(\cdot) \in U} \min_{v(\cdot) \in V} \sum_{i \in I} |h_i' x(t^*) - g_i|.$$

Решение этой задачи приведен к определению максимального значения критерия качества двойственной к специальной максиминной задачи управления, на специальных классах управления. Основным инструментом исследование служит понятия опора [1]. Максимальное значение критерия качества двойственной задачи определяется с помощью конечного числа опор.

Литература

1. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И.** *Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1.* Минск: Университетское, 1984. 214 с.

УДК 532.546

ЗАДАЧИ АНОМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОЛОСАОБРАЗНОМ ИСТОЧНИКОМ

Махмудов Ж.М.[1], Кулжонов Ж.Б.[2],Шодиев С.[3]
[1,2,3]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
j.makhmudov@inbox.ru; j.kuljanov86@gmail.com

Задачи переноса веществ и фильтрации неоднородных жидкостей имеют большое практическое значение во многих отраслях техники и технологии. Нефтяные и водоносные пласты могут содержать зоны с неподвижной или малоподвижной жидкостью, где фильтрация жидкости и перенос вещества происходит с проявлением ряда особенностей. Опубликовано много работ, где на основе экспериментальных исследований выявлены своеобразные эффекты [1–3].

В данной работе рассматривается задача фильтрации и переноса вещества с полосаобразном источником в двухзонной среде с фрактальной структурой. Рассматривается среда, состоящая из двух зон, т.е. $R_1\left\{0\le x<\infty,\ 0\le y\le l\right\}$, $R_2\left\{0\le x<\infty,\ l\le y\le\infty\right\}$ (Рис.1). Первоначально области R_1 и R_2 заполнены жидкостью без вещества.

В зоне R_1 перенос вещества описывает уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_1\frac{\partial^{\beta_1}c}{\partial x^{\beta_1}}+D_2\frac{\partial^{\beta_2}c}{\partial y^{\beta_2}}-\frac{\partial\left(v_x c\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(v_y c\right)}{\partial y}\,, \tag{1}$$

а в R_2 можно описать уравнением диффузии в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_3\frac{\partial^{\beta_3}c}{\partial y^{\beta_3}},\quad (x,y)\in R_2, \tag{2}$$

где c - концентрация твердых частиц в жидкости, v_x, v_y - компоненты скорости фильтрации, D_1, D_2, D_3 - продольный и поперечный коэффициенты диффузии, β_1, β_2,β_3 - показатели производной, t- время.

Скорость аномальной фильтрации определяется как [4]

$$v_x=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^{\gamma_1}p}{\partial x^{\gamma_1}},v_y=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^{\gamma_2}p}{\partial y^{\gamma_2}}, \tag{3}$$

где μ – коэффициент вязкости вещества, $k=\text{const}$ - коэффициент проницаемости.

Для давления используем уравнение пьезопроводности в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\chi\left(\frac{\partial^{\gamma_1+1}p}{\partial x^{\gamma_1+1}}+\frac{\partial^{\gamma_2+1}p}{\partial y^{\gamma_2+1}}\right)\,, \tag{4}$$

где $\chi=\frac{k}{\mu\beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности, β^* - коэффициент упругоемкости среды, γ_1, γ_2- показатели производной

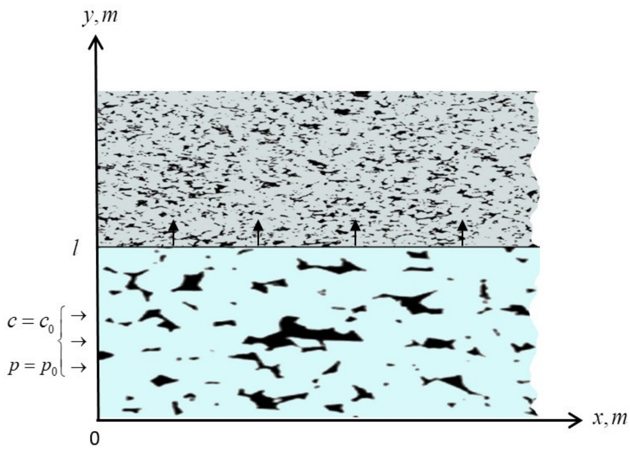


Рис.1. Схема фильтрации и переноса вещества в двухзонной среде

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$c\,(0,x,y) = 0,\; 0 \le x < \infty,\; 0 \le y < \infty, \tag{5}$$

$$c\,(t,0,y) = 0, 0 \le y < \delta_1 l,\;\; \delta_2 l < y \le l,\;\; \delta_1 \ne \delta_2,\;\; \delta_1,\; \delta_2 < 1,$$

$$c\,(t,0,y) = c_0, c_0 = \mathrm{const}, \delta_1 l \le y \le \delta_2 l,\;\; \delta_1, \delta_2 < 1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}\,(t,x,0) = 0, \quad 0 \le x < \infty, \tag{7}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}\,(t,\,0,y) = 0, \quad 0 \le y < \delta_1 l,\;\; \delta_2 l < y \le l,\;\; \delta_1 \ne \delta_2,\;\; \delta_1,\; \delta_2 < 1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}\,(t,\infty,y) = 0, \quad 0 \le y < \infty, \tag{9}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}\,(t,x,y) = 0\,, \quad y = \infty, \quad 0 \le x < \infty\,, \tag{10}$$

$$p\,(0,x,y) = p_0,\;\; , p_0 = \mathrm{const}, \tag{11}$$

$$p\,(t,0,y) = p_c, p_c > p_0, \quad p_c = \mathrm{const}, \delta_1 l \le y \le \delta_2 l,\;\; \delta_1, \delta_2 < 1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\,(t,x,0) = 0, \quad 0 \le x < \infty, \tag{13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\,(t,x,l) = 0, \quad 0 \le x < \infty, \tag{14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,(t,\,0,y) = 0,\;\; 0 \le y < \delta_1 l,\;\; \delta_2 l < y \le l,\;\; \delta_1 \ne \delta_2,\;\; \delta_1,\; \delta_2 < 1, \tag{15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,(t,\infty,y) = 0, \quad 0 \le y \le l. \tag{16}$$

$$c|_{y=l+0} = c|_{y=l-0}\,, 0 \le x < \infty, \tag{17}$$

$$D_2\,\frac{\partial^{\beta_2-1}c}{\partial y^{\beta_2-1}}\bigg|_{y=l+0} = D_3\,\frac{\partial^{\beta_3-1}c}{\partial y^{\beta_3-1}}\bigg|_{y=l-0}, 0 \le x < \infty, \tag{18}$$

Задача (1) - (18) решается методом конечно-разностных схем.

Рассмотрим случай $0 < \gamma_1,\;\gamma_2 \le 1,\; 1 < \beta_1,\;\beta_2,\;\beta_3 \le 2.$

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $k = 10^{-13}\,\text{м}^{1+\gamma}$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\beta^* = 3 \cdot 10^{-8}\,\text{Па}^{-1}$, $p_c = 5 \cdot 10^5$ Па , $p_0 = 10^5$ Па, $c_0 = 0,01$ и различные значения D_1,

D_2и D_3. Результаты расчетов показывают, что уменьшение показателя производной в уравнении скорость фильтрации от 1 приводит к увеличение эффектов концентрации. Уменьшение показателя производной в диффузионном члена от 2 приводит к "ускорению" диффузионного процесса. приведены концентрационные поверхности при уменьшении значений β_3 от 2. Сравнение результатов показывают, что уменьшение β_3 от 2 ускоряет диффузионный процесс в зоне R_2. При этом, с уменьшением β_3 от 2 в зоне R_1 можно заметить уменьшение значений концентрации.

Литература

1. **Rao P.S.C., Rolston D.E., Jessup R. E., Davidson J.M.** *Solute transport in aggregated porous media: Theoretical and experimental evaluation.* Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44. 1980b. Pp. 1139 – 1146.
2. **Sudicky E.A., Frind E.O.** *Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures* Water Resour. Res. 18(6). 1982. Pp.1634-1642
3. **Rao P.S.C., Jessup R.E.** *Addison T.M. Experimental and theoretical aspects of solute diffusion in spherical and non-spherical aggregates.* Soil Sci.Soc.Am.J., 133.1982.Pp.342-349.
4. **Белевцов.Н.С.** *Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти. Математика и математическое моделирование.* 2020. № 06. С. 13 – 27. DOI: 10.24108/mathm.0620.0000228.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАДИАЛЬНОЕ КОЛЕБАНИЕ ТОСТОСТЕННОГО УПРУГО-ПОРИСТОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Мусурмонова М.О.,[1] Эшмуродов М.Р.[2]
[1] Каршинский государственный университет; mmo_2704@mail.ru
[2] Каршинский государственный университет; muhiddin0174645@gmail.com

Задачи о распространении и дифракции нестационарных волн в пористо-упругих средах имеют большое теоретическое и практическое значение в таких областях науки и техники, как геофизика, геология, сейсморазведка полезных ископаемых, сейсмостойкость сооружений и многие другие.

В работе рассматривается задача о нестационарном радиальном колебании толстостенной упруго-пористой среды, ограниченной двумя концентричными сферическими поверхностями. Упруго-пористая среда насыщена жидкостью.

Целью данной работы является разработка алгоритм решения задачи и исследование нестационарных продольных волновых процессов при распространении нестационарных осесимметричных продольных волн от сферической полости в упруго-пористом сферическом слое.

Пусть упруго-пористая среда, насыщенная жидкостью ограничена двумя концентричными сферическими поверхностями, радиусы которых равны соответственно R_1 и R_2, ($R_1 < R_2$). Толщина сферического слоя равно h ($h = R_2 - R_1$). Движение среды рассматривается в сферической системе координат (r,θ,ϑ).

В начальный момент $\tau = 0$ времени к внутренней поверхности сферического слоя приложена осесимметричная заданная нормальная поверхностная нагрузка $p(\tau, \theta)$

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = p(\tau, \theta). \tag{1}$$

Внешняя поверхность слоя свободна от давления

$$\sigma_{rr}|_{r=R_2} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{m}|_{r=R_2} = 0, \tag{2}$$

или на ней перемещение равно нулю

$$u_1|_{r=R_2} = 0 \quad \text{и} \quad u_2|_{r=R_2} = 0. \tag{3}$$

В этом случае в упруго-пористой среде распространяются две продольные волны: первая из них в скелете со скоростью c_1, а вторая со скоростью c_2 в жидкой части среды. С учётом осевой симметрии задачи движение среды относительно скалярных потенциалов φ_1 и φ_2 описывается с двумя волновыми уравнениями $(i = 1, 2)$

$$\gamma_i^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi_i, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \tag{4}$$

Начальные условия – однородные

$$\varphi_1|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \varphi_2|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \tag{5}$$

Начально-краевая задача (1) - (5) решается с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени τ. В пространстве изображений потенциалы φ_1^L, φ_2^L, компоненты u_1^L, u_2^L векторов смещений и σ_{rr}^L, σ_m^L тензора напряжения, а также заданную функцию $p^L(s, \theta)$ представим в виде бесконечных рядов по ортогональным полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ [1].

В пространстве изображений начально-краевая задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций. Бесконечную систему запишем в виде системы двух матричных уравнений, решение которой разыскиваем в виде бесконечных рядов по экспонентам [3].

Подставляя ряды в систему, получаем рекуррентную соотношения относительно неизвестных коэффициентов рядов функций и соответствующие начальные условия к ним. Эти соотношения позволяют определить все искомые изображения без использования редукции бесконечной системы уравнений. Анализ рекуррентных соотношений показывает, что изображения есть рациональные функции параметра преобразования Лапласа, который дает возможность вычислять их оригиналы с помощью теории вычётов [2].

Получены формулы для изображений коэффициентов рядов по полиномам Лежандра компонент перемещения и напряжения. Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков, которые показывают влияние отраженных от внешней поверхности волн на напряженно-деформированное состояние сферического слоя. Полученные результаты работы могут быть использованы в области геофизики, сейсмологии и проектных организаций при строительстве сооружений, а также при проектировании подземных резервуаров.

Литература

1. **Кузнецов Д.С.** *Специальные функции.* - М.: Высшая школа, 1985. - 423 с.
2. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** *Методы теории функции комплексного переменного.* - М.: Наука, 1987. - 688 с.
3. **Шукуров А.М.** *Дифракция нестационарных волн на абсолютно жестком шаре в упругом полупространстве* // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. № 4. – 2006. –С. 48–51.

УДК004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ВОДОЕМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мустафаева Р.,[1] Уснатдинова Г.,А.[2]
[1,2] Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, г.Нукус;
mrs1812@ mail.ru, usnatdinovaaa@gmail.com

Одной из основных проблем моделирования является выбор вида математической модели. Наиболее существенной причиной, определяющей выбор является необходимость ответа на вопросы, что мы можем предоставить для определения вида и параметров модели и что мы хотим получить от предложенной модели.

При выборе структуры математических моделей в гидрологии, как и в других науках, проявляется ряд противоречивых тенденций.

1) Стремление создать математическую модель максимальной степени общности. В нее включают, по возможности, все наблюдаемые явления и интересующие исследователя факторы. Построенная модель, по замыслу, позволяет исследовать все возможные явления и эффекты.

2) Полученная модель должна очень точно описывать отдельные явления и процессы. В этом случае структура модели должна наиболее полно учитывать физические и природные закономерности, а также имеющиеся в наличии измеренные характеристики процесса, свойственные лишь этому явлению или объекту.

Эти две тенденции часто входят в противоречие. Желание иметь как можно большую модель, «учитывающую все и вся», приводит к загромождению несущественными зависимостями. Сложность математической модели приводит к большим вычислительным погрешностям, которые резко растут с увеличением размерности. Наступает бифуркация в оценке эффективности модели. Чем она больше и точнее, тем хуже получаемые с ее помощью результаты.

При моделировании систем водообмена наиболее естественным является использование аппарата динамических систем. Математическим аппаратом, описывающий непрерывные процессы являются дифференциальные уравнения и они хорошо разработаны. При этом в зависимости от характера решаемых задач используется уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения, разностные уравнения, дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом запаздывающего и нейтрального типов.

Одним из основных принципов составления математической модели является принцип баланса. При этом переменные состояния модели могут изменяться во времени и в пространстве в результате притоков (от внешних источников) или расходов (во внешние стоки), внутренних взаимодействий и перемещений вещества, вызываемых движением. В ряде случаев при составлении уравнений используют вариационные принципы, которые отражают основные принципы эволюции.

Если отождествлять водоемы с точками конечномерного пространства, то наиболее естественным является использование обыкновенных и разностных уравнений.

Рассмотрим принципы построения математической модели динамики воды в реках и озерах, вызванные механическим перемещением масс. Вода, поступившая на поверхность от таяния снега, льда и выпадения жидких осадков, трансформируется в сток. Задача моделирования процесса состоит в построении оператора, преобразующую функцию поступления в функцию стока. Анализ физической природы процесса и структура гидродинамических уравнений показывает, что в общем случае модель представляет собой громоздкую систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных со сложной и эволюционирующей геометрией области.

В ряде случаев при описании процесса удобно упрощать его, переходя к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом проводится дискретизация бассейна на отдельные участки, с содержанием воды, меняющимся во времени [1].

Рассмотрим следующую модель. Весь водный бассейн представляет собой систему $S = \{S_1, S_2, \ldots S_n\}$ иерархически расположенных подсистем, состоящих из бассейнов одного уровня S_i, $i = \overline{1,n}$. Между уровнями движение воды направлено в одну сторону, что обуславливается высотой относительно уровня моря. Обратные связи в системе отсутствуют. Рассмотрим каждый из уровней. Каждая из подсистем S_i, $i = \overline{1,n}$ представляет собой совокупность A_{ij}, $j = \overline{1, m_i}$, $m_i \leq m$ водоемов, сообщающихся между собой. В каждом из них имеется x_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1, m_i}$ количество воды [2].

При построении математической модели примем предположение, что динамика водообмена на каждом из уровней описывается системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = r_{i-1}(x_{i-1}) - r_i(x_i) - q_i(x_i) + q_i^*(t), \qquad i = \overline{1, n}\,,$$

где r_{i-1}- величина поступления воды за единицу времени из предыдущего уровня, q_i - количество воды поступающее (или вытекающее)за единицу времени, т.е. внутренний водообмен подсистемы S_i , q_i^* - внешние поступления количество воды, которое поступает в соответствующий водоем за единицу времени.

С использованием принципа баланса масс составлена система дифференциальных уравнений, отображающая динамику водообмена, системы иерархически расположенных водоемов. Рассмотрена линейная система дифференциальных уравнений и для этой задачи решаются задачи определения стационарного режима, управления параметрами спуска воды для обеспечения желаемого режима и задача устойчивости стационарного режимах [2].

Литература

1. **Кучмент Л.С.** *Математическое моделирование речного стока.* Ленинград.: Гидрометеоиздат. - 1980. - 190 с.
2. **Тлеумуратова Б.С., Мустафаева Р.** *Моделирование водного режима системы озер в дельте* Амударьи.: Вестник КК АН РУ. - 2008. №2.

УДК 517.55

Аналог теорема Бляшке для $A\,(z)-$ аналитических функций

Неъматиллаева.М.Д
Национальный университет Узбекистана muhayyo.rn@gmail.com

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}\,(z) = A\,(z)\,f_z\,(z)\,, \tag{1}$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A\,(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A\,(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) принято говорить $A-$аналитическими функциями.

Данная статья посвящена изучению аналог теорема Бляшке для $A\,(z)$ −аналитических функций в выпуклых областях . Теорема Бляшке аналитических функций рассмотрен в работах П.Кусис,Е.С.Титчмарш (см. [5]).

Теорема 1. (см. [2]) (аналог теоремы Коши). Если $f \in O_A\,(D) \bigcap C\,(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{C}-$ область со спрямляемой границей ∂D, то $\int\limits_{\partial D} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z}) = 0$.

Теорема 2.(см. [3]) (формула Коши). Пусть $D \subset \mathbb{C}-$выпуклая область и $G \subset D-$произвольная подобласть с кусочно гладкой границей ∂G. Тогда для любой функции $f\,(z) \in O_A\,(G) \bigcap C\,(\bar{G})$ имеет место формула

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f\,(\xi)}{z - \xi + \int\limits_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \left(d\xi + A\,(\xi)\,d\,\bar{\xi}\right), \quad z \in G.$$

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для $A-$аналитических функций будут ряды $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j\,(z,\,a),\;\; a \in D,\;\; c_j-$константы. Областью сходимости ряда (3) будет лемниската $L\,(a,\,r) = \{|\psi\,(z,\,a)| < r\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Теорема 3.(см. [4]) (разложение в ряд Лорана). Пусть $f(z) - A$ аналитична в кольце из лемнискат: $f \in O_A\left(L(a,R) \setminus L(a,r)\right), \ r < R$. Тогда $f(z)$ разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi^k(z,\, a).$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{[\psi(\xi,a)]^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi)\, d\bar{\xi}\right),\ 0 < \rho < r,\ \ k = 0, 1, 2....$

Если $0 < |\psi(a, a_n)| < r$, $\ n = 1, 2, 3, ...$, и бесконечное произведение

$$\prod_{n}^{\infty} r \cdot \frac{|\psi(a,a_n)|}{\psi(a,a_n)} \frac{\psi(a,a_n) - \psi(z,a)}{r^2 - \overline{\psi}(a,a_n)\psi(z,a)}$$

сходится для $\psi(z,a) < r$, то оно представляет некоторую функцию, $A-$аналитическую в лемнискате она называется произведением Бляшке.

Теорема A.(Аналог теорема Бляшке).Пусть функция $f(z) \in \mathrm{O}_A\left(L(a,R)\right)$ и $a_1, a_2, a_3, ... -$ нулей функции f в $L(a,R)$, $r_n = |\psi(a,a_n)|$. Предположим, что интегралы

$$\sup_{0<r<R} \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|\psi(z,a)|=r} \ln|f(z)|\,|dz + Ad\overline{z}| < \infty$$

ограничены сверху при $r_n \leq r_{n+1} < R$. Тогда $\sum\limits_{n} (r - |\psi(a,a_n)|) < \infty$ так что произведение $B(z) = \prod\limits_{n} r \cdot \frac{|\psi(a,a_n)|}{\psi(a,a_n)} \frac{\psi(a,a_n)-\psi(z,a)}{r^2 - \overline{\psi}(a,a_n)\psi(z,a)}$ сходится в $\{|\psi(z,a)| < R\}$, и имеет место равенство $f(z) = B(z) \cdot G(z)$, где функция $G(z)$ $A-$ аналитический и не имеет нулей в $\{|\psi(z,a)| < R\}$.

Литература

1. Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London, 1966, 133 pp.
2. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, С. 15-18.
3. Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для -аналитических функций, Узбекский математический журн., 2016, №4, С.50-59.
4. Tishabaev J.K., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Ya. Residues and argument prinsple for $A(z)-$analytic functions,Journal of Mathematical Sciences, 2020, Vol.245, No. 3, pp. 350-358.
5. П.Кусис , Введение в теорию простанств H^p. 85-89.

УДК 519.644

Оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m)}(0,1)$

Нуралиев Ф. А.[1,2], Уликов Ш. Ш.[2], Содиков С. С.[1]
nuraliyevf@mail.ru; sh-ulikov@mail.ru
[1]Ташкентский государственный транспортный университет; [2]Институт математики имены В.И.Романовского;

В настоящей работе рассматривается построение оптимальной решетчатой квадратурной формулы в пространстве $W_2^{(m)}(0,1)$. $W_2^{(m)}(0,1)$- пространство функций, m-е обобщенное производное которых суммируется с квадратом на отрезке $[0,1]$. Далее, нахождения экстремальной функции функционала погрешности квадратурных формул в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала сводятся к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая этой краевой задачи получены явное выражение экстремальной функции функционала погрешности квадратурных формул. Кроме того, в силу теоремы Рисса явно вычислена квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве Соболева $W_2^{(m)}(0,1)$. Здесь мы получаем ряд интересных и новых результатов, недостижимых в классическом смысле.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta]\varphi(h\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = i_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta]\delta(x-h\beta), \tag{2}$$

на пространстве $W_2^{(m)}(0,1)$. Здесь $k[\beta]$- коэффициенты квадратурной формулы (1), $i_{[0,1]}(x)$- индикатор отрезка [0, 1], $\delta(x)$ - дельта функция Дирака, $\varphi(x)$ –элемент гильбертово пространства $W_2^{(m)}(0,1)$, норма функций в котором задается формулой

$$\left||\varphi(x)|\, W_2^{(m)}(0,1)\right| = \left\{\int_0^1 \left(\left(\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\right)^2 + \left(\frac{d^{m-1}\varphi(x)}{dx^{m-1}}\right)^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta]\varphi(h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \ .$$

Качество квадратурной формулы (1) оценивается при помощи нормы функционала погрешности

$$\left\|\ell(x)\left|\mathrm{W}_2^{(m)*}(0,1)\right.\right\| = \sup_{\left\|\varphi(x)\left|W_2^{(m)}\right.\right\|=1} |(\ell(x),\varphi(x))|$$

Норма функционала погрешности $\ell(x)$ зависит от коэффициентов $k[\beta]$. Выбор коэффициентов при фиксированных узлах представляет собою линейную задачу. Поэтому норму функционала погрешности минимизируем по коэффициентам, т.е. найдем

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}(x)\left|W_2^{(m)*}(0,1)\right.\right\| = \inf_{k[\beta]} \left\|\ell(x)\left|W_2^{(m)*}(0,1)\right.\right\| \ . \tag{3}$$

Если найдена $\left\|\overset{\circ}{\ell}(x)\right\|$, то говорят, что функционал $\overset{\circ}{\ell}(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $W_2^{(m)}(0,1)$. Таким образом, мы получим следующие задачи.

Задача 1. *Найти норму функционала погрешности $\ell(x)$ квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m)*}(0,1)$.*

Задача 2. *Найти такие значения коэффициентов $k[\beta]$, чтобы выполнялось равенство (3).*

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Коэффициенты оптимальной решетчатых квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m)}(0,1)$ имеют вид:

$$k[\beta]=\begin{cases} D_m(h\beta)*f_m(h\beta)|_{\beta=0}+a+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left(a_k+b_k\lambda_k^N\right), & \beta=0;\\ D_m(h\beta)*f_m(h\beta)+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^{\beta}+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right), & \beta=\overline{1,N-1};\\ D_m(h\beta)*f_m(h\beta)|_{\beta=N}+b+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^N+b_k\right), & \beta=N,\end{cases}$$

где $D_m(h\beta)$,$f_m(h\beta)$,a_k, b_k, a, b,λ_k - известные.

УДК 511.325

Условная схема Монте-Карло для рассчета стабильных коэффициентов чувствительности (греков) автоколлируемых нот типа worst-of: многомерный случай

Рахмонов Ф.З.[1]

[1]Институт математики им. А.Джураева Национальной Академии наук Таджикистана;
rakhmonov.firuz@gmail.com

Известно, что применение метода Монте-Карло при оценке производных финансовых инструментов со свойством досрочного погашения приводят к нестабильным коэффициентам чувствительности (грекам) и к большим погрешностям в схеме Монте-Карло, см. [2].

В работе применяются методы линейной алгебры и свойства ортогональных преобразований для снижении дисперсии схемы Монте-Карло, также используются особенности автоколлируемой ноты типа worst-of и воспроизводятся стабильные коэффициенты чувствительности. Эта схема наглядно демонстрирует уменьшение дисперсии в схеме Монте-Карло и может использоваться при оценке стоимости многомерных автоколлируемых нот с любым числом базовых активов.

Дадим определение автоколлируемым нотам типа worst-of (“худшая из”). Пусть дан набор дат наблюдения $0<t_1<\ldots<t_n$. Автоколлируемая нота типа worst-of определяется на корзине базовых активов (например, акций) $S^{(1)},\ldots,S^{(d)}$. В каждую дату наблюдения t_j, за исключением конечной даты наблюдения, данная нота имеет следующую структуру выплат

$$\begin{cases} Nc, & \text{если} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}<B, \quad \forall k<j \quad \text{и} \quad C\le\min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_j)}{S_a^{(i)}}<B,\\ N+Nc, & \text{если} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}<B, \quad \forall k<j \quad \text{и} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_j)}{S_a^{(i)}}\ge B,\end{cases}$$

На конечную дату наблюдения t_n выплата определяется следующим образом:

$$\begin{cases} N+Nc, & \text{если} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}<B, \quad \forall k<n \quad \text{и} \quad C\le\min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_n)}{S_a^{(i)}},\\ N, & \text{если} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}<B, \quad \forall k<n \quad \text{и} \quad L\le\min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_n)}{S_a^{(i)}}<C,\\ Nq(S^{(1)}(t_n),\ldots,S^{(d)}(t_n)), & \text{если} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}<B, \quad \forall k<n \quad \text{и} \quad \min\limits_{i=\overline{1,d}}\dfrac{S^{(i)}(t_n)}{S_a^{(i)}}<L,\end{cases}$$

где N это номинальная сумма (Notional amount), C, B и L определяют уровни купонного барьера (coupon barrier), автоколлируемого барьера (autocall barrier) и нижнего барьера (lower barrier) соответственно. Автоколлируемый (или верхний) барьер B определяет уровень, после пробития которого на дату наблюдения автоколлируемая нота перестает существовать (терминируется). Мы всегда предполагаем, что $C < B$, и c это купонная ставка (coupon rate) для каждого периода наблюдения и она фиксируется при выпуске данной ноты. $S_a^{(i)} := S^{(i)}(t_a)$, $i = 1, \ldots, d$ обозначают цену i-го базового актива из корзины на момент выпуска ноты $t_a < t_0$ и используются для определения показателя относительных роста или снижения цены каждого базового актива. Таким образом, $\dfrac{S^{(i)}(t_k)}{S_a^{(i)}}$ определеяет рост или снижение стоимости (эффективность) i-го базового актива на момент времени t_k. Функция $q(S^{(1)}(t_n), \ldots, S^{(d)}(t_n))$ определяет уменьшенную сумму, которая выплачивается держателю автоколлируемой ноты и обычно она равна $\min\limits_{i=\overline{1,d}} \dfrac{S^{(i)}(t_n)}{S_a^{(i)}}$, базовому активу с наихудшей эффективностью (доходностью). Это и объясняет устоявшееся название worst-of, что означает "худшая из". Другими словами, данный контракт выплачивает условный купон пока не наступает момент пробития верхнего барьера B, который определяется как первая дата наблюдения при котором базовый актив с наихудшей эффективностью превышает верхний барьер B. Если в одном из дат наблюдения происходит пробитие верхнего барьера B, номинальная сумма N, а также купон Nc выплачиваются и контракт перестает существовать. Однако, если этот барьер не пробивается и контракт "выживает" до конечной даты наблюдения, а также на эту конечную дату наихудший базовый актив в корзине меньше чем нижний барьер L, в этом случае держателю ноты выплачивается сниженная сумма $Nq(S^{(1)}(t_n), \ldots, S^{(d)}(t_n))$. Если наихудший базовый актив в корзине меньше чем купонный барьер C, но больше нижнего барьера L, то номинальная сумма N выплачивается, но без купона.

В работе удалось предложить эффективный алгоритм со сниженной дисперсией, который дает гораздо более точные результаты для расчета цены и коэффициентов чувствительности данного финансового инструмента.

Хорошо известно, что разрывы в функции выплаты этих нот ведут к снижению стабильности расчетов коэффициентов чувствительности в схемах Монте-Карло. Переформулировав расчет цены, с учетом перехода к мере, где нота не терминируется, мы можем обойти проблемы связанные с разрывами функции выплат автоколлируемой ноты. Заметим, что если триггер-функция автоколлируемой ноты достаточно гладкая функция, существуют замечательные общие методы решения проблем с разрывами в функции выплат, см [2]. Мы используем идеи сглаживания разрывов с использованием техники из [4], где принимается во внимание особенность структуры автоколлируемой ноты типа worst-of и учитываются только те симуляции, которые находятся в зоне выживания и не ведут к терминации финансового инструмента.

Как видно из результатов, вычисление коэффициентов чувствительности к риску с использованием конечных разностей в представленной нами схеме, приводят к значительному снижению дисперсии по сравнению со стандартным методом Монте-Карло.

Литература

1. **Andersen L.B.G., Piterbarg V.V.** *Interest rate modeling.* - Atlantic Financial Press. - 2010.
2. **Fries C.P., Joshi M.S.** *Perturbation Stable Conditional Analytic Monte-Carlo Pricing Scheme For Auto-Callable Products.* - International Journal of Theoretical and Applied Finance. - 2011. **14**(2). -197–219.
3. **Geveke J.** *Efficient Simulation from the Multivariate Normal and Student t-Distributions Subject to Linear Constraints.* - Computing Science and Statistics: Proceedings of the 23rd symposium on the interface. - 1991. P. 571–578.
4. **Glasserman P., Staum J.** *Conditioning on One-Step Survival for Barrier Option Sumulation.* - Operations Research. - 1999. - **49**(6). - 923–927.

	Эффективный алгоритм		Стандартный подход	
# симуляции	среднее	ст.ошибка	среднее	ст.ошибка
3000	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$6.87 \cdot 10^{-3}$	$2.16 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{-2}$
5000	$2.09 \cdot 10^{-1}$	$8.38 \cdot 10^{-3}$	$2.04 \cdot 10^{-1}$	$5.64 \cdot 10^{-2}$
10000	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$3.74 \cdot 10^{-3}$	$2.02 \cdot 10^{-1}$	$4.47 \cdot 10^{-2}$
20000	$2.09 \cdot 10^{-1}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-1}$	$2.73 \cdot 10^{-2}$
30000	$2.08 \cdot 10^{-1}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$	$3.04 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1: Результаты вычисления дельты по цене первого базового актива $S^{(1)}(0)$. "Стандартный подход" обозначает стандартную схему Монте-Карло, "Эффективный алгоритм" обозначает алгоритм, приведенный в работе. Аналогичные результаты получены для цены инструмента и для других коэффициентов чувствительности (гамма, вега).

УДК 532.546

Численное моделирование задач идентификации правой части параболических уравнений

Холлиев Ф.Б.[1], Дусназарова Р.К.[2]
[1,]Самаркандский государственный университет.
[2]Термезский государственный университет.
surxon88@bk.ru; dusnazarovaroksana@gmail.com

Задачи идентификации неизвестной правой части дифференциальных уравнений относятся к обратным задачам математической физики и, как правило, являются некорректными [1, 2, 3]. Такие задачи обычно возникают при определении мощности тепловых источников, если рассматриваются тепловые задачи. Аналогично можно интерпретировать эти задачи как определение мощности источников загрязнения при рассмотрении процессов распространения различных загрязняющих веществ в атмосфере или в других средах, например в подземных проницаемых пластах.

Для того, чтобы определить правую часть дифференциального уравнения, должна быть задана дополнительная информация о решении прямой задачи. Эта информация задается либо во всей области, где рассматривается прямая задача, либо в определенной части этой области. Если дополнительная информация задается во всей области, то решение обратной задачи сводится к вычислению значений дифференциального оператора. Если решение прямой задачи обладает с необходимой степенью гладкости, то определение значений дифференциального оператора является корректной задачей. Если же решение прямой задачи не обладает необходимой степенью гладкости, а также известно не точное решение, а некоторое его приближение, содержащее погрешность определенного характера, то задача вычисления дифференциального оператора является некорректной. Если дополнительная информация задана на части области, то обратная задача по определению правой части уравнения напрямую является некорректной.

Обратные задачи по определению правой части дифференциального уравнения имеют существенные отличия для стационарных и нестационарных уравнений. Если правая часть стационарного уравнения является функцией одного переменного, то в нестационарных уравнениях правая часть в общем случае является функцией времени и пространственных координат, т.е. функцией многих переменных. В нестационарных обратных задачах обычно делаются некоторые упрощающие предположения. Например, априори считается, что правая часть является функцией с разделяющимися переменными. Задача ставится для части функции с определенным переменным, например времени.

Допустим дифференциальный оператор A определен на множестве функций $u(x)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, l]$. Тогда задачу определения правой части $f(x)$ дифференциального уравнения можно записать в виде

$$f = Au. \tag{1}$$

Пусть оператор A в $L_2(0,1)$ является самосопряженным, положительно определенным оператором, т.е.

$$A = A^* \geq mE, m > 0, \tag{2}$$

где m - нижняя граница оператора A , E единичный оператор.

Тогда существуют единственный ограниченный оператор $0 < A^{-1} \preceq \frac{1}{m}E$. Следовательно, в (1) оператор A можно обращать и уравнение записать в виде

$$Bf = u, \tag{3}$$

где $B = B^* = A^{-1}$.

Задача решения операторного уравнения (3) при заданных u является классической задачей. Однако, если вместо точного $u(x)$ известно приближенное значение $u_\delta(x)$ с

$$\|u_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta, \quad \delta > 0, \tag{4}$$

то задача (3) уже будет некорректной. Для обеспечения условной устойчивости решения $f(x)$ необходимо применить регуляризирующие алгоритмы. В частности, когда применяется регуляризация по А.Н.Тихонову, приближенное решение $f_\alpha,\ \alpha = \alpha(\delta)$ определяется из условия минимума функционала

$$J_\alpha(f_\alpha) = \min_{v \in L_2(0,\,1)} \; J_\alpha(v), \tag{5}$$

где $J_\alpha(v) = \|Bv - u_\alpha\|_{L_2}^2 + \alpha\,\|v\|_{L_2}^2$, α- параметр регуляризации, выбор которого осуществляется на основе различных критериев.

Применение (1) для определения f с $Au = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u$, где $k(x) \geq k_0 > 0, \quad q(x) \geq 0$, показало [2], что для получения более-менее устойчивого решения $f(x)$ с приближенно заданным u_δ необходимо дискредитировать A с относительно крупным шагом h по x. Применение же тихоновской регуляризации дает относительно устойчивое решение при соответствующем выборе α, согласованном с δ. При этом важно отметить, что если искомая функция $f(x)$ принадлежит множеству, на котором определен оператор A, то получаются относительно лучшие результаты. В случае, когда $f(x)$ не принадлежит этому множеству, в определенных точках $[0,\,l]$ можно получить значения $f(x)$ с большой погрешностью.

В случае, когда рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными, в частности параболическое уравнение нестационарной теплопроводности в одномерном случае, правая часть будет функцией двух переменных $f(t,\,x)$. Как и в стационарном случае, дискретизация дифференциального оператора при неточно заданном решении прямой задачи $u(t,\,x)$ приводит к некорректной задаче. Регуляризация задачи может быть осуществлена оптимальным выбором шагов дискретизации как по t, так и по x. Оптимальные значения шагов определяются уровнем погрешности решения прямой задачи δ. Считается, что выполняется $\|u_\delta(t,\,x) - u(t,\,x)\| < \delta$ в какой-то выбранной норме, $u_\delta(t,\,x)$ решение прямой задачи с погрешностью.

Для одномерного параболического уравнения задача определения правой части может быть записана в виде

$$f(t,\,x) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

с однородными начальной и граничными условиями.

Применение метода регуляризации А.Н.Тихонова приводит и уравнению

$$\left(E + \alpha D^* D\right) f_\alpha = DU_\delta, \tag{6}$$

где $Du = \frac{\partial u}{\partial t} + Au, \quad D^*u = -\frac{\partial u}{\partial t} + Au,$

$$Au = -\frac{\partial u}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Уравнение (6) относится к эллиптическому типу, для решения которого необходимо задать граничные условия специального вида [2, 4] и применить соответствующие численные методы.

Литература

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1986.

2. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** *Численные методы решения обратных задач математической физики.* М.: ЛКУ, 3-е издание, 2009. 480 с.

3. **Кабанихин С.И.** *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

4. **Samarskii A.A.** *The theory of difference schemes.* Marcel Dekker, Inc. 2001.

УДК 532.546

Математическая модель аномального переноса вещества в фрактальных пористых средах

Хўжаёров Б.Х.[1], Холлиев Ф.Б.[2],Омонов Ш.[3]
[1,2,3]Самаркандский государственный университет
b.khuzhayorov@mail.ru; surxon88@bk.ru.

Математическое моделирование процессов переноса веществ в пористой среде в основном проводится в предположении, что основными физическими явлениями, составляющими основу переноса, является диффузия и конвекция (адвекция) вещества. В процессе переноса веществ могут протекать такие явления как адсорбция, кольматация и суффозия пор, внутренный массоперенос и др. [1].

Если пористая среда неоднородна, перенос вещества может быть аномальным, т. е. он не подчиняется закону Фика. В таких условиях математическая модель будет иметь сложный вид. Одной из таких является модель, построенная на основе дифференциального уравнения с дробными производными. На основе этой модели до сих пор решались наиболее простые задачи. Задачи, особенно в многомерных средах, до сих пор недостаточно изучены. Решение дифференциального уравнения с дробными производными сопровождено с некоторыми трудностями. Численные методы решения задач с дробными производными зависят от выбранного вида производной, поэтому необходимо анализировать и сравнивать результаты, полученные с использованием разных определений производной и численных методов. Один из вариантов модифицированного закона Фика использован для вывода уравнения диффузии с дробной производной [2].

В данной работе процесс аномального переноса веществ в пористых средах с фрактальной структурой моделируется дифференциальными уравнениями с дробной производной. Поставлена и численно решена задача переноса вещества в двухзонной среде с подвижной и неподвижной жидкостью (*рис.*1). Определены профили изменения концентрации вещества в этих двух зонах. В указанных двух зонах среды из-за различия их характеристик процесс

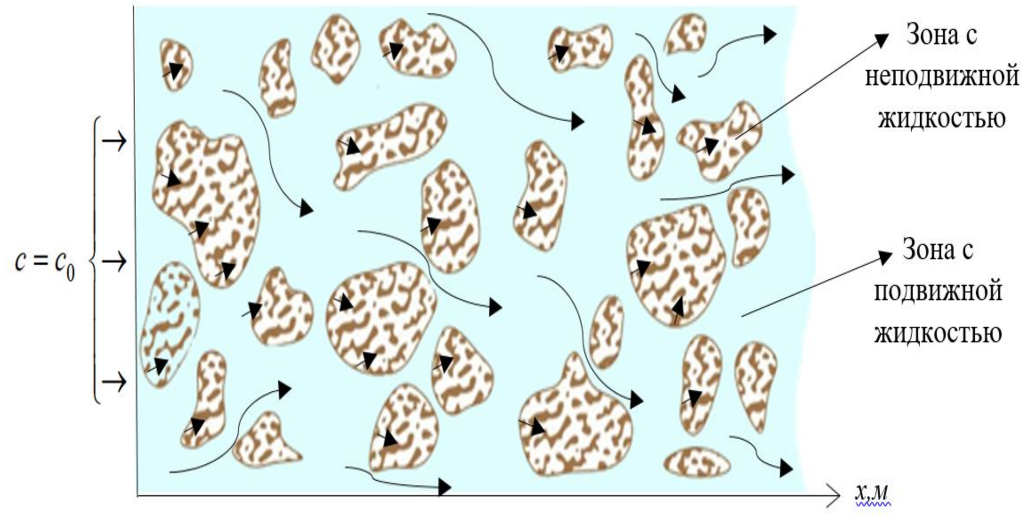


Рис.1 Схема переноса вещества в двухзонной среде.

переноса вещества имеет различные особенности. Соответственно, уравнения, описывающие процесс переноса, в каждой зоне записываются с учетом этих особенностей.

Таким образом, рассмотрим среду, состоящую из двух зон: мобильной, т.е. зоны с подвижной жидкостью, и неподвижной, где жидкость неподвижна, но происходит диффузионный перенос вещества.

Для описания процесса переноса вещества обычно используется два подхода: диффузионный и кинетический. В диффузионном подходе в обеих зонах записываются уравнения переноса и учитывается диффузионный перенос на границе зон. В кинетическом подходе рассматривается уравнение переноса в одной зоне, а массообмен со второй зоной описывается кинетическим уравнением. Здесь мы используем кинетический подход. Причем, считаем, что кинетическое уравнение имеет аномальный характер, что учитывается через использования дробной производной. В зоне с подвижной жидкостью также учитывается аномальность диффузии.

Таким образом, уравнения переноса вещества имеют вид

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \theta_m D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - v_m \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \omega (c_m - c_{im}). \tag{2}$$

где θ_m, θ_{im}– пористости, c_m, c_{im}– объемные концентрации вещества, $v_{<}$–осредненная скорость движения раствора, γ–коэффициент переноса массы, $[\gamma] = T^{\alpha-1}$, $[\omega] = T^{-1}$, индекс m относится мобильной, а im–неподвижной зоне с жидкостью, дробные производные понимаются по определению Капуто [3].

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$c_m(0,\ x) = 0, \qquad c_{im}(0,\ x) = 0, \tag{3}$$

$$c_m(t,\ 0) = A_0, \qquad c_m(t,\ \infty) = 0. \tag{4}$$

Порядки дробных производных α и β изменяются в следующем диапозоне: $0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < \beta \leq 2$.

Для численного решения задачи (1)-(4) применяем метод конечных разностей [4].

В области $\Omega = \{0 \leq x \leq \infty,\ \ 0 \leq t \leq T\}$ введем равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \left\{(x_i, t_j),\ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = L/N,\ t_j = j\tau,\ j = \overline{0, M},\ \tau = T/M\right\}$, где h– шаг сетки по координату x, τ – шаг сетки по времени t, L – характерная длина пористой среды.

Дробные производные аппроксимируем следующим образом [5].

$$\frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{(2-\alpha)}\left[\sum_{l=0}^{j-1}\frac{(c_{im})_i^{l+1}-(c_{im})_i^l}{\tau}\cdot\left((j-l+1)^{1-\alpha}-(j-l)^{1-\alpha}\right)+\frac{(c_{im})_i^{j+1}-(c_{im})_i^j}{\tau}\right],$$

$$\frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} = \frac{1}{(3-\beta)*h^\beta}*\left(\sum_{l=0}^{i-1}\left((c_m)_{i-(l+1)}^j-2(c_m)_{i-l}^j+(c_m)_{i-(l-1)}^j\right)\right)*\left((l+1)^{2-\beta}-(l)^{2-\beta}\right),$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = \frac{(c_m)_i^{j+1}-(c_m)_i^j}{\tau},$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial x} = \frac{(c_m)_{i+1}^j-(c_m)_{i-1}^j}{2h}.$$

Переведенный численный анализ показывает, что аномальность процесса значительно влияет на характеристики переноса вещества в обеих зонах среды, т.е. как в микро-, так и в макропоре. Аномальность переноса характеризуется порядком производной в диффузионном члене уравнения переноса и уравнения кинетики массообмена.

Литература

1. **Хужаеров Б.Х., Махмудов Ж.М.** *Математические модели фильтрации неоднородных жидкочтей в пористых средах.* Ташкент: Фан, 2014. -280 с. Монография

2. **Корчагина А.Н., Мержиевский Л.А.** *Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах.* Учёные записки ЗабГУ, 3(50), 2013, с.53-59.

3. **Caputo M.** *Models of flux in porous media with memory* . Water Resour. Res., 36(3), 2000. Pp. 693–705.

4. **А.А.Самарский.** *Теория разностных схем.* Москва: Наука, 1989. -616 с.

5. **F.Liu, P.Zhuang, V.Anh, I.Turner, K.Burrage.** *Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation.* Applied Mathematics and Computation, 191 (2007) 12-20.

УДК 532.546

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА РЕТАРДАЦИИ И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Э.Ч.ХОЛИЯРОВ[1], *О.Ш.ХАЙДАРОВ* [2]

[1]Термезский государственный университет;

[2]Самаркандский государственный университет;

khaydarovodiljon1981@gmail.com ; e.kholiyarov@mail.ru

В этой работе рассмотрена задача определения коэффициента ретардации и источника в модели переноса веществ в пористых средах. Для того чтобы подготовить дополнительную информацию для решения обратной задачи рассматривалась соответствующая прямая задача с известными значениями коэффициента ретардации. Таким образом подготовлены «исходные данные» для решения обратной задачи. Проводились также расчеты с возмущенными исходными данными, которые подготовлены путем зашумления данных случайными погрешностями.

Рассмотрим следующие уравнение переноса вещества в пористой среде [1,2]

$$R\frac{\partial c}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{v}{m}\frac{\partial c}{\partial x} + \lambda Rc - \frac{qc^*}{m} = 0, \quad (1)$$

где R – ретардационный фактор; c – концентрация массы вещества в жидкой фазе, т. е. масса растворенного вещества в единице объема раствора (kg/m^2) m - пористость(m^3/m^3), q - объемная скорость закачки исходной жидкости в единице объема. Уравнение неразрывности записывается в виде

t - время $()$, v - скорость течения жидкости в пористой среде (m/c), c^* - концентрация вещества в закачиваемой жидкости в пористой среде.

Для решения уравнения (1) используются следующие начальное и граничные условия. В качестве дополнительного условия принимаем

$$c(0,x)=0, \tag{2}$$

$$c(t,0)=c_0, c(t,l)=0, \tag{3}$$

$$c(t,x_k)=z_k(t), k=1,2,3...,n, \tag{4}$$

где $z_k(t)$ - значения функции $c(t,x_k)$ в точках x_k , полученные обычно путем измерений, $k=1,2,3...,n,$.

Рассмотрим теперь задачу определения коэффициента R и параметра qв источником члене из условия минимума следующего функционала невязки [3]

$$J(R,q)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left[c(t,x_k)-z_k(t)\right]^2\,dt \tag{5}$$

Для эффективного решения обратной задачи, вместо функционала невязки (5) можно использовать следующий модифицированный функционал невязки

$$J_M\left(\gamma^{s+1}\right)=J\left(\gamma^s\right)+\alpha\left(\gamma^{s+1}-\gamma^s\right)^2, \gamma=(R,q), \tag{6}$$

где α - параметр регуляризации, s -номер приближения $\gamma^s=\left(R^s,q^s\right)$,

Условие стационарности функционала (6) имеет вид [4]

$$\frac{dJ_M\left(\gamma^{s+1}\right)}{d\gamma}=2\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\left[\overset{s}{c}(t,x_k)-z_k(t)\right]\overset{s}{w}(t,x_k)\,dt+2\alpha(\gamma^{s+1}-\gamma^s)=0. \tag{7}$$

где w вектор столбец,

$$\frac{\overset{s}{\partial c}}{\partial\gamma}=\overset{s}{w}=(\overset{s}{w}_1,\overset{s}{w}_2)^T=\left(\frac{\overset{s}{\partial c}}{\partial R^s},\frac{\overset{s}{\partial c}}{\partial q^s}\right)^T, \tag{8}$$

где w_1,w_2 - функции чувствительности [4] соответственно по коэффициентам R,q .

Разложим в ряд функцию c в окрестности γ^s с точностью до членов второго порядка

$$\overset{s+1}{c}(t,x)\approx\overset{s}{c}(t,x)+(\overset{s+1}{\gamma}-\overset{s}{\gamma})\overset{s}{w}(t,x). \tag{9}$$

Подставляя разложение (9) в соотношение (7), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно R^{s+1} ,q^{s+1}:

$$\begin{cases}a_11R^{s+1}+a_12q^{s+1}=b_1,\\ a_21R^{s+1}+a_22q^{s+1}=b_2,\end{cases} \tag{10}$$

где

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\overset{s}{w}{}_1^2(t,x_k)dt+\alpha,\ \sum_{k=1}^{n}\int_0^T\overset{s}{w}{}_2^2(t,x_k)dt+\alpha,$$

$$a_12 = a_21 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \overset{s}{w}_1(t, x_k)\overset{s}{w}_2(t, x_k)dt$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left[\overset{s}{w}_1(t, x_k)R^s + \overset{s}{w}_2(t, x_k)q^s - \overset{s}{c}(t, x_k) + z_k(t)\right] \overset{s}{w}_1(t, x_k)dt + \alpha R^s, \quad (10)$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left[\overset{s}{w}_1(t, x_k)R^s + \overset{s}{w}_2(t, x_k)q^s - \overset{s}{c}(t, x_k) + z_k(t)\right] \overset{s}{w}_2(t, x_k)dt + \alpha q^s, \quad (11)$$

Продифференцируем задачу (1) - (3) по коэффициенту R

$$R\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} - D\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{v}{m}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda R w_1 + \lambda c = 0, \quad (12)$$

$$w_1(0, x) = 0, \quad (13)$$

$$w_1(t, 0) = 0, \; w_1(t, l) = 0. \quad (14)$$

Аналогично продифференцируем задачу (1) - (3) по коэффициенту q и получим следующую задачу

$$R\frac{\partial w_2}{\partial t} - D\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{v}{m}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda R w_2 - \frac{c^*}{m} = 0, \quad (15)$$

$$w_2(0, x) = 0, \quad (16)$$

$$w_2(t, 0) = 0, \; w_2(t, l) = 0. \quad (17)$$

Таким образом, алгоритм определения коэффициентов r и q строится следующим образом:

1. Выбираем начальные приближения R^0, q^0 (полагая $s = 0$);

2. Решая задачу (1) - (3) от $t = 0$ до $t = T$ определяем функция $c(t, x)$.

Находим значение функционала (5). Решаем задачи (12) - (14), (15) - (17) от $t = 0$ до $t = T$ и определяем функции $w_1(t, x)$,$w_2(t, x)$;

3. Решаем систему уравнений (10), (11) и вычисляем приближения R^{s+1} , q^{s+1} ;

4. Полагаем $s = s + 1$, $R = R^{s+1}$,$q = q^{s+1}$;

5. Повторяем этапы 2, 3, 4 до выполнения условия

$$\frac{|J^{s+1} - J^s|}{J^s} \preceq \varepsilon, \; \frac{|R^{s+1} - R^s|}{R^s} \preceq \varepsilon_1, \frac{|q^{s+1} - q^s|}{q^s} \preceq \varepsilon_2,$$

где ε, ε_1 , ε_2 – достаточно допустимые погрешности.

Задачи (1) - (3), (12) - (14), (15) - (17) решаются методом конечных разностей [5]. Для численного решения задачи (1) - (3), (12) - (14), (15) - (17) использованы следующие исходные значения параметров: $T = 250$ сутки, $L = 100m$,/ $v_x = 0,1$ m/сутка ,/ $c_0 = 0.1kg/m^3; m = 0,2$ - пористость среды (m^3/m^3); $/D_{xx} = 1,0m^2/, c^* = 0,01; q = 5,0 \cdot 10^{-6}; N = 201, M = 1001, h = 0,5$m , $\tau = 0,25, k_1 = 21; k_2 = 41, k_3 = 81; x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 40$.

На основе численных расчетов коэффициенты определены с достаточной точностью. Определен оптимальный диапазон значений параметра регуляризации α.

Литература

1. **V. Lakshminarayana** *Tej Ram Nayak. Modelling contaminant transport in saturated aquifers Department of Civil Engineering Indian Institute of Technology, Kanpur,India.*
2. **Bear, J.; Cheng, A.H.-D.** *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport; Springer: Berlin, Germany* : 2010.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** *Методы решения некорректных задач. М. Наука.* : 1979 2-издание.
4. **Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А.** *Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск:* Наука, 1980.
5. **Самарский А.А.** *Теория разностных схем. Москва:* Наука. 1989.

УДК 519.644

Оптимальное приближение интегралов Фурье

Шадиметов Х.М.[1,2], Абдукаимов Б.Н.[1], Аминов М.Ш.[3]
kholmatshadimetov@mail.ru
[1]Ташкентский государственный транспортный университет;
[2]Институт математики имени В.И.Романовского;
[3]Термезский государственный университет;

Приближенное вычисление интеграла

$$I_w = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iwx} \varphi(x), \tag{1}$$

где w - произвольное число из Z - множество целых чисел, играет важную роль в вычислительной математике. Хорошо известно, что численный счет таких интегралов наталкивается на определенные трудности при больших значениях w из-за того, что подынтегральная функция сильно осциллирует.

Вычисление интеграла (1) часто выполняется методом Файлона. Метод Файлона напоминает квадратурную формулу Симпсона. Однако в то время, как в методе Симпсона вся подинтегральная функция заменяется параболой, в методе Файлона параболой заменяется только функция $\varphi(x)$. Таким путем Файлон получил квадратурную формулу с коэффициентами, зависящими от w. В настоящей работе комбинируя методов С.Л. Соболева и И. Бабушки для приближенного вычисления интеграла (1), построена оптимальная квадратурная формула и вычислена квадрат нормы функционала погрешности построенных оптимальных квадратурных формул в конкретном гильбертовом пространстве.

Пусть $\widetilde{H}_2^{(m)}, m \geq 1$ - гильбертово пространство 2π периодических, комплекснозначных функций $\varphi(x)$, -$\infty < x < \infty$, отличающихся более чем на константу, m-е производные которых (в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы, со скалярным произведением

$$(f, g)_m = \int_0^{2\pi} \frac{d^m f}{dx^m} \overline{\frac{d^m g}{dx^m}} dx, \tag{2}$$

здесь обозначение $\overline{g}$- сопряженное к g. При этом норма $\varphi(x)$ в пространстве $\widetilde{H}_2^{(m)}$ определяется равенством

$$\left(\int_0^{2\pi} \varphi^{(m)}(x) \overline{\varphi^{(m)}}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \varphi / \widetilde{H_2^{(m)}} \right\| \tag{3}$$

Для $\varphi(x)$ рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iwx}\varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \tag{4}$$

где c_k - коэффициенты квадратурной формулы, $N = 2, 3, \ldots$. Погрешность квадратурной формулы (4) задается в виде

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iwx}\varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi\left(\frac{2\pi k}{N}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\mathrm{e}^{iwx} - \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\beta\right)\right] \varphi(x)dx = \tag{5}$$

$$= (\ell, \varphi).$$

Здесь $\delta(x)$-дельта функция Дирака и

$$\ell(x) = \mathrm{e}^{iwx} - \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi\beta\right) \tag{6}$$

- периодический функционал погрешности квадратурной формулы (4). Задача о построении оптимальной формулы для приближенного вычисления интеграла (1) заключается в следующем.

Требуется найти величину

$$\inf_{c_k} \sup_{\varphi \in \widetilde{H}_2^{(m)}} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\left\|\varphi / \widetilde{H}_2^{(m)}\right\|} = \left\|\overset{\circ}{\ell} / \widetilde{H}_2^{(m)*}\right\| = \left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|, \tag{7}$$

т.е. функцию $\phi(x)$ из $\widetilde{H}_2^{(m)}$ для которой достигается точная верхняя грань, а также коэффициенты $\overset{\circ}{c}_k$ - для которых достигается точная нижняя грань в (7). При этом функция $\phi(x)$ называется экстремальной функцией квадратурной формулы (4) в пространстве $\widetilde{H}_2^{(m)}$, $\overset{\circ}{c}_k$ оптимальными коэффициентами, а $\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|$ нормой функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы. Пространство $\widetilde{H}_2^{(m)}$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны к единице

$$(\ell, 1) = 0.$$

Центральными результатами настоящей работы являются следующие.

Теорема 1. Если $\varphi(x) \in \widetilde{H_2^{(1)}}$, тогда для оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (4) с функционалом погрешности (6) справедливы формулы

$$\overset{\circ}{c}_k = \frac{2\pi}{N} \left(\frac{\sin\frac{\pi w}{N}}{\frac{\pi w}{N}}\right)^2,$$

где $k = 1, 2, \ldots, N$.

Теорема 2. В пространстве $\widetilde{H}_2^{(1)}$ для квадрата нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы $\ell(x)$ справедлива следующая формула

$$\left\|\overset{\circ}{\ell} / \widetilde{H}_2^{(1)*}\right\|^2 = \frac{2\pi}{w^2}\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{\pi w}{N}}{\frac{\pi w}{N}}\right)^2\right].$$

УДК 519.62

Представление оптимальных коэффициентов разностных формул

Шадиметов Х. М.[1,2], Мирзакабилов Р. Н.[3], Муминов Ш. Б.[4]
kholmatshadimetov@mail.ru; ravshan.m.n@mail.ru
[1] Ташкентский государственный транспортный университет;
[2] Институт математики имени В.И. Романовского, АН РУз;
[3] Джизакский государственный педагогический университет;
[4] Ферганский государственный университет;

Всюду в дальнейшем под разностной формулой мы будем понимать приближенное равенство

$$\sum_{\beta=0}^{k} C\left[\beta\right]\varphi\left[\beta\right] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\left[\beta\right]\varphi'\left[\beta\right] \cong 0. \tag{1}$$

Здесь $[\beta]=h\beta, \beta=0,1,...,k, C\left[k\right]\neq 0, C\left[\beta\right]$ и $C^{(1)}\left[\beta\right]$ коэффициенты разностной формулы, $h=\frac{1}{N}$, $N=1,2,....$ Будем рассматривать функции $\varphi\left(x\right)$, принадлежащие гильбертову пространству Соболева $L_2^{(m)}\left(0,1\right)$. Гильбертово пространство $L_2^{(m)}\left(0,1\right)$- класс вещественных функций $\varphi\left(x\right)$, отличающихся на полином степени $m-1$ с производными (в смысле обобщенных функций) порядка m, квадратично интегрируемыми на интервале $[0,1]$ и скалярным произведением

$$\left(f,\varphi\right)=\int\limits_0^1\left(\frac{d^m f\left(x\right)}{dx^m}\right)\left(\frac{d^m\varphi\left(x\right)}{dx^m}\right)dx. \tag{2}$$

Полунорма в пространстве Соболева $L_2^{(m)}\left(0,1\right)$ задается формулой

$$\left\|\varphi|\,L_2^{(m)}\left(0,1\right)\right\|=\left(\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}\left(x\right)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Известно [1], что пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространство $C[0,1]$ непрерывных функций, то линейным будет и функционал погрешности разностной формулы

$$\left(\ell,\varphi\right)=\sum_{\beta=0}^{k} C\left[\beta\right]\varphi\left[\beta\right] - h\sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\left[\beta\right]\varphi'\left[\beta\right] =$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\beta=0}^{k} C\left[\beta\right]\delta\left(x-h\beta\right)+h\sum_{\beta=0}^{N} C^{(1)}\left[\beta\right]\delta'\left(x-h\beta\right)\right]\varphi\left(x\right)dx, \tag{4}$$

где $\delta\left(x\right)$-дельта функция Дирака. Задача о построении разностной формулы вида (**??**) в функциональной постановке состоит в нахождении такого функционала норма которого в пространстве $L_2^{(m)*}\left(0,1\right)$ минимальна. Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности ℓ мы будем пользоваться часто так называемой экстремальной функцией данного функционала, т.е. такой функцией ψ_ℓ для которой

$$\left(\ell,\psi_\ell\right)=\left\|\ell|\,L_2^{(m)*}\left(0,1\right)\right\|\left\|\psi_\ell|\,L_2^{(m)}\left(0,1\right)\right\|.$$

Известно, что в работе И.Бабушка и др. [2,3] нахождение экстремальной функции $\psi_\ell(x)$ сведена к решению краевых задач для дифференциального уравнения $2m$-го порядка, но там решение не приводится.

Справедлива следующие.

Теорема 1. Экстремальная функция разностной формулы вида

$$\sum_{\beta=0}^{k} C\left[\beta\right] \varphi\left[\beta\right] - h \sum_{\beta=0}^{k} C^{(1)}\left[\beta\right] \varphi'\left[\beta\right] \cong 0,$$

с функционалом погрешности

$$\ell = \sum_{\beta=0}^{k} C\left[\beta\right] \delta\left(x - h\beta\right) + h \sum_{\beta=0}^{N} C^{(1)}\left[\beta\right] \delta'\left(x - h\beta\right), \tag{5}$$

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}\left(0,1\right)$ определяется формулой

$$\psi_\ell\left(x\right) = \left(-1\right)^m \ell\left(x\right) * G_m\left(x\right) + P_{m-1}\left(x\right). \tag{6}$$

Здесь $G_m\left(x\right) = \frac{x^{2m-1} sign x}{2\cdot(2m-1)!}$, $P_{m-1}\left(x\right)$-некоторый полином степени $m-1$.

Поскольку функционал погрешности $\ell(x)$ определен в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, то имеет место

$$\left(\ell, x^\alpha\right) = 0,\ \alpha = 0, 1, ..., m-1. \tag{7}$$

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности (5) разностной формулы вида (1) определяется формулой

$$\left\| \ell |\, L_2^{(m)*}\left(0,1\right) \right\|^2 = \left(\ell, \psi_\ell\right).$$

Литература

1. **Соболев С. Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* Наука, Москва 1974.
2. **Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.** *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* Наука, Москва, 1969, -369 с.
3. **Бабушка И., Соболев С. Л.** *Оптимизация численных методов.* Наука, Москва, 1965, 9-170 с.

УДК 519.62

Оптимизация разностных формул для решения дифференциальных уравнений в пространстве гильберта

Шадиметов Х. М.[1,2], Эсанов Ш. Э.[3]
kholmatshadimetov@mail.ru; esanov_sher@mail.ru
[1]Институт Математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистана;
[2]Ташкентский государственный транспортный университет;
[3]Термезский государственный университет;

Пространство Соболева $H_2^{(m)}(0,1)$ гильбертово пространство классов вещественных функций $f(x)$, с производных (в смысле обобщенных функций) порядка m, квадратично интегрируемыми на отрезке $[0,1]$ со скалярным произведением и нормой

$$< \psi, \varphi >_m = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k}\psi(x)\frac{d^k}{dx^k}\varphi(x)dx, \tag{1}$$

$$\left\| f/H_2^{(m)} \right\| = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) \int_0^1 \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

где

$$\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Известно [1-2], что пространство $H_2^{(m)}(0,1)$ вложено в пространство непрерывных функций заданных в области $[0,1]$:

$$H_2^{(m)}(0,1) \to C(0,1).$$

Тогда линейной будет и функциональная погрешность разностной формулы

$$(\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C_1[\beta]\varphi'[\beta] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\delta(x-h\beta) + h \sum_{\beta=0}^{k} C_1[\beta]\delta'(x-h\beta) \right] \varphi(x)dx, \tag{3}$$

где $\delta(x)$- дельта функция Дирака, $h = \frac{1}{N}$.

Задача построения разностной формулы

$$\sum_{\beta=0}^{k} C[\beta]\varphi[\beta] - h \sum_{\beta=0}^{k} C_1[\beta]\varphi'[\beta] \cong 0, \tag{4}$$

где $C[\beta]$ и $C_1[\beta]$ - коэффициенты разностной формулы (4), функциональная постановка которой состоит в нахождении такого функционала (3), норма которого в пространстве $H_2^{(m)*}(0,1)$ минимальна. Если не ограничивать числа k и N входящие в функционал (3), то эта задача не имеет решения. Легко убедиться, что погрешность разностной формулы (4) может быть сделана сколь угодно малой для любой заданной функции $\varphi(x)$ из $H_2^{(m)}(0,1)$.

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell(x)$ мы будем пользоваться часто так называемой экстремальной функцией данного функционала.

Определение. Функция $\psi_e(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$ называется экстремальной функцией функционала погрешности $\ell(x)$ разностной формулы, если выполняется следующее равенство

$$(\ell, \psi_e(x)) = \left\| \ell | H_2^{(m)*} \right\| \left\| \psi_e | H_2^{(m)} \right\|.$$

Естественное скалярное произведение элемента пространства $H_2^{(m)*}(0,1)$, т.е. функционал $\ell(x)$, для функции $\varphi(x) \in H_2^{(m)}(0,1)$, выражается формулой

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx,$$

где $\ell(x)$ будет обобщенной функцией

$$\ell(x)=\sum_{\beta=0}^{k}C[\beta]\delta(x-h\beta)+h\sum_{\beta=0}^{k}C_1[\beta]\delta'(x-h\beta).$$

Однако, поскольку норма элемента $\varphi(x)$ в пространстве $H_2^{(m)}(0,1)$ представляется квадратичной формой по формуле (2) мы можем построить еще гильбертово скалярное произведение (1) и применяя теорему Рисса, найти для каждого функционала, в том числе для функционала погрешности разностных формул, явное выражение через некоторую новую функцию $\psi_e(x)$, которая сама является элементом $H_2^{(m)}(0,1)$. Функция $\psi_e(x)$ выражается через функционал погрешности $\ell(x)$ с помощью решения некоторого дифференциального уравнения $2m$-го порядка. Действительно, по теореме Рисса, мы имеем равенство

$$(\ell,\varphi)=\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m\\ k\end{pmatrix}\int_0^1\frac{d^k\psi_e(x)}{dx^k}\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}dx. \tag{5}$$

Отсюда применяя в правую часть равенство (5) формулу интегрирования по частям и учитывая $\varphi(x)$, т.е. для всех функций $\varphi(x)\in C^{(\infty)}(0,1)$ получаем:

$$(\ell,\varphi)=\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m\\ k\end{pmatrix}(-1)^k\int_0^1\psi_e^{(2k)}(x)\varphi(x)dx.$$

Это соотношение означает, что $\psi_e(x)$ является решением (в обобщенных функциях) уравнения

$$\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m\\ k\end{pmatrix}(-1)^k\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\psi_e(x)=(-1)^m\ell(x).$$

Обозначим через L следующий оператор

$$L=\overbrace{\left[\frac{d^2}{dx^2}-1\right]\dots\left[\frac{d^2}{dx^2}-1\right]}^{m\text{ раз}}.$$

Лемма. Фундаментальным решением оператора L является следующая функция

$$\varepsilon_m(x)=\frac{(-1)^m e^{-|x|}}{2^{2m-1}(m-1)!}\sum_{n=0}^{m-1}2^n\frac{(2m-n-2)!|x|^n}{n!(m-n-1)!}.$$

По определению, фундаментальным решением оператора L называется обобщенная функция $\varepsilon_m(x)$, удовлетворяющая R уравнению

$$L\varepsilon_m(x)=\delta(x),$$

здесь $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Справедлива следующая

Теорема. Экстремальная функция функционала погрешности разностных формул в пространстве $H_2^{(m)}(0,1)$ имеет вид:

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*\varepsilon_m(x).$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974, 808 стр.
2. **Шадиметов Х.М.** *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева.* -Т.: "Fan va texnologiya", 2019, 224 стр.

УДК 519.644.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Шадиметов Х. М.[1], Тошбоев О. Н.[2], Аллаберганов О. Б.[3]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет; kholmatshadimetov@mail.ru
[2]Ферганский государственный университет; otoshboyev@bk.ru
[3]Термезский государственный университет; alaberdiyevorfjon@gmail.com

Оператор дробного интеграла играет важную роль в дробном исчислении, которое полезно для преобразования дробных дифференциальных уравнений в интегральные уравнения со слабо сингулярным ядром. Поэтому необходимо изучить численные методы аппроксимации дробных интегралов. В этом разделе представлены численные подходы, используемые для аппроксимации дробных интегралов на основе полиномиальной интерполяции. Предположим, что функция $f(t)$ принадлежит классу $L = (a, b),\ (a < b < \infty)$. Этот

$$D_{0,x}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \qquad t \in (a,b) \tag{1}$$

выражение в виде дробь в смысле Римана - Лиувилля называется порядковым интегралом. В представлении (1) равенство это один из методов численного вычисления, который заключается в приближении $f(t)$ к $\tilde{f}(t)$ известной функции, чтобы было легко вычислить $D_{0,t}^{-\alpha} f(t)$ точно. Мы, естественно, думаем о $f(t)$ как о приближении $(0,t)$ к многочлену на интервале. Теоретически, если $D_{0,t}^{-\alpha}\tilde{f}(t)$ является многочленом, можно вычислить именно $\tilde{f}(t)$. $t = t_n$, $n \in N$, для которого мы переписываем $\left[D_{0,t}^{-\alpha} f(t)\right]_{t=t_n}$ в виде:

$$\left[D_{0,t}^{-\alpha} f(t)\right]_{t=t_n} = \frac{1}{(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = \frac{1}{(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \tag{2}$$

Далее мы представим ряд методов, основанных на аппроксимации полиномов для вычисления. В частности, приближенный расчет решения интегрального уравнения Абеля также является одним из численных методов. В настоящей работе мы рассмотрим следующую квадратурную формулу для приближенного вычисления слабо сингулярного интеграла

$$\int_t^1 \frac{\varphi(x)dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(t,1)$, C_β, $(\beta = 0, 1, ..., N)$ - коэффициенты формулы (3), $h = \frac{1-t}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $t \leq 1$, $x_\beta = h\beta + t$. Напомним, что $L_2^{(1)}(t,1)$ это пространство Соболева и оно является гильбертовым пространством функций производное первого порядка которых интегрируемы с квадратом в интервале $[t, 1]$. Следующая разность называется погрешностью квадратурной формулы (3)

$$\ell(\varphi) = \int_t^1 \frac{\varphi(x)dx}{(x-t)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{4}$$

Эта разность определяет линейный функционал над данным пространством

$$\ell\left(x\right)=\varepsilon_{[t,1]}\left(x\right)\frac{1}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}-\sum_{\beta=0}^{N}C_{\beta}\delta(x-x_{\beta}) \tag{5}$$

где $\varepsilon_{[t,1]}\left(x\right)$- характеристическая функция интервала $[t,1]$, $\delta\left(x\right)$ - дельта-функция Дирака. Погрешность квадратурной формулы оценивается сверху с нормой функционала погрешности $\ell(x)$. Чтобы вычислить норму функционала погрешности используется экстремальная функция квадратурной формулы (3), имеющая следующий вид

$$\psi_{\ell}(x)=\ell(x)*G_{1}\left(x\right)+P_{0},$$

$G_{1}\left(x\right)=\frac{|x|}{2}$, P_0- константа. В пространстве Соболева $L_2^{(1)}(t,1)$ найдена экстремальная функция и с ее помощью вычислена квадрат нормы функционала погрешности

$$\|\ell\|^{2}_{L_2^{(1)*}}=(\ell,\psi_{\ell})=(-1)^{m}\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_{\beta}C_{\gamma}G_{1}\left(h\beta-h\gamma\right)-\right.$$

$$\left.-2\sum_{\beta=0}^{N}C_{\beta}\int\limits_{t}^{1}(x-t)^{\alpha-1}G_{1}\left(x-(h\beta+t)\right)dx+\int\limits_{t}^{1}\int\limits_{t}^{1}(x-t)^{\alpha-1}(y-t)^{\alpha-1}G_{1}\left(x-y\right)dxdy\right] \tag{6}$$

Минимизируя эту норму при условии

$$(\ell,1)=0, \tag{7}$$

получим следующую систему для нахождения коэффициентов оптимальных квадратурных формул

$$G_{1}\left[\beta\right]*\overset{\circ}{C}_{\beta}+P_{0}\left(\beta\right)=f_{1}\left[\beta\right],\ \ \beta=0,1,...,N, \tag{8}$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}=0,\quad h\beta\notin\left[t,1\right], \tag{9}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}_{\beta}=g_{0}. \tag{10}$$

Здесь

$$G_{1}\left[\beta\right]=\frac{|h\beta+t|}{2}, \tag{11}$$

$$f_{1}\left[\beta\right]=\int\limits_{t}^{1}(x-t)^{\alpha-1}G_{1}\left[x-(h\beta+t)\right]dx, \tag{12}$$

$$g_{0}=\int\limits_{t}^{1}(x-t)^{\alpha-1}dx. \tag{13}$$

В работах [1- 3] разработан алгоритм решения системы типа (8)-(10). Для вычисления интегралов в формуле (3) предлагались различные методы.

Основными результатами настоящей работы является следующие теоремы.

Теорема 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(1)}(t,1)$ определяются формулами

$$C_{0}=\frac{h^{\alpha}}{\alpha\left(\alpha+1\right)} \tag{14}$$

$$C_\beta = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\left((\beta+1)^{\alpha+1} - 2\beta^{\alpha+1} + (\beta-1)^{\alpha+1}\right),\ \beta = 1, 2, ..., N-1, \tag{15}$$

$$C_N = \frac{(1-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\left((1-t-h)^{\alpha+1} - (1-t)^{\alpha+1}\right). \tag{16}$$

Теорема 2. Квадрат нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул вида (3) над пространством $L_2^{(1)}(t,1)$ выражается равенством (11)-(16)

$$\left\|\ell/L_2^{(1)*}(t,1)\ \right\|^2 = \sum_{\beta=0}^{N} \overset{\circ}{C}_\beta \left(-\frac{h\beta(1-t)^\alpha}{2\alpha} + \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} + \frac{(h\beta)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right) - \frac{(1-t)^{2\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}.$$

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: - 1974. - 808 с.
2. **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** *Кубатурные формулы.* Новосибирск: Из-во ИМ СО РАН, 1996, 484 с.
3. **Шадиметов Х.М.** *Оптимальные решетчатые квадратурные формулы в пространствах Соболева.* Ташкент, (2019), 218.

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ВБЛИЗИ ЖЕСТКОГО ШАРА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Шукуров А. М.[1], Каримов М. М.[2], Мусурмонов Х. О.[3]
[1,2,3]Каршинский государственный университет; ShukurovAmon@yandex.ru, muzaffarkarimov88030@gmail.com, musurmonovkh@gmail.com

Математическое моделирование и исследование нестационарных волновых процессов в сплошных средах представляет собой сложное и, вместе с тем, актуальное направление волновой динамики сплошных сред. Актуальность проблем динамики сплошной среды обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, а также проблемы геофизики, сейсмологии, газоразведки, нефтеразведки, добывающей промышленности, строительства гражданских и промышленных сооружений.

Дана работа посвящена к изучению распространения нестационарных кососимметричных волн от сферической полости вблизи жесткого шара, расположенного в упругом пространстве.

Цель работы - разработка алгоритм решения задачи и исследование нестационарных поперечных волновых процессов при распространении нестационарных кососимметричных волн от сферической полости в упругом пространстве. Пусть в бесконечном упругом пространстве расположена сферическая полость радиуса R_1 вблизи неподвижного абсолютно жесткого шара радиуса R_2, расстояние между центрами которых равно l, где $l > R_1 + R_2$. Движение среды рассматривается в двух сферических системах координат: начальная точка первой сферической системы координат (r_1,θ_1,ϑ_1) расположена в центре полости, а начальная точка второй сферической системы координат (r_2,θ_2,ϑ_2) в центре жесткого шара. В момент времени $\tau = 0$ к поверхности полости приложена осесимметричная (не зависеть от координаты ϑ_1) заданная касательная поверхностная нагрузка $q(\tau,\theta_1)$, что образует вращательное движение среды вокруг оси, проходящей через центры полости и шара.

$$\sigma_{r_1\vartheta_1}|_{r_1=R_1} = q(\tau,\theta_1). \tag{1}$$

На поверхности шара перемещение равно нулю

$$w_2|_{r_2=R_2} = 0 \tag{2}$$

С учётом осевой симметрии задачи движение упругой среды относительно ненулевой компоненты векторного потенциала описывается волновым уравнением ($i = 1, 2$)

$$\gamma^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi - \frac{\psi}{r_i^2 \sin^2\theta_i}, \quad \Delta = \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial}{\partial r_i}\left(r_i^2 \frac{\partial}{\partial r_i}\right) + \frac{1}{r_i^2 \sin\theta_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\sin\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right). \tag{3}$$

Начальные условия - однородные

$$\psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{4}$$

Условие на бесконечности имеет следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty} \psi = 0. \tag{5}$$

В этом случае функции w, $\sigma_{r\vartheta}$, $\sigma_{\theta\vartheta}$ и ψ взаимосвязаны следующими соотношениями:

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}, \quad \sigma_{r\vartheta} = \eta\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right), \quad \sigma_{\theta\vartheta} = \frac{\eta}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - w\,\mathrm{ctg}\theta\right). \tag{6}$$

Начально-краевая (1) - (6) задача решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени τ и метода неполного разделения переменных. В пространстве изображений с учётом отсутствия возмущения на бесконечности решение уравнения разыскивается в виде суммы двух бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [2]. В ней первый бесконечной ряд соответствует распространяющемся от полости волнам в первой системе координат, а второй ряд - отраженным от шара волнам во второй системе. Переход из одной системы координат в другую и обратно осуществляется, используя теорему сложения [1] для функций Бесселя второго рода $K_{n+1/2}(x)$ [4].

В пространстве изображений получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций, которую запишем в виде системы двух матричных уравнений. Решение системы разыскиваем в виде бесконечных рядов по экспонентам.

Подставляя ряды в систему, получаем рекуррентную соотношения относительно неизвестных коэффициентов рядов функций и соответствующие начальные условия к ним. Эти соотношения позволяют определить все искомые изображения без использования редукции бесконечной системы уравнений. Анализ рекуррентных соотношений показывает, что изображения есть рациональные функции параметра преобразования Лапласа, который дает возможность вычислять их оригиналы с помощью теории вычётов [3].

Получены формулы для изображений коэффициентов рядов по полиномам Гегенбауэра компонент перемещения и напряжения. Численные результаты представлены в виде графиков, которые показывают влияние отраженных от поверхности шара волн на напряженно-деформированное состояние среды.

Литература

1. **Иванов Е.А.** *Дифракция электромагнитных волн на двух телах.* - Минск: Наука и техника, 1968. - 584 с.

2. **Кузнецов Д.С.** *Специальные функции.* - М.: Высшая школа, 1985. - 423 с.

3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** *Методы теории функции комплексного переменного.* - М.: Наука, 1987. - 688 с.

4. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.* -Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. - М.: Наука, - 1979. - 832 с.

УДК 532.546

Аномальный перенос растворенных веществ в элементе трещиновато - пористой среды

Эщдавлатов З.[1], Тураев Ф.[2], Холиков Ж.[3]
[1.3]Самаркандский государственный университет
[2]Термезский Государственный Университет z.eshdavlatov@mail.ru; f.turayev@mail.ru; j.xoliqov@mail.ru

Подземные флюиды практически всегда находятся в пористых или трещиновато-пористых средах (ТПС). В ТПС как фильтрация жидкости, так и перенос вещества имеют существенные отличия от таковых в пористых средах. Одной из наиболее существенных особенностей является перенос массы между системой трещин и пористых блоков, каким обычно представляется ТПС [1,2]. В данной работе рассмотрим элемент ТПС, состоящий из одиночной трещины и прилегающий к ней пористый блок. Процесс переноса вещества в таком элементе может характеризовать основные особенности переноса веществ в ТПС.

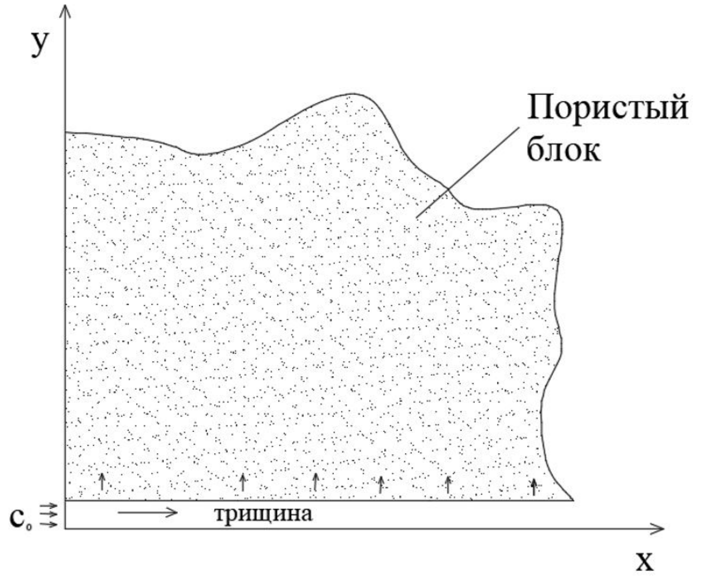


Рис. Элемент трещиновато – пористой среды.

Схема элемента ТПС показано на Рис.1. Трещина является полубесконечным одномерным объектом [3], так что распределение вещества и течение жидкости по ее поперечному сечению считается одномерным. В такой постановке второе измерение трещины, т.е. ее толщина не принимается во внимание. С пористым блоком происходит обмен вещества, которого смоделируем производной дробного порядка по времени от концентрации вещества в трещине Пористый блок занимает первую четверть плоскости. Таким образом, рассматривается область $R\ \{0 \le x < \infty\,,\ 0 \le y < \infty\}$.

Пусть в трещине жидкость течет с заданной постоянной скоростью v. С конца $E = 0$ трещины подается жидкость с концентраций вещества c_0. Первоначально трещина и пористый блок считаются заполненными чистой (без вещества) жидкостью. В трещине происходит конвективно-диффузионный перенос вещества, а в пористом блоке – только диффузионный. При этих предположениях уравнения переноса записываются в виде

$$b\left(\frac{\partial c_f}{\partial t} + v\frac{\partial c_f}{\partial x}\right) = bD_f\frac{\partial^2 c_f}{\partial x^2} + m_0 D_m \left.\frac{\partial c_m}{\partial y}\right|_{y=0}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^\gamma c_m}{\partial t^\gamma} = D_m\frac{\partial^2 c_m}{\partial y^2}, 0 < \gamma \le 1, \tag{2}$$

где $c_m = c_m\,(t,\,x,\,y)$ - концентрация в пористом блоке (матрице), м^3/м^3; $c_f = c_f\,(t,\,x)$ - концентрация вещества в трещине, м^3/м^3; $D_m,\,D_f$ - эффективный коэффициент диффузии в матрице и трещине, м^2/с; b - ширина трещины, м; m_0- коэффициент пористости матрицы, t - время, с; γ - порядок дробной производной по времени.

Считаем, что на границе $x=\infty$ трещины и $y=\infty$ матрицы поток растворенного вещества отсутствует. На границе $y=0$ обеспечивается равность концентраций c_m и c_f. При этих условиях начальные и граничные условия имеют вид:

$$A_f\,(0,x)=0,\quad c_m\,(0,x,y)=0. \tag{3}$$

$$A_f\,(t,0)=c_0,\quad c_f\,(t,\infty)=0, \tag{4}$$

$$c_m\,(t,x,0)=A_f\,(t,x)\,,\quad c_m\,(t,x,\infty)=0, \tag{5}$$

Задача (1), (2) при условиях (3) - (5) решается методом конечных разностей [4]. Для этого в области R построим сетку $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \big\{(t_j,\,x_i,\,y_k)\,,\ \ t_j=\tau\,j,\ \ x_i=ih_1,\ \ y_k=kh_2\,,\ j=\overline{0,\,J},\ \ i=0,1,...\,,\ \ k=0,1,...,\ \ \tau=T/J\big\}$, где h_1 - шаг сетки по направлению x, h_2 - шаг сетки по направлению y, τ - шаг сетки по времени, T - максимальное время, в течение которого исследуется процесс, J- количество интервалов сетки по t.

Для аппроксимации уравнения (1) используем неявную схему "против потока а для (2) - чисто неявную схему или схему с опережением. Дробную производную по времени аппроксимируем используя определение Капуто[4]

$$\begin{aligned} &b\left(\frac{(c_f)_i^{j+1}-(c_f)_i^j}{\tau}+v\frac{(c_f)_{i+1}^j-(c_f)_{i-1}^j}{h_1}\right)= \\ &=bD_f\frac{(c_f)_{i-1}^j-2(c_f)_i^j+(c_f)_{i+1}^j}{h_1^2}+m_0D_m\frac{(c_m)_{i,0}^j-(c_m)_{i,1}^j}{h_2}, \end{aligned}\ , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)\tau^\gamma}\left[\sum_{l=1}^{j-1}\left((c_m)_{i,k}^{l+1}-(c_f)_{i,k}^l\right)\cdot((j-l+1)^\gamma)-(j-l)^\gamma+(c_m)_{i,k}^{j+1}-(c_f)_{i,k}^j\right]= \\ &=D_m\frac{(c_m)_{i,k-(l-1)}^{j+1}-2(c_m)_{i,k-l}^{j+1}+(c_m)_{i,k-(l+1)}^{i+1}}{h_2^2}, \end{aligned}\ , \tag{7}$$

где $(A_f)_i^j$, $(A_m)_{i,k}^j$ - сеточные значения концентраций $A_f(t,\,x)$ и $A_m(t,\,x,\,y)$ в точках сетки $(t_j,\ x_i)$ и $(t_j,\ x_i,\ y_k)$ соответственно.

Уравнения (6), (7) приводятся к трехточечным сеточным уравнениям

$$A_1(c_f)_{i-1}^{j+1}-B_1(c_f)_i^{j+1}+C_1(c_f)_{i+1}^{j+1}=-F_i^{(1)}\,,\ \ i=\overline{1,\ I-1}\,,\ j=\overline{0,\ J-1}, \tag{8}$$

$$A_2(c_m)_{i,k-1}^{j+1}-B_2(c_m)_{i,k}^{j+1}+C_2(c_m)_{i,k+1}^{j+1}=-F_{i,k}^{(2)}\,,\quad i=\overline{0,I}\,,\ \ j=\overline{1,\,J-1}\,,\ \ k=\overline{0,\,K-1}, \tag{9}$$

где $I,\ \ J$ – достаточно большие целые числа, принимаемые таким образом, чтобы фронты концентрации и адсорбции не достигали точек $x_I\,,\ \ (x_I\,,\ y_J)$, $A_1=\frac{D_f\tau}{h_1^2}$, $B_1=\frac{2\,\tau\,D_f}{h_1^2}-\frac{v\tau}{h_1}+1$, $C_1=\frac{\tau D_f}{h_1^2}-\frac{v\tau}{h_1}$, $A_2=\frac{D_m}{h_2^2}$, $B_2=2\frac{D_m^*}{h_2^2}+\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)\tau^\gamma}$, $C_2=\frac{D_m}{h_2^2}$, $F_i^{(1)}=(c_f)_i^j+\frac{m_0D_m}{bh_2}\left((c_m)_{i,1}^j-(c_m)_{i,0}^j\right)$, $F_{i,k}^{(2)}=-\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)\tau^\gamma}\left[\sum_{l=1}^{j-1}\left((c_m)_{i,k}^{l+1}-(c_f)_{i,k}^l\right)\cdot((j-l+1)^\gamma)-(j-l)^\gamma-(c_f)_{i,k}^j\right]$.

Начальные и граничные условия аппроксимируются в виде

$$(c_f)_i^0=0, \tag{10}$$

$$(c_m)_{i,k}^0=0, \tag{11}$$

$$(c_f)_0^j=c_0, \tag{12}$$

$$(c_m)_{i,0}^j=(c_f)_i^j, \tag{13}$$

$$(c_f)_I^j = 0, \tag{14}$$

$$(c_m)_{i,K}^j = 0. \tag{15}$$

Для решения конечно-разностных уравнений (8), (9) применяем метод прогонки [5]. Для этого решения представим в виде:

$$(c_f)_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^{(1)} + \beta_{i+1}^{(1)} (c_f)_{i+1}^{j+1},\ \ i = \overline{1, I-1},\ j = \overline{0, J-1}, \tag{16}$$

$$(c_m)_{i\,k}^{j+1} = \alpha_{j+1}^{(2)} + \beta_{j+1}^{(2)} (c_m)_{i,\,k+1}^{j+1},\ \ i = \overline{0, I-1},\ j = \overline{0, J-1}\,,\ \ k = \overline{0, K-1}, \tag{17}$$

где $\alpha_{i+1}^{(1)},\ \ \beta_{i+1}^{(1)},\ \ \alpha_{k+1}^{(2)},\ \ \beta_{k+1}^{(2)}$ - прогоночные коэффициенты.

При использовании (16) из (8) получаем следующие рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов $\alpha_{i+1}^{(1)},\ \beta_{i+1}^{(1)}$:

$$\alpha_{i+1}^{(1)} = \frac{F_i^{(1)} + A_1 \cdot \alpha_i^{(1)}}{B_1 - A_1 \cdot \beta_i^{(1)}},\quad \beta_{i+1}^{(1)} = \frac{!_1}{B_1 - A_1 \cdot \beta_i^{(1)}},\quad i = \overline{0, I-1}\ . \tag{18}$$

Аналогичным образом из (9), (17) получаем рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов $\alpha_{k+1}^{(2)}$ и $\beta_{k+1}^{(2)}$

$$\alpha_{k+1}^{(2)} = \frac{F_{i,k}^{(2)} + A_2 \cdot \alpha_k^{(2)}}{B_2 - A_2 \cdot \beta_k^{(2)}},\ \ \beta_{k+1}^{(2)} = \frac{!_2}{B_2 - A_2 \cdot \beta_k^{(2)}},\ \ k = \overline{0, k-1}\ . \tag{19}$$

Для определения стартовых значений коэффициентов используем граничные условия (12), (13). Из (16) имеем $(c_f)_0^{j+1} = \alpha_1^{(1)} + \beta_1^{(1)} (c_f)_1^{j+1} = c_0$, откуда $\alpha_1^{(1)} = c_0,\ \beta_1^{(1)} = 0$.

Из (17) для $k = 0$ получаем $(c_m)_{i,0}^{j+1} = \alpha_1^{(2)} + \beta_1^{(2)} (c_m)_{i,\,1}^{j+1} = (c_f)_i^{j+1}$, откуда $\alpha_1^{(2)} = (c_f)_i^{j+1}\,,\ \ \beta_1^{(2)} = 0$.

Расчет ведется в следующей последовательности. Из (16) методом прогонки определяем $(A_f)_i^{j+1}$, а затем из (17) - $(A_m)_{i,k}^{j+1}$.

В практических расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $c_0 = 0{,}05$м^3/м^3, $m_0 = 0{,}3$, $D_m = 1 \cdot 10^{-6}$м^2/с, $D_f = 5 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $b = 4 \cdot 10^{-4}$м, (17)-(19) Полученные результаты показывают, что при уменьшении значения дробного порядка γ от единицы можно увидеть более широкое распространение профиля концентрации по оси y. Другими словами, уменьшение $A_f\,(t, 0) = c_0,\ \ c_f\,(t, \infty) = 0$, приводит к “быстрой диффузии” в пористом блоке. Это в свою очередь приводит к тому, что в трещине распространение вещества замедляется.

Литература

1. **Sahimi M..** *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock.* WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany ©2011, p. 709.

2. **Баренблатт Г.И.,Ентов В.Н.,Рыжик В.М.** *Движение жидкостей и газов в природных пластах..* М.: Недра, 1984. 211 с.

3. **Khuzhayorov B., Mustofoqulov J.** *ransport of Active Solute in a Fractured Porous Medium with Nonequilibrium Adsorption* International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology, 2018, Vol. 5, Issue 12, 7589-7597 pp.

4. **Xia Yuan, Wu Jichun, Zhou Luying.** *umerical solutions of time-space fractional advection dispersion equations.* J2009, ICCES ICCES, vol.9, no.2, pp.117-126

5. **Самарский А.А.** *К Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977, 656 с.

УДК 517.977

Цифровой алгоритм расчета времени прихода водных масс между разрезами канала.

Эсонтурдиев М. Н.[1]., Хайдарова Р. Д.[2]
[1]Чирчикский Государственный педагогический университет; esontrudiyev80@mail.ru
[2]Термезский государственный университет; roziyadavronovna0412@gmail.com

Времени добегания водных масс между участками, ограниченный гидротехническими сооружениями определяется из условии квазиустановившегося перехода от одного установившегося режима к другому (рис. 1) на основе следующего выражения.

$$T_{db} = t_v + t_{mr}, \tag{1}$$

где

$t_v = \frac{l}{\sqrt{\frac{g\omega}{V}}}$-время распространения фронта волны,

$t_{mr} = \frac{W_1 - W_2}{Q_1 - Q_2}$-время распространения расхода воды,

Q_1 и Q_2 - расходы воды соответствующего установившего режима воды на участке канала,

W_1 и W_2 - объемы воды на участке канала соответствующего установившего режима воды на участке канала.

Объемы воды на участке канала определяется следующим образом

$W = \int\limits_0^l \omega(x)\,dx$ или численное интегровани

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta l_i \tag{2}$$

$\omega(x)$ -площадь живого сечения воды на участке канала по длине.

Для вычисления объема воды на участке необходимо знать ордината свободной поверхности и морфометрические характеристики русло.

В настоящее время имеются различные методики расчета кривой свободной поверхности неравномерного движения водного потока, основанные на интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды на открытых русла без боковых оттоков и притоков.

Эти методики основаны на использования графических зависимостей или табличных функции и неприспособленны для применения в современных компьютерах.

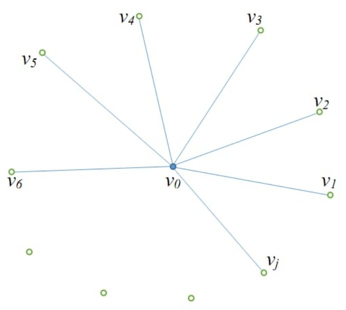


Рис.1 - Определение времени добегания водных масс между участками канала.

В настоящей работе приводится численный алгоритм расчета кривой свободной поверхности неравномерного движения водного потока на открытых руслах с боковыми оттоками и притоками, основанных на интегрирования дифференциального уравнения неравномерного движения воды с помощью конечноразностного метода и метода квазилинеаризации для аппроксимации нелинейных зависимостей.

Методика расчета времени добегания водных масс формулируется следующим образом [1-3]:

1. Задаются параметры начального установившегося движения участка канала: т.е. Q_1-расход воды в начале участка канала, H_1-уровень воды в конце участка канала,

2. Задаются параметры устанавливаемого установившегося движения участка канала: т.е. Q_2-расход воды в начале участка канала, H_2- уровень воды в конце участка канала,

3. По алгоритму, описанному выше, рассчитывается изменение свободных поверхностей начального и устанавливаемого установившегося режимам и площади водного потока по верху.

4. По формуле численного интегрирования, рассчитывается объемы воды соответствующего начальному и устанавливаемому установившим режимам по численному интегрированию (2).

5. Далее, рассчитываются разности объемов и расходов воды соответствующим начальному и устанавливаемому установившим режимам.

6. Времени распространения фронта волны, распространения расхода воды и времени добегания рассчитываются по выражениям приведенным в (1).

Литература

1. **Серазетдинов Т.К.** *Оптимизация систем с распределенными параметрами.* Москва. Наука. - 1977. - 480 с.

2. **Мамиконов А.Г.** *Методы разработки автоматизированных систем управления.* Москва. Энергия. - 1973.

3. **Rakhimov, S., Seytov, A., Nazarov, B., Buvabekov, B.** *Optimal control of unstable water movement in canals of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012065, Dagestan, 2020, IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012065 (№5, Scopus, IF=4,652).*

ИЛМИЙ-УСЛУБИЙ НАШР

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

мавзусидаги Республика илмий-амалий анжумани

материаллари тўплами
1-қисм

2022 йил 18-19 ноябрь

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

сборник материалов
Республиканской научно-практической конференции

часть 1

18-19 ноября 2022 года

Техник муҳаррир: Имамов Ойбек Шаназарович

Мусаҳҳиҳ: Эрдонов Бекмурод Холбой ўғли

Компьютер саҳифаловчиси: Эргашева Сарвиноз Бахтиёр қизи

Босишга 08.11.2022 йилда рухсат этилди.
Бичими $60 \times 84\ \frac{1}{8}$. Шартли босма тобоғи 30,75
Нашр босма тобоғи
буюртма №76. 100 нусхада

ТерДУ нашр-матбаа маркази нашриёти.
Термиз давлат университети нашр-матбаа
босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Термиз шаҳри,
"Баркамол авлод"кўчаси, 43 уй.