ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ
ВАЗИРЛИГИ ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР
АКАДЕМИЯСИ В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ

2-ҚИСМ
2022 йил 18-19 ноябрь

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ
В.И.РОМАНОВСКОГО

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЧАСТЬ 2
18-19 ноября 2022 года

ТЕРМЕЗ–2022

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАНИ

МАТЕРИАЛЛАРИ ТЎПЛАМИ
2-ҚИСМ

2022 йил 18-19 ноябрь

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ
НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

ЧАСТЬ 2
18-19 ноября 2022 года

Термез – 2022

Ушбу тўплам Республикамизнинг Олий таълим муассасалари тизимида ва илмий текшириш институтларида фаолият олиб бораётган олимларнинг хамкорликларини кенгайтириш, математика фани ва уни ўкитиш методлари бўйича олинган янги натижаларни мухокама килиш ва истикболли йўналишларни белгилаб олиш максадида Термиз давлат университетида "Алгебра ва анализнинг долзарб масалалари" мавзусида ўтказилган Республика илмий анжумани материалларини ўз ичига олган. Жумладан унга ялпи йигилишлардаги маърузалар билан бирга шўъбаларда алгебра ва анализ хамда унга турдош йўналишларда илмий изланиш олиб бораётган математик олимлар, тадқиқотчилар хамда магистрантларнинг тезислари хам киритилган.

АНЖУМАН ТАШКИЛИЙ КЎМИТАСИ

Раиси: Марахимов А.Р. – Термиз давлат университети ректори, профессор
Ҳамраиси: Аюпов Ш.А. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номли Математика институти директори, академик
Раис ўринбосарлари:
Розиқов Ў.А. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номли Математика институти, профессор
Ашуров Р.Р. – Ўзбекистон Фанлар Академияси В.И.Романовский номли Математика институти, профессор
Холиёров Ў.М. – ТерДУ илмий ишлар ва инновациялар бўйича проректор, ф.ф.ф.д. (PhD)
Аъзолари: ф.-м.ф.н., доцент Тўраев Р.Н., ф.-м.ф.д., профессор Холмухамедов О.Р., ф.-м.ф.д., профессор Ҳаётов А.Р., ф.-м.ф.д., профессор Худойбердиев А.Х., ф.-м.ф.д. Рўзиев М., ф.-м.ф.д. Адашев Ж.Қ., ф.-м.ф.д. профессор Аллаков И., ф.-м.ф.д., профессор Мирсабуров М., ф.-м.ф.д., профессор Нормуродов Ч.Б., ф.-м.ф.ф.д.Сафаров А.Ш., п.ф.ф.д. (PhD) Ибрагимов Н.Ш., ф.-м.ф.ф.д. (PhD), доцент Чориева С.Т., т.ф.ф.д. (PhD) Хамидов О.А., ф.ф.ф.д. (PhD) Умрқулов З.Б.

Дастурий қўмита

Ҳамраислар: Алимов Ш.А. – Ўзбекистон Миллий Университети, академик
Садуллаев А.А – Ўзбекистон Миллий Университети, академик
Аъзолари: академик Хожиев Ж.Х., академик Фарманов Ш.К., академик Аъзамов А.А., академик Лакаев С., академик Рахманов З.Х., профессор Худойберганов Г., профессор Арипов М., профессор Шоимкулов Б.А., профессор Омиров Б.А., профессор Абдуллаев Б.И., профессор Хужаёров Б., профессор Хасанов А., профессор Солеев А., профессор Ўринов А.Қ., профессор Шодиметов Х.М.,профессор Зикиров О.С., профессор Исломов Б., профессор Нарманов А.Й., профессор Дурдиев Д., профессор Кудайбергенов К.К., профессор Имомов А.А., профессор Артиқбоев А., профессор Заитов А.А.
Котибият: Хайруллаев И., Бегалиев О., Хуррамов Н., Бобамуродов У., Джураева Д., Имамов О.,Эргашева С., Хўжамқулов Б., Саатмуродов Ш.
Нашр учун маъсуллар: ф.-м.ф.д., профессор И.Аллаков, ф.-м.ф.д., профессор М.Мирсабуров.

Анжуман Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2022 йил 7 мартдаги 101-Ф-сонли фармойишига кўра 2022 йил 18-19 ноябрь кунлари Термиз давлат университетида ўтказишга рухсат этилган.

Ушбу тўплам Термиз давлат университети Кенгашиниг 2022 йил 3 ноябрдаги 3- рақамли қарорига асосан нашрга тавсия этилди.

Тўпламда киритилган маълумотларнинг тўғрилиги учун муаллифлар масъулдир.

МУНДАРИЖА

4 – ШЎЪБА.
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ НОСТАНДАРТ МАСАЛАЛАРИ

7 – ШЎЪБА. МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАТИКА ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

4 – ШЎЪБА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ НОСТАНДАРТ МАСАЛАЛАРИ

УДК 917.95

TIP O'ZGARISH CHIZIG'I SILLIQ BO'LMAGAN PARABOLO-GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN IKKI NOLOKAL MASALA

Abdujabborov A. A.[1]
[1]Farg'ona davlat universiteti; abdujabborovabduxalim28@gmail.com

$D = D_1 \cup I_1 \cup D_2 \cup I_2 \cup D_3$ sohada

$$\left[U_{xx} - \frac{1}{2}\left(1 - sign\left(xy\right)\right)U_{yy} - \frac{1}{2}\left(1 + sign\left(xy\right)\right)U_y\right] = 0 \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $D_1 = \{(x,y)\,; 0 < x < 1, 0 < y \le 1\}$, $I_1 = \{(x,0)\,; 0 < x < 1\}$, $D_2 = \{(x,y)\,; 0 < x < 1, x-1 < y < 0\}$, $D_3 = \{(x,y)\,; 0 < y < 1, y-1 < x < 0\}$,
$I_2 = \{(0,y)\,; 0 < y < 1\}$.

(1) tenglama D_1 va D_2 (D_3) sohalarda mos ravishda parabolik va giperbolik tipga tegishli bo'lib, u D_1 sohada

$$U_{xx} - U_y = 0, \ \ (x,y) \in D_1, \tag{2}$$

D_2 va D_3 sohalarda

$$U_{xx} - U_{yy} = 0, \ \ (x,y) \in D_2 \cup D_3 \tag{3}$$

ko'rinishlarda yoziladi; I_1 va I_2 - (1) tenglamaning tip o'zgarish chiziqlari bo'lib, I_1 - (1) tenglama uchun xarakteristika bo'ladi. I_2 esa xarakteristika bo'lmaydi.

BS_2 masala. Shunday $U(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_2 \cup D_3 \backslash I_3 \backslash I_4)$ funksiya topilsinki, u D_1 va $D_2 \cup D_3 \backslash I_3 \backslash I_4$ sohalarda mos ravishda (2) va (3) tenglamalarni, D soha chegarasida

$$\int\limits_0^1 U(x,y)dx = \varphi(x), \ \ 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$U_x(0,y) = f_1(x), \ \ -1 < y < 0; \tag{5}$$

$$U(0,y) = -U(0,-y) + f_2(x), \ \ -1 \le y \le 0; \tag{6}$$

$$U_y(x,0) = g_1(x), \ \ -1 < x < 0; \tag{7}$$

$$U(x,0) = U(-x,0) + g_2(x), \ \ -1 \le x \le 0 \tag{8}$$

shartlarni, I_1 va I_2 tip o'zgarish chiziqlarida esa

$$U_y(x,+0) = U_y(x,-0), \ \ 0 < x < 1;$$

$$U_x(+0,y) = U_x(x,-0), \ \ 0 < y < 1$$

ulash shartlarini bajarsin, bu yerda $\varphi(y), f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)$ - berilgan uzluksiz funksiyalar, $I_3 = \{(x,y); y = -x, 0 \le x \le 1/2\ \}$, $I_4 = \{(x,y); x = -y, 0 \le y \le 1/2\ \}$.

Masalani yechishda quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:
$U(x,0) = \tau_1(x), \ \ 0 \le x \le 1$; $U_y(x,0) = \nu_1(x)$, $0 < x < 1$; $U(0,y) = \tau_2(y)$, $0 \le y \le 1$; $U_x(0,y) = \nu_2(y)$, $0 < y < 1$; $\tau_j(x) \in C\,[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu_j(x) \in C^1(0,1) \cap L(0,1)$, $j = \overline{1,2}$

U holda $D_2 \backslash I_2$ va $D_3 \backslash I_3$ sohalarda (3) tenglama uchun Koshi masalasi yechimini beruvchi formulalar va (5)-(8) shartlardan foydalanib, $\tau_j(x)$ va $\nu_j(x)$, $j = \overline{1,2}$ noma'lum funksiyalar orasidagi quyidagi munosabatlarni topamiz:

$$\nu_1(x) - \nu_2(x) = g_1(-x) - f_1(-x) + g_2^I(-x) - f_2^I(-x), \;\; 0 < x < 1; \tag{9}$$

$$\tau_1(x) + \tau_2(x) = \int\limits_0^x [\nu_1(t) + f_1(-t)]dt + f_2(-x), \;\; 0 < x < 1. \tag{10}$$

(2) tenglamada va (4), (6) shartlarda y ni nolga intitirib,

$$\tau_1{}''(x) = \nu_1(x), \;\; 0 < x < 1; \; \tau_1(0) = f_2(0)/2 \; , \int\limits_0^1 \tau_1(x)dx = \varphi(0)$$

chegaraviy masalaga ega bo'lamiz. Bu masala yagona yechimga ega:

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^1 G_1(x,t)\nu_1(t)dt + \omega_1(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

bu yerda $G_1(x,t)$-masalaning Grin funksiyasi, $\omega_1(x) = \tau(0)(1-x) + x\,[2\varphi(0) - \tau(0)]$.

Demak, qo'yilgan masala D_1 sohada (2) tenglamaning (4), (9), (10) va (11) shartlarini qanoatlantiruvchi $U(x,y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^1(D_1 \cup I_1 \cup I_2) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1)$ yechimini topish haqidagi masalaga ekvivaleit ekan. Bu masala [1] adabiyotda ko'rsatilgan usul bilan yechiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

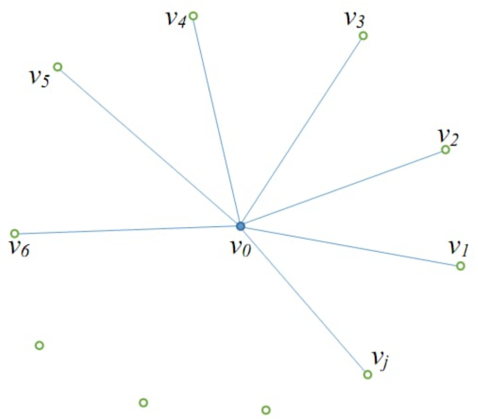
1. **Уринов А.К., Хайдаров И.У.** *Задачи для параболо гиперболигеских уравнений со спектральным параметром.*Ташкент: MUMTOZ SO'Z, 2018, 108

UDC 517.953

Inverse source problem for a space-time fractional differential equation on metric graph

Abdullaev O. Kh.[1,a], Khujakulov J. R.[1,b], Salomov Sh. B.[2,a]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics;
obidjon.mth@gmail.com, j.khujakulov@mathinst.uz
[2] Bukhara state univercity; shernazar.salomov@bk.ru

We consider simple star graph $\mathbf{\Gamma}$ with n finite bonds connected at the point $v_o = v_o(0,0)$. The point v_o is the vertex of the $\mathbf{\Gamma}$. Therefore, each bond B_k is parameterised by an interval $x_k \in (0, L_k)$, (Figure 1). Further we will use x instead of x_k, $k = \overline{1,j}$, $j \in N$.



$Figure.1\ star\, metric\, graph$

We are concerned with the following time fractional differential equation, in the domain $B_k \times (0,T)$,:

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u^{(k)}(x,t) = a u_{xx}^{(k)}(x,t) + b_C D_{0t}^{\alpha} u_{xx}^{(k)}(x,t) + c u^{(k)}(x,t) + f^{(k)}(x,t), (x,t) \in B_k \times (0,T) \qquad (1) $$

where ${}_C D_{0t}^{\alpha}(\cdot)$, $0 < \alpha < 1$ is Caputo time fractional derivative operator[1]. Subject to the vertex conditions

$$ u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = ... = u^{(j)}(0,t), t \in [0,T], \qquad (2) $$

$$ u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + ... + u_x^{(j)}(0,t) = 0, \ \ t \in [0,T], \qquad (3) $$

boundary conditions

$$ u_x^{(k)}(L,t) = 0, \ \ t \in [0,T], \ k = \overline{1,j}. \qquad (4) $$

and initial condition

$$ u^{(k)}(x,0) = \varphi^{(k)}(x), x \in B_k, \ k = \overline{1,j} \qquad (5) $$

We will discuss an inverse problems related to initial boundary value problem (1)-(5). The inverse problem addressees the recovery of a space dependent source term, i.e. $f^{(k)}(x,t) = g(t) f^{(k)}(x)$. Here $f^{(k)}(x)$ unknown, $g(t)$ known functions.

Inverse problem. Find a couples of functions $\left(u^{(k)}(x,t), f^{(k)}(x)\right)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfy (1)-(5) and an over-specified condition

$$ u^{(k)}(x,T) = \psi^{(k)}(x), x \in B_k . k = \overline{1,j}. \qquad (6) $$

Where $\varphi^{(k)}(x)$ and $\psi^{(k)}(x)$ a are sufficiently smooth given functions, besides

$$ \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) = ... = \varphi^{(j)}(0), \quad \psi^{(1)}(0) = \psi^{(2)}(0) = ... = \psi^{(j)}(0), $$

$$ \varphi_x^{(1)}(0) + \varphi_x^{(2)}(0) + ... + \varphi_x^{(j)}(0) = 0, \quad \psi_x^{(1)}(0) + \psi_x^{(2)}(0) + ... + \psi_x^{(j)}(0) = 0, $$

$$ \varphi_x^{(k)}(L) = 0, \quad \psi_x^{(k)}(L) = 0, \ k = \overline{1,j}. $$

By using properties of the Mittag-Lefler function, we prove the uniform convergence of the obtained Fourier series. To show the uniqueness we rely on the completeness properties of sistem of eigenfunctions of corresponding spectral problem(see[2-4]).

References

1. **A. A. Kilbas, H. M. Srivstava, J. J. Trujillo.** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Matematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science. B.V., Amsterdam. (2006).
2. **O. Kh. Abdullaev, J. R. Khujakulov.** *On a problem for the time-fractional diffusion equation on a metric graphs.* Uzbek Mathematical Journal. No.4, pp. 3–12, (2017).
3. **R. Ashurov, Y.Fayziyev** *On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations* Fractal and fractional (MDPI) 2022, 6, 41., https://doi.org/10.3390/fractalfract6010041
4. **J. Friedman and Jean-Pierre Tillich** *Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian* Pacific journal of Mathematics, Vol. 216, No. 2, (2004). (https://msp.org/pjm/2004/216-2/pjm-v216-n2-p03-s.pdf)

UDC 517.956

Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar va ularning yechimlari to'g'risida.

Abdurasulova Z.
Magistratura talabasi, Denov tadbirkorlik va Pedagogika instituti, Denov, O'zbekistan;
abdurasulovazulayxo18@gmail.com

Agar differensial tenglamalarda noma'lum funksiya yoki Vektor funksiya bir o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, bunday tenglamalarga oddiy differensial tenglamalar deyiladi. Masalan,

1) $\frac{dm}{dt} = -km$ radioaktiv parchalanishning oddiy differensial tenglamasi, bu yerdagi m massa faqat t vaqtning funksiyasi, ya'ni $m = m(t)$;

2) $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{l}{g}\sin\varphi = 0$ matematik mayatnik xarakatining oddiy differensial tenglamasi bu yerdagi $\varphi-$ mayatnikning muvozanat xolatidan og'ish burchagi bo'lib, bu faqat t vaqtning $\varphi = \varphi(t)$ funksiyasi bo'ladi.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ko'rinishdagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama bitta ixtiyoriy o'zgarmas songa bog'liq bo'lgan $y = \varphi(x,c)$ funksiya bilan aniqlanuvchi cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi. Shuningdek ikkinchi tartibli

$$y'' = f(x,y,y') \tag{1}$$

tenglamaning umumiy yechimi esa ixtiyoriy ikkita o'zgarmas sonlarga $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ bog'liq bo'ladi. Umumiy yechimdan kerakli yechimni ajratib olish boshlang'ich shartlardan foydalanib amalga oshiriladi. (1) tenglama uchun boshlang'ich shartlar $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$ ko'rinishga ega. x, y va y' ning berilgan qiymatlarini umumiy yechim va uning xosilasiga qo'yib C_1 va C_2 sonlarni bir qiymatli aniqlaydigan ikkita tenglama olamiz.

Agar (1) tenglamaning o'ng qismi bo'lgan $f(x,y,y')$ funksiya x_0, y_0 va y'_0 boshlang'ich qiymatlarning atrofida uzluksiz bo'lib, boshlang'ich qiymatlarning ko'rsatilgan atrofida $\frac{\partial f}{\partial y}$ va $\frac{\partial f}{\partial y'}$ uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda (1) tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Agar differensial tenglamalarda noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lsa, bunday differensial tenglamalarga xususiy xosilali differensial tenglamalar deyiladi. Masalan, bir jinsli bo'lmagan muxitda $n(x,y,z)$ sindirish ko'rsatkichga ega bo'lgan yorug'lik nurlarining tarqalishi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x,y,z)$$

tenglama bilan tavsiflanadi. $\rho = \rho(x,y,z)$ zaryadlar zichligiga ega bo'lgan elektrostatik maydonining $u = u(x,y,z)$ potensiali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z}^2 = 4\pi\rho(x,y,z)$$

Puasson tenglamasidan aniqlanadi.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ erkin o'zgaruvchilarni bu o'zgaruvchilarning $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasini va bu funksiyaning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy xosilalarini bog'lovchi birinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamaning umumiy ko'rinishini quyidagicha ifodalab yozish mumkin:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{2}$$

Bu yerdagi Φ-biror sohada o'z argumentlarining berilgan funksiyasidir. Ikki o'zgaruvchili hol uchun quyidagi belgilashlardan foydalaniladi: noma'lum funksiya z, erkli o'zgaruvchililarni x va y, xususiy hosilalarni esa $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ orqali belgilasak birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani (2)

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

ko'rinishda ifodalab yozish mumkish. x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasida aniqlangan, bu sohada o'zining xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lgan va (3) tenglamani ayniyatga aylantiradigan $z = (x, y)$ funksiyaga (3) tenglamaning yechimi deyiladi.

Hozircha xususiy xosilali differensial tenglama va uning yechimining eng sodda xossalari bilan tanishamiz.

1-Misol. $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Ravshanki,$z(x, y)$ izlanayotgan funksiya x o'zgaruvchiga bog'liq emas. Shunday ekan bu funksiya y ga bog'liq bo'lgan istalgan funksiya bo'lishi mumkin:

$$z(x, y) = \varphi(y) \tag{4}$$

2-Misol. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Xususiy xosilani hisoblash qoidasiga ko'ra berilgan tenglama $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ ko'rinishni oladi. Agar $\frac{\partial u}{\partial y} = v$ desak, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ tenglamani olamiz. 1-misoldagi muloxazani yuritib, oxirgi tenglamaning yechimini $v = f(y)$ topamiz. Belgilashga ko'ra $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$ tenglamani olamiz. Bu tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratib, uni integrallab, topamiz :

$$u(x, y) = \int f(y)dy + \psi(x)$$

Topilgan funksiyani oldin x bo'yicha, keyin y bo'yicha differensiallasak (oldin y bo'yicha, keyin x buyicha differensiallash ham mumkin.) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ayniyatga ega bo'lamiz.

Yechilgan misollardan rashanki, 1-misolda izlanayotgan funksiya bitta $\varphi(y)$ funksiyaga, 2-misolda esa berilgan tenglamaning umumiy yechimi ixtiyoriy ikkita $f(y)$ va $\psi(x)$ funksiyalarga bog'liqdir. Bu xolat esa birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama umumiy yechimining birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy yechimidan tubdan farq qilishini ifodalaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Saloxitdinov M. S., Nasritdinov G. N.** *Oddiy differensial tenglamalar.*–Toshkent. "O'zbekiston" 1994.
2. **Elsgols L. E.** *Differensialnыe uravneniya i variatsionnoe ischislenie.*–Moskva "Nauka" 1969.
3. **Mateev N. M.** *Metody integrirovaniya obyknovennyx differensialnyx uravneniy.* –Minsk "Vysheyshaya shkola" 1970.

УДК 517.977.8

AJRALGAN DINAMIKALI KASR TARTIBLI TENGLAMALAR BILAN IFODALANUVCHI QUVISH DIFFERENSIAL O'YINLAR.

Alimov H. N.[1], Ikromov S. N.[2]
[1]Jizzax davlat pedagogika universiteti; xakim-alimov@mail.ru
[2]Buxoro davlat universiteti ;

Amaliyotda ko'pincha boshqarish qarorlarini noaniqlik sharoitida qabul qilishga to'g'ri keladi. Bunda noaniqlik qabul qilingan qarorning natijasiga ta'sir qiluvchi raqibning ongli xatti-xarakati tufayli xam yoki boshqa faktorlar tufayli xam bo'lishi mumkin. Bir tomon qabul qilayotgan qarorlarning samaradorligi boshqa tomonning xatti-xarakatlariga bog'lik bo'lgan vaziyatlar konfliktli (nizoli, ixtilofli) vaziyatlar deb ataladi.

Konflikt tomonlar o'rtasida albatta antogonistik ziddiyat bo'lishini taqozo qilmaydi, lekin xamisha ma'lum bir tarzda tafovut bilan bog'lik bo'ladi.

Konfliktli vaziyatlarni matematik tomondan analiz qiluvchi, uning matematik modelini tuzuvchi va tomonlarning ratsional xarakat qilish yo'llarini o'rganuvchi fan soxasiga o'yinlar nazariyasi deyiladi.

O'yinlar nazariyasining paydo bo'lishi Dj.fon Neyman va O.Morgenshternlarning "O'yinlar nazariyasi va iqtisodiy muomala" nomli monografiyasi bosilib chiqqan 1944 yil hisoblanadi.

Xozirgi vaqtda o'yinlar nazariyasi gurkirab rivojlanmoqda. Uning antogonistik, noantogonistik (koopervtiv), chekli, cheksiz, pozitsion, differensial o'yinlar va boshqa bir qator yo'nalishlari mavjud. Keyingi paytlarda muhim ahamiyat kasb etayotgan differensial o'yinlar bir boshqariladigan ob'ektning boshqa boshqariladigan ob'ektni ta'kib qilishini ular xarakatlari dinamikasini hisobga olgan holda o'rganadi. Bunda ob'ektlar xarakati differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi.

O'yin real konfliktli vaziyatning matematik modeli bo'lib, u ma'lum qoidalar bo'yicha tahlil qilinadi. Umumiy holda o'yin qoidalari yurishlar ketma-ketligini, xar bir tomonning qarshi tomon xarakatlari xaqidagi ma'lumoti xajmini va o'yin natijasini (yechimini) belgilaydi.

Qoida, shuningdek, tanlashlarning mumkin bo'lgan ma'lum ketma-ketligi amalga oshirilib, ortiq yurishlar qilish mumkin bo'lmay qolgan o'yining tugashini xam belgilaydi.

Ishtirokchilarning soniga qarab o'yinlar juft va ko'p tomonli bo'ladilar. Juft o'yinda ishtirokchilar soni ikkiga teng, ko'p tomonli o'yinda esa ularning soni ikkidan ortiq. Ko'p tomonli o'yin ishtirokchilari koalitsiyalar (ittifoqlar) tashkil qilishlari mumkin (bu holda o'yin koalitsion deb ataladi).

Agar ko'p tomonli o'yin ishtirokchilari doimiy kaolitsiyaga birlashsalar u juft o'yinga aylanadi.

O'yinda (konfliktda) ishtirok etuvchi tomonlar o'yinchilar deb ataladilar. Sport o'yinida o'yinchilar - bu alohida sportchilar yoki komandalar bo'lishi mumkin; xarbiy konfliktda - urushuvchi tomonlar; xalq xo'jaligida - korxonalar, firmalar. Ba'zan o'yinchi rolini tabiat xam bajaradi, chunki u qabul qilinishi kerak bo'lgan qarorning shart-sharoitini shakllantiradi.

O'yinchining strategiyasi deb uning xar bir shaxsiy yurishda o'yin jarayonida yuz bergan vaziyatdan kelib chiqib tadbir variantini tanlash yo'lini belgilovchi qoidalar majmuiga aytiladi.

Agar o'yinchilarning strategiyalari soni chekli bo'lsa, o'yin chekli, agar o'yinchilardan xech bo'lmaganda bittasining strategiyalar soni cheksiz bo'lsa - cheksiz deyiladi.

O'yinchining strategiyasi unga maksimal yutuq yoki minimal qiymatli yutqazish bersa, bunday strategiya optimal strategiya deyiladi.

O'yin qoidasida ko'zda tutilgan strategiyalardan birini tanlash va uni amalga oshirish yurish deb ataladi.

Yurishlar shaxsiy va tasodifiy bo'ladi. Agar o'yinchi o'zining tadbirlarining mumkin bo'lgan variantlaridan birini ongli ravishda tanlasa (masalan, shaxmat va shashka o'yinlaridagi xar qanday yurish), bunday yurishga shaxsiy yurish deyiladi.

Agar tanlashni o'yinchi emas, balkim biror tasodifiy tanlash mexanizmi (masalan, o'yin soqqasini yoki tangani tashlash) bajarsa o'yin tasodifiy deyiladi.

Manfaatlari o'zaro ustma-ust tushmaydigan tomonlar ishtirok etadigan konfliktli (ixtilofli, nizoli) ziddiyatli holatlarning matematik modeli o'yin deb ataladi.

Quvuvchi deb nomlanadigan o'yinchining xarakati

$$D^{\alpha}x = Ax + u, \ \ x \in R^m, \tag{1}$$

tenlama bilan ifodalansin, bunda $D^{\alpha}-\alpha$tartibli differensiallash operatori, $n_1 - 1 < \alpha < n_1$,$n_1 \in N$,$t \in [0,T]$, $A - m \times m-$o'zgarmas matritsa. Qochuvchi deb nomlanuvchi o'yinchining xarakati

$$D^{\beta}y = By + \upsilon, \ \ y \in R^m, \tag{2}$$

tenglama bilan berilgan, bunda $D^{\beta}-\beta$ tartibli differensiallash operatori, $n_2 - 1 < \beta < n_2$,$n_2 \in N$,$t \in [0,T]$, $B - m \times m-$o'zgarmas matritsa, u, $\upsilon-$boshqaruvchi parametrlar, $u-$quvuvchi o'yinchining boshqaruv parametri, $u \in P \subset R^m$, $\upsilon-$qochuvchi o'yinchining boshqaruv parametri, $\upsilon \in Q \subset R^m$, P va Q-kompaktlar. Kasrli hosilani Kaputo ma'nosida tushunamiz.

Shuni eslatib o'tamizki, biror n marta uzluksiz differensiallanuvchi $z\,(t)\,,\; z\;:\;R_+\;\to\;R^m$ funksiyaning γ,$(n-1<\gamma<n, n\in \mathrm{N})$tartibli kasr hosilasi Kaputo ma'nosida Quyidagi ifoda bilan aniqlanadi

$$D^\gamma z\equiv D^{(\gamma)}z\,(t)=\frac{1}{(n\text{-}\gamma)}\int\limits_0^t\frac{z^{(n)}\,(r)}{(t-r)^{\gamma-n+1}}dr. \tag{3}$$

(1),(2),(3) differensial o'yinda terminal to'plam quyidagi ko'rinishga ega $M=M_0+M_1$, bunda M_0-R^m ning chiziqli qism fazosi, M_1-M_0 ni R^mga ortoganal to'ldiruvchisi L qism fazoning qism to'plami deb faraz qilamiz. So'ng mos ravishda orqali R^mdan Lga ortogonal proeksiyalash operatorinig matritsasini, $X+Y$va $X\overset{*}{-}Y$ orqali $X,Y$to'plamlarning mos ravishda algebraik yig'indisi va geometrik ayirmasini belgilaymiz. O'yin tugallangan hisoblanadi, agar $x-y\in M.$ shart bajarilsa. Quvuvchi o'yinchining maqsadi $x-y$ ni $M$to'plamga chiqarish, qochuvchi o'yinchi bunga xalaqit berishga intiladi.

Ta'rif. (1),(2),(3) differensial o'yinni $x^0=\left(x_0^0,x_1^0,x_2^0,x_3^0,...,x_{n_1-1}^0\right)$, $y^0=\left(y_0^0,y_1^0,y_2^0,y_3^0,...,y_{n_2-1}^0\right)$, boshlang'ich holatdan $T=T\left(x^0,y^0\right)$ vaqt ichida tugallangan deymiz, agar shunday o'lchamli $u\,(t)=u\,(x_0,y_0,t,\upsilon\,(t))\in P,\; t\in[0,T]$ funksiya mavjud bo'lsaki

$$D^\alpha x=Ax+u\,(t)\,,\; x\in R^m,\;\; n_1-1<\alpha<n_1,\;\; x\,(0)=x^0, \tag{4}$$

$$D^\beta x=By+\upsilon\,(t)\,,\; y\in R^m,\;\; n_2-1<\beta<n_2,\;\; y\,(0)=y^0, \tag{5}$$

tenglamalarning yechimlari $x-y\in M$, shartni qanoatlantirsa, ya'ni $x-y$ ixtiyoriy o'lchamli $\upsilon\;(t)\,,\;\;\upsilon\;(t)\in Q,\;\;0\le t\le T.$ funksiyalarda $t=T$ momenda $M_1$to'plamga tegishli bo'lsa.

Asosiy natijalarni ta'riflashga o'tamiz. $E_\eta\,(G;\mu)\;=\;\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{G^k}{(k\eta^{-1}+\mu)}-$ Mittag-Leflerning umumlashtirilgan matritsali funksiyasi bo'lsin, bunda $\eta>0,\;\mu\in C$ ($C-$kompleks sonlar to'plami), $G-$ixtiyoriy $m$tartibli kvadrat matritsa.

$$x^{(k)}\,(0)=x_k^0,\quad k=0,1,...,n_1-1,\quad y^{(l)}\,(0)=y_l^0,\quad l=0,1,...,n_2-1. \tag{6}$$

boshlang'ich shartli (1),(2),(3) dinamikli tizimni qaraymiz, u holda (4),(5) tenglamalar yechimlari (6) boshlang'ich shart bilan quyidagi ko'rinishga ega.

$$x\,(t)=\sum_{k=0}^{n_1-1}t^kE_{\frac{1}{\alpha}}\,(At^\alpha;k+1)\,x_k^0+\int\limits_0^t(t-r)^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\,(A(t-r)^\alpha;\alpha)\;\;u\,(r)\,dr.$$

$$y\,(t)=\sum_{l=0}^{n_2-1}t^lE_{\frac{1}{\beta}}\left(Bt^\beta;l+1\right)y_l^0+\int\limits_0^t(t-r)^{\beta-1}E_{\frac{1}{\beta}}\left(B(t-r)^\beta;\beta\right)\;\upsilon\;(r)\,dr.$$

$r\ge 0$, uchun $\hat{u}\,(r)=r^{\alpha-1}E_{\frac{1}{\alpha}}\,(Ar^\alpha;\alpha)\;P$, $\hat{\upsilon}\;(r)=r^{\beta-1}E_{\frac{1}{\beta}}\left(Br^\beta;\beta\right)\;Q$, $\hat{w}\,(r)=\hat{u}\;(r)\overset{*}{-}\hat{\upsilon}\;\;(r)$;larni aniqlaymiz.

$$W\,(t)=\int\limits_0^t\hat{w}\,(r)\,dr,\;\;t>0,\quad W_1\,(t)=-M_1+W\,(t)$$

Qulaylik uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$h_x\left(x^0,t\right)=\sum\limits_{k=0}^{n_1-1}t^kE_{\frac{1}{\alpha}}\,(At^\alpha;k+1)\;x_k^0$, $h_y\left(y^0,t\right)=\sum\limits_{l=0}^{n_2-1}t^lE_{\frac{1}{\beta}}\left(Bt^\beta;l+1\right)\;y_l^0.$

Teorema. Agar biror $t = t_1$ da (1),(2),(3) o'yinda

$$-h_x\left(x^0, t\right) + h_y\left(y^0, t\right) \in W_1\left(t\right)$$

qamrab olish bajarilsa, u holda x^0, y^0 boshlang'ich holatdan quvishni $T = t_1$.vaqt ichida tugatish mumkin.

Adabiyotlar

1. **Айзекс Р.** *Дифференциальные игры.* -М.: Мир, 1967.-480 с.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.*Минск: Наука и техника. 1987.-688 с.
3. **Warga J.** *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Academic Press, New York.-P 1972.-624.
4. **Маматов М.Ш., Алимов Х.Н.** *К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка* .Математические труды. Новосибирск. 2013. Т 16.-№2. с. 95-110.
5. **Маматов М.Ш., Алимов Х.Н.** *К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка.* Математические труды. Новосибирск. 2013. Т 16.-№2. с. 95-110.

УДК 517.977.8

KASR TARTIBLI BOSHQARILUVCHI TIZIMLARDA QUVISH MASALASI.

Alimov H.N.[1], Voxidova M.O.[2]
[1]Jizzax davlat pedagogika universiteti; xakim-alimov@mail.ru
[2]Buxoro davlat universiteti;

Kasrli hisob 1695 yil G. Lopital va G. Leybnis tomonidan $\frac{1}{2}$ tartibli hosilaning ma'nosi haqidagi savolning muhokamasidan boshlangan. G. Lopital va G. Leybnisga o'sha vaqtlardayoq $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ formula ma'lum bo'lgan. Tabiiyki ular bu formulani funksiyalardan olingan butun tartibli hosilalarni umumlashtirish natijasida olishgan. Aytaylik $f(x) = x^k$ funksiyadan olingan hosilalar

$$f'(x) = kx^{k-1}, \quad f''(x) = k\left(k-1\right)x^{k-2}, \quad f'''(x) = k\left(k-1\right)\left(k-2\right)x^{k-3}, \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)...(k-n+1)x^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$$

$k!$ va $(k-n)!$ larni Gamma funksiya orqali ifodalasak, quyidagi formula hosil bo'ladi

$$\frac{d^n}{dx^n}x^k = \frac{(\mathrm{k}+1)}{(\mathrm{k\text{-}n}+1)}x^{k-n}.$$

Ushbu formula kasr tartibli hosilalar uchun xam ma'noga ega. Yoki n ni ixtiyoriy α kasr son bilan almashtirib quyidagini olamiz.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^k = \frac{(\mathrm{k}+1)}{(\mathrm{k}-\alpha+1)}x^{k-\alpha}.$$

Xususan x funksiyadan $\frac{1}{2}$ tartibli hosilani hisoblasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{(1+1)}{\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{(2)}{\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} = 2\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Bu funksiyadan yana bir bor $\frac{1}{2}$ tartibli hosilani hisoblasak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(2\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)=2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}}=2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=2\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{(1)}x^{0}=\frac{1}{(1)}=1.$$

x funksiyadan ikki marta $\frac{1}{2}$ tartibli hosila 1 ga teng ekanligi kelib chiqdi. Har doim ham funksiyadan ikki marta $\frac{1}{2}$ tartibli hosila birinchi tartibli hosilaga teng bo'lmaydi.

R^m chekli o'lchovli Yevklid fazosida ob'ektning xarakati quyidagi kasr tartibli differensial tenglama orqali ifodalansin

$$D^{\alpha}z=Az+Bu-Gv+f\left(t\right),\tag{1}$$

bunda $z\in R^m,\ \ m\geq 1$; $D^{\alpha}-$kasr differensiallash operatori, $\alpha\in(0,1]\ ,\ t\in[0,T]\,,\ A-m\times m\ ,\ B-m\times p\,,$ va $G-m\times q$ o'zgarmas matritsalar, $u,v-$boshqariluvchi parametrlar, $u-$quvuvchi o'yinchining boshqaruv parametri, $u\in P\subset R^p u\in P\subset R^p$, $v-$ qochayotgan o'yinchining boshqaruv parametri, $v\in Q\subset R^q$, P va $Q-$kompakt to'plamlar, $f(t)-$ma'lum o'lchovli vektor funksiya. Kasr hosilani Kaputoning chap tomonli kasrli hosilasi deb tushunamiz. Eslatib o'tamizki $z(t)\in AC^{[\alpha]+1}(a,b),\ \ a,b\in R^1$ funksiyadan Kaputoning ixtiyoriy butun bo'lmagan $\alpha>0$ tartibli hosilasi

$$D^{\alpha}z(t)=\frac{1}{(1-\{\alpha\})}\int\limits_0^t\frac{d^{[\alpha]+1}z\left(\xi\right)}{d\xi^{[\alpha]+1}}\frac{d\xi}{\left(t-\xi\right)^{\{\alpha\}}}$$

ifoda orqali ifodalanadi.

Bundan tashqari R^m fazoda M terminal to'plam belgilangan. Quvuvchi o'yinchining maqsadi $z$ni M to'plamga tushirishdan iborat, qochuvchi o'yinchi unga xalaqit berishga intiladi.

Shunday qilib mojaroli boshqariluvchi (1) tizim troektoriyasini berilgan z_0 dastlabki holatdan chekli vaqt ichida M terminal to'plamga tushirish haqidagi quvish masalasi qaralmoqda.

Ta'rif. (1) differensial o'yin z_0 dastlabki holatdan $T=T(z_0)$ vaqt ichida tugatilishi mumkin deyiladi, agar ixtiyoriy $v\left(t\right),\ \ v\left(t\right)\in Q,0\leq t\leq T$ o'lchovli funksiyalarda shunday $u(t)=u(z_0,v(t))\in P$, $t\in[0,T]$ o'lchovli funksiya qurish mumkin bo'lsaki, ular uchun

$$D^{\alpha}z=Az+Bu\left(t\right)-Gv\ \left(t\right)+f(t),\qquad\qquad z\left(0\right)=z_0,$$

tenglama yechimi $t=T$ momentda M to'plamga tegishli bo'lsa.

a) M terminal to'plam $M=M_0+M_1$ ko'rinishga ega, bunda M_0-R^m fazoning chiziqli qism fazosi, M_1-M_0 ning R^m ga ortogonal to'ldiruvchisi bo'lgan, $L-$qism fazoning qism to'plami; b) -R^m dan L ga ortogonal proeksiyalash operatori; v) $X+Y$va $X\overset{*}{-}Y$ orqali X,Y to'plamlarning mos ravishda algebraik yig'indisi va geometrik ayirmasini tushiniladi.

$e_{\alpha}^{At}=t^{\alpha-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k\frac{t^{\alpha k}}{((k+1)\,\alpha)}-$matritsali $\alpha-$eksponenta va $r\geq 0$ lar uchun

$$\hat{u}\ (r)=e_{\alpha}^{At}BP,\qquad\hat{v}\ (r)=e_{\alpha}^{At}GQ,\qquad\hat{w}\ (r)=\hat{u}\ (r)\overset{*}{-}\hat{v}\ (r)\ ,$$

$$W\left(\tau\right)=\int\limits_0^{\tau}\hat{w}\ (r)\,dr,\quad\tau>0,\quad W_1\left(\tau\right)=-M_1+W\left(\tau\right)$$

bo'lsin.

Endi ω – $[0,\tau]$ kesmaning ixtiyoriy ajratilishi bo'lsin, $\omega=\{0=t_0<t_1<...<t_k=\tau\}\,,\ i=1,2,...,k$, va $A_0=-M_1$,

$$A_i\left(M,\tau\right)=\left(A_{i-1}\left(M,\tau\right)+\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}e_\alpha^{rA}BPdr\right)\overset{*}{-}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}e_\alpha^{rA}GQdr,\quad W_2\left(\tau\right)=\bigcap_{\omega}A_i(M,\tau)\,,\quad i=1,2,...,k.$$

bo'lsin.

Teorema. Agar (1) o'yinda biror $\tau=\tau_2$ da

$$-z_0-\int\limits_0^{\tau}e_\alpha^{A(\tau-r)}\left[Az_0+f\left(r\right)\right]dr\in W_2\left(\tau\right)$$

tegishlilik bajarilsa, z_0 dastlabki holatdan $T=\tau_2$ vaqt ichida quvishni tugatish mumkin.

Adabiyotlar

1. **Айзекс Р.** *Дифференциальные игры.* - М.: Мир, 1967. - 480 с.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.*Минск: Наука и техника. 1987.-688 с.
3. **Маматов М.Ш., Алимов Х.Н.** *Теория управления с распределеннии и геометрическими ограничениями.* Монография. Тошкент, "Fan va texnologiya 2013. 181 с.
4. **Маматов М.Ш., Тошманов Е.Б., Алимов Х.Н.** *Квазилинейные дискретные игры преследования, описываемие системами управнений высокого парядка.*Журнал Автоматика и вычислительная техника. Рига. 2015. - № 3, стр. 35-41.
5. **Никольский М.С.** *Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх.* М.: Издво МГУ, 1984. 65 с.

УДК 517.956

To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich shartda yuqori tartibli hosila qatnashgan masala uchun to'g'ri to'rtburchak sohada bir aralash masalaning yechimi yagonaligi haqida

Amanov D.[1], Saloxiddinova U.M.[2]
[1,2] Farg'ona davlat universiteti; damanov@yandex.ru

To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri to'rtburchakli sohada ko'plab tatqiqotlar olib borilgan [1-3]. Lekin [1-3] ishlarda va boshqalarda boshlang'ich shartlarda yuqori tartibli hosilalardan foydalanilmagan. [4-5] ishlarda boshlang'ich shartda noma'lum funksiyaning yuqori tartibli hosilalari berilgan. Ushbu ishda ham boshlang'ich shartda yuqori tartibli hosila berilgan masala yechimining yagonaligi o'rganilgan.

$\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ sohada

$$Lu\equiv u_t+u_{xxxx}=0 \tag{1}$$

tenglamani qaraylik.

A-masala. *(1) tenglamaning Ω sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u\left(x,t\right)\in C_{x,t}^{3,0}\left(\overline{\Omega}\right)\cap C_{x,t}^{4,k}\left(\Omega\right)$ funksiya topilsin:*

$$u_t^{(k)}\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\quad 0\leq x\leq p, \tag{2}$$

$$u_x\left(0,t\right)=0,\quad u_x\left(p,t\right)=0,\quad u_{xxx}\left(0,t\right)=0,\quad u_{xxx}\left(p,t\right)=0,\quad 0\leq t\leq T, \tag{3}$$

bu yerda $k\in N$, $\varphi\left(x\right)$ - berilgan ma'lum uzluksiz funksiya.

Teorema. *Agar A-masalaning regulyar yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.*

Isbot. Teskarisidan faraz qilaylik. A-masalaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlari mavjud bo'lsin. Bu yechimlarning ayirmalari bir jinsli (1) tenglamani va (2)-(3) larga mos bir jinsli boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu ayirmani $u(x,t)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)\,. \tag{4}$$

Ma'lumki,

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, ... \tag{5}$$

funksiya $L_2(0,p)$ da to'la ortonormallangan sistemani tashkil etadi.

Quyidagi

$$d_n(t) = \int_0^p u(x,t) X_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, ... \tag{6}$$

funksiyani qaraymiz. (6) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$d_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u(x,t) X_n(x)\,dx, \quad 0 < \varepsilon < p, \tag{7}$$

bu yerda $(\varepsilon, p-\varepsilon) \neq \varnothing$.

(7) tenglikni, t bo'yicha bir marta differensiallab,

$$d'_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_t(x,t) X_n(x)\,dx$$

tenglikni hosil qilamiz. (1) tenglamani e'tiborga olib

$$d'_{n,\varepsilon}(t) = -\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t) X_n(x)\,dx \tag{8}$$

ni hosil qilamiz. (8) ni to'rt marta bo'laklab integrallab, so'ng $\varepsilon \to 0$ da limitga o'tamiz.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d'_{n,\varepsilon}(t) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n(p-\varepsilon)\,u_{xxx}(p-\varepsilon,t) - X_n(\varepsilon)\,u_{xxx}(\varepsilon,t)\right] +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n{}'(p-\varepsilon)\,u_{xx}(p-\varepsilon,t) - X_n{}'(\varepsilon)\,u_{xx}(\varepsilon,t)\right] -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n{}''(p-\varepsilon)\,u_x(p-\varepsilon,t) - X_n{}''(\varepsilon)\,u_x(\varepsilon,t)\right] +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n{}'''(p-\varepsilon)\,u(p-\varepsilon,t) - X_n{}'''(\varepsilon)\,u(\varepsilon,t)\right] - \lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_n^4 \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} X_n(x)\,u(x,t)\,dx,$$

(3) ga mos bir jinsli shartlarni hamda $X_n(x)$ funksiyaning xossalariga asosan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$d'_n(t) = -\lambda_n^4 \int_0^p u(x,t)\,X_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, ...$$

(4) ni e'tiborga olib quyidagi oddiy differensial tenglamaga kelamiz:

$$d'_n(t) + \lambda_n^4 d_n(t) = 0, \qquad n = 0, 1, ... \tag{9}$$

(2) shartga mos bir jinsli shartdan (6) ga asosan

$$d_n^{(k)}(0) = 0, \qquad n = 0, 1, ... \tag{10}$$

boshlang'ich shartlarni hosil qilamiz.

Ma'lumki, (9) oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$d_n(t) = C_{1n} e^{-\lambda_n^4 t}, \quad n = 0, 1, ... \, .$$

Bu yechimlarni (10) shartga bo'ysundirib $C_{1n} = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni barcha $\forall t \in [0, T]$ uchun $d_n(t) = 0$. U holda (6) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_0^p u(x,t) X_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{11}$$

(11) dan esa $u(x,t)$ funksiya (5) to'la sistema bilan ortogonalligi kelib chiqadi. Demak, bundan esa $u(x,t) \equiv 0$. (4) ga asoslanib esa, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. **Аманов Д.** Краевая задача для смешанно-параболического уравнения четвертого порядка, // Узб . матем. журн., 2010 г. № 2, С.26-30.
2. **Бердышев А.С., Азизов М.С.** Смешанная задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // Научный вестник ФерГУ 2019 г. №2.- С. 10-19.
3. **Уринов А.К. Азизов М.С.** Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // "Научный вестник НамГУ "2019 г., №11. С. 26-37.
4. **Kilichov O. Sh.** On a boundary value problem for a fourth-order partial differential equation // Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №4, pp. 42-47
5. **Saloxiddinova U.M.** To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich shartda yuqori tartibli hosila qatnashgan masala uchun to'g'ri to'rtburchak sohada bir aralash masala // "Yosh matematiklarning yangi teoremalari - 2022"İlmiy amaliy konfrensiya. Namangan, O'zbekiston 13 - 14 May, 2022 yil. 188-190 b.

УДК 517.954

Toq tartibli aynigan tenglama uchun bitta chegaraviy masala haqida.

Artiqov M.[1], Ortiqova Z. M. [2].
[1,2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; artiqov1952mail.ru

$D = \{0 < x < 1, \ 0 < y \leq 1\}$ sohada

$$\frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n y^p \frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y), \qquad p = const > 0 \tag{1}$$

tenglama uchun quyidagi masalani qaraymiz:

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=j} = h_{i,j}(y), \qquad i = \overline{0, n-1}; \quad j = 0, 1; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{x=0} = h_{n,0}(y), \qquad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y) \in C^{n,0}(\overline{D}) \bigcup C^{2n+1,1}(D)$ regulyar yechimni toping. Bunda $F(x,y)$, $h_{i,j}(y)$ $\left(j=0;1,\ i=\overline{0,n}\right)$, $\tau(x)-$ berilgan uzluksiz funksiyalar. (1) tenglama $p=0$ da [1-3] ishlarda o‘rganilgan (1)- (4) masalani o‘rganishda ushbu hollarni qarash kerak; 1) $0<p<1$; 2) $p=1$; 3) $p>1$. $0<p<1$ bo‘lgan holda

$$x = x,\ z = \frac{y^{1-p}}{1-p} \tag{5}$$

Almashtirish yordamida (1)-(4) masala chegaralangan $D_1 = \left\{0<x<1,\ 0<z\le \frac{1}{1-p}\right\}$ soha uchun ma‘lum bo‘lgan masalaga keladi ([1-3] ga qarang).

$p>1$ da (5) almashtirish yordamida (1)-(4) masala $D_3 = \left\{0<x<1,\ -\infty<z\le \frac{1}{1-p}\right\}$ sohada qaraladigan ushbu masalaga keladi: sohada

$$\frac{\partial^{2n+1}\overline{u}}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \overline{F}(x,z), \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial^i \overline{u}}{\partial x^i}\right|_{x=j} = \overline{h}_{i,j}(z), \qquad i=\overline{0,n-1};\ j=0;1, \\ \left.\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{x=0} = \overline{h}_{n,0}(z), \quad -\infty<z\le \dfrac{1}{1-p}, \\ \lim\limits_{y\to 0} \overline{u}(x,z) = \tau(x), \quad 0\le x\le 1, \end{array}\right\} \tag{7}$$

bunda

$$\overline{u}(x,z) = u(x,\ \sqrt[1-p]{(1-p)z}),\ \overline{F}(x,z) = F(x,\ \sqrt[1-p]{(1-p)z}),$$

$$\overline{h}_{i,j}(z) = h_{i,j}(\sqrt[1-p]{(1-p)z}),\ i=\overline{0,n};\ j=0;1;\ -\infty<z\le \frac{1}{1-p}.$$

(6)-(7) masala yechimining yagonaligini energiya integrali usuli yordamida, yechimning mavjudligini esa potensiallar usuli yordamida isbotlanadi.

Eslatma. (1)-(4) masalada (4) shartni ushbu D da

$$\lim_{y\to 0} y^p u_y(x,y) = g(x) \tag{8}$$

shart bilan almashtirish mumkin. U holda (8) shartga asosan (1) tenglamadan $y\to 0$ da $u(x,0)=\tau(x)$ funksiya uchun

$$\tau^{(2n+1)}(x) = F(x,0) - g(x), \quad 0<x<1, \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau^{(i)}(j) = h_{i,j}(0), \quad i=\overline{0,\ n-1};\ j=0,1; \\ \tau^{(n)}(0) = h_{n,0}(0) \end{array}\right\} \tag{10}$$

masalani hosil qilamiz. Bu masala ushbu yagona yechimga ega bo‘ladi:

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{2n} C_i x^i + \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} ...dx_n \int\limits_0^{x_n} [F(\xi,0)-g(\xi)]d\xi,$$

bunda C_i $(i = \overline{0, 2n})$ koeffisientlar (10) shart yordamida aniqlanadi.

Adabiyotlar

1. **Джураев Т. Д., Абдиназаров С.** *К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками* 1991. Т.320. №6.С.1305-1309
2. **Джураев Т.Д., Абдиназаров С.** *К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками* // Узб.матем.журн., Ташкент: "Фан", 1991, № I, стр. 21-31.
3. **Абдиназаров С.** *Об одной краевой задаче для одного нелинейного уравнения* // Узб.матем.журн., Ташкент: "Фан", 1991, № 6, стр.3-10.

УДК 517.954.

Toq tartibli chiziqli tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining yagonaligi.

Artiqov M.[1], Ortiqova Z. M. [2].
[1,2]Termiz davlat universiteti; artiqov1952mail.ru

Ushbu maqolada

$$L(u) \equiv L_0(u) + \sum_{i=0}^{2n-1} a_i(y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x, y), \tag{1}$$

tenglama uchun $D = \{0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ sohada nolokal shartli chegaraviy masala yechimining yagonaligi o'rganilgan.

Nolokal chegaraviy masalaning qo'yilishi va yechimining yagonaligi.

D sohada (1) tenglamaning va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan regulyar yechimi topilsin.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1, \\ \left.\dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=j} = h_{i,j}(y), i = \overline{0, n-1}, j = 0; 1, \\ \left.\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{x=0} + \alpha \left.\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_{x=1} = h(y), 0 \leq y \leq 1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

bunda $a_i(y), f(x, y), h_{i,j}(y), h(y), u_0(x)-$ berilgan funksiyalar bo'lib, $\alpha = \text{const}$, hamda $f(x, y)$ funksiya x o'zgaruvchi bo'yicha ayrim nolokal shartlarni qanoatlantiradi. Qayd etish lozimki, B masaladagi $\alpha = 0$ va $n = 1$, $\alpha = -1$ hollarda mos ravishda [1] hamda [2] ishlarda batafsil o'rganilgan.

Teorema. Agar $a_i(y) \in \mathrm{C}[0, 1]$ $(i = \overline{0, 2n-1})$, $|\alpha| \leq 1$ va $(-1)^{n+k} a_{2k}(y) \geq 0$ $(k = \overline{0, n-1},\ \ 0 \leq y \leq 1)$ shartlar bajarilsa qaralayotgan masala yagona yechimga ega bo'ladi.

Isbot. $(f(x, y) \equiv 0,\ h_{i,j}(y) = h(y) = u_0(x) \equiv 0)$ (2) bir jinsli masalani qaraymiz, ya'ni bir jinsli masalada $u(x, y) \equiv 0$ ekanligini isbotlaymiz.

Qyuidagi belgilashni kiritamiz

$$u(x, y) = \vartheta(x, y) e^y. \tag{3}$$

U holda $\vartheta(x, y)$ funksiya uchun ushbu bir jinsli tenglamaga

$$\tilde{L}(\vartheta) \equiv L_0(\vartheta) + \sum_{i=0}^{2n-1} a_i(y) \frac{\partial^i \vartheta}{\partial x^i} + (-1)^n \vartheta = 0$$

va quyidagi bir jinsli chegaraviy shartlarga

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta(x,0)=0, 0\le x\le 1,\\ \left.\dfrac{\partial^i\vartheta}{\partial x^i}\right|_{x=j}=0, i=\overline{0,n-1}, j=0;1,\\ \left.\dfrac{\partial^n\vartheta}{\partial x^n}\right|_{x=0}+\alpha\left.\dfrac{\partial^n\vartheta}{\partial x^n}\right|_{x=1}=0, 0\le y\le 1,\end{array}\right\} \tag{4}$$

ega bo'lamiz.

Yuqoridagi tenglikni D soha bo'yicha integrallab,

$$\vartheta\tilde{L}(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\partial^{2n-k}\vartheta}{\partial x^{2n-k}}+\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{\partial^n\vartheta}{\partial x^n}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\vartheta^2\right)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_{2k}(y)\left(\frac{\partial^k\vartheta}{\partial x^k}\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{v=1}^{k}(-1)^{v-1}\frac{\partial^{v-1}\vartheta}{\partial x^{v-1}}\frac{\partial^{2k-v}\vartheta}{\partial x^{2k-v}}\right)+a_1(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k+1}(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^v\frac{\partial^v\vartheta}{\partial x^v}\frac{\partial^{2k-v}\vartheta}{\partial x^{2k-v}}+\frac{(-1)^k}{2}\left(\frac{\partial^k\vartheta}{\partial x^k}\right)^2\right)+(-1)^n\vartheta^2=0$$

va (4) bir jinsli shartlardan foydalanib quyidagi munosabatga kelamiz

$$\frac{1}{2}\int_0^1(1-\alpha^2)\left(\frac{\partial^n\vartheta(1,y)}{\partial x^n}\right)^2dy+\frac{1}{2}\int_0^1\vartheta^2(x,1)dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\iint_{\mathrm{D}}(-1)^{n+k}a_{2k}(y)\left(\frac{\partial^k\vartheta}{\partial x^k}\right)^2dxdy+\iint_{\mathrm{D}}\vartheta^2dxdy=0. \tag{5}$$

1- teoremaning shartlaridan (5) munosabatdagi har bir integralning nomanfiyligi kelib chiqadi, shu sababli $\overline{\mathrm{D}}$ sohada $\vartheta(x,y)\equiv 0$ tenglik o'rinli. (3) munosabatdan $u(x,y)\equiv 0$ ekanligi ravshan. 1-teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. **Джураев Т.Д., Абдиназаров С.** *К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками* // Узб.матем.журн., Ташкент: "Фан", 1991, № I, стр. 21-31.
2. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.** *О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности* // Сиб. мат.журн. 2006.-Т.47.№3, стр. 527-547.

УДК Primary 35R11; Secondary 34A12.

Inverse problem for the subdiffusion equation with Caputo fractional derivative

Ashurov R. R.[1], Shakarova M. D.[2].
[1] Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science;
ashurovr@gmail.com shakarova2104@gmail.com

The inverse problem of determining the right-hand side of the subdiffusion equation with a fractional Caputo derivative is considered. The right-hand side of the equation has the form $f(x)g(t)$ and the unknown is function $f(x)$. The condition $u(x,t_0) = \psi(x)$ is taken as the over-determination condition, where t_0 is some interior point of the considering domain and $\psi(x)$ is a given function. It is proved by the Fourier method that under certain conditions on the functions $g(t)$ and $\psi(x)$ the solution of the inverse problem exists and is unique. An example is given showing the violation of the uniqueness of the solution of the inverse problem for some sign-changing functions $g(t)$. It is shown that for the correctness of the inverse problem for such functions, certain orthogonality conditions for the given functions and some eigenfunctions of the elliptic part of the equation must be satisfied.

УДК 517.95

Tip o‘zgarish chizig‘i silliq bo‘lmagan parabolik-giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli chegaraviy masala.

A’zamov Valiahror.
Farg‘ona davlat universiteti; valiahror@mail.ru

Bizga Ω sohada quyidagi tenglama berilgan bo‘lsin:

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y, \ (x,y) \in \Omega_0 \\ U_{xx} - U_{yy}, \ (x,y) \in \Omega_i, \ i = 1,2 \end{cases} \tag{1}$$

Ω soha esa quyidagicha:

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB \cup AA_0,$$

$A(0,0); A_0(0,1); B(1,0); B_0(1,1); C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

Masala. (1) tenglamani qanoatlantiruvchi Ω sohada shunday $U(x,y)$ funksiya topilsinki, u $U(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_i), (i = 1,2)$ regulyarlik shartlarini hamda, quyidagi chegaraviy va ulash shartlarni qanoatlantirsin:

$$U(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$U(x,y)|_{AD} = \psi_2(y), \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0,$$

$$U(x,y)|_{BB_0} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

$$U_y(x,+0) = I_1(U_y(x,-0)), U_y(x,+0) = U_y(x,-0), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$U_x(+0,y) = I_2(U_x(-0,y)), U_x(+0,y) = U_x(-0,y), \quad 0 < y < 1, \tag{3}$$

Bu yerda I_1va I_2 lar hozircha ixtiyoriy integral operatorlar.

Masalani tadqiq etish uchun avvalo tip o‘zgarish chiziqlarida izlanayotgan yechimning izlari orasidagi funksional munosabatlarni topamiz [1,2]:

$$\tau''_1(x) = \nu_1^{+\prime}(x),$$

$$\tau'_1(x) = \nu_1^{-\prime}(x) + \psi'_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < 1,$$

$$\tau'_2(y) = \nu_2^{-}(y) + \psi'_2\left(\frac{y}{2}\right), \quad 0 < y < 1,$$

$$\nu_2^+(y) = \int_0^1 \tau_1(\xi) G_{1x}(0,y;\xi,0)d\xi - \int_0^y {\tau'}_2(\eta) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(2n)}{\sqrt{y-\eta}}} \right) d\eta +$$

$$+ \int_0^y \varphi'(\eta) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(2n+1)}{\sqrt{y-\eta}}} \right) d\eta$$

bu yerda

$$G_1(x,t;l,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)} \right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)} \right] \right\}, t > \eta,$$

$G_1(x,t;l,\eta)$ - (1) tenglama uchun Ω_0 sohada qo‘yilgan 1 - chegaraviy masalaning Grin funksiyasi.

So‘ngra (2),(3) ulash shartlaridan foydalanib integral tenglamalarni hosil qilamiz [3].

I_1va I_2 integral operatorlarga qo‘yiladigan ma’lum shartlar asosida bu tenglamalarning bir qiymatli yechilishi isbotlanadi [4].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *К спектральной теории уравнений смешанного типа.* Т.: Mumtoz so‘z. - 2010.
2. **М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов** *Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар.* Т.: "Университет". - 2007.
3. **M. Salohiddinov** *Integral tenglamalar.* T.: "Yangiyul poligraph service". - 2007.
4. **Каримов Э.Т.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром.* Автореферат. Кандидатской диссертации. Ташкент: - 2006.

UDC 511.331

GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASI

Babanova A.
Termiz davlat universiteti, babanovaaziza508@gmail.com

Fizikaviy masalalarning matematik modelini o‘rganish XVIII asrning o‘rtalarida analizning yangi yo‘nalishi – matematik fizika tenglamalar, ya‘ni fizikaviy hodisalarning matematik modeli fanining paydo bo‘lishiga olib keldi. Bu fanning asosi D’Alamber (1717 - 1783), Eyler (1707 - 1783), Bernulli (1700 - 1782), Lagranj (1736 - 1813), Laplas (1749 - 1827), Puasson (1781 - 1840), Furye (1768 - 1830) va boshqa olimlar ishlari bilan qo‘yilgan.

Biror fizik jarayonni to‘la o‘rganish uchun, bu jarayonni tasvirlayotgan tenglamalardan tashqari, uning boshlang‘ich holatini (boshlang‘ich shartlarni) va jarayon sodir bo‘ladigan sohaning chegarasidagi holatini (chegaraviy shartlarni) berish zarurdir.

Jarayon sodir bo‘layotgan soha $G \subset \mathbb{R}^n$ bo‘lib, S uning chegarasi bo‘lsin. S ni bo‘laklari silliq sirt hisoblaymiz. Giperbolik turdagi tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo‘yiladi: $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ sinfdan shunday $u(x,t)$ funksiya topilsinki, bu funksiya $t > 0$ da

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t)$$

tenglamani va quyidagi boshlang‘ich shartlani qanoatlantirsin:

$$u|_{t=+0} = u_0(x), u_t|_{t=+0} = u_1(x),$$

bu yerda f, u_0, u_1 - berilgan funksiyalar.

Bu masalaga Koshining klassik masalasi deyiladi.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa,

$$f \in C^1(t \geq 0),\ u_0 \in C^2(\mathbb{R}^1),\ u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1),\ n = 1;$$

$$f \in C^2(t \geq 0),\ u_0 \in C^3(\mathbb{R}^n),\ u_1 \in C^2(\mathbb{R}^n),\ n = 2,\ 3;$$

u vaqtda Koshining klassik masalasining yechimi mavjud, yagona va quyidagi formula orqali topiladi:

Dalamber formulasi bilan, agar $n = 1$ bo‘lsa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (1)$$

$n \geq 2$ bo‘lganda ushbu formulalarning o‘rniga quyidagi formuladan ham foydalansa bo‘ladi:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k u_0(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2k+1}\Delta^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\tau)d\tau \qquad (2)$$

Masala:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ax + bt \\ u(x,y,z) = 0 \\ u_t(x,y,z,0) = xy + z \end{cases}$$

masalani (2) formula bilan yeching.

$u_0 = xyz$ funksiyaga keraklicha marta Δ operatorni qo‘llaymiz:

$$\Delta^0 u_0 = u_0 = xyz; \Delta^1 u_0 = \Delta u_0(x,y,z) = u_{0xx} + u_{0yy} + u_{0zz} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Laplas operatorini keyingi qo‘llashlarda ham nol chiqadi, demak hisoblashni shu yerda to‘xtatamiz. Huddi shu hisoblashlarni u_1, f funksiyalar uchun ham bajaramiz:

$$\Delta^0 u_1 = u_1 = xy + z;$$

$$\Delta^1 u_1 = \Delta^2 u_1 = \cdots = 0;\ \Delta^1 f = \Delta^2 = \cdots = 0;$$

Hisoblashlarni (2) formulaga yetib kelamiz, natijada:

$$u(x,y,z,t) = xyz + t(xy+z) + \int\limits_0^t (t-\tau)(ax+b\tau)d\tau = xyz + t(xy+z) + \frac{axt^2}{2} + \frac{bt^3}{6}$$

yechimni olamiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI.

1. **Salohiddinov M. S.** *Matematik fizika tenglamalari.* “O‘qituvchi”; T. 2002 y. 445-b.

2. **Salohiddinov M. S., O‘rinov A. Q.** *Giperbolik va eliptik tipdagi buziladigan differensial tenglamalar.* “Universitet”; T. 2006-y. 270-b.

3. **Zikirov O. S.** *Xususiy hosilali differensial tenglamalar.* “Universitet”; T. 2012-y. 260-b.

УДК 917.95

Parallel tip o‘zgarish chizig‘iga ega aralash tenglama uchun integral ulash shartli chegarviy masala

Boymirzayev F.R.
Farg‘ona davlat universiteti; farhodjonboymirzayev@gmail.com

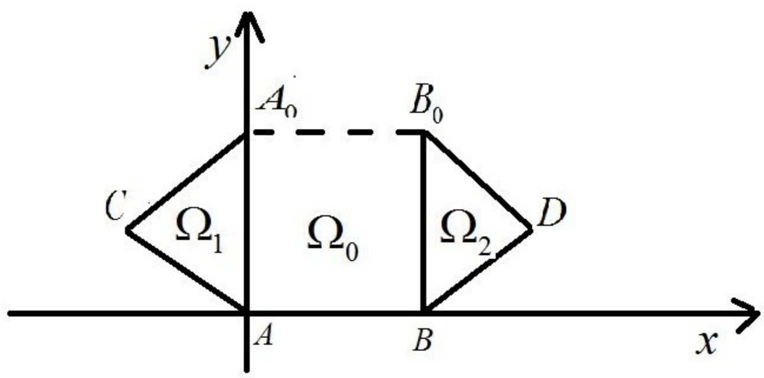
Ushbu ishda Riman-Liuvill kasr tartibli hosila ishtrok etgan aralash tenglama uchun sohada umumiy integral aralash shartli chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi tadqiq qilinadi.

$$f(x,y) = \begin{cases} U_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} U(x,y), & (x,y) \in \Omega_0 \\ U_{xx}(x,y) - U_{yy}(x,y), & (x,y) \in \Omega_i \quad (i = 1,2) \end{cases} \tag{1}$$

tenglamani $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AA_0 \cup BB_0$ aralash sohada tadqiq qilamiz. Bu yerda $f(x,y)$-berilgan funksiya , $D_{0y}^{\alpha}U$ esa α kasr tartibli Riman-Liuvill integro-differsial operatori bo‘lib, u $0 < \alpha < 1$ uchun quydagicha aniqlangan [1]:

$$D_{0y}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} g(z)\, dz.$$

(1) tenglama uchun Ω sohada quyidagi masalani tadqiq etamiz:



Masala. (1) tenglamaning Ω sohada $U(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap AC^1(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_i)$, $U_{xx} \in C(\Omega_0)$ yechimini quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan regulyar yechimi topilsin:

$$U(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$U|_{AC} = \varphi(y), \qquad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$U|_{BD} = \psi(y), \qquad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$U_x(0+,y) = I_1(U(x,y)|_{x=0-}), \qquad 0 < y < 1, \tag{5}$$

$$U_x(1-0,y) = I_2(U_x(x,y)|_{x=1+0}), \qquad 0 < y < 1. \tag{6}$$

Bu yerda $\varphi(x)$, $\varphi(y)$-berilgan funksiyalar , I_1, I_2 lar esa hozircha ixtiyoriy integral operatorlar.

Bunday tipdagi masalalar I_1 va I_2 integral operatorlarning maxsus ko‘rinishida [2] da ($\alpha = 1$ holda) hamda $0 < \alpha < 1$ uchun [3] tadqiq etilgan.

Masalani tadqiq etishda (1) tenglama uchun Ω_0 sohada qo'yilgan 1-chegaraviy masalaning yechimidan [4] hamda toʻlqin tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimidan [2] foydalanamiz.

(5)-(6) ulash shartlaridan foydalangan vaqtimizda izlayotgan yechimning tip oʻzgarish chiziqlaridagi izlariga nisbatan integral tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemaning bir qiymatli yechilishi uchun berilgan funksiyalarga qoʻyiladigan shartlar bilan bir vaqtda I_1 va I_2 integral operatorlarning koʻrinishlariga ham ma'lum shartlar tushadi. Masalaning bir qiymatli yechilishini ta'minlovchi shartlar asosida qoʻyilgan masala yuqorida aytib oʻtilgan integral teng-lamalar sistemasiga keltiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Нахушев А.М.** *Элементы дробного исчислетления и их применение.* Нальчик, 2000.
2. **Каримов Э.Т.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гипербололического типа со спектральным параметром.* Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент , 2006 г.
3. **Berdyshev A. S. , Cabada A. ,Karimov E.T.** *On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville factional differential operator.* Nonlinear Analysis, 2002, 75, pp.3268-3273.
4. **Псху А.В.** *Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина.* Дифференциальные уравнения, 2003. 39(10),pp.1430-1433.

УДК 517.927.2

TOʻRTINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN NOLOKAL SHARTLI TESKARI MASALALAR

Bozorova M.M
Fargoʻna davlat universiteti; madinaxonbozorova225@gmail.com

Soʻngi vaqtlarda nomaʻlum manbali differensial tengalamalar bilan shugʻillanishga boʻlgan qiziqish ortib bormoqda. Bunga sabab koʻplab issiqlik taqalish va diffuziya jarayonlarini matematik modelini tuzish noma'lum manbali differensial tenglama uchun qoʻyiladigan masalalarga keltiriladi. Odatda, bunday turdagi masalalar teskari masala deb yuritiladi. Xususiy hosilali va oddiy differensial tenglamalar uchun teskari masalalar koʻplab tadqiqotchilar tomonidan oʻrganilgan (masalan, ushbu [1]–[4] ishlarga qaralsin). Ammo yuqori tartibli tenglamalar uchun teskari masalalar kam oʻrganilgan. Shu sababdan biz ushbu ishda toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun bir teskari masalani bir qiymatli yechilishini koʻrsatamiz.

$(0,1)$ oraliqda ushbu

$$y^{(4)}(x) = kf(x) \tag{1}$$

toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamani qaraylik, bu yerda $y(x)$ – noma'lum funksiya; k – noma'lum funksiya, $f(x)$ – berilgan uzluksiz funksiya.

T_1 **masala**. Shunday $y(x)$ funksiya va k – son topilsinki, u quyidagi xossalarga ega boʻlsin:

1)$y(x) \in C^3[0,1] \cap C^4(0,1)$ sinfga kirsin;

2) $y(x)$ funksiya $(0,1)$ oraliqda (1) tenglamani qanoatlantirsin;

3) $[0,1]$ kesmada esa

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(1) = 0,\ y'''(1) = 0, \tag{2}$$

chegaraviy va

$$y(1) = ay(\xi) + b \tag{3}$$

nolokal shartni qanoatlantirsin, bu yerda a, b va ξ – oʻzgarmas haqiqiy sonlar boʻlib, $0 < \xi < 1$.

Odatda (3) shartni Bitsadze – Samariskiy tipidagi shart deyiladi.

T_1 masalada k sonini vaqtingcha ma'lum deb qarab, (1) tenglamani va (2) chegaraviy shartlardan foydalanib, uni Grin funksiyalari usuli bilan yechamiz.

$\{(1),(2)\}$ masalaning Grin funksiyasi

$$G(x,s)\begin{cases}\dfrac{x^2(3s-x)}{6}, & x<s;\\ \dfrac{s^2(3x-s)}{6}, & x>s,\end{cases}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Gilbert teoremasiga ko'ra

$$y(x)=k\int_0^1 G(x,s)f(s)ds \tag{4}$$

tenglikka tenglikni yozib olamiz.

Endi k soni topish maqsadida (4) formulani (3) shartga bo'ysundirib, ba'zi soddalashtirishlarni amalga oshirib,

$$k=\frac{b}{\int_0^1 G(1,s)f(s)ds-ak\int_0^1 G(\xi,s)f(s)ds} \tag{5}$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5) formulani (4) formulaga qo'yib, $y(x)$ funksiyani

$$y(x)=b\left[\int_0^1 G(1,s)f(s)ds-ak\int_0^1 G(\xi,s)f(s)ds\right]^{-1}\int_0^1 G(x,s)f(s)ds \tag{6}$$

formula bilan aniqlaymiz.

Teorema. Agar $\int_0^1 G(1,s)f(s)ds\neq ak\int_0^1 G(\xi,s)f(s)ds$ bo'lsa, u holda T_1 masala yagona yechimga ega bo'ladi va u (5),(6) formulalar bilan aniqlanadi.

1-izoh. Agar $\int_0^1 G(1,s)f(s)ds=ak\int_0^1 G(\xi,s)f(s)ds$ va $b=0$ bo'lsa, u holda T_1 masala cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

2-izoh. Agar $\int_0^1 G(1,s)f(s)ds=ak\int_0^1 G(\xi,s)f(s)ds$ va $b\neq 0$ bo'lsa, u holda T_1 masala yechimga ega bo'lmaydi.

T_2 **masala**. Shunday $y(x)$ funksiya va k – son topilsinki, u quyidagi xossalarga ega bo'lsin:

1)$y(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1)$ sinfga kisin;

2) $y(x)$ funksiya $(0,1)$ oraliqda (1) tenglamani qanoatlantirsin;

3) $[0,1]$ kesmada esa

$$y(1)=0,\ y'(1)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=0$$

chegaraviy va

$$y(1)=ay(\xi)+b$$

nolokal shartni qanoatlantirsin.

T_2 masalani ham T_1 masala kabi tadqiq qilish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Urinov A. K., Azizov M. S.** *Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part.* Lobachevskii Journal of Mathematics, volume 42, pp.632-640. 2021.
2. **Азизов М. С.** *Обратная задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом* Бюллетень Института математики 2021, Vol. 4, No4, стр.51-60.
3. **Tillabayeva G. I.** *Birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun nolokal shartli masalalar.* NamDU ilmiy axborotnomasi 2020 yil 1-son. 3-6 betlar.
4. **Tillabayeva G. I.** *O'ng tomoni noma'lum va koeffitsiyenti uzulishga ega bo'lgan birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama uchun Bitsadze-Samariskiy masalasi* NamDU ilmiy axborotnomasi 2020 yil 2-son. 20-26 betlar.

УДК 517.958536.2

Parabolik tenglamalar uchun bitta noklassik masala

Diyorova G.B.[1], Egashev F.R.[2]
[1,2]Termiz davlat universiteti ;
gulnozadiyorova897@gmail.com, furqatergashev9495@gmail.com

Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun lokal masalalar juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko'plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun nolokal (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati berilmasdan, balki sohaning u yoki qismi orasidagi bog'lanishlar beriladi) masalalarni o'rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar noklassik masalalar jumlasiga kirib, noklassik masalalar bilan hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlarida juda ko'plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. [1,2,3,4] Parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ichki nolokal chegaraviy shartli masala qaraladi.

Masalaning qo'yilishi.

$$D = \{(x,t):\ 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

sohada

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ (x,t) \in D \tag{1}$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

boshlang'ich va

$$u(0,t) = u(l,t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \psi(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(t)$ uzluksiz funksiyalar.

Masalani yechish quyidagicha amalga oshiriladi.

1. Yechim uchun aprior baho o'rnatiladi.
2. Noma'lum chegaraning harakteri o'rganiladi.
3. Yechimning hosilasi va noma'lum chegara uchun aprior baholar o'rnatiladi.
4. Masala yechimining yagonaligi isbotlanadi.
5. Masala yechimining mavjudligi isbotlanadi.

(1)-(4)- ko'rinishdagi masalalar filtratsiya jarayonlari strukturasining yozilishidan kelib chiqqan. Bunday masalalar turli ko'rinishdagi parabolik tipdagi tenglamalar uchun juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan, bunga doir umumiy ma'lumotlarni [2] dan olish mumkin.

Adabiyotlar

1. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967, с.736.
2. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968.428 с.
3. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967, с.736.
4. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения.* Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.мат.Науки".2012. №26. С.99-106.

УДК 517.956

Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun nolakal chegaraviy masala

Donayev N.Y.[1], Yuldashov Sh.Ṅ.[2], Xo'shboqov X.Ṫ.[3]
[1,3] Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti;
[2] Toshkent axborot texnologiyalari universiteti;

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\delta^i u}{\delta x^i} + b(x,y)\frac{\delta u}{\delta x} = f(x,y) \tag{1}$$

Agar (1) tenglamada $b(x,y) \in C^{3,1}\left(\overline{D}\right)$ bo'lsa

$$U(x,y) = V(x,y)\exp(\frac{1}{2}\int^{y} b(x,t)dt)$$

almashtirish yordamida umumiylikni buzmagan holda

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x,y) \tag{2}$$

tenglamaga keltirish mumkinki, tekshirish davrida (1) ning o'rniga (2) dan foydalanish mumkin. (2) tenglama uchun $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ sohada quyidagi masalani qaraymiz. D sohada (2) tenglamaning shunday chegaralar yechimi $U(x,y) \in C^{2,1}(\overline{D}) \cap C^{3,2}(D)$ topilsinki u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$\alpha_0(x)U(x,0) + \alpha_1(x)U(x,1) = \varphi_0(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$\beta_0(x)U(x,b) + \beta_1(x)U(x,1) = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$$\gamma_0(y)U(0,y) + \gamma_1(y)U_x(1,y) = \psi_0(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$U_x(0,y) = \psi_1(y), 0 \le y \le 1, \tag{6}$$

$$U(1,y) = \psi_2(y), 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

Bu yerda $a_i(x,y)$, $b(x,y)$, $f(x,y)$, $\alpha(x)$, $\beta_i(y)$, $\varphi_i(x_1)$ $(i = 0,\ 1)$, $\psi_j(x)$ $(j = 0,1,2)$ berilgan o'z argumentining uzluksiz funksiyalaridir.

Shu bilan birga $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0,\ \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0,\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \neq 0$ bu masala (2) da tekshirilgan masaladan (2), (6) shartlari bilan farq qiladi.

Teorema. *Agar* $a_i(x,y) \in C^{i,0}(D),\ a_2(x,y) \le 0,\ a_0 + \frac{1}{2}a_{2xx} \ge 0,\ \alpha_0 . \alpha_1 \le 0,\ \beta_0 . \beta_1 \le 0,\ \gamma_0 . \gamma_1 \le 0$ *bo'lsa u holda* (2) - *(7) masalalar yagona yechimga egadir.*

Yechim yagonaligi energiya integrali usuli bilan isbotlangan. Mavjudlik teoremasi Grin funksiyasini qurish yordamida integral tenglamalar sistemsiga keltirilib, isbotlangan yagonalik teaoremasiga asosan yagona yechim mavjudligi tasdiqlanadi.

Adabiyotlar

1. **Джурайев Т.D.** Краевые задачи для уравнений четвертого порядка смешанного и смешанно ситовного типов". Ташкент-1979, "ФАН" 240 е.
2. **Нурайев Б.Б. Хайруллайев И.С.** О нелокалной граничной - задаче неклассического уравнения трикого порядка // Тезиси докледов Актуалнийе пройеми дифференсиалних уревений и их приложения". Ташкент 15-17 декабря 1217 с. 93-94.

УДК 517.956

Inverse problem for a time - fractional diffusion equation with initial - boundary conditions

Durdiev D.K.[1], Turdiev H.H.[2]
[1]Romanovskii Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan; durdiev65@mail.ru
[2]Bukhara State University;hturdiev@mail.ru

The fractional diffusion equations are believed to be more realistic in describing anomalous diffusion in heterogeneous porus media than the classical diffusion ones. Thus, they have drawn attention of researchers from various disciplines of science and engeneering.

Inverse source problems are the problems that consist of finding the unknown source term via an additional data. Some works on fractional inverse diffusion problems have been published [1]-[3].

Consider the following problem of determining the pair $\{u(x,t), q(t)\}$ of functions from following equations

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) - u_{xx} + q(t)u(x,t) = f(x,t),\ \Omega_T, \tag{1}$$

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha-1}_{0+,t}u(x,t)\right)_{t=0+} = \varphi(x),\ \left(\mathcal{D}^{\alpha-2}_{0+,t}u(x,t)\right)_{t=0+} = \psi(x),\ x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^l w(x)u(x,t)dx = g(t),\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $\Omega_T := \{x \in (0,1),\ t \in (0,T]\}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}$ is Reimann-Liouville fractional derivative of order α, $1 < \alpha < 2$ [4], [5] :

$$\left(D^{\alpha}_{0t}u\right)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha}u(x,\tau)d\tau.$$

We suppose the functions φ, f and w, g satisfy the following assumptions:
(I1) $w(x) \in C^2[0,T]$ *and* $w^{'}(0) = w^{'}(1) = 0$;
(I2) $\{\varphi, \psi\} \in C^4[0,1]; \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \psi(0) = \psi(1) = 0$ *and* $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0, \psi''(0) = \psi''(1) = 0$;
(I3) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ *and for* $t \in [0,T], f(\cdot,t) \in C^4[0,1],\ f(0,t) = f(1,t) = 0, f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0$;
(I4) $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}g(t) \in C[0,T]$ *and* $|g(t)| \ge g_0 > 0$;
(I5) $\int\limits_0^1 w(x)\varphi(x)dx = \left(\mathcal{D}^{\alpha-1}_{0+}g(t)\right)_{t=0+}, \int\limits_0^1 w(x)\psi(x)dx = \left(\mathcal{D}^{\alpha-2}_{0+}g(t)\right)_{t=0+}.$

Let us define the following space[2]:

$$C^{2,\alpha}\left(\Omega_T\right)=\{u(x,t)\in C^2(0,1); t\in(0,T]\text{and}\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)\in C(0,T]; x\in(0,1)\},$$

$$C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)=\{u(x,t)\in C[0,1]; t\in[0,T]\text{and}\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)\in C[0,T]; x\in[0,1]\}.$$

Theorem. Let $(I1)-(I5)$ be satisfied. Then the inverse problem $(1)-(4)$ has a unique solution $\{u(x,t),q(t)\}$ for some small T. Furthermore this solution is in $u(x,t)\in C^{2,\alpha}\left(\Omega_T\right)\cap C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, $q(t)\in C[0,T]$.

References

1.**Sakamoto K and Yamamoto M** *Initial value/ boundary value problems for fractional diffusionwave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl.2011, 382 426–47.
2. **Karimov E., Ruzhansky M. and Tokmagambetov N.***Cauchy type problems for fractional differential equations.* Integral Transforms and Special Functions,2022, 33:1, 47-64.
3. **Durdiev D.K.***Inverse Coefficient Problem For the Time-fractional Diffusion Equation.* Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 2021, 9(1), pp. 44–54.
4. **Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J.***Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
5. **Podlubny I.***Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

УДК 517.946

Recursion formulas for Lauricella function with the application to the boundary value problems

Dusmatov Z. X.
Kokan State Pedagogical Institute; zokirjondostmatov@gmail.com

In the study of the properties of hypergeometric functions of several variables, various summation formulas play an important role. Many authors have obtained recursive formulas for Appel functions, finite and infinite summation formulas for hypergeometric functions of two variables, as well as some transformation formulas for hypergeometric functions of several (two and three) variables. Inspired by the work of Wang [1], who gave the recursion formulas of Appell's functions in two variables, we establish the recursion formulas for Lauricella's functions by the contiguous relations of hypergeometric series.

We introduce the following notation

$$\mathbf{a}:=(a_1,...,a_m),\ \mathbf{b}:=(b_1,...,b_m),\ \mathbf{c}:=(c_1,...,c_m),\ \mathbf{z}:=(z_1,...,z_m);$$

$$\mathbf{k}:=(k_1,...,k_m),\ |\mathbf{k}|:=k_1+...+k_m; |\mathbf{k}_j|:=k_1+...+k_j,\ 1\le j<m; |\mathbf{k}_0|:=0;$$

$\mathbf{e}_j:=(0,...,1,...,0)$ denote the vectors with jth component equal to 1 and the others equal to 0. Lauricella's function $F_D^{(m)}$ with the m variables is read as follows:

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]:=\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty}\frac{a_{|\mathbf{k}|}\,(b_1)_{k_1}\cdots(b_m)_{k_m}}{(c)_{|\mathbf{k}|}}\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{z_m^{k_m}}{k_m!},$$

where $a,\ b,\ c,\ a_j,\ b_j,\ c_j$ are independent of z_j $(j=1,...,m)$ and $(a)_k$ is the Pochhammer symbol, which is expressed in terms of the gamma function $\Gamma(s)$ as $(\lambda)_k=\Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)$. We shall call $a,\ b,\ c,\ a_j,\ b_j,\ c_j$ $(j=1,...,m)$ the parameters of the Lauricella's hypergeometric functions; they are arbitrary complex numbers; z_1, ..., z_m are complex variables; k_1, ..., k_m are nonnegative integer numbers: $k_1\geq 0,...,k_m\geq 0$.

The Lauricella's function $F_D^{(m)}$ defined above is natural generalization of the famous Appell's function F_1 :

$$F_1\left(a,b,c;d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_{m+n}m!n!}x^m y^n.$$

We note that Riemann's functions, Green's functions and the fundamental solutions of the degenerate second-order partial differential equations are expressible by means of hypergeometric functions of several variables. In investigation of the boundary-value problems for these partial differential equations, we need decompositions, recursion formulas and various finite and infinite summations for hypergeometric functions of several variables.

The familiar operator method of Burcnall and Chaundy [2] has been used by them rather extensively for finding expansions for hypergeometric functions of two variables in terms of the classical Gauss hypergeometric function of one variable.

Following the work [2], Hasanov and Srivastava [3] introduced operators generalizing the Burcnall-Chaundy operators and found decomposition formulas for many triple hypergeometric functions, and they proved recurrent formulas when the dimension of hypergeometric function exceeds three. However, due to the recurrence, additional difficulties may arise in the applications of those decomposition formulas. Recently, Hasanov and Ergashev converted the recurrent formulas for the Lauicella's functions $F_A^{(m)}$ and $F_B^{(m)}$ to a convenient forms and proved new decomposition formulas which are free from the recurrence. Applications of new decomposition formulas to the solution of boundary value problems for singular elliptic equations can be found in [4].

In 2009 Opps et al. established some recursion formulas for the Appell's function F_2 by the contiguous relation of hypergeometric series ${}_2F_1$, and the applied the relations to the radiation problem. Wang [1] reproved Opps et al.'s results of the recursion formulas F_2, and then gave the recursion formulas for Appell's functions $F_1 - F_4$ by the contiguous relations of hypergeometric series. In a recent works, Wang and coworkers have reviewed many finite and infinite summation formulas and certain transformations for hypergeometric functions in two variables.

In this paper, we will present the recursion formulas for Lauricella's function $F_D^{(m)}$ with five theorems as follows. First, we present the recursion formulas of $F_D^{(m)}$ about the numerator parameter a.

Theorem 1.

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a+n,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}b_j z_j\sum_{k=1}^{n}F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a+k,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right];$$

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a-n,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}b_j z_j\sum_{k=0}^{n-1}F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a-k,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Proof. From the definition of the function $F_D^{(m)}$, we have the following relation:

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a+1,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{m}b_j z_j F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c}a+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Applying this relation for n times, this theorem can be proved by the same method as in [1].

In fact, the recursion formulas of $F_D^{(m)}$ in the above theorem can be expressed in another forms.

Theorem 2.

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+n,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=\sum_{k_1=0}^{n-|\mathbf{k}_0|}...\sum_{k_m=0}^{n-|\mathbf{k}_{m-1}|}\frac{1}{(c)_{|\mathbf{k}|}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left[\left(\begin{array}{c} n-|\mathbf{k}_{j-1}|\\ k_j\end{array}\right)(b_j)_{k_j}z_j^{k_j}\right]F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+|\mathbf{k}|,\mathbf{b}+\mathbf{k};\\ c+|\mathbf{k}|;\end{array}\mathbf{z}\right];$$

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a-n,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=\sum_{k_1=0}^{n-|\mathbf{k}_0|}...\sum_{k_m=0}^{n-|\mathbf{k}_{m-1}|}\frac{1}{(c)_{|\mathbf{k}|}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left[\left(\begin{array}{c} n-|\mathbf{k}_{j-1}|\\ k_j\end{array}\right)(b_j)_{k_j}(-z_j)^{k_j}\right]F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}+\mathbf{k};\\ c+|\mathbf{k}|;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Proof. By the same relation of the above theorem, the recursion formulas in this theorem can be proved by the inductive method as the same as we have done in [1].

Theorem 3.

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}+n\mathbf{e}_j;\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+\frac{az_j}{c}\sum_{k=1}^{n}F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+1,\mathbf{b}+k\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right];$$

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}-n\mathbf{e}_j;\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]-\frac{az_j}{c}\sum_{k=0}^{n-1}F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+1,\mathbf{b}-k\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Proof. From the definition of the function $F_D^{(m)}$, we have the following relation:

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+\frac{az_j}{c}F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Applying this relation for n times, this theorem can be proved by the same method as in [1].

Theorem 4.

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}+n\mathbf{e}_j;\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n\\ k\end{array}\right)\frac{(a)_k}{(c)_k}z_j^kF_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+k,\mathbf{b}+k\mathbf{e}_j;\\ c+k;\end{array}\mathbf{z}\right];$$

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b}-n\mathbf{e}_j;\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n\\ k\end{array}\right)\frac{(a)_k}{(c)_k}(-z_j)^kF_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+k,\mathbf{b};\\ c+k;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Proof. By the same relation of the above theorem, the recursion formulas in this theorem can be proved by the inductive method as the same as we have done in [1].

Theorem 5.

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c-n;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+a\sum_{j=1}^{m}b_jz_j\sum_{k=1}^{n}\frac{F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+2-k;\end{array}\mathbf{z}\right]}{(c-k)(c-k+1)}.$$

Proof. From the definition of the function $F_D^{(m)}$, we have the following relation:

$$F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c-1;\end{array}\mathbf{z}\right]=F_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a,\mathbf{b};\\ c;\end{array}\mathbf{z}\right]+\frac{a}{c(c-1)}\sum_{j=1}^{m}b_jz_jF_D^{(m)}\left[\begin{array}{c} a+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}_j;\\ c+1;\end{array}\mathbf{z}\right].$$

Applying this relation for n times, this theorem can be proved by the same method as we have done in [1].

Литература

1. **Wang X.** *Recursion formulas for Appell functions* Integral transforms and Special Functions, 2012, 23(6), 421 – 433.
2. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** *Expansions of Appell's double hypergeometric functions* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. 1940, Ser.11, P. 249–270.
3. **Hasanov A., Srivastava H.M.** *Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions* Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(7), 1119 – 1128.
4. **Ergashev T.G.** *Generalized Holmgren Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients* Differential Equations, 2020, 56(7), 842 – 856.

UDC 517.953

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SCHRÖDINGER EQUATION ON LADDER-TYPE GRAPH

Eshimbetov M. R.[1], Sarsenbayeva M. Sh.[1]
[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek;
mr.eshimbetov92@gmail.com

In the present paper we obtained integral-representation of solutions in terms of given initial and boundary data for the initial-boundary value problems for Schrödinger equation on ladder-type graph via Fokas' unified transformation method [1]–[4].

We consider ladder-type graph which obtained by connecting equal finite bonds (see Figure 1) [5]. We correspond the bonds b_j^+, b_j^-, $(j = \overline{1,n})$ and $b_j^0, (j = \overline{1,(n-1)})$ to the interval $(0,\, L)$ and the bonds, to define coordinates in each bond.

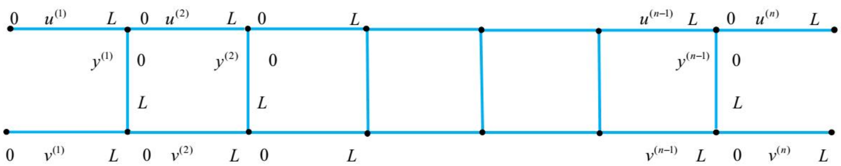


Figure 1. Ladder-type graph

In each bond of the graph we consider the Schrödinger equation [3]

$$iu_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t) + f^{(j)}(x,t), \;\; x \in b_j^+,\, t > 0,\, j = 1,2,...,n, \tag{1}$$

$$iv_t^{(j)}(x,t) = v_{xx}^{(j)}(x,t) + \varphi^{(j)}(x,t), \;\; x \in b_j^-,\, t > 0,\, j = 1,2,...,n, \tag{2}$$

$$iy_t^{(j)}(x,t) = y_{xx}^{(j)}(x,t) + \psi^{(j)}(x,t), \;\; x \in b_j^0,\, t > 0,\, j = 1,2,...,(n-1). \tag{3}$$

Define initial conditions

$$u^{(j)}(x,\,0) = u_0^{(j)}(x), \;\; x \in \overline{b}_j^+,\, j = 1,2,...,n, \tag{4}$$

$$v^{(j)}(x,\,0) = v_0^{(j)}(x), \;\; x \in \overline{b}_j^-,\, j = 1,2,...,n, \tag{5}$$

$$y^{(j)}(x,\,0) = y_0^{(j)}(x), \;\; x \in \overline{b}_j^0,\, j = 1,2,...,(n-1) \tag{6}$$

boundary conditions

$$u^{(1)}(0,t) = g_0^{(n)}(t),\ v^{(1)}(0,t) = d_0^{(n)}(t),\ t \geq 0, \tag{7}$$

$$u^{(n)}(L,t) = h_0^{(n)}(t),\ v^{(n)}(L,t) = r_0^{(n)}(t),\ t \geq 0 \tag{8}$$

on external bonds, respectively.
At the vertex point the solution satisfies the following gluing (Kirchhoff) conditions [6]:

$$u^{(j-1)}(L,t) + u^{(j)}(0,t) + y^{(j-1)}(0,t)\,, u_x^{(j-1)}(L,t) = u_x^{(j)}(0,t) = y_x^{(j-1)}(0,t)\,, \tag{9}$$

$$v^{(j-1)}(L,t) + v^{(j)}(0,t) + y^{(j-1)}(L,t)\,, v_x^{(j-1)}(L,t) = v_x^{(j)}(0,t) = y_x^{(j-1)}(L,t)\,, j = \overline{2,n}.$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (1)–(9).

REFERENCES

1. **Fokas A.S.** *A Unified Approach to Boundary Value Problems.* SIAM. USA. 2008. P. 352.
2. **N. E. Sheils and D. A. Smith.** *Heat equation on a network using the Fokas method.* J. Phys. A: Math. Theor. 2015. 48 335001.
3. **Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R.** *Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 12(4). 2019. P. 412–420.
4. **Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R.** *The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph.* Uzbek Mathematical Journal. №1. 2019. P: 73–81.
5. **Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R.** *Fokas' method for the heat equation on metric graphs.* Journal of Mathematical Sciences. T. 67. №4. 2021. P. 766–782 (in Russian).
6. **Eshimbetov M.R.** *Initial-boundary value problem for heat equation on ladder-type graphs.* Bulletin of the Institute of Mathematics. №5. 2020. P. 11–19.

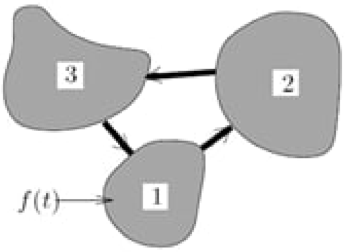
УДК 517.926

Differensial tenglamalar sistemalarining ba'zi tatbiqlari

Eshmamatov L.A.[1], Abdurahmonov Ch.Sh.[2]
[1,2]Termiz davlat universiteti
[1]eshmamatovlutfila@gmail.com, [2]abdurahmonovch@gmail.com

1. Hovuz ifloslanishi masalasi.

Rasmda ko'rsatilgandek, bir-biriga bog'langan uchta hovuzni qaraymiz(1-rasm). Birinchi hovuzda uni ifloslantiruvchi manba mavjud bo'lib, u hovuzlarni birlashtiruvchi ariqlar orqali boshqa hovuzlarga ham tarqaladi. Har bir hovuzdagi ifloslantiruvchi modda miqdorini aniqlang.



1-rasm

Sig'imlari V_1, V_2, V_3 bo'lgan uchta hovuz (1,2,3) ariqlar yordamida bir-biriga ulangan. Birinchi hovuzdagi ifloslantiruvchi modda $f(t)$ bo'lsin.

Quyidagicha faraz qilamiz:

1. $f(t)$ birinchi hovuzga kiruvchi ifloslantiruvchi moddaning oqimning tezligi bo'lsin;

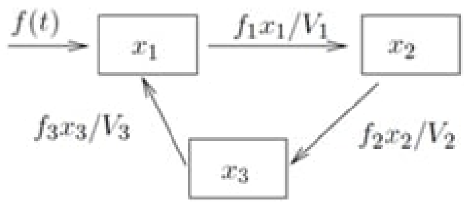
2. f_1, f_2, f_3 lar orqali 1, 2 va 3 -hovuzlardan chiqadigan ifloslantiruvchi moddaning oqim tezliklarini belgilanadi va har bir hovuzda ifloslantiruvchi modda suv bilan yaxshi aralashgan deb faraz qilinadi.

3. Uchta hovuz V_1, V_2, V_3 bo'lgan sig'imlarga ega va bu sig'imlar jarayon oxirigacha o'zgarmaydi.

4. $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$lar orqali 1,2 va 3-hovuzlardagi ifloslantiruvchi modda miqdorini bildirsin.

Ifloslantiruvchi moddalar oqimi bu - oqim tezligini ifloslantiruvchi moddalar konsentratsiyasiga ko'paytirish demakdir.

Misol uchun: 1-hovuz $\frac{f_1 \cdot x_1(t)}{V_1}$ oqim bilan bo'shatiladi. Har bir oqim quyidagi sxemada ko'rsatilgan(2-rasm):



2-rasm

Yuqorida keltirilgan diagrammalarni tahlil qilib jarayonni quyidagi defferensial tenglamalar sistemasi orqali ifodalaymiz.

$$x_1'(t) = \frac{f_3}{V_3}x_3(t) - \frac{f_1}{V_1}x_1(t) + f(t)$$

$$x_2'(t) = \frac{f_1}{V_1}x_1(t) - \frac{f_2}{V_2}x(t),$$

$$x_3'(t) = \frac{f_2}{V_2}x_2(t) - \frac{f_3}{V_3}x_3(t).$$

Alohida sonlarda hisoblash uchun $f(t) = 0$ dan so'ng, dastlabki 48 soat ichida (48 soat $=$2880 minut) ichida jarayon uchun tuzilgan defferensial tenglamalar sistemasida $\frac{f_1}{V_1} = 0,001,\ 1 \le i \le 3$ va $f(t) = 0,125$ bo'lsin. Ma'lum bir vaqtdan keyin hovuzlardagi aralashmalar bir xil bo'ladi deb kutamiz va ularda $0,125 \cdot 2880 = 360$ kg ifloslantiruvchi modda to'planadi, ya'ni har bir hovuzda 120 kg dan ifloslantiruvchi modda to'planadi.

Dastlab, agar hovuzlar toza bo'lsa u holda $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = 0$ bo'ladi. Tenglamalar sistemasining dastlabki 48 soat uchun quyidagicha ko'rinishini oladi.

$$x_1'(t) = 0,001x_3(t) - 0,001x_1(t) + 0,125,$$

$$x_2'(t) = 0,001x_1(t) - 0,001x_2(t),$$

$$x_3'(t) = 0,001x_2(t) - 0,001x_3(t),$$

$$x_1(0) = x_2(t) = x_3(0) = 0$$

Bu sistemaning yechimi quyidagicha ifodalanadi;

$$x_1(t) = e^{-\frac{3t}{2000}}\left(\frac{125\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2000}\right) - \frac{125}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2000}\right)\right) - \frac{125}{3} + \frac{t}{24};$$

$$x_2(t) = -\frac{250\sqrt{3}}{9}e^{-\frac{3t}{2000}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2000}\right) + \frac{t}{24};$$

$$x_3(t) = e^{-\frac{3t}{2000}}(\frac{125}{3}\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2000}) + \frac{125\sqrt{3}}{9}\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2000})) + \frac{t}{24} - \frac{125}{3}.$$

Adabiyotlar ro‘yxati

1. **Saloxiddinov M.S., Nasriddinov G.N.** *Oddiy differensial tenglamalar.* Toshkent. "Uzbekiston" 1994.
2. **Краснов и др.** *Вся высшая математика.* Учебник. Т.4. "М.:Эдиториал УРСС", 2001. 352с.
3. **Perko L.** *Linear Systems. In: Differential Equatsions and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics, vol 7. Springer, New York, NY. *УДК 517.9*

Euler-type integral representations for generalized Mittag-Leffler functions E_1 and E_2

Hasanov A.[1], Karimov E.T.[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics; anvarhasanov@yahoo.com

[2]Fergana State University; erkinjon@gmail.com

The Mittag-Leffler function has gained importance and popularity due to its applications in the solution of fractional order differential, integral, integro-differential and difference equations arising in certain problems of applied sciences such as physics, chemistry, biology and engineering [1-5]. In the article [6], generalized functions of the Mittag-Leffler type were introduced and studied

$$E_1\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1; \gamma_2, \beta_1; \\ \delta_1, \alpha_2, \beta_2; \delta_2, \alpha_3; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right.\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m} (\gamma_2)_{\beta_1 n}}{\Gamma(\delta_1 + \alpha_2 m + \beta_2 n)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_3 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 n)}, \qquad (1)$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{C}$, $\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} > 0$,

$$E_2\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2; \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right.\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m + \beta_1 n} (\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_1 + \alpha_3 m + \beta_2 n)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 n)}, \qquad (2)$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{C}$, $\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} > 0$.

For the functions (1) and (2), Euler-type integral representations are proved

$$E_1\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1; \gamma_2, \beta_1; \\ \delta_1, \alpha_2, \beta_2; \delta_2, \alpha_3; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right.\right) = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\mu_1-\gamma_1)\Gamma(\mu_2-\gamma_2)}$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 \xi^{\gamma_1-1}\eta^{\gamma_2-1}(1-\xi)^{\mu_1-\gamma_1-1}(1-\eta)^{\mu_2-\gamma_2-1} E_1\left(\begin{array}{c} \mu_1, \alpha_1; \mu_2, \beta_1; \\ \delta_1, \alpha_2, \beta_2; \delta_2, \alpha_3; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x\xi^{\alpha_1} \\ y\eta^{\beta_1} \end{array}\right.\right) d\xi d\eta,$$

$\mathrm{Re}\,\mu_1 > \mathrm{Re}\,\gamma_1 > 0,\ \mathrm{Re}\,\mu_2 > \mathrm{Re}\,\gamma_2 > 0,$

$$E_1\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1; \gamma_2, \beta_1; \\ \mu_1+\mu_2, \alpha_2, \beta_2; \delta_2, \alpha_3; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right.\right) =$$

$$= \int_0^1 \xi^{\mu_1-1}(1-\xi)^{\mu_2-1} {}_1F_1\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1; \\ \mu_1, \alpha_2; \delta_2, \alpha_3; \end{array} \left| x\xi^{\alpha_2}\right.\right) {}_1F_1\left(\begin{array}{c} \gamma_2, \beta_1; \\ \mu_2, \beta_2; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| y(1-\xi)^{\beta_2}\right.\right) d\xi,$$

$\mathrm{Re}\,\mu_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu_2 > 0$,

$$E_2\left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2; \\ \delta_1, \alpha_1, \beta_1; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3; \end{array} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right.\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\delta_1-\gamma_1)} \int_0^1 \xi^{\gamma_1-1}(1-\xi)^{\delta_1-\gamma_1-1} E_{\alpha_4,\delta_2}^{\gamma_2,\alpha_2}(x\xi^{\alpha_1})\, E_{\beta_3,\delta_3}\left(y\xi^{\beta_1}\right) d\xi,\ \mathrm{Re}\,\delta_1 > \mathrm{Re}\,\gamma_1 > 0,$$

$$E_2\left(\begin{array}{c}\gamma_1,\alpha_1,\beta_1;\gamma_2,\alpha_2;\\ \delta_1,\alpha_1,\beta_1;\delta_2,\alpha_4;\delta_3,\beta_3;\end{array}\left|\begin{array}{c}x\\ y\end{array}\right.\right)=$$

$$=\frac{2^{1-\delta_1}}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\delta_1-\gamma_1)}\int\limits_0^1(1+\xi)^{\gamma_1-1}(1-\xi)^{\delta_1-\gamma_1-1}E^{\gamma_2,\alpha_2}_{\alpha_4,\delta_2}\left(2^{-\alpha_1}x(1+\xi)^{\alpha_1}\right)E_{\beta_3,\delta_3}\left(2^{-\beta_1}y(1+\xi)^{\beta_1}\right)d\xi$$

$$+\frac{2^{1-\delta_1}}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\delta_1-\gamma_1)}\int\limits_0^1(1+\xi)^{\delta_1-\gamma_1-1}(1-\xi)^{\gamma_1-1}E^{\gamma_2,\alpha_2}_{\alpha_4,\delta_2}\left(2^{-\alpha_1}x(1-\xi)^{\alpha_1}\right)E_{\beta_3,\delta_3}\left(2^{-\beta_1}y(1-\xi)^{\beta_1}\right)d\xi,$$

$\mathrm{Re}\,(\alpha_1)>0,\ \ \mathrm{Re}\,(\beta_1)>0,\ \ \mathrm{Re}\,(\delta_1)>\mathrm{Re}\,(\gamma_1)>0,$

where

$${}_1F_1\left(\begin{array}{c}\gamma_1,\alpha_1;\\ \delta_1,\alpha_2;\delta_2,\alpha_3;\end{array}|x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_2 m)}\frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_3 m)},$$

$$E^{\gamma,\alpha_1}_{\delta,\alpha_2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\alpha_1 m}x^m}{\Gamma(\delta+\alpha_2 m)},\ \ E_{\delta,\beta}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{\Gamma(\delta+\beta n)}.$$

References

1. **Uchaikin V. V.** *Fractional derivatives for physicists and engineers. Volume I. Background and theory. Nonlinear Physical Science.* Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg, 2013.
2. **Uchaikin V. V.** *Fractional derivatives for physicists and engineers. Volume II. Background and theory. Nonlinear Physical Science.* Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg, 2013.
3. **Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
4. **Hilfer R.** *Fractional time evolution. Applications of fractional calculus in physics.* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000, pp.87-130.
5. **Podlubny I.** *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.
6. **Garg M., Manohar P. and Kalla S. L.** *A Mittag- Leffler-type function of two variables.* Integral Transforms and Special Functions, 2013, 24, No 11, pp.934-944.

MSC2010

Dynamic search on the edges of the graph.

Holboyev A. G
Tashkent State Pedagogical University; azamatholboyev@gmail.com

In this paper the dynamic game of catching a point moving on the geometric (conjugate) graph (with rectifiable edges) in space R^d is considered. Suppose that the graph is connected and n and l are the numbers of its vertices and edges, respectively, the length of all edges equals to 1. The game involves two players moving on the edges of the graph: **P** - the team of pursuers controlling the movement of points $P_1, P_2, ..., P_m$ and Q - the evader controlling the point [1, 5-6]. The maximum speed off all players is equal to 1.

Further, we determine the natural number $N(G)$ [2-4]. The smallest of the numbers m that **P** wins in the game is denoted by $N(G)$. If G is the free, then $N(G)=1$, if the graph has at least one cycle, then $N(G)\geq 2$. It is obvious that $N(G)$ is exist and $N(G)\leq n-1$.

Now, we take the point $A\in R^d$ that does not belong to the graph and connect this point with some vertex of the graph G. By connecting the point A with the vertices of the graph G, we will obtain the a geometric graph G_1 with $n+1$ vertices and $l+1$ edges, and having the properly $V(G) \subset V(G_1)$, $E(G) \subset E(G_1)$. Assume that the length of the edge coming out of the point A is equal to 1.

We determine the natural number $m_1 = N(G_1)$ by looking at a game involving $\mathbf{P}$ - a team of pursuers and the evader Q along the edges of the graph G_1.

Similarly, by connecting the point A with vertices of the graph G_1, we will create a geometric graph G_2 with the number of vertices $n+1$, the number of edges $l+2$. And, it holds: $V(G) \subset V(G_1) \subset V(G_2)$, $E(G) \subset E(G_1) \subset E(G_2)$.

We determine the natural number $m_2 = N(G_2)$ by looking pursuit-evasion game on the edges of the graph G_2.

Continuing this process, we will create a geometric graph G_i with the number of vertices $n+1$, the number of edges $l+i$. And, it holds: $V(G) \subset V(G_1) \subset ... \subset V(G_i)$, $E(G) \subset E(G_1) \subset ... \subset E(G_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

We determine the natural number $m_i = N(G_i), i = 1, 2, ..., n$ by looking pursuit-evasion game on the edges of these graphs.

Consequently, we obtain the sequence $m_1, m_2, ..., m_n$. Denote by $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ this sequence.

Let us give some properties of M.

1. If $N(G) = 1$, then $M = \{1, 2, 2, ..., 2\}$.
2. If $N(G) > 1$, then $min\{m_1, m_2, ..., m_n\} = 2$.
3. $m_1 = N(G)$.
4. $m_n = 2$.
5. $max\{m_1, m_2, ..., m_n\} \le N(G) + 1$.
6. $m_{i+1} - m_i \in \{-1, 0, 1\}, m_i \in M, i = 1, 2, ..., n-1$.
7. $|\{i | m_{i+1} - m_i = -1, m_i \in M, i = 1, 2, ..., n-1\}| \le 1$, where $|\Omega|$ - the number of elements of the set Ω.
8. $|\{i | m_{i+1} - m_i = 1, m_i \in M, i = 1, 2, ..., n-1\}| = max\{m_1, m_2, ..., m_n\} - min\{m_1, m_2, ..., m_n\}$,.

References

1. **A.A. Azamov, T.T. Ibaydullayev.** *A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I.* Matematicheskaya Teoriya Igri i Ee Prilozheniya, **(12) 4**(2020), 7–23.
2. **A.A. Azamov, A.Sh. Kuchkarov, A.G. Holboyev.** *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. III.* Matematicheskaya Teoriya Igri i Ee Prilozheniya, **(11) 4**(2019), 5–23.
3. **A.A. Azamov, A.Sh. Kuchkarov, A.G. Holboyev.** *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I.* Automation and Remote Control, **(78) 4**(2017), 754–761.
4. **A.A. Azamov, A.Sh. Kuchkarov, A.G. Holboyev.** *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II.* Automation and Remote Control, **(80) 1**(2019), 164–170.
5. **R.J. Nowakowski.** *Unsolved problems in combinatorial games, Games of no chance.* Math. Sci. Res. Inst. Publ., 70, Cambridge Univ. Press, Cambridge, **5**(2019), 125–168.
6. **A. Bonato, R.J. Nowakowski.** *The game of cops and robbers on graphs.* Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

MSC 68T07

Approximation of the Lower Operator in Differential Games with Simple Matrices.

Iskanadjiev I.
Tashkent chemical-texnology institute iskan1960@mail.ru

Let us consider the differential game:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z + B(u, v), \tag{1}$$

where α is real number, $z \in R^d$,$u \in U$, $v \in V$, $B : U \times V \to R^d$ is continuous function, U and V are convex compact subsets of R^p and R^q respectively.Along with the system (1), we also fix the set M,$M \subset R^d$,which is called the terminal (target) set.Suppose that the set $B(u, V)$ is convex for any $u \in U$. If A is a subset of the Euclidean space, then $A[\Delta]$ is the aggregate of all measurable functions $a(\cdot) : \Delta \to A$. We will call every function $u(\cdot) \in U[0; \varepsilon]$ (respectively $v(\cdot) \in V[0; \varepsilon]$ as pursuer (as evader) admissible control.

Definition 1. The operator P_ε assigns to each set $A \subset R^d$ the set $P_\varepsilon A$ of all points $\xi \in R^d$ such that there exists admissible control $u(\cdot) \in U[0; \varepsilon]$ of the pursuer for any admissible control $v(\cdot) \in V[0; \varepsilon]$ of the evader, the corresponding trajectory $z(t, u(\cdot), v(\cdot), \xi)$ of the system (1) with the beginning at the point $\xi \in R^d$ hits $A \subset R^d$ at time ε, i.e. $z(\varepsilon) \in A$.

Definition 2. The operator T_ε assigns to each set $A \subset R^d$ the set $P_\varepsilon A$ of all points $\xi \in R^d$ such that there exists admissible control $u(\cdot) \in U[0; \varepsilon]$ of the pursuer for any admissible control $v(\cdot) \in V[0; \varepsilon]$ of the evader, the corresponding trajectory $z(t, u(\cdot), v(\cdot), \xi)$ of the system (1) with the beginning at the point $\xi \in R^d$ hits $A \subset R^d$ in time not greater ε, i.e. $z(t_*) \in A$ for certain $t_* \in [0; \varepsilon]$.

By means of operations of association and intersectionwe can write the operations P_ε and T_ε as follows

$$P_\varepsilon A = \bigcup_{u(\cdot) \in U[0;\varepsilon]} \bigcap_{v(\cdot) \in V[0;\varepsilon]} \{\xi \in R^d \mid z(\varepsilon, u(\cdot), v(\cdot), \xi) \in A\}$$

$$T_\varepsilon A = \bigcup_{u(\cdot) \in U[0;\varepsilon]} \bigcap_{v(\cdot) \in V[0;\varepsilon]} \bigcup_{t_* \in [0;\varepsilon]} \{\xi \in R^d \mid z(t_*, u(\cdot), v(\cdot), \xi) \in A\}$$

Let $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{n-1} < \tau_n = \upsilon\}$ be partition of the segment $[0, \tau]$ and $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $|\omega| = \tau$. We assume

$$P_\omega M = P_{\delta_1} P_{\delta_2} ... P_{\delta_n} M, \quad T_\omega M = T_{\delta_1} T_{\delta_2} ... T_{\delta_n} M.$$

Definition 3.

$$P_\tau M = \bigcup_{|\omega| = \tau} P_\omega M, T_\tau M = \bigcup_{|\omega| = \tau} T_\omega M.$$

The operators $P_\tau M$, $T_\tau M$ are called the lower operators for differential games of pursuit. In general the construction of approximate formulas for the lower operators are fraught with certain difficulties.Therefore, the development of simplified schemes for the construction of operators $P_\tau M$, $T_\tau M$ are relevant.

$$\bar{P}_\tau M = \bigcup_{u \in U} \bigcap_{v \in V} \{\xi \in R^d | e^{\alpha \tau} \xi + \int_0^\tau e^{\alpha(\tau - s)} ds B(u, v) \in M\}$$

$$\bar{T}_\tau M = \bigcup_{u \in U} \bigcap_{v \in V} \bigcup_{t \in [0;\tau]} \{\xi \in R^d \mid e^{\alpha t} \xi + \int_0^t e^{\alpha(t - s)} ds B(u, v) \in M\}$$

.

Theorem. For the differential game (1) the following equalities hold

$$P_\tau M = \bar{P}_\tau M, T_\tau M = \bar{T}_\tau M$$

.

References

1. **Pshenichnyi B.N.,Sagaydak M.I.** *On differential games with fixed time.* Cybernetics.1970, 2: 54-63.
2. **Azamov A.** *Semistability and duality in the theory of the Pontryagin's alternating integral.* Soviet Math.Dokl.1988, vol.37, 2: 355-359.
3. **Iskanadjiev I. M.** *Semi-Stability of Main Operators In Differential Games with Non-Fixed Time.* Jornal of Automation and Information Sciences. 2014. v.46, №8: 49 - 55.

УДК 917.95

PRABHAKAR FUNKSIYASINING BIR INTEGRAL KO‘RINISHI

Karimov Erkinjon T[1], Maxkamov Ilhomjon N[2],
[1,2]Farg‘ona davlat universiteti; erkinjon@gmail.com, ilhomjonmaxkamov96@gmail.com

Ushbu ishda integral ko‘rinishdan Prabhakar funksiyasi yechimda ishtirok etadigan xususiy hosilali differensial tenglamalarga tatbiq etishda ishlatish mumkin bo‘lgan integral ko‘rinish isbotlangan.

Uch parametrli Mittag-Leffler funksiyasi birinchi bo‘lib 1971-yilda Prabhakar tomonidan kiritilgan bo‘lib, ushbu ko‘rininshga ega [1]:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\cdot\frac{z^k}{k!}\qquad \alpha,\,\beta,\,\gamma\in\mathbb{C}\,\mathrm{Re}\,\alpha,\gamma>0,\tag{1}$$

bu yerda $(\gamma)_k=(\gamma)(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)=\frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)}$.

Quyidagi tasdiq o‘rinli:

Tasdiq. Agar $\mu,\nu,\lambda\in\mathbb{C}\quad \mathrm{Re}\,\mu,\nu>0$ bo‘lsa, u holda:

$$E_{\mu,\nu}^{\lambda}(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1\xi^{\lambda-1}(1-\xi)^{\nu-\lambda-1}e_{1,1-\mu}^{1,\nu-\mu}\left[z\xi(\xi-1)^{\mu-1}\right]d\xi\tag{2}$$

tenglik o‘rinli.

Isbot: Prabhakar funksiyasining (1) ko‘rinishdan foydalanamiz:

$$E_{\mu,\nu}^{\lambda}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{\Gamma(\mu n+\nu)}\cdot\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}\cdot\frac{1}{\Gamma(\mu n+\nu)}\cdot\frac{z^n}{n!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+n)\,\Gamma\left[(\mu-1)n+\nu-\lambda\right]}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu n+\nu)\,\Gamma\left[(\mu-1)n+\nu-\lambda\right]}\cdot\frac{z^n}{n!}$$

Endi beta-funksiya ta’rifiga asosan bu tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$E_{\mu,\nu}^{\lambda}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\xi^{\lambda+n-1}(1-\xi)^{(\mu-1)n+\nu-\lambda-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left[(\mu-1)n+\nu-\lambda\right]}\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

Bu tenglikdagi summa bilan integralni o‘rnini almashtirib quyidagi tenglikka kelamiz:

$$E_{\mu,\nu}^{\lambda}(z)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1\xi^{\lambda-1}(1-\xi)^{\nu-\lambda-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left[(\mu-1)n+\nu-\lambda\right]}\left[\xi(1-\xi)^{\mu-1}\cdot z\right]^n.$$

Rayt tipidagi funksiyaning quyidagi [2]

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \qquad \alpha > 0,\, \alpha > \beta$$

ko'rinishiga ko'ra (2) tenglikni hosil qilamiz. Bu integral ko'rinishdan Prabhakar funksiyasi yechimda ishtirok etadigan xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq etishda ishlatish mumkin [3].

Adabiyotlar

1. Prabhakar TR. (1971) A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the Kernel. Yokohama Math. J. 19:7 -15.
2. Pskhu A. V. Partial Differential Equations of Fractional Order. Moscow, Nauka. -2005. [in Russian].
3. Karimov E., Ruzhansky M., Toshtemirov B. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative.// Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2022. -Vol. -P. 1-17. doi:10.1002/mma.8491

УДК 517.9

Umumlashgan Xilfer kasr tartibli operator qatnashgan differensial tenglama uchun Koshi masalasi

Karimov E.T. [1], Mamadaliyev A.U. [2]
[1]Farg'ona davlat universiteti; erkinjon@gmail.com
[2]Namangan davlat universiteti; azimjonmamadaliyev11@gmail.com

Ma'lumki, fizika, mexanika, geologiyaga bog'liq jarayonlarni matematik modellashtirishda differensial tenglamalar keng qo'llaniladi. Oxirgi yillarda butun tartibli differensial tenglamalarning umumlashmasi hisoblangan kasr tartibli differensial tenglamalar jadal tadqiq etilmoqda. Bunday tenglamalar uchun turli boshlang'ich, chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi matematik modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etmoqda [1].

Ushbu tadqiqot ishida kasr tartibli analizda muhim o'rin tutgan Riman-Liuvill va Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli operatorlarning umumlashmasi bo'lgan Xilfer operatorining umumlashmasi (qo'sh tartibli) qatnashgan bir differensial tenglama uchun umumiyroq xarakterdagi boshlang'ich shartli masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Biz $t > 0$ da

$$D_{0^+}^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) + \lambda u(t) = f(t) \tag{1}$$

tenglamaning

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-\gamma-\xi} I_{0^+}^{\xi} u(t) = A \tag{2}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini tadqiq etamiz. Bu yerda $\alpha, \beta\xi, \mu, \lambda, A$ - shunday haqiqiy sonlarki, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $\mu \in [0,1]$, $0 \leq \xi < 1$, $f(t)$ esa berilgan funksiya?

$$D_{0^+}^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) = I_{0^+}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0^+}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(t)$$

- α, β kasr tartibli, μ tipdagi umumlashgan Xilfer operatori [2],

$$I_{0^+}^{\eta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^t (t-s)^{\eta-1} f(s)ds$$

- α kasr tartibli Riman-Liuvill integral operatori [3].

Quyidagi tasdiq o'rinli:

Teorema. *Agar* $1-\gamma-\xi \geq 0$, $f(t) \in C_{1-\gamma}[0,\infty)$ *bo'lsa, u holda (1)-(2) masalaning yagona yechimi* $u(t) \in C_{1-\gamma}[0,\infty)$ *mavjud bo'ladi va u*

$$u(t) = A\Gamma(\gamma+\xi)t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda t^{\delta}\right) + \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(-\lambda(t-s)^{\delta}\right)f(s)ds \tag{3}$$

ko'rinishda ifodalanadi.

Bu yerda $\gamma = \beta + \mu(1-\beta)$, $\delta = \beta + \mu(\alpha - \beta)$,

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)}$$

- ikki parametrli Mittag-Leffler funksiyasi [3]. $C_\nu[0,\infty)$ funksiyalar sinfi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$C_\nu[0,\infty) = \left\{g(t):\ \|g\|_{C_\nu} = \|t^\nu g(t)\|_C < \infty\right\}.$$

Isbot: (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$u(t) = Ct^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}\left(-\lambda t^{\delta}\right) + \int\limits_0^t (t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(-\lambda(t-s)^{\delta}\right)f(s)ds \tag{4}$$

ko'rinishda topiladi [2], bu yerda C - ixtiyoriy o'zgarmas son.

Avvalo, $I_{0+}^{\xi}u(t)$ ifodani hisoblaymiz:

$$I_{0+}^{\xi}u(t) = Ct^{\gamma+\xi-1}E_{\delta,\gamma+\xi}\left(-\lambda t^{\delta}\right) + \int\limits_0^t (t-z)^{\delta+\xi-1}E_{\delta,\delta}\left(-\lambda(t-z)^{\delta}\right)f(z)dz. \tag{5}$$

(5) ni olishda

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^z (z-s)^{\nu-1}s^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda s^{\alpha}\right)ds = z^{\beta+\nu-1}E_{\alpha,\beta+\nu}(\lambda z^{\alpha})$$

formuladan foydalandik [4].

(5) ni (2) shartga qo'yib, $1-\gamma-\xi \geq 0$ shart asosida

$$C = A\Gamma(\gamma+\xi)$$

ni bir qiymatli topamiz. (4) ga asosan esa tadqiq etilayotgan masalaning yechimi (3) ko'rinishda topilishi kelib chiqadi. Agar berilgan funksiya $f(t) \in C_{1-\gamma}[0,\infty)$ shartni qanoatlantirsa, (3) asosida $u(t) \in C_{1-\gamma}[0,\infty)$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Qayd etishimiz kerakki, shunday umumlashgan boshlang'ich shartli masala [5] ishda ham tadqiq etilgan.

References

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

2. **Bulavatsky V.M.** *Closed form of the solutions of some boundary value problems for anomalous diffusion equation with Hilfer's generalized derivative.* Cybernetics and Systems Analysis, 2014, 30, No 4, pp.570-577.

3. **Podlubny I.**_Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications._ Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.
4. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F.** _MittagвЂ"Leffler functions, related topics and applications._ Berlin, Springer, 2014.
5. **Karimov E., Ruzhansky M., Tokmagambetov N.** _Cauchy type problems for fractional differential equations._ Integral Transforms and Special Functions, 2022, 33, No 1, pp.47-64.

УДК 517.95

Bir kvazichiziqli kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglama haqida

Karimov E. T.[1], Tulqinboyev T. A.[2]
[1,2]Farg‘ona davlat universiteti; erkinjon@gmail.com, tulqinjon98@mail.ru

Ushbu ishda qo‘shimcha shart asosida kvazichiziqli tenglamani chiziqli tenglamaga keltirish usuli berilgan.

Quyidagi kvazichiziqli

$$ {}_cD_{ot}^{\alpha}u(t,x) - k(t)u_{xx}(t,x) + u(t,x)\left[u_x(t,\xi_1) - u_x(t,\xi_2)\right] = f(t,x) \tag{1} $$

tenglamani $\Omega = \{(t,x) : t > 0, -\infty < x < \infty\}$ sohada tadqiq etamiz. Bu yerda $k(t) \neq 0$, $f(t,x)$-berilgan funksiyalar, $-\infty < \xi_1 < \xi_2 < \infty$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in N$.

$$ {}_cD_{ot}^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t (t-z)^{n-\alpha-1}g^{(n)}(z)dz $$

kasr tartibli Kaputo integro-differensial operatori [1].

Quyidagi tasdiq o‘rinli:

Lemma. Agar (1) tenglama

$$ \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} u(t,x)dx = 0 \tag{2} $$

shartni qanoatlantirsa, uni quyidagi chiziqli tenglamaga keltirish mumkin:

$$ {}_cD_{ot}^{\alpha}u(t,x) - k(t)u_{xx}(t,x) + p(t)u(t,x) = f(t,x), \tag{3} $$

bu yerda $p(t) = \frac{1}{k(t)}\int\limits_{\xi}^{\xi_2} f(t,x)dx$.

Isbot. (2) shartning har ikki tomoniga ${}_cD_{ot}^{\alpha}$ operatorni qo‘llaymiz:

$$ \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} {}_cD_{ot}^{\alpha}u(t,x)dx = 0. $$

So‘ngra (1) tenglamadan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$ k(t)\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} u_{xx}(t,x)dx - \left[u_x(t,\xi_1) - u_x(t,\xi_2)\right]\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} u(t,x)dx = -\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(t,x)dx. $$

Bu yerdan (2) shartni hisobga olsak

$$k(t)\left[u_x(t,\xi_2)-u_x(t,\xi_1)\right]=-\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(t,x)dx$$

hosil boʻladi. Ushbu ifodadan

$$u_x(t,\xi_1)-u_x(t,\xi_2)=\frac{1}{k(t)}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(t,x)dx$$

ni topib (1) tenglamaga qoʻysak (3) chiziqli tenglama hosil boʻladi.

Izoh. α kasr tartibli hosila 0 va 1 orasida boʻlsa (1) tenglama sub-diffuziya tenglamasiga, 1 bilan 2 ning orasida boʻlsa kasr tartibli toʻlqin tenglamasiga oʻtadi.

Shuni ta'kidlash kerakki, (2) koʻrinishdagi shart koʻplab teskari masalalarni tadqiq etishda ishlatiladi [2, 3].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006.
2. **B.Jin, W.Rundell.** *An inverse problem for a one-dimensional time-fractional diffusion problem.* Inverse Problems 28 (2012), doi:10.1088/0266-5611/28/7/075010.
3. **V.L.Kamynin.** *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition.* Mathematical Notes, 77 (2005), No.4, 482-493.

UDK 517.95

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SUB-DIFFUSION EQUATION INVOLVING GENERALIZED HILFER DERIVATIVE WITH A NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITION

Karimov E. T.[1], Turdiev Kh. N.[2]
[1,2]Fergana State University; erkinjon@gmail.com xurshidjon2801@gmail.com

We consider the following sub-diffusion equation

$$D_t^{(\alpha,\beta)}u\left(t,x\right)=u_{xx}\left(t,x\right)+f\left(t,x\right) \tag{1}$$

in the domain $\Omega=\{(t,x):\ \ 0<t\le T,\ \ 0\le x\le 1\}$. Here

$$D_t^{(\alpha,\beta)}g\left(t\right)=I_{0+}^{\mu(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{0+}^{(1-\mu)(n-\beta)}g\left(t\right)$$

is the bi-ordinal Hilfer derivative of orders α and β with type $\mu\in[0,1]$,

$$I_{0+}^{\gamma}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\gamma\right)}\int\limits_0^t\left(t-z\right)^{1-\gamma}g\left(z\right)dz,\quad t>0$$

is the Riemann-Liouville fractional integral of order $\alpha>0$, $n-1<\alpha,\beta\le n$, $n\in N$.

We are interested to find a solution of equation (1) in Ω for $0<\alpha,\beta<1$, satisfying initial condition

$$\lim_{t\to 0+} I_{0+}^{(1-\mu)(1-\beta)}u\left(t,x\right)=\varphi\left(x\right),\quad x\in\left[0,1\right],$$

and boundary conditions

$$u\left(t,0\right)=0,\quad 0<t\leq T$$

$$au_{xx}\left(t,1\right)+du_{x}\left(t,1\right)+bu\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\leq T. \tag{2}$$

Here $f\left(t,x\right)$, $\varphi\left(x\right)$ are given functions and a,b,d are numbers not simultaneously equal to zero.

We note that in [1] the similar problem was investigated for classical heat equation, i.e. $\alpha=\beta=1$.

We also note that equation (1) is valid in Ω, hence using non-classical condition (2) and equation (1), one can get the following equality:

$$aD_{t+}^{(\alpha,\beta)}u\left(t,1\right)+du_{x}\left(t,1\right)+bu\left(t,1\right)=af\left(t,1\right). \tag{3}$$

As it mentioned in [1], the boundary condition (3) is observed in the process of cooling of a thin solid bar one end of which placed in contect with a fluid [2]. In [3] another meaning of the condition (3) is given in the connection with the boundary reaction in diffusion of chemical.

Correspending spectral problem leads us to the biorthonormal series and therefore we present our solution via bi-orthonormal series and using the solution of the Cauchy problem for fractional differential equation with generalized Hilfer derivative, we prove the unique solvability of the formulated problem.

References

1. **Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M.I., Kerimov N.B.** *An inverse time-dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition.* Applied Mathematical Modelling, 39, 6258-6272, 2015.

2. **Langer R.E.** *A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid.* Tohoku Math.J., 35, 360-375, 1932.

3. **Cannon J.R.** *The One-dimensional Heat Equation.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984.

УДК 517.927

CHEGARADA BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN NOLOKAL SHARTLI SPEKTRAL MASALA

Karimov K. T.[1], Oripova N. A.[2]

[1,2] Farg'ona davlat universiteti; karimovk80@mail.ru

Ma'lumki, juda ko'p ilmiy ishlarda chegara shartlari lokal xususiyatga ega va tenglamalarni yechish usullari klassik usullar hisoblanadi. Biroq, tabiatshunoslikning zamonaviy muammolari sifat jihatidan yangi muammolarni shakllantirish va o'rganish zaruriyatini keltirib chiqarmoqda, buning yorqin misoli sifatida nolokal chegaraviy masalalarni tadqiq qilishni ko'rsatish mumkin.

Masala. λ ning shunday qiymatlari topilsinki, bu qiymatlarda

$$x\left(1-x\right)y''+\left[\left(1/2\ \right)+\beta-\left(1+2\beta\right)x\right]y'+\lambda y=0,\quad 0<x<1 \tag{1}$$

differensial tenglamaning (bu yerda $0<\beta<1/2$)

$$\lim_{x\to 0}\left[x^{\beta+1/2}y'\left(x\right)\right]=0,\quad y(0)=y(1) \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin.

Yechish. (1) – Gaussning gipergeometrik tenglamasi [1] bo'lib, uning $(0,1)$ oraliqda aniqlangan umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 F\left(\beta+\omega,\, \beta-\omega,\, \beta+\frac{1}{2};\, x\right) + c_2 x^{(1/2)-\beta} F\left(\frac{1}{2}+\omega,\, \frac{1}{2}-\omega,\, \frac{3}{2}-\beta;\, x\right) \tag{3}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\omega = \sqrt{\beta^2+\lambda}$, $F(a,b,c;x)$ – Gaussning gipergeometrik funksiyasi:

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \cdot n!} x^n,$$

$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ – Poxgammer belgisi, $\Gamma(a)$ – Eylerning gamma-funksiyasi [2].

(3) funksiyani differensiallab, so'ngra

$$\frac{d}{dx} F(a,b,c;x) = \frac{ab}{c} F(a+1,b+1,c+1;x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1} F\left(a,b,c;x\right)\right] = (c-1)x^{c-2} F(a,b,c-1;x)$$

formulalardan foydalansak [2],

$$y'(x) = \frac{2\left(\beta^2-\omega^2\right)}{1+2\beta} c_1 F\left(\beta+\omega+1,\, \beta-\omega+1,\, \beta+\frac{3}{2};\, x\right) +$$

$$+\frac{1-2\beta}{2} c_2 x^{-\beta-(1/2)} F\left(\frac{1}{2}+\omega, \frac{1}{2}-\omega, \frac{1}{2}-\beta; x\right)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikni $x^{\beta+(1/2)}$ ga ko'paytirib,

$$x^{\beta+(1/2)} y'(x) = \frac{2\left(\beta^2-\omega^2\right)}{1+2\beta} c_1 x^{\beta+(1/2)} F\left(\beta+\omega+1,\, \beta-\omega+1,\, \beta+\frac{3}{2};\, x\right) +$$

$$+\frac{1-2\beta}{2} c_2 F\left(\frac{1}{2}+\omega, \frac{1}{2}-\omega, \frac{1}{2}-\beta; x\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikdan $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^{\beta+1/2} y'(x)\right] = 0$ chegaraviy shartga va $F(a,b,c;0) = 1$ tenglikka asosan $c_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Buni e'tiborga olib, (3) funksiyani $y(0) = y(1)$ shartga bo'ysundirib $c_1\left[F\left(\beta+\omega,\, \beta-\omega,\, \beta+1/2;\, 1\right)-1\right] = 0$ tenglikka kelamiz. Biz trivial bo'lmagan yechim qidirayotganimiz uchun $c_1 \neq 0$. Unda $F\left(\beta+\omega,\, \beta-\omega,\, \beta+1/2;\, 1\right) = 1$. Bu tenglikka

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\;\; \Gamma(1/2+a)\Gamma(1/2-a) = \frac{\pi}{\cos\pi a}$$

formulalarni [2] ketma-ket qo'llasak, $\cos(\omega\pi)/\cos(\beta\pi) = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani $\sin[\pi(\omega-\beta)/2]\sin[\pi(\omega+\beta)/2] = 0$ ko'rinishda yozsak, u $\sin[\pi(\omega-\beta)/2] = 0$, $\sin[\pi(\omega+\beta)/2] = 0$ tenglamalarga ajraydi. Bu trigonometrik tenglamalarni yechib qo'yilgan masalaning

$$\lambda_n^{(1)} = 4n^2 + 4n\beta,\;\; \lambda_n^{(2)} = 4n^2 - 4n\beta,\;\; n \in N$$

xos sonlariga ega bo'lamiz. (3) formulada $c_1 = a_n$, $c_2 = 0$ deb hamda topilgan xos sonlar va $\omega = \sqrt{\beta^2+\lambda}$ tenglikni e'tiborga olib,

$$y_n^{(1)}(x) = a_n^{(1)} F(2\beta+2n, -2n, \beta+1/2; x),$$

$$y_n^{(2)}(x) = a_n^{(2)} F(2n, 2\beta-2n, \beta+1/2; x),\;\; n \in N$$

xos funksiyalarga ega bo'lamiz.

Adabiyotlar

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* М.: Наука. – 1965.
2. **O'rinov A.Q.** *Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar.* Farg'ona. –2012.

УДК 517.95

Vaqt bo'yicha kasr tartibli bo'lgan parabolik tenglamalar bilan tavsiflanuvchi issiqlik jarayonini boshqarish masalasi

Kuchkorov E. I.[1], Jangibayev I. U.2.[2],
[1,2]O'zbekiston Milliy universitet; e_kuchkorov@mail.ru, ilhomjangibayev@gmail.com

Vaqt bo'yicha hosilasi kasr tartibli bo'lgan issiqlik tarqalish tenglamasini qaraymiz:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T), \tag{1}$$

boshlang'ich shart

$$u(x,0) = \mu(t), \quad x \in (0,l), \tag{2}$$

chegaraviy shart

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

bu yerda $\mu(t)$ funksiya boshqaruv funksiyasi, α esa $0 < \alpha < 1$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan haqiqiqy son, vaqt bo'yicha olingan hosila esa Kaputo ma'nosida tushuniladi, ya'ni

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{df(s)}{ds} \frac{ds}{(t-s)^\alpha},$$

$\Gamma(\alpha)$ – Eylerning Gamma funksiyasi. Ravshanki (2) va (3) shartdan

$$\mu(0) = 0 \tag{4}$$

shartning bajarilishi kelib chiqadi.

Masala. Berilgan $\theta(t)$ funksiya uchun shunday boshqaruv funksiyasi $\mu(t)$ ni topish kerakki, bunda (1)-(2) masala yagona yechimga ega bo'lsin va yechim uchun

$$\frac{1}{l} \int_0^l u(x,t)dx = \theta(t), \quad t > 0 \tag{5}$$

shart bajarilsin.

Vaqt bo'yicha hosila butun son bo'lganda, ya'ni $\alpha = 1$ holda o'rtacha temperaturani boshqarish masalalarini tadqiq qilish bo'yicha ko'plab natijalar olingan. Bu bo'yicha umumiy ma'lumotlar ([1],[2],[3],[4],[5]) ishlarda batafsil keltirilgan.

Ushbu ishda [1],[2] ishda ishlab chiqilgan usuldan foydalanib quyidagi natija olingan.

$W_2^2(R)$ – Sobolev fazosi bo'lsin.

Teorema. Aytaylik $\theta \in W_2^2(R)$ istalgan funksiya bo'lsin. U holda shunday $\mu(t)$ boshqaruv funksiyasi mavjudki, bunda (1)-(3) masala yagona yechimga ega va bu yechim uchun (5) tenglik bajariladi.

Литература

1. **Fattorini H.O.** *Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions, Control and Estimation of Distributed Parameter Systems*, International Series of Numerical Mathematics, vol. 126, Birkhauser, Besel, pp. 151-168 (2002).
2. **Albeverio S., Alimov Sh.A.** *On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process.* Applied Mathematics and Optimization, 47, no. 1, pp. 58-68 (2008).
3. **Alimov Sh.A., Dekhkonov F.N.** *On a control problem associated with fast heating of a thin rod*, Bulletin of National University of Uzbekistan, Vol. 2: Iss. 1, Article 1, 2019.
4. **Dekhkonov F.N.** *On a time-optimal control of thermal processes in a boundary value problem*, Lobachevskii journal of mathematics, 43:1(2022), p. 192-198.
5. **Kuchkorov E.I., Dekhonov F.N.** *On the boundary control problem for the fast heating process of rood.*Internartional analysis and its applications in modern mathematical physics. September 23-24, 2022; Samarkand, Uzbekistan. 2022, part 1, P.186-187.

УДК 517.95

Tekislikda bo'lakli silliq funksiyaning potensiali maxsuslikka ega bo'lgan Shredinger operatorining xos funksiyalari bo'yicha Furye qatoriga yoyish haqida

Kuchkorov E. I.[1], Shermuxammedov B. A.2.[2],
[1,2]O'zbekiston Milliy universitet;
e_kuchkorov@mail.ru, shermuxammedovbaxtiyor47@gmail.com

Ushbu ish singulyar potensialli Shredinger operatorining xos funksiyalari bo'yicha berilgan bo'lakli silliq funksiya Furye qatorining nuqtada yaqinlashishi masalasiga bag'ishlangan.

Bo'lakli silliq funksiyalarning spektral yoyilmalarini yaqinlashishga tekshirish masalalari dolzarb masalalardan hisoblanadi. Bu sohada ko'plab natijalar olingan. Bu sohada hal qilingan asosiy natijalar va mavjud muommalar haqidagi ma'lumotlar [1,2,3] ishlarda keltirilgan. Keltirilgan ishlarda bo'lakli silliq funksiyalarning silliq koeffitsieyntli ikkinchi tartibli elliptik operatorlar bilan bog'liq spektral yoyilmalarining yaqinlashish masalalari tadqiq qilingan. Operator singulyar potensialli Shredinger bo'lgan holda shu masalalar [4,5] ishlarda o'rganilgan.

Ω – tekislikdagi markazi koordinata boshida radiusi R ga teng bo'lgan doira, $q(x,y) = q(\sqrt{x^2+y^2})$ esa nomanfiy istalgan radial simmetrik funksiya bo'lsin. $L_2(\Omega)$ fazoda aniqlanish sohasi $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$ bo'lgan quyidagi

$$Lu(x,y) = -\Delta u(x,y) + q(x,y)u(x,y) \tag{1}$$

Shredinger operatorini qaraymiz, bu yerda $q(x,y) = q(r)$ potensial

$$\int_0^h rq^2(r)dr < \infty \tag{2}$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiya.

Shuni ta'kidlash joizki, (2) shartni qanoatlantiruvchi potensial nol nuqtada maxsuslikka ega bo'lishi mumkin.

Aytaylik $u(x,y)$ funksiyalar

$$\Delta u(x,y) + \lambda u(x,y) = q(x,y)u(x,y) \tag{3}$$

tenglamaning

$$u(x,y)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi noldan farqli yechimi bo'lsin. Biz bu funksiyalarni xos funksiyalar deb ataymiz. Ma'lumki L operator uchun (4) Dirixle chegaraviy sharti bajarilganda L operator simmetrik bo'ladi va uni K.Fridrixs teoremasiga asosan o'z-o'ziga qo'shma kengaytirish mumkin. Bizning holimizda L operatorning barcha xos sonlari va xos funksiyalari oshkor topiladi. Agar karraliligini ham hisoblasak (1) operatorning xos sonlarini o'sish tartibida $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots\}$ kabi, ularga mos xos funksiyalarni esa $u_n(x,y)$ bilan belgilaymiz. Istalgan $f \in L_2(\Omega)$ funksiyaning $u_n(x,y)$ xos funksiyalar bo'yicha Furye koeffitsiyentini f_n bilan belgilaymiz. Berilgan f funksiya Furye qatorining qismiy yig'indisi deb

$$E_\lambda f(x,y) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x,y) \tag{5}$$

yig'indiga aytamiz. Aytaylik $G-$ soha, chegarasi $\partial G = \{(x,y) \in \Omega : \ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2\}$ ellipsdan iborat qism soha bo'lsin. G sohaning xarakteristik funksiyasini χ_G orqali belgilaylik, ya'ni

$$\chi_G(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{agar} \quad (x,y) \in G, \\ \frac{1}{2} & \text{agar} \quad (x,y) \in \partial G, \\ 0 & \text{agar} \quad (x,y) \in \Omega \subset \overline{G}. \end{cases}$$

Teorema. Aytaylik q potensial (2) shartni qanoatlantiruvchi istalgan funksiya bo'lsin. U holda istalgan $(x,y) \in \Omega$ nuqtada $f(x,y) = \chi_G(x,y)$ bo'lakli silliq funksiyaning Furye qatori yaqinlashadi:

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda f(x,y) = f(x,y).$$

Teoremaning isboti har bir xos funksiya uchun o'rinli bo'lgan Titchmarshning o'rta qiymat formulasi va Sh. Alimov tomonidan ishlab chiqilgan usulga asoslanadi, bunda L operatorning xos funksiyalarining oshkor ko'rinishidan va $q(r)$ potensialning sferik simmetrikligidan foydalaniladi.

Литература

1.**Alimov, Sh. A**. *On the smoothness of mean values of functions with summable spectral expansion.* Differ. Equ. 48, No. 4, 506-516 (2012).

2.**Alimov, Sh. A**. *On spectral expansions of piecewise smooth functions depending on the geodesic distance.* Differ.Equ. 46, No. 6, 827-839 (2010).

3. **Pinsky M.A., Stanton N.K**., and **Trapa P.E**., *Fourier Series of Radial Functions in Several Variables,* J. Funct. Analysis, 1993, vol. 116, pp. 111 - 132.

4. **Кучкоров Э.И**. *О равномерной сходимости спектрального разложения кусочно-гладкой функции по собственным функциям оператора Шрёдингера с сингулярными коэффициентами*, Вестник НУУз. 2006. №2. С.42-47.

5. **Кучкоров Э.И**. *Равномерная сходимость спектральных разложений кусочно-гладких функций в двумерной области, отвечающих оператору Шрёдингера с потенцииалом удовлетворяющим условию Штумеля.* Вестник УзМУ, 2013 г. №26, С.90-95.

УДК 517.95

Threshold effect of the Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation

Kurbanov Shakhzod Kh.[1], Juraev Izzat R. [2]
[1,2]Samarkand State University;
kurbanov-shaxzod@mail.ru, izzaatjurayev1993@gmail.com

Let $\mathbb{T}^1 = (-\pi, \pi]^1$ be the one-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T}^1)$ is the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^1$.

We consider the generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $\mu > 0$ depending on the parameter $p \in \mathbb{T}^1$, with the rank-one perturbation associated to a system of two arbitrary or identical quantum mechanical particles moving on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^1$ and interacting via zero-range repulsive potential.

Important aspect of studying the generalized Friedrichs models is that, they describe the Hamiltonians for systems of both bosons and fermions.

The generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ acting in $L^2(\mathbb{T}^1)$ defined as

$$H_\mu(p) = H_0(p) + \mu V,\ \mu > 0,$$

where $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^1)$$

and $V : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ is the perturbation operator of the form

$$(Vf)(q) = \varphi(q)(f, \varphi),$$

where $(\cdot, \cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T}^1)$. The perturbation V of $H_0(p)$ is positive operator of rank one. Consequently, by the well-known Weyl theorem [1] on compact perturbations, the essential spectrum of $H_\mu(p)$ satisfies the equalities

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p))$$

and fills the segment $[m(p),\ M(p)]$ on the real axis, where

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^1} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^1} w_p(q).$$

We consider the following function $\eta_p : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$,

$$\eta_p(q) = [1 - \cos(q - q_0(p))]^{1/2}, \quad p \in U_\delta(0), \tag{1}$$

which is called the *wight* of the Banach space $L^1(\mathbb{T}^1, \eta_p)$.

Hypothesis 1. *The functions $\varphi(\cdot)$ and $w(\cdot, \cdot)$, used in the definition of the defined operator $H_\mu(p)$ satisfy the following conditions:*
(i) the function $\varphi(\cdot)$ is nontrivial and real-analytic on $\mathbb{T}^1$;
(ii) the function $w(\cdot, \cdot)$ is real-analytic on $(\mathbb{T}^1)^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ and has a unique non degenerated maxsimum at $(0, 0) \in (\mathbb{T}^1)^2$.

By Hypothesis 1 there exist such a δ-neighborhood $U_\delta(0) \subset \mathbb{T}^1$ of the point $p = 0 \in \mathbb{T}^1$ and analytic function $q_0 : U_\delta(0) \to \mathbb{T}^1$ that for any $p \in U_\delta(0)$ the point $q_0(p) \in \mathbb{T}^1$ is a unique non degenerated maximum of the function $w_p(\cdot)$.

If $\varphi(q_0(p)) = 0$, then we introduce a parameter $\mu(p) > 0$ as

$$\frac{1}{\mu(p)} = \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{\varphi^2(s)ds}{M(p) - w_p(s)} > 0,$$

and $\mu(p) = 0$, if $\varphi(q_0(p)) \neq 0$, $p \in U_\delta(0)$.

Definition. The number $M(p)$ is called a virtual level of the operator $H_\mu(p)$ if the equation $H_\mu(p)f = M(p)f$ has a non trivial solution which belongs to $L^1(\mathbb{T}^1, \eta_p) \setminus L^2(\mathbb{T}^1)$. The associated solution f is called a virtual state of the operator $H_\mu(p)$.

Theorem. Let Hypothesis 1 holds and $p \in U_\delta(0)$. Then the following assertions are true.

(i) If $\varphi(q_0(p)) = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q}(q_0(p)) \neq 0$ and $\mu = \mu(p)$, then the number $M(p)$ is a virtual level of the operator $H_\mu(p)$. The associated virtual state $f \in L_1(\mathbb{T}^1, \eta_p)$ has a form

$$f(q) = \frac{C\mu(p)\varphi(q)}{M(p) - w_p(q)},$$

where $C \neq 0$ - normalizing factor.

(ii) If $\varphi(q_0(p)) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}(q_0(p)) = 0$ and $\mu = \mu(p)$, then the number $M(p)$ is an eigenvalue of the operator $H_\mu(p)$. The associated eigenfunction has a form

$$f(q) = \frac{C\lambda(p)\varphi(q)}{M(p) - w_p(q)},$$

where $C \neq 0$ - normalizing factor.

Friedrichs model also has been considered in [2,3].

References

1. **M. Reed and B. Simon.** Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.
2. **S.N.Lakaev, M.Darus, Sh.H.Kurbanov.** Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Generalized Friedrichs model with perturbation of rank 1. J. Phys. A: Math. Theor. 46:20, 205304, 2013 (15pp).
3..**N.Lakaev, M.Darus, S.T.Dustov.** Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. Ufa Mathematical Journal. Vol.11. No. 4 (2019) P.1-11.

UDK 517.2

Siljishli funksional operatorlarning teskarilanuvchanlik va oʻngdan teskarilanuvchanlik shartlari.

Mardiyev R.[1], Murodov J. Sh.[2]

[1,2]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universeteti.

murodovjurabekk2323@gmail.com

Γ-sodda silliq yopiq kontur, $\alpha - \Gamma$ konturni oʻziga akslantiruvchi diffeomorfizm (siljish) boʻlib boʻsh boʻlmagan Λ davriy nuqtalar toʻplamiga ega boʻlsin. $H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$ Giyol'der fazosida.

$$A = aI - bW \qquad (1)$$

Koʻrinishdagi siljishli funksional operatorni qaraylik. Bu yerda $a, b \in H_\mu(\Gamma)$, I-birlik operator, W-siljish operatori:

$$(W\varphi) = \varphi[\alpha(t)],\ t \in \Gamma$$

Agar α-siljishning davriy nuqtalari toʻplami Λ chekli boʻlganda va α-siljish yoʻnalishini oʻzgartirganda $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ fazosida (1) operatorning bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlari oʻrganilgan. ([2]) Bu ishda A operatorning $H_\mu(\Gamma)$ fazosida teskarilanuvchanlik va oʻngdan teskarilanuvchanlik shartlari α-siljish yoʻnalishini saqlagan yoki oʻzgartirgan holda hamda u ixtiyoriy boʻsh boʻlmagan davriy nuqtalar toʻplamiga ega boʻlgan holda olingan. Xususiy holda α-siljishning davriy nuqtalar toʻplami kontinum quvvatli yoki boʻsh boʻlmagan ichki nuqtalar toʻplamiga ega boʻlgan toʻplam ham boʻlishi mumkin.

Ma'lumki α siljish Γ-konturning yoʻnalishini saqlasa, u uning davriy nuqtalari bir xil $m \geq 1$ tartibli boʻladi. ([1]. 24 bet) Agar α siljish Γ konturning yoʻnalishini oʻzgartirsa, u holda siljish albatta ikkita z_1 va z_2 qoʻzgʻalmas nuqtalarga ega boʻladi. Hamda $\alpha_2(t) = \alpha(\alpha(t))$, $t \in \Gamma$ siljish esa $m = 2$ tartibli qoʻzgʻalmas nuqtaga ega. Demak α-yoʻnalishni oʻzgartirgan holda $m = 2$ yoʻnalishni saqlagan holda deb olinadi.

Φ-orqali $\{t \in \Gamma : \alpha_m(t) \neq t\}$ $(\alpha_m(t) = (\alpha(\alpha_{m-1}()t)), \alpha_0(t) = t, t \in \Gamma)$ toʻplamning yopigʻini belgilaymiz. $Y = \Lambda \cap \Phi$ va $H^0_\mu(\Gamma, Y) = \{\varphi \in H_\mu(\Gamma) : \varphi(t) = 0, \forall t \in Y\}$ boʻlsin. $u, a, b \in (\Gamma)$ funksiyalar uchun quydagi belgilashlarni kiritamiz. ([2] adabiyotdagiga oʻxshash).

$u_m(t)=\prod_{i=0}^{m-1} u[\alpha_i(t)], \quad h_m(t)=|\alpha_m(t)|-|\alpha_m(t)|^{\mu}|b_m(t)|,\, t\in\Gamma$ da

$h_{\pm}(t)=\lim_{n\to\pm\infty} h_m[\alpha_n(t)]$ $\Gamma_1=\Gamma\setminus\Phi$, $\Gamma_2=\{t\in\Phi:\ h_{\pm}(t)>0\}$, $\Gamma_3=\{t\in\Phi:\ h_{\pm}(t)>0\}$, $\Gamma_4=\{t\in\Phi:\ h_{+}(t)<0<h_{-}(t)\}$, $\Gamma_5=\{t\in\Phi:\ h_{+}(t)>0>h_{-}(t)\}$

$$v_A(t)=\begin{cases} a_m(t)-b_m(t), & t\in\Gamma_1,\\ a_m(t), & t\in\Gamma_2,\\ b_m(t), & t\in\Gamma_1,\\ 0, & t\in\Gamma\setminus\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_i, \end{cases}$$

Quydagi tasdiqlar o‘rinli.

1-Teorema. α siljish yo‘nalishini saqlovchi yoki yo’nalishni o‘zgartuvchi bo‘lib, bo‘sh bo‘lmagan Λ davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin. U holda A operator $H^0_{\mu}(\Gamma,Y)$, $0<\mu<1$ fazoda teskarilanuvchi bo‘lishi uchun $\forall t\in\Gamma\, v_A\neq 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

2-Teorema. α siljish yo‘nalishini saqlovchi yoki yo‘nalishni o‘zgartuvchi bo‘lib, bo‘sh bo‘lmagan Λ davriy nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin. U holda A operator $H^0_{\mu}(\Gamma,Y)$, $0<\mu<1$ fazoda o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchi bo‘lishi uchun

$$v_A(t)\neq 0\,\forall t\in\Gamma\setminus\Gamma_4\,(\forall t\in\Gamma\setminus\Gamma_5)\ \text{ va } \forall t\in\Gamma_4,\ \exists k_0\in Z,\ \forall k\geq k_0\, b[\alpha_k(t)]=0,\ \forall k<k_0,\ \alpha[\alpha_k(t)]\neq 0$$

(mos ravishda $\forall t\in\Gamma_5$, $\exists k_0\in Z$, $\forall k\geq k_0\, b[\alpha_k(t)]\neq 0\,\forall k\geq k_0\, a[\alpha_k(t)]\neq 0$) shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Adabiyotlar ro‘yxati.

1. **Литвинчук Г. С.** *Краевые задачи и сингуляные интегральные уравнения со сдвигом Brand N.*–М.Наука, 1997.–448с.
2. **Mardiyev R.** *One-Way Inversibility, of Mathematics.*Samarqand State University. Middle European Scientific Bulletin, VOLUME 19 Dec 2021.

УДК 517.45

Fazodagi cheklangan aralash sohada parabolik -giperbolik tenglama uchun

Z.Miraxmedova
Farg‘ona davlat universiteti; zilolaxonmiraxmedova@gmail.com

Quyidagi aralash parabolik-giperbolik tipdagi tenglamani

$$0=\begin{cases} U_{xx}+U_{zz}-U_y,(x,y,z)\in\Omega_+\\ U_{xx}+U_{zz}-U_{yy},(x,y,z)\in\Omega_- \end{cases} \tag{1}$$

fazodagi $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_-\cup S$ chegaralangan aralash sohada tadqiq etamiz. Bu yerda $\Omega_+=\{(x,y,z):0<x<1,0<y<1,0<z<1\}$,$\Omega_-=\{(x,y,z):0<x<1,-\frac{1}{2}<y<1,0<z<1\}$, $S=\{(x,y,z):y=0,0<x<1,,0<z<1\}$,.

Masala: Ω sohada (1) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin:

$$U(x,y,z)\in C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_-)\cap C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_+)$$

$$U(x,y,0)=U(x,y,1)=0,0\leq x,y\leq 1$$

$$U(0,y,z)=U(1,y,z)=0,0\leq y,z\leq 1$$

$$U(x,y,z)|_{y=-x} = \alpha(x,z), 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le z \le 1 \tag{2}$$

Bu yerda $\alpha(x,z)$ - berilgan funksiya.

(1) tenglamaning notrivial yechimini

$$U(x,y,z) = v(x,y)\,Z(z) \neq 0, \tag{3}$$

ko'rinishida qidiramiz [1]. U holda (1) tenglamadan

$$0 = \begin{cases} (v_{xx} - v_y)\,z + z''v, y > 0 \\ (v_{xx} - v_{yy})\,z + z''v, y < 0 \end{cases}, \tag{4}$$

ni olamiz. (4) tenglamadan $v(x,y)Z(z) \neq 0$ ifodaga tenglikning har ikki tomonini bo‘lgan holda quyidagilarni olamiz:

$$\frac{v_{xx} - v_y}{v} = \frac{-z''}{z} = \lambda = const, y > 0, \tag{5}$$

$$\frac{v_{xx} - v_{yy}}{v} = \frac{-z''}{z} = \lambda = const, y < 0 \tag{6}$$

tenglamalarni olamiz. (5)-(6) lardan esa

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \tag{7}$$

tenglama kelib chiqadi. (3) ni hisobga olibgan holda (2) chegaraviy shartdan

$$Z(0) = Z(1) = 0 \tag{8}$$

shartni olamiz. Ma'lumki, (7)-(8) Shturm-Liuvill spektral masalasi bo‘lib, uning xos sonlari va xos funksiyalari quyidagicha [1]:

$$\lambda_n = (\pi n)^2,\ n \in N, Z_n(z) = \sin(\pi n z).$$

Shu sababdan tadqiq etilayotgan masala yechimini

$$U(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,y) \sin n\pi x \tag{9}$$

ko'rinishda izlaymiz va fazoviy koordinatalarga nisbatan $y > 0$ da parabolik tenglama uchun 1 - chegaraviy masala [2], $y < 0$ da esa telegraf tenglamas uchun Koshi-Gursa masalasini yechishga kelamiz [3]. Bu masalalarning yechimini eksponensial funksiya va Bessel funksiyalari orqali yaqqol ko‘rinishini olib, (9) cheksiz qator va U_{xx}, U_{yy}, U_{zz} funksiyalarga mos keluvchi cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashishi ta'minlash uchun berilgan funksiyalarga ma'lum shartlar qo‘yib, tadqiq etilgan masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **M.S.Salohiddinov** *Matematik fizika tenglamalari.* Toshkent: O‘zbekiston, 2002.

2. **Джураев Т.Дж., Сопуев А., Мамажонов М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа* Ташкент: Фан, 1996.

3. **O‘rinov A.Q.** *Parabolik tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.* Toshkent: Mumtoz so‘z, 2015.

УДК 517.956

О одном интегральном уравнении со слабой особенностью

Nortojiev H.[1], Abdirovidov G'.[2],
[1,2]TerDU, Termiz, O'zbekiston; hayitmurodnortajiyev@gmail.com, abirovidov@mail.ru

Рассмотрим интегральное уравнения Волтерра с подвижной и о собенностью

$$\nu(x) = \int\limits_{-1}^{x} \frac{K_1(x,t)\nu(t)dt}{|t-\varphi(x)|^l} + F_1(x), \ \ -1 \le x \le 1 \tag{1}$$

где, $0 < l < 1$, $K(x,t)$ непрерывное ядро в замыкании и множества определения

$$l = 1 + \alpha - \beta, \ \ \varphi(x) = 2\delta(x) - x,$$

$$K_1(x,t) = K(x,t)(T(x,t))^{-\frac{l}{\alpha}}, \ \ F_1(x) = F(x)$$

Уравнение (1) является уравнением Вольтерра второго рода, и вдоль кривой $t = \varphi(x)$ его ядро имеет слабую особенность порядка l. Приняв за первую итерацию равенство (1), для второй итерации имеем

$$\nu(x) = \int\limits_{-1}^{x} \frac{K_2(x,t)\nu(t)dt}{|t-\varphi(x)|^{2l-1}} + F_2(x),$$

где,

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_1(x)) < \varphi_1(x), \ \ \varphi_1(x) = \varphi(x),$$

$$\frac{K_2(x,t)\nu(t)dt}{|t-\varphi(x)|^{2l-1}} = \begin{cases} \int\limits_{l}^{\delta'(l)} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(\varphi(x)-s)^l(t-\varphi(s))^l} + \int\limits_{\delta'(l)}^{\varphi(x)} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(\varphi(x)-s)^l(\varphi(s)-t)^l} + \\ + \int\limits_{\varphi(x)}^{x} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(s-\varphi(x))^l(\varphi(s)-t)^l}, \qquad -1 \le t \le \varphi_2(x); \\ \int\limits_{l}^{\varphi(x)} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(\varphi(x)-s)^l(t-\varphi(s))^l} + \int\limits_{\varphi(x)}^{\delta'(l)} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(s-\varphi(x))^l(t-\varphi(s))^l} + \\ + \int\limits_{\delta'(l)}^{x} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(s-\varphi(x))^l(t-\varphi(s))^l}, \qquad \varphi_2(x) < t < \varphi_1(x); \\ \int\limits_{l}^{x} \frac{K_1(x,s)K_1(s,t)ds}{(s-\varphi(x))^l(t-\varphi(s))^l}, \qquad \varphi_1 < t \le x, \end{cases}$$

$$F_1(x) = \int\limits_{l}^{\varphi(x)} \frac{K_1(x,s)F_1(s)ds}{(\varphi(x)-s)^l} + \int\limits_{\varphi(x)}^{x} \frac{K_1(x,s)F_1(s)ds}{(s-\varphi(x))^l} + F_1(x).$$

Здесь $K_2(x,t)$ ограничена в треугольнике Δ_0 за исключением кривых $t = \varphi_1(x)$ и $t = \varphi_2(x)$, где $K_2(x,t)$ терпит разрыв первого рода, а $F_2(x) \in C^2(\bar{I})$. Продолжая этот процесс, для n - ой итерации имеем

$$\nu(x) + \int\limits_{-1}^{x} \frac{K_n(x,t)\nu(t)dt}{|t-\varphi(x)|^{2^{n-1}l-2^{n-1}+1}} + F_n(x), \tag{2}$$

где $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(\varphi_1(x))$, $n \in N$, $\varphi_0(x) = x$. Пусть и $n = [\log_2(4/(\beta-\alpha))]$ ($[x]$ - антье икс, т.е. целая часть числа), тогда $2^{n-1}l - 2^{n-1} + 1 < 0$. Таким образом , уравнение (2) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ограниченным ядром в Δ_0, $F_n(x) \in C^2(\bar{I})$. Следовательно, уравнение (2) безусловно и однозначно разрешимо.

УДК 517.956.2

The existence of the solution of the Cauchy Problem for Laplace equation

Qudaybergenov A.K.[1], Sharipova S.A.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
khudaybergenovallambergen@mail.ru

Consider the process of heating the following cylindrical surface (thin-walled pipe)

$$P_R \ = \ \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = R^2, \ 0 \leq x_3 \leq h\}.$$

The temperature of the lower part of the base is known. In addition, it is known that the lower part is thermally insulated. We need to find the temperature at the top base of the cylinder.

We introduce the cylindrical coordinates

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}, \quad s = x_3.$$

Then

$$P_R \ = \ \{(r, \theta, s) \ : \ r = R, \ -\pi \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq s \leq h\}.$$

Let $u(\theta, s, t)$ be the temperature at point (θ, s) at moment $t \geq 0$ and let g be the density of external heat sources. The process of heating is described by equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g$$

This equation in cylindrical coordinates has the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ - \ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \ - \ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \ g, \quad (\theta, s) \in P_R, \quad t > 0. \tag{1}$$

The boundary conditions are

$$u(-\pi, s, t) = u(\pi, s, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(-\pi, s, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\pi, s, t), \quad 0 \leq s \leq h,$$

$$\frac{\partial u(\theta, 0, t)}{\partial s} \ = \ 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

and

$$u(\theta, 0, t) = \phi(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

It is necessary to find the temperature $u(\theta, h, t)$ on the top base $s = h$.

We are looking for a stationary solution, i. e. a time-independent solution $u = u(\theta, s)$. In this case equation (1) takes the form

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \ + \ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \ g(\theta, s), \quad (\theta, s) \in P,$$

where

$$P \ = \ \{(\theta, s) \ : \ -\pi \leq \theta \leq \pi, \ 0 < s < h\}. \tag{2}$$

In what follows we assume that $R = 1$. Hence, we consider equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \ + \ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \ g(\theta, s), \quad (\theta, s) \in P, \tag{3}$$

with boundary conditions

$$u(\theta,0)=\phi(\theta),\quad \frac{\partial u(\theta,0)}{\partial s}=0,\quad -\pi\le\theta\le\pi. \tag{4}$$

Theorem *Let $\sigma \ge h$. Let $\phi \in A_\sigma$. Assume that $g(\theta,s)\in C(P)$ as a function of θ for each $s\in[0,h]$ belongs to the space A_σ and satisfies condition*

$$\int_0^h \|g(\cdot,s)\|_\sigma^2\,ds \;<\; \infty. \tag{5}$$

Then the solution of the problem (2)-(5) in domain P exists, is unique and there exists the function $\psi\in L_2[-\pi,\pi]$ such that

$$\lim_{s\to h}\int_{-\pi}^{\pi}|u(\theta,s)-\psi(\theta)|^2\,d\theta \;=\; 0. \tag{6}$$

To prove this theorem we shall look for the solution in the following form:

$$u(\theta,s)\;=\;v(\theta,s)\;+\;w(\theta,s), \tag{7}$$

where

$$v(\theta,s)\;=\;\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\phi_k\cosh ks, \tag{8}$$

and

$$w(\theta,s)\;=\;\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ik\theta}}{k}\int_0^s \sinh k(s-t)\,g_k(t)\,dt. \tag{9}$$

Both functions (6-9) are 2π-periodical with respect to θ and defined for $s\in[0,h]$.
Here

$$\phi_k\;=\;\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(\theta)e^{-ik\theta}d\theta,\quad g_k(t)\;=\;\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\theta}g(\theta,t)\,d\theta.$$

Lemma 1. *For each $s\in[0,h]$ the function $v(\theta,s)$ belongs to $L_2[-\pi,\pi]$ with respect to θ and*

$$\lim_{s\to h}\int_{-\pi}^{\pi}\left|v(\theta,s)-v(\theta,h)\right|^2 d\theta \;=\; 0.$$

Lemma 2. *For each $s\in[0,h]$ the function $w(\theta,s)$ belongs to $L_2[-\pi,\pi]$ with respect to θ and*

$$\lim_{s\to h}\int_{-\pi}^{\pi}|w(\theta,s)-w(\theta,h)|^2\,d\theta \;=\; 0.$$

REFERENCES

1. **A. Gavrikov, G. Kostin.** *Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air.* Proc. of 59th MIPT Scientific Conference. Moscow, Russia, 2016 (Russian).
2. **S. I. Kabanikhin.** *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55, 2012.
3. **M. M. Lavrentyev.** *On the Cauchy problem for Laplace equation.* Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 20:819вЂ“842, 1956.

Parabolik tenglamalar uchun bitta Stefan tipidagi masala

Qudratova SH.SH. [1], Sakiyeva N.Z.[2]
[1,2]Termiz davlat universiteti;
shaxnozaqudratova12345@gmail.com, fshodiev083@gmail.com

Tabiatdagi juda ko'p ekologik jarayonlarni matematik moddalari parabolik tenglama uchun chegarali masalalar orqali ifodalanadi. Jumladan muzning erish masalasi, havoning ifloslanishi, turlarning tarqalishi, bakteriyalarning tarqalishi, diffuziya jarayonlari, filtratsiya jarayonlari, o'simliklarning o'sish jarayonlari, va inson organizmidagi hujayralarda kislorod va moddalar almashinuvi jarayonlarining matematik modellari noma'lum chegarali Stefan tipidagi masalaga keltiriladi. [1; 603-630, 11; 266-295] Noma'lum chegarali masalalar yangi tipdagi masalalar jumlasiga kiradi. Bunda noma'lum chegara masala yechimi bilan birgalikda topiladi. Noma'lum chegarali masalalar birinchi bor 1831-yilda G.Lame va B.T.Klapeyronning "Sovutuvchi suyuq sharning qotishi" to'g'risidagi maqolasi bo'lib, unda bir xil suyuqlikning qotish jarayonida hosil bo'lgan qattiq fazaning qalinligi aniqlanadi. Keyinchalik 1882-yilda Avstralialik fizik va matematik Yozef Stefan fazali o'tish bilan bog'liq 4 ta ishni nashr ettirdi. Keyinchalik bu tipdagi masalalar chegarali noma'lum Stefan tipidagi noma'lum chegarali masalalar deb atala boshladi. [1,2,3,4]

Masalaning qo'yilishi.

$$D = \{(x,t) : \ 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

sohada

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ \ (x,t) \in D \tag{1}$$

tenglamaning

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

boshlang'ich va

$$u_x\left(0,t\right) = \psi\left(t\right), \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u\left(x_0,t\right) = u\left(s\left(t\right),t\right), \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u\left(s\left(t\right),t\right) = 0, \ 0 \le t \le T \tag{5}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $\left(u\left(x,t\right), s\left(t\right)\right)$ juftligi topilsin. Bu yerda $\varphi\left(x\right)$ va $\psi\left(t\right)$ uzluksiz funksiyalar.

Masalani yechish quyidagicha amalga oshiriladi.

1. Yechim uchun aprior baho o'rnatiladi.
2. Noma'lum chegaraning harakteri o'rganiladi.
3. Yechimning hosilasi va noma'lum chegara uchun aprior baholar o'rnatiladi.
4. Masala yechimining yagonaligi isbotlanadi.
5. Masala yechimining mavjudligi isbotlanadi.

(1)-(5)- ko'rinishdagi masalalar filtratsiya jarayonlari strukturasining yozilishidan kelib chiqqan. Bunday masalalar turli ko'rinishdagi parabolik tipdagi tenglamalar uchun juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan, bunga doir umumiy ma'lumotlarni [2] dan olish mumkin.

Adabiyotlar

1. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967, с.736.

2. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968.428 с.

3. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967, с.736.

4. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения.* Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.мат.Науки".2012. №26. С.99-106.

УДК 517.95

Kaputo va Prabhakar kasr tartibli operatorlar ishtirok etgan integro-differensial tenglama uchun nolokal masala

Raxmonov A.A
Farg'ona davlat universiteti; abdulvosid.rahmonov@bk.ru

Ushbu ishda Kaputo kars tartibli hosila va Prabhakar kast tartibli integral operator qatnashgan integro-differensial tenglama uchun nolokal shartli masalaning bir qiymatli yechilishi tadqiq etiladi.

Masala.

$$D^{\mu}_{0+}y(x) = \lambda \mathcal{E}^{w,\gamma,1}_{0+,\alpha,\beta}y(x) + f(x), \tag{1}$$

$0 < \mu < 1$, $w \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tenglamaning

$$y(0) = \sigma y(\xi), \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^{+} \tag{2}$$

nolokal shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda

$$D^{\mu}_{0+}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int\limits_{0}^{t} \frac{y'(z)dz}{(t-z)^{\mu}}, \tag{3}$$

$0 < \mu < 1$ kasr tartibli Kaputo integral differensial operatori [1],

$$\mathcal{E}^{w,\gamma,\kappa}_{0+,\alpha,\beta}y(x) = \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{\beta-1} E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}\left[w(x-t)^{\alpha}\right] y(t)dt, \ x > a \tag{4}$$

$\gamma, w \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > \max\{0, \Re(\kappa)-1\}$, $\min\{\Re(\beta), \Re(\kappa)\} > 0$ - Prabhakar kasr tartibli integral operatori [2],

$$E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}, \ \ z, \ \ \beta, \ \ \gamma \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

$\Re(\alpha) > \max\{0, \Re(\kappa)-1\}$, $\Re(\kappa) > 0$ - Prabhakar funksiyasining bir umumlashmasi [3].

(1) tenglamaning $y(0) = C$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y(x) = C + \lambda x^{\mu+\beta} E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(wx^{\alpha}) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_{0}^{x} (x-t)^{\mu-1} f(t)dt \tag{6}$$

ko'rinishga ega [4].

(6) yechimni (2) shartga bo'ysundiramiz:

$$\frac{C}{\sigma} = C + \lambda \xi^{\mu+\beta} E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha}) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_{0}^{\xi} (\xi-t)^{\mu-1} f(t)dt.$$

Bu tenglikdan C ni topamiz:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}-1} \left[\lambda \xi^{\mu+\beta} E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha}) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_{0}^{\xi} (\xi-t)^{\mu-1} f(t)dt \right]. \tag{7}$$

(7) ni (6) ga olib borib qo‘ysak masalani yechimi quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$y(x)=\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]$$

$$+\lambda x^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(wx^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{x}(x-t)^{\mu-1}f(t)dt. \tag{8}$$

Haqiqatdan ham (8) yechim (2) nolokal shartni qanoatlantiradi:

$$y(\xi)=\frac{1}{1-\sigma}\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]$$

$$y(0)=\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]$$

$y(0)-\sigma y(\xi)=0$ shu holatni tekshiramiz.

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]-$$

$$-\sigma\left\{\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]\right\}=$$

$$=\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]\left[\frac{\sigma}{1-\sigma}-\sigma\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}+1\right)\right]=$$

$$=\left[\lambda\xi^{\mu+\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta+\mu+1}(w\xi^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{\xi}(\xi-t)^{\mu-1}f(t)dt\right]\left[\frac{\sigma}{1-\sigma}-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right]=0$$

(8) yechimni (1) integro-differensial tenglamani qanoatlantirishini ham bevosita tekshirib ko‘rish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Kilbas A.A. , Srivastava H.M. ,Trujillo J.J.** *Theory and Applications of fractional differential equation.* Amsterdam: Elsevier, 2005.

2. **Garra R.et al.** *Hilfer-Prabhakar derivative and some applications. Applied Mathematics and Computation.* 2014, 242, pp.576-589.

3. **Garg M. , Marohar P. , Kalla S. A.** *Mittag-Leffler function of two variables. Integral transforms and Special functions.* 2013, 24(11), pp.934-944

4. **Srivastava H.M. , Tomovski Z** *Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Applied Mathematics and Computation, 2009, 201, pp.158-210.

УДК 517.946

On the regularization of the solution of the Cauchy problem for the biharmonic equation on R^3

Shodiyev D.S.[1], Tursunov F.R.[2]
[1,2]Samarkand State University; dilshod.shodiev.76@mail.ru, farxod.tursunov.76@mail.ru

Let $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ and G is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary ∂G, consisting of compact part T plane $y_3 = 0$ and a smooth piece of the S-Lyapunov surface lying in the half-space $y_3 > 0$, $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$.

In the domain G, consider the equation

$$\triangle^2 U(y) = 0,\ y \in G, \tag{1}$$

where $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$ Laplace operator.

Problem definition. It is required to find the biharmonic function $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, for which the values on the part S of the boundary ∂G are known, i.e.

$$U(y_1, y_2, y_3)\big|_S = f_1(y);\quad \frac{\partial U(y_1, y_2, y_3)}{\partial n}\big|_S = f_2(y) \tag{2}$$

$$\triangle U(y_1, y_2, y_3)\big|_S = f_3(y);\quad \frac{\partial}{\partial n}\big(\triangle U(y_1, y_2, y_3)\big)\big|_S = f_4(y);$$

here $f_i(y),\ (i = \overline{1,4})$ the assignment is sufficiently smooth $(f_i(y) \in C^{4-j},\ j = 1,2,3,4)$ functions, and $\partial/\partial n$- operator of differentiation along the outward normal to ∂G.

The considered problem [1, 2] belongs to the ill-posed problems of mathematical physics, because there is no continuous dependence of the solution on the initial data. The Carleman type formula, which uses the fundamental solution of the differential operator, was obtained by M.M. Lavrentiev [1, 2]. In these papers, a definition of the Carleman function is given for the case when the Cauchy data are given approximately, and a regularization scheme for the Cauchy problem for the Laplace equation. Using this method, Sh.Ya.Yarmukhamedov [3, 4] constructed Carleman functions for a wide class of elliptic operators defined in spatial domains of a special form, when part of the boundary of the domain is a hypersurface or a conical surface. We note that when solving applied problems, it is necessary to find not only approximate solutions, but also derivatives of approximate solutions. In [5], the recovery is not only the harmonic function itself, and also the derivatives. In [6], using the Carleman functions, the biharmonic function itself and its derivatives in the plane are reconstructed from the Cauchy data on a part of the domain boundary. Also [5, 6], an estimate of the stability of the derivative of the approximate solution was obtained.

Construction of the Carleman function. Let us define the function $\Phi_\sigma(x, y)$ (from [4]) as follows

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma x_3^2}}{\omega - x_3}\right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}. \tag{3}$$

Separating the imaginary part of the function $\Phi_\sigma(x, y)$, we have

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_3^2 - y_3^2)} \Bigg[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} cos(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}) du}{u^2 + r^2}$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} (y_3 - x_3) sin(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2})}{u^2 + r^2} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\Bigg] \tag{4}$$

where $y' = (y_1, y_2)$, $x' = (x_1, x_2)$, $r = |y - x|$, $\alpha = |y' - x'|$ and $\omega = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3,\ u \geq 0$.

It the paper [4], one has proved that the function $\Phi_\sigma(x,y)$ defined by the equalities (3) with $\sigma > 0$ is presentable in the from

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi r} + G_\sigma(x,y) \tag{5}$$

where $G_\sigma(x,y)-$ is harmonic function with respect to y in R^3, including $y = x$.

Therefore, for the function $U(y) = U(y_1,y_2,y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ and any $x \in G$ the following integral Green formula holds true:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y)\frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial n} - \triangle L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y$$

$$+ \int_{\partial G} \left[\triangle U(y)\frac{L_\sigma(x,y)}{\partial n} - L_\sigma(x,y)\frac{\partial(\triangle U(y))}{\partial n} \right] dS_y \tag{6}$$

where $L_\sigma(x,y) = r^2\Phi_\sigma(x,y)$

$$\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} = \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_1}cos\alpha + \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_2}cos\beta + \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_3}cos\gamma$$

$$\triangle L_\sigma(x,y) = \triangle(r^2\Phi_\sigma(x,y))$$

$$\frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial n} = \frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial y_1}cos\alpha + \frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial y_2}cos\beta + \frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial y_3}cos\gamma \tag{7}$$

$cos\alpha$, $\cos\beta$ and $cos\gamma$ are the coordinates of the unit outward normal n at the point y of the boundary ∂G.

Denote

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[f_1(y)\frac{\partial(\triangle L_\sigma(x,y))}{\partial n} - f_2(y)\triangle L_\sigma(x,y) \right] dS_y$$

$$+ \int_S \left[f_3(y)\frac{L_\sigma(x,y)}{\partial n} - f_4(y)L_\sigma(x,y) \right] dS_y, \quad x \in G. \tag{8}$$

Theorem 1. *Let the function $U(y) = U(y_1,y_2,y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ on the part S of boundary ∂G satisfy the conditions (2), and on the part T of boundary ∂G the inequality be fulfilled*

$$|U(y)| + \left|\frac{\partial(U(y))}{\partial n}\right| + |\triangle U(y)| + \left|\frac{\partial(\triangle U(y))}{\partial n}\right| \le 1, \quad y \in T. \tag{9}$$

Then, for any $x \in G$ and $\sigma > 0$, the estimates hold true

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le D(x_3,\sigma)e^{-\sigma x_3^2} \tag{10}$$

where

$$D(x_3,\sigma) = \frac{11\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{5}{2\sigma x_3} + \frac{9}{\sigma} + 8\sigma + 8\sqrt{\sigma\pi} + 2\sqrt{\pi}\sigma x_3 + 12\sqrt{\sigma\pi}x_3 + 8\sigma x_3^2 + 2\sqrt{\sigma\pi}x_3^2 + 46.$$

Corollary 1. For each $x \in G$ the equality

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x) = U(x).$$

Литература

1. **Lavrent'ev M.M.**, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, Izv. AN SSSR, 20(1956), no. 6, 819-842 (in Russian).
2. **Lavrent'ev M.M.**, *On some ill-posed problems of mathematical physics*, Ed. SO AN SSSR.
3. **Yarmukhamedov Sh.**, *On the harmonic continuation of differentiable functions given on a piece of the boundary*, Siberian Math. J, 43(2002), no. 1, 183-193.
DOI: 10.1023/A:1013849310522 Novosibirsk, 1962 (in Russian).
4. **Yarmukhamedov Sh.**, *Representation of a harmonic function in the form of potentials and the Cauchy problem*, Mathematical Notes, 83(2008), no. 5, 693-706.
DOI: 10.1134/S0001434608050131
5. **Khasanov A.B, Tursunov F.R.**, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, Ufa Math. J., 11(2019), no. 4, 92-“107. DOI: 10.13108/2019-11-4-91
6. **Dilshod S.Shodiev**, *On the Cauchy problem for the Biharmonic equation.* J.Sib. Fed. Univ. Math. and Phys. 2022, 15(2)1-15 DOI:10.17516/1997-1397-2022 15-2-15.

УДК 517.984

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the four-electron systems in the impurity Hubbard model. Four-electron third triplet state

Tashpulatov Sa'dulla Mamarajabovich[1], Parmanova Ruksat Togaymuradovna[2]
[1,2]Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan;
sadullatashpulatov@yandex.com togaymurodota@gmail.com

The Hubbard model and impurity Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [1]. Therefore, obtaining exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model is a great interest. The spectrum and wave functions of the system of two and three-electron systems in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [2] and [3]. The spectrum and wave functions of four-electron systems were studied in [4] and [5]. We consider of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system for third triplet state. The Hamiltonian of considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\times$$

$$\times\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B>0$ ($B_0>0$) is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites, $\tau=\pm e_j, j=1,2,...,\nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, $\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m\in Z^\nu$.

The four electron systems have a quintet state, three type triplet states, and two type singlet states. Hamiltonian H commutes with all components of the total spin operator $S=(S^+,S^-,S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$.

Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The third triplet state corresponds the basic functions ${}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^3\mathcal{H}^t_1$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form ${}^3\psi^t_1 = \sum_{p,q,r,k\in Z^\nu} f(p,q,r,k){}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}, f\in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^4)$.

Theorem 1. The subspace ${}^3\mathcal{H}_1^t$ is invariant under the operator H, and the restriction ${}^3H_1^t$ of operator H to the subspace ${}^3\mathcal{H}_1^t$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^3\overline{H}_1^t$ acting in the space $l_2^{as}((Z^\nu)^4)$ as

$$ {}^3\overline{H}_t^1\,{}^3\psi_t^1 = 4Af(p,q,r,k) + B\sum_\tau [f(p+\tau,q,r,k)+f(p,q+\tau,r,k)+f(p,q,r+\tau,k)+f(p,q,r,k+\tau)]+ $$

$$ +U[\delta_{p,q}+\delta_{q,r}+\delta_{q,k}]f(p,q,r,k)+(A_0-A)(\delta_{p,0}+\delta_{q,0}+\delta_{r,0}+\delta_{k,0})f(p,q,r,k)+(B_0-B)\sum_\tau[\delta_{p,0}\times $$

$$ \times f(\tau,q,r,k)+\delta_{q,0}f(p,\tau,r,k)+\delta_{r,0}f(p,q,\tau,k)+\delta_{k,0}f(p,q,r,\tau)+\delta_{p,\tau}f(0,q,r,k)+\delta_{q,\tau}f(p,0,r,k)+ $$

$$ +\delta_{r,\tau}f(p,q,0,k)+\delta_{k,\tau}f(p,q,r,0)]+(U_0-U)[\delta_{p,q}\delta_{p,0}+\delta_{q,r}\delta_{q,0}+\delta_{q,k}\delta_{r,0}]f(p,q,r,k), \quad (2) $$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator ${}^3H_1^t$ acts on a vector ${}^3\psi_1^t \in {}^3\mathcal{H}_1^t$ as

$$ {}^3H_1^t\,{}^3\psi_1^t = \sum_{n,k,p,q\in Z^\nu} ({}^3\overline{H}_1^t f)(p,q,r,k)^3 t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}. \quad (3) $$

We denote $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, and $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^3\widetilde{\mathcal{H}}_1^t$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu) = 1$.

We set ${}^3\widetilde{H}_1^t = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}_1^t\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^3\overline{H}_1^t$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 2. The Fourier transform of operator ${}^3\overline{H}_1^t$ is an bounded self-adjoint operator ${}^3\widetilde{H}_1^t = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}_1^t\mathcal{F}^{-1}$ acting in the space ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}_1^t$ according to the formula

$$ {}^3\widetilde{H}_1^t\psi_1^t = \{4A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i]\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)+\varepsilon_1[\int_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+ $$

$$ +\int_{T^\nu} f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,l,\theta)dl+\int_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,k)dk]+2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos s_i]\times $$

$$ \times f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i+\cos t_i]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos l_i]f(\lambda,\mu,l,\theta)dl+ $$

$$ +2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\theta_i+\cos k_i]f(\lambda,\mu,\gamma,k)dk+U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta)+f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta)+ $$

$$ +f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s)]ds+\varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}[f(s,t,\gamma,\theta)dsdt+f(\lambda,t,r,\theta)dtdr+f(\lambda,t,\gamma,l)dtdl]. \quad (4) $$

Taking into account that the function $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)$ is antisymmetric function, and using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators of Hilbert spaces, we can verify that the operator ${}^3\widetilde{H}_1^t$ can be represented in the form

$$ {}^3\widetilde{H}_1^t = \widetilde{H}_1\bigotimes I + I\bigotimes\widetilde{H}_1 + K\bigotimes I\bigotimes I + I\bigotimes I\bigotimes\widetilde{H}_1\bigotimes I + I\bigotimes\widetilde{H}_1, \quad (5) $$

where

$$ (\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} cos\lambda_i f(\lambda) + \varepsilon_1\int_{T^\nu} f(s)ds + 2B\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i + coss_i]f(s)ds, \quad (6) $$

and $K(\lambda,\mu) = U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,t)dsdt$, and I is the unit operator in the one-electron space $\widetilde{\mathcal{H}}_1$.

Now, using the obtained results of investigation of spectra of operator $\widetilde{H}_1$ and representation (5), we describe the structure of essential spectra and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_1^t$:

Theorem 3. Let $\nu = 1$. Then

A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a three point: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, and z_3 and z_4 are same concrete real numbers, lying the below (above) of the essential spectrum of operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a three points: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A-\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A+\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$).

C). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of sixteen segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2]\cup[2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2]\cup[A-2B+3z_2, A+2B+3z_2]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a eleven points: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z_1, 2z_1+2z_2, 4z_2, z_1+3z_2, 3z_1+z_2, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_4, 2z_1+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, 2z_2+z_4\}$, where $z_1 = A-\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, and $z_2 = A+\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

D). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of three segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \emptyset$.

E). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$ and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$.

REFERENCES

1. **Hubbard J.** *Electron correlations in narrow energy bands.* Proc. Roy. Soc. A.- 1963.- V. 276.- P. 238-257.

2. **Karpenko B. V., Dyakin V. V., and Budrina G. L.** *Two electrons in the Hubbard Model.* Phys. Met. Metallogr.- 1986. - V. 61. - P. 702-706.

3. **Tashpulatov S. M.** *Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model.* Theoretical and Mathematical Physics.,- 2014.- V. 179, -№3. - P. 712-728.

4. **Tashpulatov S. M.** *Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplete state in the Hubbard Model.* Journal Phys. Conf. Ser.- 2016.- V. 697. - 012025,- P. 1-25.

5. **Tashpulatov S. M.** *The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state.* Lobachevskii Journal of Mathematics.- 2017.- V. 38

-№3.- P. 530-541.

УДК 517.946

Integral representations of the Appell's hypergeometric functions

Turdiyev R. M.
Namangan State University; rahmatulla.turdiyev.96@bk.ru

The generalized Gaussian hypergeometric function ${}_pF_q$ is defined by

$$ {}_pF_q\left[\begin{array}{l} a_1,...,a_p; \\ c_1,...,c_q; \end{array} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n\, n!} z^n, $$

for $|x|<1$, $c_1,...,c_q \neq 0,-1,-2,...$, where $(\lambda)_k$ is the Pochhammer symbol, $(\lambda)_k = \Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)$.

The most famous and well-known functions are Appell's four functions, which are read as follows:

$$ F_1\left(a,b,b';c;x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \ \ |x|<1,\ |y|<1; $$

$$ F_2\left(a,b,b';c,c';x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m\,(b')_n}{(c)_m\,(c')_n\, m! n!} x^m y^n, \ \ |x|+|y|<1; $$

$$ F_3\left(a,a',b,b';c;x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(a')_n\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \ \ |x|<1,\ |y|<1; $$

$$ F_4\left(a,b;c,c';x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m\,(c')_n\, m! n!} x^m y^n, \ \ \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1. $$

Integral representations of the function F_1.

Integral representations of the function F_1 have the form

$$ F_1\left(a,b,b';c;w,z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \times $$

$$ \times \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-wx)^{-b}(1-zx)^{-b'} dx,\ Re(a)>0, Re(c-a)>0, $$

$$ F_1\left(a,b,b';c;w,z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b'\right)\Gamma\left(c-b-b'\right)} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{b-1} y^{b'-1} (1-x-y)^{c-b-b'-1} \times $$

$$ \times (1-wx-zy)^{-a} dxdy,\ Re(b)>0, Re(b')>0, Re(c-b-b')>0. \qquad (1) $$

Evaluating the integral in (1) with respect to y, we obtain, after some transformations, a new representation for the Appell function F_1 as

$$ F_1\left(a,b,b';c;w,z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \times $$

$$ \times \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-a-1}(1-wx)^{-b}(1-zx)^{-b'} dx,\ Re(a)>0, Re(c-a)>0. $$

Integral representations of the function F_2.

The first integral representation of the function F_2 has the form

$$F_2\left(a,b,b';c,c';w,z\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(b)\Gamma\left(b'\right)\Gamma(c-b)\Gamma\left(c'-b'\right)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x^{b-1}y^{b'-1}(1-x)^{c-b-1}\times$$

$$\times(1-y)^{c'-b'-1}(1-wx-zy)^{-a}dxdy,\ Re(c)>Re(b)>0,Re(c')>Re(b')>0. \quad (2)$$

Integrating with respect to y and using the Euler integral representation of the gauss hypergeometric function. Equation (2) can be reduced to

$$F_2\left(a,b,b';c,c';w,z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 x^{b-1}\times$$

$$\times(1-x)^{c-b-1}F\left(a,b';c';\frac{z}{1-wx}\right)dx,\ Re(c)>Re(b)>0.$$

Another representation of the Appell function F_2 has the form

$$F_2\left(a,b,b';c,c';w,z\right)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}{}_1F_1\left(b;c;wx\right){}_1F_1\left(b';c';zx\right)dx,\ Re(a)>0.$$

Integral representations of the function F_3.

The classical double integral representation of F_3 reads

$$F_3\left(a,a',b,b';c;w,z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b'\right)\Gamma\left(c-b-b'\right)}\times$$

$$\times\int\int_R\frac{u^{b-1}v^{b'-1}(1-u-v)^{c-b-b'-1}}{(1-wu)^a(1-zv)^{a'}}dudv,\ \ Re(c,b,b',c-b-b')>0, \quad (3)$$

where $R=\{(u,v):u\geq 0,v\geq 0,u+v\leq 1\}$. By evaluating one of the integrals, the equation (3) reduces to

$$F_3\left(a,a',b,b';c;w,z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma\left(c-b\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 u^{c-b-1}(1-u)^{b-1}(1-w+wu)^{-a}{}_2F_1\left(a',b';c-b;zu\right)du,\ \ Re(c,b,c-b)>0.$$

One more integral representation has the form

$$F_3\left(a,a',b,b';c;w,z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c')\Gamma\left(c-c'\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 u^{c'-1}(1-u)^{c-c'-1}{}_2F_1\left(a,b;c';wu\right){}_2F_1\left(a',b';c-c';z(1-u)\right)du,\ \ Re(c',c-c')>0.$$

Integral representations of the function F_4.

A double-integral representation of the function F_4 has the form

$$F_4\left(a,b;c,c';w,z\right)=w^{(1-c)/2}z^{(1-c')/2}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(a)\Gamma\left(b\right)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{a-(c+c')/2}u^{b-(c+c')/2}\times$$

$$\times I_{c-1}\left(2\sqrt{tuw}\right)I_{c'-1}\left(2\sqrt{tuz}\right)dtdu,\ Re(b)>0,Re(c-b-b')>0. \quad (4)$$

Another representation of F_4 was given in [1] as

$$F_4\left(a,b;c,c';w,z\right)=2^{c+c'-a-b}w^{(1-c)/2}z^{(1-c')/2}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(a)\Gamma\left(b\right)}\int\limits_0^\infty x^{a+b-c-c'+1}\times$$

$$\times I_{c-1}\left(x\sqrt{w}\right)I_{c'-1}\left(x\sqrt{z}\right)K_{a-b}(x)dx,$$

where $Re(a+b)>0$ and $K_\nu(z)$ is the Macdonald function. These integral representations allow us to evaluate certain integrals involving F_4. For example, using [2]

$$\int\limits_0^\infty I_\nu\left(b(w-x)\right)I_\nu\left(bx\right)dx=\frac{\sinh(bw)}{b},$$

and applying (4) yielda, by evaluating the integral with respect to t and u, the integral relation
$\int\limits_0^w x^\nu(w-x)^{-\nu}F_4\left(a,b,1+\nu,1-\nu,x^2,(w-x)^2\right)dx=$

$$=\pi\,\nu\,\cos(\nu\pi)_2F_1\left(a,b;\frac{3}{2};w^2\right),\ \ |Re(\nu)|<1.$$

On other hand, the direct integration using the formula, which is defined the function F_4, gives the integral relations

$$\int\limits_0^w x^{s-1}(w-x)^{a-s-1}F_4\left(a,b;c,c';ux,vx\right)dx=B(s,a-s)w^{a-1}F_4\left(s,b;c,c';uw,vw\right),$$

where $0<Re(s)<Re(a)$, $\sqrt{|uw|}+\sqrt{|vw|}<1$, $B(x,y)$ is the beta function, and

$$\int\limits_0^w x^{c-1}(w-x)^{s-c-1}F_4\left(a,b;c,c';ux,v\right)dx=B(c,s-c)w^{s-1}F_4\left(a,b;s,c';uw,v\right),$$

where $0<Re(c)<Re(s)$, $\sqrt{|uw|}+\sqrt{|v|}<1$.

Литература

1. **Bailey W. N.** *Some infinite integrals involving Bessel functions.* Proc. London Math. Soc. 1936, 40, 37–48.
2. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** *Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции.* Москва: Наука, 1986. — 800 с.

UDC 517.956

Birinchi tartibli chiziqli bir jinsli xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida

Turdiyeva M.
Denov tadbirkorlik va Pedagogika instituti; turdiyevamalikaxon@gmail.com

$$X_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,z\right)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,z\right)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots$$

$$+X_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,z\right)\frac{\partial z}{\partial x_n}=R\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,z\right)\tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglma birinchi tartibli kvazichiziqli (chiziqliga yaqin) xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Bu tenglama hosilalarga nisbatan chiziqli, z noma’lum funksiyaga nisbatan chiziqsizdir. Agar (1) tenglamaning o‘ng qismi aynan nolga, $\tilde{O}_i(i = 1, 2, \dots, n)$ koeffitsientlar esa z noma’lum funksiyaga bog‘liq bo‘lmasa, u holda (1) tenglama chiziqli bir jinsli differensial tenglamaga aylanadi. Bunday tenglama

$$\tilde{O}_1 (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \tilde{O}_2 (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \tilde{O}_n (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \tag{2}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Ravshanki, (2) tenglama $z = const$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘ladi. (2) tenglama $z = const$ yechimdan farqli bo‘lgan cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lishligini ko‘rsatamiz. Bu maqsad yo‘lida (2) tenglama bilan bir qatorda quyidagi simmetrik shakldagi oddiy differensial tenglamalarning sistemasini qaraymiz

$$\frac{dx_1}{\tilde{O}_1 (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{\tilde{O}_2 (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{\tilde{O}_n (x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{3}$$

Bu tenglamalar sistemasiga (2) bir jinsli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamaga mos keluvchi simmetrik shakldagi oddiy differensial tenglamalarning sistemasi deyiladi.

(2) va (3) tenglamalar orasidagi bog‘lanishni o‘rnatuvchi ikkita teoremani isbotlaymiz. Buning uchun (2) tenglamaning $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_n$ koeffitsientlariga nisbatn ba’zi bir talablarni qo‘yamiz. Bu koeffitsientlar tayinlangan $x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{nO}$ nuqtaning atrofida aniqlangan va $x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy xosilalari bilan uzluksiz bo‘lsin. Bu nuqtada ularning barchasi bir vaqtda nolga aylanmasin. Bunday holda $x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{nO}$ nuqta (3) sistemaning maxsus bo‘lmagan nuqtasi bo‘ladi. Aniqlik uchun $\tilde{O}_n (x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{nO}) \neq 0$ bo‘lsin. Qilingan farazlarga ko‘ra (3) sistema $x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{nO}$ nuqta atrofida aniqlangan va uzluksiz bo‘lgan $n - 1$ ta erkli integrallarga ega bo‘ladi. Shuningdek bu integrallarning xususiy hosilalari ham bu nuqta atrofida aniqlangan va uzluksiz hisoblanadi. Bunday bo‘lishligi (3) sistemaning quyidagi $n - 1$ ta tenglamalarning normal sistemasiga teng kuchli bo‘lishligidan kelib chiqadi.

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \frac{dx_{n-}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \tag{4}$$

Bundan esa normal sistema integrallarining mavjudligi haqidagi teorema shartlarining bajarilishligi kelib chiqadi.

1-Teorema. (3) sistemaning xar bir integrali (2) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isboti. (3) sistema $x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{nO}$ nuqta atrofida aniqlangan $\psi (x_1, x_2, \dots, x_n)$ integralga ega bo‘lsin. Bunday holda ψ funksiyaning to‘liq differensiali (3) sistema yoki (4) sistema kuchida aynan nolga aylanadi, ya’ni

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Bu yerda $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ differensiallarni ularning $dx_1 = \frac{X_1}{X_n} dx_n, dx_2 = \frac{X_2}{X_n} dx_n, \dots, dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n$ ifodalariga almashtirib olamiz.

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n = 0$$

Bu tenglikni dx_n ga bo‘lib, $\tilde{O}_n$ ga ko‘paytirib quyidagini olamiz:

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0$$

Bu ayniyat $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lishligini bildiradi.

1-Misol. $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ tenglamaning yechimlari topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos keluvchi simmetrik tenglamani tuzamiz

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}$$

Bu sistemaning integrallovchi kombinatsiyalarini tuzib, uning chiziqli bog‘lanmagan integrallarini topamiz:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{-z} \Rightarrow \ln x = -\ln z + \ln C_1 \Rightarrow xz = C_1 \Rightarrow \psi_1 = xz;$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln y + \ln C_2 \Rightarrow x\sqrt{y} = C_2 \Rightarrow \psi_2 = x\sqrt{y}.$$

Shunday qilib, $U_1 = xz$, $U_2 = x\sqrt{y}$ funksiyalar berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Endi (2) tenglamaning umumiy yechimini quramiz. (3) sistema

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6}$$

erkli integrallarga ega bo‘lsin. Bunday holda

$$z = \phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$$

funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bu yerdagi $\phi - \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ - bo‘yicha uzluksiz xosilalarga ega bo‘lgan istalgan funksiya. Xususiy holda $\phi = const$ bo‘lishi ham mumkin. (7) funksiyani (2) tenglamaga qo‘yib, (6) funksiyalar (2) tenglamaning yechimlari bo‘lishini e’tiborga olsak, quyidagi ayniyatni olamiz:

$$\tilde{O}_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \tilde{O}_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \ldots + \tilde{O}_n\frac{\partial\phi}{\partial x_n} = X_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial\psi_i}\cdot\left(\tilde{O}_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} + \tilde{O}_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2} + \ldots + \tilde{O}_n\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n} \equiv 0\right)$$

Bu ayniyat esa (7) funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lishligini tasdiqlaydi.

(7) formula (2) tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Xususiy hosilali (2) differensial tenglamaning (7) umumiy yechimi oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimidan farq qilib, bu umumiy yechim ixtiyoriy doimiyga bog‘liq bo‘lmasdan, balki ixtiyoriy funksiyaga bog‘liq bo‘lar ekan.

Shunday qilib, (2) tenglamaning umumiy yechimini qurish masalasi bu tenglamaga mos keluvchi simmetrik shakldagi (3) oddiy differensial tenglamalar sistemasining $n-1$ ta erkli integralini topish masalasi bilan teng kuchli ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Saloxitdinov M. S., Nasritdinov G. N.** *Oddiy differensial tenglamalar.*–Toshkent. “O‘zbekiston” 1994.

2. **Mateev N. M.** *Metody integrirovaniya obyknovennyx differensialnyx uravneniy.* –Minsk “Vysheyshaya shkola” 1970.

3. **Filippov A.** *Sbornik zadach po differensialnыm uravneniyam.*–Moskva “Nauka” 1979.

UDC 517.968.21

FREDHOLMNING IKKINCHI TUR INTEGRAL TENGLAMASINI YECHISH USULLARI.

Xayrullayev I. [1], Toshboyev H. [2], Nortajiyev H. [3]
[1,2,3]Termiz davlat universiteti;
xayrullayev0809@mail.com, toshboyevhumoyiddin@gmail.com,
hayitmurodnortajiyev@gmail.com

Matematik analiz, geometriya, differensial tenglamalar va chiziqli operatorlar nazariyasining bir qator masalalari boror integral tenglamani yechish masalasiga keladi. Kvant mexanikasining markaziy masalalaridan biri Shryodingerning statsionar tenglamasini yechish ham Birman-Shvinger tipidagi integral operatorning xos qiymatlarini topish masalasiga, ya’ni integral teglamaning nolmas yechimini topish masalasiga keltiriladi. Shuning uchun biz integral tenglamalarni yechish usullariga to‘xtalmoqchimiz.

Funksional fazoda tenglama berilgan bo‘lib, noma’lum element funksiyadan iborat bo‘lsa, bunday tenglama funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma’lum funksiya integral ostida bo‘lsa, u holda tenglama integral tenglama deyiladi. Masalan,

$$u(s) = \int_a^b K(s,t)g(u(t),t)dt$$

tenglama u ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $k(s,t)$, $g(s,t)$ − berilgan funksiyalar. Integral tenglamadagi ifoda noma’lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo‘lgan holda tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi. Quyidagi tenglama chiziqli integral tenglamaga misol bo‘ladi:

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)u(t)dt = u(s) \qquad (1)$$

Bu yerda u noma’lum funksiya, $K(s,t)$ va $f(s)$ ma’lum funksiyalar.

(1) tenglama *ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi* deyiladi. Agar (1) tenglamaning o‘ng tomoni nol bo‘lsa, u *birinchi tur Fredholm tenglamasi* deyiladi.

Agar (1) tenglamada f funksiya nolga teng bo‘lsa, bu tenglama *bir jinsli integral tenglama* deyiladi.

Biz bu ishda (1) tenglamaning, ya’ni ikkinchi tur Fredholm tenglamasining yechish usullari bilan shug‘ullanamiz. Fredholm integral tenglamasining yechimlari uch xil metod yordamida va uch xil formada beriladi. Bular:

1) Ketma-ket o‘rniga qo‘yish usuli bo‘lib, bu usul Neyman (Nuemann), Volterra (Volterra), Liuvill (Liouville)lar tomonidan rivojlantirilgan. Bu usulda u yechim yagona bo‘lib λ parametrning darajali qatori shaklida ifodalanadi va λ parametr darajasi oldidagi koeffitsiyentlar s ning funksiyasidan iborat. Bu darajali qator λ parametrning absolyut qiymati biror chekli R sondan kichik bo‘lgandagi barcha qiymatlarida yaqinlashadi [1, 2, 3]. Bu usulning kamchiliklaridan biri parametrning katta ($|\lambda > R|$) qiymatlarida yechimning mavjudligi yoki uni topish haqida ma’lumot berilmaydi.

2) Ikkinchi metod Hilbert va Shmidt (Schmidt) lar tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, u yechim $(Tu)(s) = \int_a^b K(s,t)u(t)dt$ integral operatorning xos funksiyalari (fundamental funksiyalari) va ning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanadi [3,4]. Bu metodning kamchiliklaridan biri katta hisoblashlarni talab qiladi. Yechimni aniq ifadalash uchun T operatorning barcha xos qiymatlari va xos funksiyalari topish talab qilinadi. Agar λ^{-1} soni T operator uchun xos qiymat bo‘lsa, u holda (1) tenglama umuman olganda yechimga ega emas. Bu holda yechim mavjud bo‘lishligi uchun $f(s)$ funksiyadan ortogonallik shartlari talab qilinadi. Ortogonallik shartlari bajarilgan holda yechimning mavjudligi aytilsada, uni topish usuli berilmaydi.

3) Uchinchi metod Fredholmga tegishli bo'lib, u yechim λ parametr darajalaridan iborat ikkita qatorning nisbati shaklida ifodalanadi. Suratdagi qator koeffitsiyentlari s ga bog'liq bo'lib, maxrajdagi qator koeffitsiyentlari esa s ga bog'liq emas. Har ikkala qatorlarning yaqinlashish radiuslari cheksiz bo'ladi [1, 2].

Yuqorida keltirilgan usullar ichida eng samaralisi bu Fredholm tomonidan berilgan usuldir. Chunki, Fredholm tomonidan berilgan usulda yechim mavjudligining zarur va yetarli shartlari keltiribgina qolmay, yechim mavjud bo'lgan hollarda, yechimni topish metodini ham beradi. Shuning uchun biz faqat (1) integral tenglamaning Fredholm tomonidan berilgan yechish usuliga to'xtalamiz. Bu ish davomida f dan va K dan o'lchovli va chegaralanganlikni dan esa qo'shimcha simmetriklik shartlarini talab qilamiz, ya'ni:

A) $K(s,t) = K(t,s)$ simmetrik va haqiqiy qiymatli funksiya.

Endi Fredholm tomonidan berilgan yechish usulida muhim o'rin tutadigan *"Fredholm minori"* va *"Fredholm determinanti"* ni keltiramiz:

$$D(x,t;\lambda) = \lambda K(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n} B_{n!}(x,t), \qquad (2)$$

$$B_n(x,t) = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n,$$

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n} A_{n!}, \qquad A_n = \int_a^b B_n(x,t)dt. \qquad (3)$$

(2) va (3) qatorlar λ paramaetrning barcha qiymatlarida absolyut $|\lambda| \leq R$ da esa tekis yaqinlashadi. $D(x,t;\lambda)$ funksiyaga $K(x,t)$ yadro orqali qurilgan (1) integral tenglamaga mos *Fredholm minori*, $\Delta(\lambda)$ ga esa *Fredholm determinanti* deyiladi. Bu funksiyalar orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

$$D(x,t;\lambda) - \lambda K(x,t)\Delta(\lambda) = \lambda \int_a^b K(s,t)D(x,s;\lambda)ds = \lambda \int_a^b K(x,s)D(s;t;\lambda)ds.$$

1-teorema. *A) shart bajarilsin va bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f \in L_2[a,b]$ da (1) integral tenglama*

$$u(s) = f(s) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_a^b D(s,t;\lambda)f(t)dt$$

formula bilan ifodalanuvchi yagona yechimga ega.

Ta'rif. Agar $u(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s,t)u(t)dt$ tenglama noldan farqli yechimga ega bo'lsa, λ_0 ga $K(s,t)$ yadroning xarakteristik soni deyiladi.

2-teorema. *Agar $\lambda = \lambda_0$ soni $K(s,t)$ yodroning q karrali xarakteristik soni bo'lsa, u holda*

$$u(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

tenglama q ta chiziqli bog'lanmagan $\varphi_\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2, \dots q$ uzluksiz yechimga ega va istalgan yechim bu yechimlarnang chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

3-teorema. *Agar $\lambda = \lambda_0$ soni $K(s,t)$ yadroning q karrali xarakteristik soni bo'lsa, u holda (1) tenglama umuman olganda yechimlarga ega emas. Bu tenglama yechimga ega bo'lishi uchun*

$$\int_a^b \varphi_\alpha(t) f(t) dt = 0, \ \ \alpha = 1, 2, \dots q \qquad (5)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli. Agar (5) shartlar bajarilsa, u holda (1) tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lib, ular

$$u(s) = f(s) + \int_a^b H(s,t) f(t) dt + C_1\varphi_1(s) + C_2\varphi_2(s) + \dots + C_q\varphi_q(s) \qquad (6)$$

formula bilan aniqlanadi. (6) da $C_1, C_2, \dots C_q$ ixtiyoriy o'zgarmaslar, $\varphi_\alpha(s)$ $\alpha = 1, 2, \dots, q$ lar (4) tenglamaning fundamental yechimlari, $H(x,t)$ funksiya esa q tartibli minor orqali aniqlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **Abdullayev J. I., G'anixo'jayev R. N., Shermatov M. H., Egamberdiyev O. I.** *Funksional analiz va integral tenglamalar.* Darslik. Toshkent, Yangi asr avlodi. 2013.
2. **Ловитт У. В.** *Линейные интегральные уравнения.* 1958.
3. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** *Лекции по функциональному анализу.*Москва: Мир. 1979.
4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** *Элементы теории функций и функционального анализа.* – Москва: Наука. 1989.

УДК 517.956.6

Бузилиш чизиғида узилишга эга бўлган сингуляр коэффициентли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун нолокал масала

А. А. Абдувалиев
Муқимий номидаги Қўқон давлат педагогика институти abduvaliyevakbarjon74@gmail.com

Қуйидаги тенгламани қараймиз:

$$0 = \begin{cases} x\, u_{xx} + \alpha_0 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \beta_0/y u_y = 0, & x > 0, \quad y < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

бу ерда

$$0 < \alpha_0 < 1 + 2\beta < 1, \quad 2\beta = (m + 2\beta_0)/(m+2), \quad m > 0, \quad -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1, \quad 0 < 2\beta < 1. \qquad (2)$$

Ушбу мақолада (1) кўринишдаги сингуляр коэффициентли параболик-гиперболик тип-даги тенглама учун бузилиш чизиғида узилишга эга бўлган шарти билан берилган масала-нинг бир қийматли ечилиши исботланган.

Ω орқали $x > 0, \ y > 0$ бўлганда $x = 0, \ x = 1, \ y = 1$ мос равишда тўғри чизиғларда ётган $AA_0, \ BB_0, \ A_0B_0$ кесмалар ва $x > 0, \ y < 0$ бўлганда эса (1) тенгламанинг

$$AC: \ \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC: \ \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

характеристикалари билан чегараланган соҳани белгилаймиз.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз: $J = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$,

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0,\ \ y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0,\ \ y < 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J,$$

$$\lim_{y\to\pm 0} u(x,y) = \tau^{\pm}(x),\ \ (x,0) \in \bar{J}, \qquad \lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \nu^{+}(x),\ \ (x,0) \in J,$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0}\, u_y(x,y) = \nu^{-}(x),\ \ (x,0) \in J, \tag{3}$$

$$EC_1:\ \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1, \qquad \Theta\left(x_0\right) = \left(\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{m+2}{4}x_0\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), \tag{4}$$

бу ерда $\Theta(x_0) -\ \ x > 0,\ \ y < 0$ бўлганда (1) тенгламанинг $E(x_0,0) \in J,\ \ \forall x_0 \in \bar{J}$ нуқтасидан чиқувчи EC_1 характеристикаси билан AC характеристикаси кесишиш нуқтасининг координатаси.

BC_p- **масала.** Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u\,(x,y)$ функция топилсин:
1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2),\ \ u_y \in C\left(\Omega_1 \bigcup J\right),\ \ (-y)^{\beta_0} u_y \in C\left(\Omega_2 \bigcup J\right)$;
2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2)$ бўлиб, Ω_1ва Ω_2 соҳаларда (1) тенгламани қаноатлан-тирсин;
3) $u(x,y)$- функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$D^{1-\beta}_{0x} u\left[\Theta\left(x\right)\right] = a\left(x\right)\nu^{-}\left(x\right) + b\left(x\right)\tau^{-}\left(x\right) + c(x), \quad (x,0) \in J, \tag{6}$$

4) J бузилиш чизиғида қуйидаги

$$\lim_{y\to-0} u\left(x,y\right) = p_1(x) \lim_{y\to+0} u\left(x,y\right) + q_1(x), \quad\ (x,0) \in \bar{J}, \tag{7}$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y\left(x,y\right) = p_2(x) \lim_{y\to+0} u_y\left(x,y\right) + q_2(x), \quad\ (x,0) \in J, \tag{8}$$

улаш шартлари бажарилсин, бу ерда $\varphi_1(y),\ \ \ \varphi_2(y),\ a(x),\ b(x),\ c(x),\ p_j(x),\ q_j(x)\ (j = 1,2)-$ берилган функциялар бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

$$\left[a(x) + \gamma_2\Gamma(1-\beta)\right] p_2(x) \ge 0,\ \ p_2(x) \ne 0,\ \ p_1(x) > 0,\ \ p_1(x)b(x) \le 0,\ \ \forall x \in \bar{J}, \tag{9}$$

$$\varphi_i(y) \in C\left[0,1\right] \cap C^1\left(0,1\right), \quad\ (i = 1,2), \tag{10}$$

$$a(x),\ \ b(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J), p_j(x),\ \ q_j(x) \in C\left(\bar{J}\right) \cap C^2\left(J\right),\ \ (j = 1,2), \tag{11}$$

$$c\left(x\right) \in C^2(J), \tag{12}$$

$c\left(x\right)$ функция $x \to 0$ ва $x \to 1$ да $1 - 2\beta$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин, $D^{\sigma}_{\kappa x}\left[\cdot\right]$ - σ каср тартибли интегро-дифференциал оператор[1, 16-19 бетлар], [2]:

$$D^{\sigma}_{0x} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{1+\sigma}}, & \sigma < 0, \\ f(x), & \sigma = 0, \\ \frac{\partial^{[\sigma]+1}}{\partial x^{[\sigma]+1}} D^{\sigma-[\sigma]-1}_{0x} f(x), & \sigma > 0, \end{cases} \tag{13}$$

бу ерда $[\sigma]$ сони $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ сонининг бутун қисми.

Қуйидаги теоремалар исботланган.

1-Теорема.Агар (2) ва (9) шартлар бажарилса, у ҳолда Ω соҳада BC_p масаланинг ечими ягонадир.

2-Теорема. Агар (2) ва (10)-(12) шартлар бажарилса, у ҳолда Ω сохада BC_p масаланинг ечими мавжуд.

BC_p масала ечимининг ягоналиги экстремум принципига асосан [3], мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланади.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* "Высшая школа". Москва. -1985.-304с.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск ."Наука и техника". -1987. -668 с.
3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типас сингулярными коэффициентами.* Ташкент. "Universitet". -2005. -224 с.

УДК 517.95

Об одной нелокальной краевой задачи с условием сопряжения типа Франкля

Абдуллаев А. А.[1], Исломов Х.[2]
[1] Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства-НИУ, Ташкент, Узбекистан; akmal09.07.85@mail.ru
[2]Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан; xislomov@inbox.ru

Задача Франкля с условием Трикоми для уравнений смешанного типов первого рода изучены в работах [1]-[4]. Однако, из-за того, что линия изменения типа уравнения смешанного типа одновременно является огибающей семейства характеристик, т.е. сама является характеристикой, вырождающегося гиперболического уравнения, до сих пор не рассматривались аналоги задачи Франкля с условием Пуанкаре для вырождающегося уравнения эллиптико – гиперболического типа второго рода.

В данном работе исследуется нелокальная краевая задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения эллиптико – гиперболического типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля.

Рассмотрим уравнение

$$sgny\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0. \tag{1}$$

Пусть D – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная при $y > 0$ кривой σ с концами в точках $A(0,0),\ B(1,0)$ и отрезком $AB\,(y=0)$, а при $y<0$ тем же отрезком $AB\,(y=0)$ и характеристиками

$$AC:\quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC:\quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Пусть $D_1 = D\bigcap\{\,y>0\}$, $D_2 = D\bigcap\{y<0\}$, $D = D_1\bigcup D_2\bigcup J$, $J = \{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$, $J_1 = \{(x,y):\ 0<x<c,\ y=0\}$, $J_2 = \{(x,y):\ c<x<1,\ y=0\}$, здесь $2\beta = m/(m+2)$, причем $-1<2\beta<0$.

Обозначим через C_0 точку пересечения характеристики AC с характеристикой, выходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in J$.

Задача . Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C_x^1\left(D_1\cup\sigma\right)\cap C_y^1\left(D_1\cup\sigma\cup J_1\cup J_2\right)\cap C_y^1\left(D_2\cup J_1\cup J_2\right)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше, чем единицы в точках $A\,(0,0)$, $E(c,0)$ и $B\,(1,0)$;

2) $u(x,y)$– является обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 в областях D_j $(j=1,2)$;

3) на линии вырождения $J_1\cup J_2$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = -\lim_{y\to-0} u_y(x,y), \quad (x,0)\in J_1\cup J_2,$$

причем $u_y(x,0\pm0)=\nu^{\pm}(x)$ функция непрерывна и интегрируема в интервале J_j;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\{q(s)A_s[u]+\rho(s)u\}|_\sigma=\varphi(s),\qquad 0<s<l,$$

$$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_1, u(c,0)=0, \tag{2}$$

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=a(x)u(x,0)+b(x),\quad (x,0)\in J_1, \tag{3}$$

где $p\left(x\right)=\delta-kx$, $p'\left(x\right)<0$, $p(c)=c$, $p(1)=0$, $k=c/\left(1-c\right)$, $\delta=c/\left(1-c\right)$, $c\in J$; $l-$ длина всей кривой σ, $s-$ длина дуги σ, отсчитываемой от точки $B(1,0)$, а $\rho(s)$, $q(s)$, $\varphi(s)$, $f(x)$, $a\left(x\right)$, $b\left(x\right)-$ заданные функции.

Условие (3) является аналогом условия Бицадзе - Самарского[3], связывающим значения искомой функции на AC_0 и на отрезке вырождения J_1, а условие (2) - аналогом условия Франкля[2], связывающим значения искомой функции на $[0,c]$ и $[c,1]$. т.е. на данном отрезке задается разрывное условие Франкля вида (2).

Будем предполагать, что кривая σ удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $x(s)$, $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой σ, имеют непрерывные производные $x(s)$, $y(s)$, необращающиеся одновременно в нуль и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка $\kappa(0<\kappa<1)$ в промежутке $0\leq s\leq l$;

2) в окрестностях конечных точек кривой выполняются условия:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|\leq const\, y^{m+1}(s),$$

причём $x(l)=y(0)=0,\quad x(0)=1,\quad y(l)=0.$

При налагании определенных условий на заданных функций, доказывается единственность решения задачи с помощью принципа максимума. Применяя теорию сингулярных интегральных уравнений, уравнения Винера-Хопфа и интегральных уравнений Фредгольма, доказывается теорема существования решения задачи.

Литература

1. **Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А.** *О задаче типа Франкля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.* Сиб. матем. журн., 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.

2. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Дифференциальные уравнения. 2017. т.53. №6. с.778-788.

3. **Моисеев. Е.И. Н. Абаси.** *Базисность собственных функций задачи Франкля с нелокальным условием четности и с разрывом градиента решения.* Дифференциальные уравнения .2007, т.44. № 10, с 1399-1405.

4. **Islomov B.I., Ochilova N. K., Sadarangani K. S.** *On a Frankl-type boundary-value problem for a mixed-type degenerating equation.* Ukr. Mat. Journal. 2019. 71:10 1347-1359 (2019). (English) Ukrainian Mathematical Journal. 2020. 71.

УДК 517.946

Некоторые соотношения гипергеометрической функции Лауричелла и их применения к решению краевых задач

Абдуллаева М. А.
Наманганский государственный университет; maloshabdullayeva30@gmail.com

Символ Похгаммера $(z)_\nu$ при целых ν определяется равенством

$$(z)_\nu = z(z+1)...(z+\nu-1),\ \nu = 1,2,...;\ (z)_0 \equiv 1.$$

Известная гипергеометрическая функция Гаусса $F\left(a,b;c;z\right)$ определяется формулой:

$$F\left(a,b;c;z\right) \equiv F\left[\begin{array}{c} a,b; \\ c; \end{array} z\right] := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m\,m!} z^m,\ \ |z|<1.$$

где a,b и c комплексные числа, причем $c \neq 0,-1,-2,....$

Для гипергеометрической функции Гаусса $F\left(a,b;c;z\right)$ справедливы формула суммирования

$$F\left(a,b;c;1\right) = \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)} \quad \left[c \neq 0,-1,-2,...;\ Re\left(c-a-b\right)>0\right] \tag{1}$$

и формула Больца (по параметру b)

$$F\left(a,b;c;z\right) = (1-z)^{-b}\,F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right). \tag{2}$$

Гипергеометрическая функция Лауричелли $F_A^{(n)}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} F_A^{(n)}\left[\begin{array}{c} a,b_1,...,b_n; \\ c_1,...,c_n; \end{array} z\right] &\equiv F_A^{(n)}\left(a,b_1,...,b_n;c_1,...,c_n;z_1,...,z_n\right) \\ &= \sum_{m_1,...m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+...+m_n}\,(b_1)_{m_1}\cdots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_n)_{m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_n^{m_n}}{m_n!} \\ &\quad [c_k \neq 0;\ \ |z_1|+...+|z_n|<1]. \end{aligned} \tag{3}$$

Для изучения свойств многомерных гипергеометрических функций используются так называемые формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одним переменным, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных.

Теорема 1. При любых натуральных $n \in \mathrm{N}\backslash\{1\}$ справедлива следующая формула разложения

$$\begin{aligned} F_A^{(n)}\left(a,b_1,b_2,....,b_n;c_1,c_2,....,c_n;z_1,...,z_n\right) = \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2\le i\le j\le n)}}^{\infty} \frac{(a)_{A(n,n)}}{M_{i,j}!} \times \\ \times \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(b_k)_{B(k,n)}}{(c_k)_{B(k,n)}} z_k^{B(k,n)} F\left(a+A(k,n),b_k+B(k,n);c_k+B(k,n);z_k\right)\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$M_{i,j}! := m_{2,2}!m_{2,3}!\cdots m_{i,j}!\cdots m_{n,n}!,\ 2\le i\le j\le n,$$

$$A(k,n) = \sum_{i=2}^{k+1}\sum_{j=i}^{n} m_{i,j},\ \ B(k,n) = \sum_{i=2}^{k} m_{i,k} + \sum_{i=k+1}^{n} m_{k+1,i}.$$

Доказательство. Справедливость формулы (4) доказывается методом математической индукции .

Воспользовавшись разложением (4) и формулой (2), нетрудно вывести аналог формулы Больца для гипергеометрической функции Лауричелла в виде

$$F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} a, b_1, ..., b_n; \\ c_1, ..., c_n; \end{matrix} z\right] = \sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2\leq i\leq j\leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{A(n,n)}}{M_{i,j}!} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{(b_k)_{B(k,n)}}{(c_k)_{B(k,n)}} \left(\frac{z_k}{1-z_k}\right)^{B(k,n)}\right] \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left[(1-z_k)^{-b_k} F\left(\begin{matrix} c_k - a + B(k,n) - A(k,n), b_k + B(k,n); \\ c_k + B(k,n); \end{matrix} \frac{z_k}{z_k - 1}\right)\right]. \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть $a, b_1, \ldots, b_n$ – действительные числа, причем $a \neq 0, -1, -2, ...$и $a > b_1 + ... + b_n$. Тогда при $n = 1, 2, ...$ справедлива следующая формула суммирования:

$$\sum_{\substack{m_{i,j}=0 \\ (2\leq i\leq j\leq n)}}^{\infty} \frac{(a)_{A(n,n)}}{M_{i,j}!} \prod_{k=1}^{n} \frac{(b_k)_{B(k,n)} (a-b_k)_{A(k,n)-B(k,n)}}{(a)_{A(k,n)}} =$$
$$= \frac{\Gamma(a - b_1 - ... - b_n) \Gamma^{n-1}(a)}{\prod_{k=1}^{n} \Gamma(a - b_k)}. \tag{6}$$

Доказательство. Формула (6) доказывается методом математической индукции.

Нетрудно видеть, что формула (6) представляет собой естественное обобщение известной формулы суммирования (1).

Теорема 3. Пусть a, b_k и c_k – действительные числа, причем $c_k \neq 0, -1, -2, ...$ и $a > b_1 + ... + b_n > 0$ и $c_k > b_k$. Тогда при $n = 1, 2, ...$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-b_1-\ldots-b_n} F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} a, b_1, ..., b_n; \\ c_1, ..., c_n; \end{matrix} 1 - \frac{z_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, ..., 1 - \frac{z_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]$$
$$= \frac{\Gamma(a - b_1 - ... - b_n)}{\Gamma(a)} \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(c_k)}{[z_k(0)]^{b_k} \Gamma(c_k - b_k)}, \tag{7}$$

где $z_k(\varepsilon)$ – произвольные функции, причем $z_k(0) \neq 0$.

Доказательство. Предельное соотношение (7) непосредственно следует из разложения (5) и формулы суммирования (6).

Применения теорем 1 – 3.

Пусть $\mathbb{R}_m$ – m-мерное евклидово пространство $(m \geq 2)$, $x := (x_1, ..., x_m)$ – произвольная точка в нём и n – натуральное число, причем $n \leq m$. 2^n-ую часть евклидова пространства $\mathbb{R}_m$ определим следующим образом:

$$\Omega \equiv \Omega_m^{n+} = \{x \in \mathbb{R}_m : x_i > 0,\, i = 1, ..., n;\, -\infty < x_j < +\infty,\, j = n+1, ..., m\}.$$

Рассмотрим обобщенное сингулярное эллиптическое уравнение

$$E_\alpha^{(m,n)}(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha_k}{x_k} u_{x_k} = 0, \tag{8}$$

в Ω, где $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и α_k – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$S_k = \{x : x_1 > 0, ..., x_{k-1} > 0,\, x_k = 0,$$
$$x_{k+1} > 0, ..., x_n > 0, -\infty < x_{n+1} < +\infty, ..., -\infty < x_m < +\infty\},$$

$$\tilde{x}_k := (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n, ..., x_m) \in S_k \subset \mathbb{R}_{m-1},$$

$$z_k^{(\delta)} := \prod_{i=1}^{n} z_i^{\delta_i}; \quad \tilde{z}_k^{(\delta)} := \prod_{i=1,\, i\neq k}^{n} z_i^{\delta_i}; \quad R^2 = x_1^2 + ... + x_m^2.$$

Задача Дирихле. Найти регулярное решение $u\left(x\right)$ уравнения (8) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Omega\right)$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x)|_{x_k=0} = \tau_k\left(\tilde{x}_k\right), \quad \tilde{x}_k \in S_k, \quad \lim_{R\to\infty} u\left(x\right) = 0,$$

где $\tau_k\left(\tilde{x}_k\right)$ – такие заданные функции, что

$$\tau_k\left(\tilde{x}_k\right) = \frac{\tilde{\tau}_k\left(\tilde{x}_k\right)}{\left(1 + x_1^2 + ... + x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_m^2\right)^{\varepsilon_k}}, \quad \tilde{\tau}_k\left(\tilde{x}_k\right) \in C\left(\overline{S_k}\right), \quad \varepsilon_k > 0,$$

Именно, благодаря теоремам 1 – 3 удается выписать решение задачи Дирихле в явном виде:

$$u\left(\xi\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \tau_k\left(\tilde{x}_k\right) \tilde{x}_k^{(2\alpha)} \left(x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial q\left(x,\xi\right)}{\partial x_k} \right)\Bigg|_{x_k=0} dS_k\,, \tag{9}$$

где $\xi := \left(\xi_1, ..., \xi_m\right) \in \mathbb{R}_m$, а $q\left(x,\xi\right)$ – фундаментальное решение уравнения (8) [1]:

$$q\left(x,\xi\right) = \gamma \prod_{i=1}^{n} \left(x_i \xi_i\right)^{1-2\alpha_i}\ r^{-2\beta} F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} \beta, 1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_n; \\ 2-2\alpha_1, ..., 2-2\alpha_n; \end{matrix}\ \sigma_1, ..., \sigma_n \right],$$

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$,

$$\beta = \frac{m-2}{2} + n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \ \ \gamma = 2^{2\beta - m} \frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\pi^{m/2}} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left(1-\alpha_k\right)}{\Gamma\left(2-2\alpha_k\right)} \right], \ \ \sigma_k = 1 - \frac{r_k^2}{r^2},$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \xi_i\right)^2, \ \ r_k^2 = \left(x_k + \xi_k\right)^2 + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \left(x_i - \xi_i\right)^2;$$

а $F_A^{(n)}$ – гипергеометрическая функция Лауричелла, определенная формулой (3).

В формуле (9) для краткости принята запись:

$$\int_{S_k} ...dS_k := \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}}_{m-n} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} ... \int_{0}^{+\infty}}_{n-1} ...dx_1...dx_{k-1}dx_{k+1}...dx_n dx_{n+1}...dx_m.$$

Литература

1. **Ergashev T.G.** *Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients* Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2020, **13**(1), 48–57.

UDC 517.953

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Абдуллаев О. Х.[1], Мардонов Б. Д.[2]

[1] Институт Математики имени В.И Романовского; obidjon.mth@gmail.com

[2] Бухарский государственный университет; mardonov335@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию краевых задач для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля. Рассмотрим уравнение

$$f(x,y)=\begin{cases} u_{xx}-D_{oy}^{\alpha}u+p_1\left(x,y,u(x,0)\right), & \text{при } y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+p_2\left(x,y,u(x+y,0)\right), & \text{при } y<0\end{cases} \quad (1)$$

в конечной области $\Omega=\{(x,y)\,0<x<1;\,0<t<h\}$, ограниченная отрезками: $A_1A_2=\{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ \ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):\ \ y=h,\ 0<x<1\}$ при $y>0$ и характеристиками $B_1:\ x+y=0$, $A_1:\ x-y=l$ уравнения (1), при $y<0$, где $D_{oy}^{\alpha}-$ дифференциальный оператор Римана-Лиувилля дробного порядка α, $(0<\alpha<1)$.

Введем обозначения $\Omega^{+}=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega^{-}=\Omega\cap\{y<0\}$ и $I=\{(x,y):\ y=0,\,0<x<l\}$.

Задача A. Требуется найти решение u(x,y) уравнения (1) в области $\Omega\setminus I$, из класса функций $W_1=\big\{u(x,y):\ D_{oy}^{\alpha-1}u(x,y)\in C(\bar\Omega^{+}), u\in C(\bar\Omega^{-})\cap C^2(\Omega^{-}),\ u_{xx}\in C\left(\Omega^{+}\right),$
$u_y\in C\left(\Omega^{-}\cup I\right), D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega^{+}\cup I\right)\big\}$, удовлетворяющее краевые условия:

$$u(0,y)=\phi_1(y)\quad u(l,y)=\phi_2(y)\quad 0\le y\le h; \quad (2)$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\ 0\le x\le l;$$

и условия склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u(x,y)=\mu_1(x)u(x,-0)+\mu_2(x),\,0\le x\le l,$$

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)\int\limits_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_3(x),\,0<x<l$$

где $f(x,y),\ r(x),\ \psi(x),\ p_i(x,y,z(x)),\ \mu_i(x),\ \phi_i(y)\,(i=1,2),\ \lambda_j(x)\,(j=\overline{1,3})-$ заданные функции, причем $\lim\limits_{y\to+0}y^{1-\alpha}\phi_1(y)=\psi(0),\ \sum\limits_{k=1}^{2}\lambda_k^2(x)\neq 0.$

Задача B. Требуется найти решение u(x,y) уравнения (1) в области $\Omega\setminus I$, из класса функций $W_2=\big\{u(x,y):D_{oy}^{\alpha-1}u(x,y)\in C(\bar\Omega^{+}), u\in C(\bar\Omega^{-})\cap C^2(\Omega^{-}),\ u_{xx}\in C\left(\Omega^{+}\right),$
$u_y\in C\left(\Omega^{-}\cup I\right), D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega^{+}\cup I\right), u_x\in C\left(\Omega^{+}\setminus\overline{A_2B_2}\right)\big\}$, удовлетворяющее всем условиям задачи A, кроме (2) которое заменяется на условию
$u_x(0,y)=\phi_3(y)\quad u_x(l,y)=\phi_4(y)\ \ 0\le y<h,$
где $\phi_3(y)$, $\phi_4(y)-$ достаточно гладкие заданные функции.

Фундаментальные исследования для уравнения (1) при $p_i(\cdot)\equiv 0$, принадлежать А.Бердышеву и Э.Каримову [1], [2]. Аналогичные задачи для нагруженных параболо-гиперболических уравнений с дробной производной Капуто исследованы в работах [3],[4] и дрг.

При определенных условиях на заданные функции и на границу области доказывается локальная однозначная разрешимость задачи A, сведя к нелинейному интегральному уравнению Фредгольма 2-го Рода. Задача B эквивалентным образом сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Однозначная разрешимость задачи доказывается методом интегральных уравнений, применяя принцип сжатых отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A. S. Berdyshev, E. T. Karimov and N. Akhtaeva.** *Boundary Value Problems with Integral Gluing Conditions for Fractional-Order Mixed-Type Equation.* Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2011, Article ID 268465, 10 pages.

2. **A. S. Berdyshev, A. Cabada, E. T. Karimov.** *On a non−local boundary problem for a parabolic−hyperbolic equation involving a Riemann−Liouville fractional differential operator.* Nonlinear Analysis, 75 (2012), pp. 3268–3273. J. Phys. A: Math. Theor. 2015. 48 335001.
3. **Obidjon Kh. Abdullaev.** *Solvability of BVPs for the Parabolic-Hyperbolic Equation with Non-linear Loaded Term* Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021, 14(2), 133—145
4. **O. Kh. Abdullaev** *Gellerstedt Type Problem with Integral Gluing Condition for a Mixed Type Equation with Non-linear Loaded Term* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 479-–489.

УДК 517.956

Интегрирование уравнений Гамильтона с использованием интегрального инварианта Пуанкаре-Картана

Абдуллаев Х.А., Касимов О.Ю., Кенжаев Т.А.
Деновский институт предпринимательства и педагогики; odilbek.qosimov84@mail.ru

Канонические преобразование относятся к гамильтоновым системам, и основная цель этих преобразование состоит в том, чтобы заменить данную произвольную гамильтонову систему системой с другой структурно более простой гамильтоновой функцией. Преобразование координат в $2n-$мерном фазовом пространстве (содержащее в общем случае переменную времени t как параметр) $q_i^* = q_i^*(t, q_k, p_k), p_i^* = p_i^*(t, q_k, p_k), (i, k = 1, 2, ..., n)$

$$\frac{\partial(q_1^*, p_1^*, ..., q_n^*, p_n^*)}{\partial(q_1, p_1, ..., q_n, p_n)} \neq 0. \tag{1}$$

Называется каноническим, если это преобразование переводит любую гамильтонову систему

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, (i = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

Снова в гамильтонову систему (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона H^*):

$$\frac{dq_i^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i^*}, \frac{dp_i^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i^*}, (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

Если в фазовом пространстве последовательно выполнить два кононические преобразования, то резельтирующее преобразование снова будет кононическим. Кроме того, преобразование, обратное некоторому кононическому преобразованию, всегда является кононическим и тождественное преобразование $q_i^* = q_i$, $p_i^* = p_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ есть каноническое. Поэтому все кононические преобразование в совокупности образует группу. Для вывода условий, при которых преобразование (1) является кононическим, расмотрим два разширенных $(2n + 1)-$ мерных фазовых пространства (q_i, p_i, t) и (q_i^*, p_i^*, t) переходящих одно в другое при кононические преобразовании (1) и две трубки прямых путей гамильтоновых систем (2) и (3).

Возьмём два произвольных замкнутых контура C и $\bar{C}$ которые охватывают эти трубки и соответствуют друг другу в силу преобразования (1). Кроме того, пересечём обе трубки одной и то же гиперплоскостью $t = const$. В сечении получим два «плоских» контура C_0 и $\bar{C}_0$. Эти контуры также переходят друг друга при кононическом преобразовании (1), так как при кононическом преобразовании велечина t остаётся неизменной. Из инвариантности интеграла Пуанкаре-Картана следует, что

$$\oint_C (\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t) = \int_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{4}$$

$$\oint_{\bar{C}} (\sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta_i^* - H^* \delta t) = \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^*, \tag{5}$$

С другой стороны, если в универсальном интегральном инварианте $\oint \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^*$ перейти к переменным q_i, p_i (i=1,2, ..., , n) с помощью кононического преобразования (1), то этот интеграл перейдёт в некоторый универсальный интегральный инвариант первого порядка в $2n-$мерном фазовом $(q_i, p_i)-$пространстве; по теореме Ли Хуа-чжена полученный инвариант может отличеться только постоянным множителем с от $\oint \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$. Поэтому

$$\oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^* = C \oint_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^*, \tag{6}$$

Из равенство (4) – (6) следует, что

$$\oint_{C} (\sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^* - H^* \delta t) = C \int_{C} (\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t), \tag{7}$$

Если в первом интеграле считать, что переменные $\bar{q}_1, ..., \bar{p}_n$ выражены через переменные $q_1, ..., p_n$ (при этом контур интегрирования $\bar{C}$ заменяется контуром интегрирования C), то равенство (7) может быть переписано так:

$$\oint_{C} [(\sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^* - H^* \delta t) - C(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t)] = 0, \tag{8}$$

Но $C-$совершенно произвольный контур в $(2n+1)-$мерном расширенном фазовом пространстве. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла в равенстве (8), должно быть полным дифференсиалом некоторой функсии от $(2n+1)-$аргументов $q_1, p_1, ..., q_n, p_n$ и t.

Эту функсию нам удобно будет обозначать через $-F(t, q_i, p_i)$; тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^* - H^* \delta t = C(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t) = \delta F, \tag{9}$$

Заметим, что постоянная с в тождестве (9) всегда отлична от нуля, $c \neq 0$, так как выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^* \delta q_i^* - H^* \delta t$ не является полным дифференсиалом и поэтому не может быть равным $-\delta F$.

Функцию F будем называть производящей функцией, а постоянную $c-$валентностью расмотриваемого кононического преобразования (1). Кононическое преобразование будем называт унивалентным, если для него $c = 1$. Необходимым и достаточным условием каноничности переобразования (1) является существование производящей функсии F и некоторой постаянной c, при которых равенство выполняется в силу переобразования (1).

Литературы

1. **Herbert Goldstein.** Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013.C 34-39, C 368-374, C 430-434.

2. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике // 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X. С. 103-117, С. 140-152, С. 153-160.

3. **Уринов А.К. Азизов М.С.** Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // "Научный вестник НамГУ "2019 г., №11. С. 26-37.

4. **3. Antonio Fasano, Stefano Marmi.** Analytical Mechanics // Oxford University Press. 2006. С. 312-314, С. 340-352.

УДК 517.956.6

Краевая задача с условием Бицадз-Самарского для уравнения гиперболического типа второго рода

Абдумуминова Ш.А.
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека abdimuminova1998@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - (-y)^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1, \quad y < 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D полуплоскости $y < 0$, ограниченной характеристиками

$$AC : x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}} = 0, \quad BC : x + (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}} = 1$$

где $A(0,0), \quad B(1,0), \quad C\left(\frac{1}{2}; -2(1-2\beta)^{2\beta-1}\right)$, уравнения (1) и отрезком AB оси $y = 0$

$$2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad -1 < 2\beta < 0. \tag{2}$$

Введем обозначения: $J \equiv AB = \{(x,y) : 0 < x < 1, \quad y = 0\}$
$J_1 = \{(x,y) : 0 < x < c, y = 0\}, \quad J_2 = \{(x,y) : c < x < 1, y = 0\}, \quad c \in J.$

Характеристик уравнения (1), выходящих из точки $E(c,0) \in J$ параллельно с характеристиками AC и BC соответственно обозначим:

$$EP : x - (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c \qquad EQ : x + (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c,$$

$$\theta(x) = \left(\frac{x-1}{2}; -\left[\frac{x+1}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right), \quad \theta^*(x) = \left(\frac{x+c}{2}; -\left[\frac{x-c}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right)$$

-аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $M(x,0) \in J_2$ с характеристиками AC и EP.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача M_1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y)-$ обобщенные решения класса R_2 [1] уравнения (1) в области $D \backslash (EP \cup EQ)$;

3) функция $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y)|_{y=0} = \tau(x), \quad (x,0) \in \overline{J},$$

$$u(x,y)|_{AQ} = \Psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{c}{2},$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x), \quad c \le x \le 1;$$

где $\tau(x), \quad \Psi(x), \quad \rho(x)-$ заданные функции, причем

$$\mu = const \le 0, \quad \tau(0) = \Psi(0) = 0, \quad \Psi\left(\frac{c}{2}\right) = \rho(c), \tag{3}$$

$$\tau(x) \in C(\overline{J}) \cap C^{(1,k)}(J), \quad k > -2\beta \tag{4}$$

$$\Psi(x) \in C^2[0; c/2], \quad \rho(x) \in C^2[c; 1]. \tag{5}$$

Заметим, что задача M_1 для уравнения (1) при $c = 1$ изучена в работе [2].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены (2), (3)-(5), то задача M_1 однозначно разрешима в области D.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. Высшая школа, 1985.304с.
2. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Доклады АН СССР. 1953.Т.88.№2.С.197-200.

УДК 517.956

Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка

Азизов М. С.[1]
[1]Ферганский государственный университет; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение высокого четного порядка вида

$$B^t_{\gamma-1/2}\,(-1)^s \frac{\partial^s}{\partial x^s}\left(\rho\,(x)\,\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right) + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f\,(x,t)\,, \tag{1}$$

где $B^t_{\gamma-1/2} = \partial^2/\partial t^2 + (2\gamma/t\,)\,\partial/\partial t$ – оператор Бесселя, γ, s, k, T – заданные действительные числа, причем $\gamma \in [0, 1/2\,)$, $s, k \in N$, $s < k$, $T > 0$, а $f\,(x,t)$, $\rho\,(x)$ – заданные функции, причем $\rho\,(x) > 0$, $x \in [0,1]$, $\rho\,(x) \in C^s\,[0,1]$ и $\rho^{(j)}\,(0) = \rho^{(j)}\,(1) \neq 0$, если j – нуль или четное число, $\rho^{(j)}\,(0) = 0$, $\rho^{(j)}\,(1) = 0$, если j – нечетное число, $0 \leq j \leq s$.

Задача. *Найти функцию $u\,(x,t)$, обладающую следующими свойствами:*
1) $\dfrac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}} \in C\left(\overline{\Omega}\right), \dfrac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} \in C\,(\Omega)\,;\ t^{2\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C\left(\overline{\Omega}\right), B^t_{\gamma-1/2}(-1)^s\dfrac{\partial^s}{\partial x^s}\left(\rho\,(x)\,\dfrac{\partial^s u}{\partial x^s}\right) \in C\,(\Omega)\,;$
2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);
3) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u\,(x,0) = \varphi_1\,(x)\,, \qquad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma} u_t\,(x,t) = \varphi_2\,(x)\,, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$p\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u\,(0,t) = q\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u\,(1,t)\,,\ q\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u\,(0,t) = p\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u\,(1,t)\,,\ j = \overline{0, k-1},\ 0 \leq t \leq T,$$

где $\varphi_1\,(x)$ и $\varphi_2\,(x)$ – заданные непрерывные функции, а p и q – заданные действительные числа, причем $p \neq q$.

Поставленная задача при $s = 0$, $\rho\,(x) \equiv 1$ исследована в работе [1], а при $s \in N$, $\rho\,(x) \equiv 1$, $q = 0$, $p \neq 0$ – в [2]. В работе [3] в области Ω для уравнения (1) при $s = 0$, $\rho\,(x) \equiv 1$ исследована задача с условиями $\left(\partial^j/\partial x^j\,\right)u\,(0,t) = 0$, $\left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\,\right)u\,(1,t) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, $0 \leq t \leq T$. В работе [4] для уравнения (1) при $s = 0$, $\rho\,(x) \equiv 1$ исследована задача с нелокальными условиями $p\left(\partial^j/\partial x^j\,\right)u\,(0,t) = q\left(\partial^j/\partial x^j\,\right)u\,(1,t) = 0$, $q\left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\,\right)u\,(1,t) = p\left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\,\right)u\,(1,t)\,,\ j = \overline{0, k-1}$, $0 \leq t \leq T$.

Литература

1. Азизов М. С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя. *Scientific bulletin Physical and Mathematical Research.* 2022, №1, С. 95-103.
2. Уринов А.К., Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. *Научный вестник ФерГУ.* 2022, №2. С. 207-224.
3. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки.* 2022. Т. 26, №2. С. 273-292.

4. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2022, т. 32, вып. 2, с. 240-255.

УДК 517.956

Задача в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом, с недостающим условиям Трикоми на граничной характеристике и условием Бицадзе- Самарского на параллельных характеристиках

Аллакова Ш.И.
Термезский государственный университет; shaxnoza.allakova@mail.ru

1. Постановка задачи TBS (Трикоми, Бицадзе- Самарского).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$. В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям

$$m > 0,\ 0 \leq \alpha_0 < (m+2)/2,\ -m/2 < \beta_0 < 1.$$

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0B_0C_0$ ограниченный прямыми

$$A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0B_0 : \beta_0 = -1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треуголнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай когда $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta E_0C_0B_0 \bigcup E_0C_0$ где $E_0 = E_0(0,1)$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0)$

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,\ -R \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\}$, $\overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \leq -1,\ y = 0\}$, $\overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \leq x < +\infty,\ y = 0\}$, $C_0(C_1)$ -точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристикой, исходяшей из точки $E(c,0)$, где произвольное фиксированное число $c \in I$, $D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I,\ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

В настоящей работе для неограниченной области D рассматривается обобшение задачи Трикоми [1, с.128] в случае, когда граничная характеристика AC произвольным образом разбивается на две части: AC_0 и C_0C, и на первой части AC_0 задается локальное условие Трикоми, а на второй части C_0C, и параллельной ей внутренной характеристика EC_1, задется нелокальное условие Бицадзе- Самарского [2], [3], в форме операторов дробного дифференцирования от искомой функции.

Задача TBS (Трикоми, Бицадзе- Самарского). Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса $R_1[1, \text{с}.104]$ в области D^-;
4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = a_0(x)\lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x),\ x\in I\backslash\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x=\pm 1$, $x=c$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$;
5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y)=0,\ y>0, \tag{3}$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;
6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x),\ \forall x\in \overline{I}_i,\ i=1,2; \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC_0}=\psi(x),\ -1\le x\le (c-1)/2; \tag{5}$$

$$D_{c,x}^{1-\beta}u[\theta(x)]=\mu(x)(x-c)^{\alpha}D_{c,x}^{1-\beta}u[\theta^*(x)]+\rho(x),\ c<x<1, \tag{6}$$

где $\theta(x_0)=(x_0-1)/2-i((m+2)(1+x_0)/4)^{2/(m+2)},\ \theta^*(x_0)=(x_0+c)/2-i((m+2)(x_0-c)/4)^{2/(m+2)}$, аффиксы точек пересечения соответственно характеристик C_0C и EC_1 с характеристикой, исходяшей из точки $M(x_0,0),\ \ x_0\in(c,1),\ u[\theta(x)]=u(Re\theta(x),\ Im\theta(x)),\ D_{c,x}^{1-\beta}$ - оператор дробного дифференцирования [1, с.16] $\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \psi(x),\ \mu(x),\rho(x)$ - заданные функции, причем $\tau_1(-1)=0,\ \tau_2(1)=0,\ \psi(-1)=0,\ \rho(c)=0,\ \psi(x)\in C\left[-1,(c-1)/2\right]\bigcap C^{1,\gamma_0}$ $(-1,(c-1)/2),\ \mu(x),\ \rho(x)\in C[c,1]\bigcap C^{1,\gamma_0}$ $(c,1)$ функции $\tau_i(x)=(1-x^2)\overline{\tau}_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)|\le M|x|^{-\delta_0},\ \gamma_0,\ \delta_0$ -положительные постоянные.

Задача TBS отличается от задачи Трикоми лишь условием Бицадзе- Самарского (6), которое нелокально связывает значения производной дробного порядка от искомой функции $u(x,y)$ на параллельных характеристиках $C_0C\subset AC$, и EC_1 [2] отметим, что задача TBS при $\mu=0$ переходит в задачу Трикоми [1, с.128].

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смещанного типа // Москва. Высшая школа, 1985. С.304.*
2. **Бицадзе А.В., Самарский А.А.** *О некоторых простейших обобшениях линейних эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т 185, с.739-740.*
3. **Мирсабуров М.** *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе- Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т 37, с.1281-1284.*

УДК 517.957

Интегрирование нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций.

Алланазарова Т. Ж.[1], Мирзаев О. Э. [2], Исакулова И.[3], **Сувонова М.** [4] "
[1]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха; j.tazagul86@mail.ru
[2,3,4]Самаркандский государственный университет; olim-mirzaev@mail.ru, irodaisokulova@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза вида

$$\begin{cases} p_t = a(t)(p_{xxx} - 6(p^2+q^2)p_x), \\ q_t = a(t)(q_{xxx} - 6(p^2+q^2)q_x), \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{l} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \;\; q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \; x \in R \\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in !^5 (R), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5 (R) \end{array} \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических функций:

$$\begin{array}{l} p(x+\pi,t) = p(x,t), \; q(x+\pi,t) = q(x,t), \; x \in R, \; t \geq 0, \\ p(x,t), \; q(x,t) \in C_x^3(t>0) \bigcap C_t^1(t>0) \bigcap C(t \geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $a(t) \in C([0,\infty))$ заданная непрерывная ограниченная функция.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $p(x,t), \; q(x,t), \; x \in R, \; t > 0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спеткральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \; x \in R, \; t > 0, \; \tau \in R \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что комплексное модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза (кмКдФ) $u_t \pm 6\,|u|\,u_x + u_{xxx} = 0$ было проинтегрировано в работах [1-3], а также [4-5] в классе быстроубывающих и конечнозонных функций. Если запищем комплексное модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза соответствующие знаком $(-)$ в виде эквивалентной ему на вещественную и мнимую части функции $u\,(x,t) = q\,(x,t) - ip\,(x,t)\,, \;\; i = \sqrt{-1}$, то получим система уравнения вида (1).

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n \in Z$. Они совпадают с собственными значениями задачи Дирихле для системы (4) с граничными условиями $y_1(0,\lambda,\tau,t) = 0, \; y_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$, и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$, где $\lambda_n = \lambda_n(\tau,t), n \in Z$ корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0, \Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$. Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), \; n \in Z$, называются лакунами

Числа $\xi_n(\tau,t), n \in Z$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}, \; n \in Z$, называются спектральными параметрами оператора L. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in Z$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in Z$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Теперь с помощью начальных функций $p_0(x+\tau), \; q_0(x+\tau), \; \tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n, \; \xi_n^0(\tau), \; \sigma_n^0(\tau), \; n \in Z\right\}$ оператора $L(\tau,0)$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $p(x,t), \; q(x,t), \; x \in R, \; t > 0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные$\{\lambda_n(\tau,t), \; \xi_n(\tau,t), \; \sigma_n(\tau,t) = \pm 1\}\,, \; n \in Z$, оператора $L(\tau,t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

1. $\frac{\partial \lambda_n(\tau,t)}{\partial t} = 0$,

2. $\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) a(t) \left\{4\xi_n^3(\tau,t) + 4p(\tau,t)\xi_n^2(\tau,t) + \right.$

$$+2\left(p^2(\tau,t) + q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t) + 2\left(p(\tau,t)q_\tau(\tau,t) - p_\tau(\tau,t)q(\tau,t)\right) +$$

$$+2p(\tau,t)\left(p^2(\tau,t)+q^2(\tau,t)\right)-p_{\tau\tau}(\tau,t)\},\quad n\in Z. \tag{5}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t),\ n\in Z$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in Z \tag{6}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z,$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$ с коэффициентами $p_0(x+\tau),\ q_0(x+\tau),\ \tau\in R$. Последовательность $h_n(\xi),\ n\in Z$ участвующая в уравнении (5) определяется по формулам:

$$\begin{gathered}h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\times f_n(\xi),\\ f_n(\xi)=\sqrt{\prod_{k=-\infty,k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}\end{gathered} \tag{7}$$

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\in Z$$

систему дифференциальных уравнения Дубровина можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве :

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\quad x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau)\in \tag{8}$$

где$K=\{x(\tau,t)=(...,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),...)\ :\ \|x(\tau,t)\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})(1+|n|)\,|x_n(\tau,t)|<\infty\}$

Лемма 1. Если $p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^5(R)$, $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т.е.

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\leq L\,\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|\,,$$

где

$$L=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+|k|)\,|k|^3\,\gamma_k<\infty \tag{9}$$

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 1 дают метод решения задачи (1) – (3). Действительно, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n,\ \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z$, оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через $\lambda_n,\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$. Теперь решая задачу Коши (5), (6), при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n\in Z$. Из формулы следов

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right), \tag{10}$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \tag{11}$$

определим функции $p(\tau,t)$ и $q(\tau,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальные функции* $p_0(x),\ q_0(x)$ *удовлетворяют условиям* $p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^5(R),\ \ q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(R)$, *то существует однозначно определяемое решение* $p(\tau,t),\ q(\tau,t)$*задачи (1) – (3), которое определяется соответственно суммой рядов (10), (11) и принадлежит классу* $C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geq0)$.

Литература

1. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., 32:6,44–47(1972).
2. *Лэм Дж.Л.* Введение в теорию солитонов. М.: "Мир". 1983.
3. *Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У.* Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником //Узб. матем. журн., 2003, No1, с. 69–75.
4. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.//Матем.сб.,185:8(1994), с.103–114.
5. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решеня уравнений из АКНС иерархии//Зап. науч. сем. ПОМИ, 2018, т.473, с.205–227.
6. *Matveev V.B.* 30 years of finite-gap integration theory// Phil. Trans. R Soc. A. Vol. 366, p. 837–875 (2008).
7. *Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н.* Интегрирование нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций //Докл. АНРУз. 2021, No6, с.11–15

УДК 517.968.2

Гипергеометрик функциянинг баъзи бир хоссалари ҳақида

Амонов Б.Б.[1], Мусурмонов М. А.[2], Менгноров П. М.[3]
[1,2,3] Термиз давлат университети, Термиз, Ўзбекистон;
amonovbobur91@mail.ru

Ушбу
$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{1}$$
тенгламага гипергеометрик тенглама ёки Гаусс тенгламаси дейилади, бу ерда $a,\ b,\ c-$ параметрлар ихтиёрий ҳақиқий ёки комплекс сонлар билан ифодаланиши мумкин. (1) тенглама $x=0,\ x=1,\ x=\infty$ махсус нуқталарга эга,чунки бу нуқтада (1) тенглама биринчи тартибли тенгламага айланади.

(1) тенгламанинг $x=0$ махсус нуқта атрофидаги ечимлари [1]
$$y_1 = F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n b_n}{n!(c)_n} x^n$$
$$y_2 = x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$$
каби ифодаланади, бу ерда $F(a,b,c;x)-$ Гаусснинг гипергеометрик функцияси деб аталади.

(1) тенгламанинг $x=1$ махсус нуқта атрофидаги ечимини ҳосил қилиш учун x ни $1-x$ га алмаштириш етарлидир. У ҳолда (1) тенгламанинг параметрлари мос равишда $a,\ b,$ ва $1+a+b-c$ параметрларга ўзгаради. (1) тенгламанинг $x=1$ махсус нуқта атрофидаги хусусий ечимлари ушбу
$$y_3 = F(a,b,1+a+b-c;1-x)$$
$$y_4 = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, 1+c-a-b; 1-x)$$
кўринишда бўлади, бу ерда $a-b$ бутун сонлар бўлмаслиги керак ва $|arg(-x)| < \pi$. Гипергеометрик функциянинг баъзи бир хоссалари:
$$\frac{d}{dz} F(a,b,c;z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z) \tag{2}$$
формулани исботлаймиз.
(1) тенгламанинг ечими y_1 га асосан (3) муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз
$$\frac{d}{dz} F(a,b,c;z) = \frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} n z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n(n-1)!(c)_n} nz^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(n-1)!(c)_n} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1}}{k!(c)_{k+1}} z^{k+1} =$$

бу ерда $n-1=k, \quad n=k+1$ алмаштириш киритиб

$$(a)_{k+1} = a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+k) = a(a+1)_k$$

эканини эътиборга олсак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_k b(b+1)_k}{k! c(c+1)_k} = \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{n!(c+1)_n} z^n = \frac{ab}{c} F(a+1,b+1,c+1;z)$$

га эга бўламиз.

Энди

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b,c;z)] = az^{a-1} F(a+1,b,c;z) \tag{3}$$

эканлигини исботлаб кўрсатамиз.

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b,c;z)] = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^{n+a} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} (n+a) z^{n+a-1} \tag{4}$$

бу ерда

$$(a)_n(n+a) = a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n) =$$

$$= a[(a+1)(a+1+1)(a+1+2)\cdots(a+1+n-1)] = a(a+1)_n \tag{5}$$

(5) ни (4)га асосан ва a ни $\sum$ белгисидан ташқарига чиқарамиз, у ҳолда

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b,c;z)] = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^{n+a} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} (n+a) z^{n+a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^{n+a-1} =$$

$$az^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n = az^{n-2} F(a+1,b,c;z)$$

шундай қилиб.

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b,c;z)] = az^{a-1} F(a+1,b,c;z)$$

Энди гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишдаги формуласини келтириб чиқарамиз.

Ушбу интерални қараймиз.

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b} dt$$

Бу ерда

$$(1-zt)^{-b} = (1+(-b))(-zt) + \frac{-b(-b-1)}{2!}(-zt)^2 +$$

$$+ \frac{-b(-b-1)(-b-2)}{3!}(-zt)^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{-b(-b-1)(-b-2)\cdots(-b-n+1)}{n!}(-zt)^n + \cdots =$$

$$1+b(zt)+\frac{b(b+1)}{2!}(zt)^2+\frac{b(b+1)(b+2)}{3!}(zt)^3+\cdots+$$

$$+\frac{b(b+1)(b+2)+\cdots+(b+n-1)}{n!}(zt)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}(zt)^n$$

у ҳолда

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}z^nt^n\right)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}z^n\int_0^1 t^{n+a-1}(1-t)^{c-a-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}z^nB(n+a,c-a) \qquad (6)$$

бу ерда

$$B(n+a,c-a)=\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+a+c-a)}=\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c)} \qquad (7)$$

Бизга маълумки $,\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$
у ҳолда

$$\Gamma(n+a)=\Gamma(n-1+a+1)=(a+n-1)\Gamma(a+n-1)=(a+n-1)\Gamma(a+n-2+1)=$$

$$=(a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\cdots(a+n-1)(a+n-2)(a+n-3)\cdots$$

$$\cdots a\Gamma(a)=(a)_n\Gamma(a), \qquad (8)$$

(8) ифодани эътиборга олиб (7) муносабатни қуйидагича ёзамиз

$$B(n+a,c-a)=\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c)}=\frac{(a)_n\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{(c)_n\Gamma(c)}$$

энди (6) интеграл қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{n!}z^n\frac{(a)_n\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{(c)_n\Gamma(c)}=$$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_a(b)_n}{n!(c)_n}z^n=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;z).$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;z).$$

Адабиётлар

1. **Мирсабуров М., Исломов Б., Исламов Н. Б.** *Иккинчи тартибли сингуляр коэффициентли ноклассик тенгламалар учун коррект қўйилган масалалар.* Тошкент 2020. 141 б.

УДК 517.913

Новый способ вычисления параметризации резонансного многообразия

А. Б. Батхин[1], З. Х. Хайдаров[2]
[1]Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., д.4;
batkhin@gmail.ru
[2]Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова, 140104 Узбекистан, г. Самарканд, Университетский бул., д.15;
zafarxx@gmail.com

В колебательных системах резонансы играют существенную роль. Их присутствие, с одной стороны, приводит к появлению сложной динамики, когда энергия колебаний «перекачивается» между теми степенями свободы, чьи соответствующие частоты находятся в резонансе. С другой стороны, наличие нетривиальных решений резонансного уравнения позволяет получить дополнительные формальные первые интегралы и, как следствие, позволяет провести анализ устойчивости положения равновесия или асимптотически проинтегрировать систему уравнений движения, приведённую к нормальной форме.

Далее рассматриваем автономную гамильтонову систему с аналитической функцией $H(\mathbf{z}; P)$, положение равновесия которой совпадает с началом координат. Гамильтониан $H(z; P)$ представляется в виде ряда однородных полиномов H_k степени k от своих фазовых переменных $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$H(\mathbf{z}; \mathbf{P}) = \sum_{j=2}^{\infty} H_j(\mathbf{z}; \mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P}$ — вектор параметров. В случае общего положения этот ряд начинается с квадратичного гамильтониана $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$, определяющего локальную динамику вблизи положения равновесия. Поведение фазового потока в первом приближении описывается линейной гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = B(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad B(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}. \tag{1}$$

Все собственные значения λ_j, $j = 1, \ldots, 2n$, матрицы B могут быть упорядочены таким образом, что $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ множество *базисных собственных значений.*

Характеристический многочлен матрицы B является многочленом от $\mu = \lambda^2$:

$$f(\mu) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(\mathbf{P})\mu^j, \quad f_0 \equiv 1. \tag{2}$$

Существует [1] каноническое формальное преобразование которое приводит исходную систему Гамильтона к её *нормальной форме* $\dot{\mathbf{u}} = \partial h / \partial \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = -\partial h / \partial \mathbf{u}$, с нормализованным гамильтонианом $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, $\sigma_j = \pm 1$, который содержит только резонансные члены $h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}}$, удовлетворяющие условию $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. Здесь $0 \leqslant \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geqslant 2$ и $h_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты.

Это уравнение имеет два вида решений, которым соответствуют два вида резонансных членов в нормальной форме:

1. *Вековые члены* вида $h_{\mathbf{pp}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, которые всегда присутствуют в гамильтоновой нормальной форме из-за особой структуры матрицы B линейной части системы (1).
2. *Строго резонансные члены*, которые соответствуют нетривиальным целочисленным решениям *резонансного уравнения*
$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{3}$$

Определение ([2, Гл I, §3]). *Кратность резонанса* $\mathfrak{k}$ — это число линейно независимых решений $p \in \mathbb{Z}^n$ резонансного уравнения (3). *Порядок резонанса* равен $\mathfrak{q} = \min |\mathbf{p}|$ по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0$. Если решение резонансного уравнения содержит только два собственных значения, то такой резонанс называется *двухчастотным резонансом*, если более двух — то *многочастотным резонансом.* Резонансы порядков 2, 3 и 4 назовём *сильными*, больших порядков — *слабыми* резонансами.

Определение. *Резонансным многообразием* $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в пространстве $\mathbf{K}$ коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ полухарактеристического многочлена $f_n(\mu)$ степени n назовём такое алгебраическое многообразие, на котором вектор базовых собственных значений $\boldsymbol{\lambda}$ является нетривиальным решением резонансного уравнения (3) для фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{p}$. Аналитическое представление многообразия $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ в неявной или параметрической формах далее обозначим $R_n^{\mathbf{p}}$.

В работе определяются условия существования резонансного соотношения (3) между базисными собственными частотами нелинейной колебательной системы Гамильтона в терминах коэффициентов характеристического многочлена его линейной части для трёхчастотных резонансов кратности 1. Такие же условия для двухчастотных резонансов получены ранее в [3].

1) Авторами в [4] был предложен метод нахождения условия существования резонансов, в котором после получения резонансного соотношения применяется степенное преобразование и после вычисляется параметризация для упрощённых условий.

- Для некоторого вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}_n$, удовлетворяющего резонансному уравнению (3), составляется полиномиальный идеал $J = \left\{\langle \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\lambda}\rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \ldots, n\right\}$.
- Вычисляется базис Грёбнера $\mathcal{G}$ этого идеала с подходящим мономиальным порядком переменных $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \ldots, n$ так, что бы первый полином этого базиса содержал только переменные μ_j. Он определяет условие существования резонанса для заданного вектора $\mathbf{p}^*$.
- Для получения соответствующего резонансного условия для коэффициентов $a_j, j = 1, \ldots, n$ многочлена (2) строится новый базис Грёбнера $\mathcal{F}$ идеала, содержащего полученное условие для μ_j и связи коэффициентов исходного полухарактеристического полинома с его корнями, в виде элементарных симметрических полиномов третьей степени. Первый полином вычисленного базиса, зависящий только от a_j, является условием существования резонанса в терминах коэффициентов многочлена.

Такой метод оказался очень трудоёмким для резонансов общего вида.

2) Здесь предлагается иной подход для резонанса вида $\mathbf{p}^* = (r, 1, 1)$, где $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$:

- Вычисляется условие существования резонанса, зависящее от корней многочлена (2). Оно записывается с помощью квадратичной формы
$$r^4\mu_1^2 - 2r^2\mu_1\mu_2 - 2r^2\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 - 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2 = 0. \tag{4}$$
- Для неё выполняется степенное преобразование с заменой переменных
$$\mu_3 = s_3, \quad \mu_2 = s_1 s_3, \quad \mu_1 = \frac{s_2 s_3}{r^2}$$
которое приводит (4) к виду
$$R_3^{(r,1,1)} \equiv s_1^2 - 2s_1 s_2 + s_2^2 - 2s_1 - 2s_2 + 1 = 0,$$
с помощью которого находится параметрическое представление корней
$$\mu_3 = t_2\left(t_1 + 1\right)^2, \quad \mu_2 = \left(t_1 - 1\right)^2 t_2, \quad \mu_1 = \frac{4t_1^2 t_2}{r^2}.$$
- Это параметрическое представление с помощью элементарных симметрических многочленов даёт параметризацию резонансного многообразия в неявном представлении
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3^{(r,1,1)} \equiv &\Big\{ r^4 a_1^6 - 2r^2\left(r^4 + 4r^2 + 1\right) a_1^4 a_2 + 2\left(r^4 - 3r^2 - 2\right)\left(r^2 - 1\right)^2 a_1^3 a_3 + \\ &+ \left(r^4 + 10r^2 + 1\right)\left(r^2 + 1\right)^2 a_1^2 a_2^2 - 2\left(r^4 - 9\right)\left(r^2 + 1\right)\left(r^2 - 1\right)^2 a_1 a_2 a_3 - \\ &- 4\left(r^2 + 1\right)^4 a_2^3 + (r - 1)^3 (r + 1)^3 \left(r^2 + 3\right)^3 a_3^2 = 0 \Big\},\end{aligned}$$
а так же его параметризацию
$$\left\{a_1 = 2t_2\left(t_1^2 + 1 + 2t_1^2/r^2\right), a_2 = t_2^2\left((t_1^2 - 1)^2 + 8t_1^2(t_1^2 + 1)/r^2\right), a_3 = 4t_1^2 t_2^3\left(t_1^2 - 1\right)^2/r^2\right\}.$$

3) Получены соотношения связывающие новую и старую [4] параметризации. Они проверены для трёхчастотных резонансов порядка 3 и 4.

Заключение. Новый способ вычисления параметризаций резонансных многообразий позволяет легко находить их параметрическое представление для системы с тремя степенями свободы и обобщается на случаи больших размерностей и резонансов больших кратностей.

Литература

1. **Брюно А. Д.** Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // *Тр. ММО.* 1972. Т. 26. С. 199—239.

2. **Брюно А. Д.** *Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты.* М. : Наука, 1990. 296 с.

3. **Батхин А. Б.** Параметризация множества, определяемого обобщенным дискриминантом многочлена // *Программирование.* 2018. № 2. С. 5—17.

4. **Батхин А.Б., Хайдаров З.Х.** Сильные резонансы в нелинейной системе Гамильтона // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2022. № 59. 28 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2022-59.

УДК 517.927

Нелокальный аналог задачи Трикоми для модельного уравнения смешанного типа

Бердишев А.С.[1], Рузиева З.Ф.[2], Базарбаева Б.А.[3]
[1,3]Казахский Национальный педагогический университет, им. Абая, Казахстан; berdyshev@mail.ru , bbikaa26@gmail.com
[2]Термезский государственный университет; tftecybee@gmail.com

Работа посвящена изучению однозначной разрешимости нелокального аналога задачи Трикоми для модельного уравнения смещанного типа.

Рассмотри модельное уравнение смещанного типа

$$signyU_{xx} + U_{yy} = f(x, y), \tag{1}$$

В конечной односторонний области Ω посности независимых переменных x и y, ограниченной при y>0 кривой G, оканчивающиеся в толках A(0,0) и B(1,0), при y<0 - характеристиками

$AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения (1).

Пусть гладкая кривая $AD : y = \gamma(x), l < x1$, где $0 \leq l \leq 0,5, \gamma(1) = 0, l + \gamma(e) = 1$, расположена внутри характеристического треугольника $0 \leq x + y \leq x - y \leq 1$. Относительно кривее BD всюду в дальнейщем предположем, что $\gamma(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция и $0 < \gamma'(x) < 1, \gamma(x) > 0, x > 0$.

В работе в области Ω изучается вопросы однозначной разрешимости нелокального аналога Трикоми для уравнения (1) , где в гиперболической части смещенной области нелокальная условие поточечной связывает значение касательной производной искал иго решения на характеристики BC искомой функции на кривой BD, лежащей внутри характерического треугольника ABC, с концами в начале координат и на характеристике AC (в точке A)

Доказаны теоремы существования и единственности решения следующей задачи.

Задаче M_1T. Найти решения уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$U(x, y) = 0, (x, y) \in G.$$

$$[U_x + U_y][\theta_1(t)] + \mu(t)[U_x + U_y][\theta_2^*(t)] = 0, 0 < t < 1$$

где $\theta_1(t)(\theta_2^*(t))$- аффикс точки пересечения характеристики BC (кривой BD) с характеристикой , входящей из точки $(t, 0), 0 < t < 1, \mu(t)$ заданная функция.

В случае , когда $\mu(t) \equiv 0$ задача M_1T совпадает вариантом задачи Трикоми для уравнения (1) (см. [1]).

Другой аналог задачи M_1T изучена в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства Инновационного развития Республики Узбекистан (фундаментальный проект Ф3 - 202009211)

Литература

1. **Бицадзе А.В.** *Уравнения смешанного типа.* М.: Москва Издательство АН ССР. - 1959. - 164 с.
2. **Бердышев А.С., Базарбаева Б.А., Рузиева З.Ф.** *Нелокальная задача для уравнения Лаврентьева Бицадзе.* //Материалы IX международной научной конференции. "Проблемы дифферциалных уравнения, анализа и алгебры". Региональный университет Актобе. 24-28 мая 2022 года. Актобе 2022 с. 121-126.

UDC 517.956.32

Задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения с памятью

Бердьешев А.С.[1], Шакаева Э.Э.[2]
[1]Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан. berdyshev@mail.ru
[2]Термезский Государственный университет; shakayeva@gmail.ru

Работа посвящена к изучению вопросов одназначной разрешимости одного класса задач с уравнеиями Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения с памятью.

Рассмотрим уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + d(x,y)D^l_{ox}u(x,y) + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1}$$

в конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной отрезком AB, $A(0,0)$, $B(1,0)$ и характеристиками $AC: \quad x+y = 0$, $\quad BC: \quad x-y=1$ уравнения (1).

Пусть гладкая кривая $AD: \quad y = -\gamma(x), \quad 0 \le x < l$, расположена внутри характеристического треугольника

$$ABC\,(\Omega): \qquad 0 \le x+y < x-y \le 1$$

здесь $\frac{1}{2} < l < 1, \quad \gamma(0) = 0, l - \gamma(l) = 1$.

Относительно кривой $\gamma(x)$ будем предполагать, что функции $x \pm \gamma(x)$ монотонно возрастают. Здесь $d(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ – заданные функции и

$$D^l_{ox}u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int\limits_0^x \frac{u(t,y)dt}{(x-t)^{1+l}}, & l < 0 \\ \frac{d}{dx} D^{1-l}_{ox} u(x,y), & 0 < l < 1 \end{cases}$$

оператор дробного интегродифференцированая в смысле Римана - Лиувилля.

Задача $M_1\Gamma$. Найти решение уравнение (1), удовлетворяющее условиям

$$a(x)u_x(x,0) + b(x)u_y(x,0) = 0, \quad u(A) = 0 \tag{2}$$

$$[u_x - u_y][\theta_0(t)] + \mu(t)[u_x - u_y][\theta^*_0(t)] = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{3}$$

где $\theta_0(t)$ $[\theta^*_0(t)]$-аффиксы точки пересечения характеристики AC (кривой AD) с характеристикой, выходящей из точки $(t,0)$, $\mu(t)$ – заданная функция.

В случае, когда $\mu(t) \equiv 0$, $d(x,y) = 0$ задача $M_1\Gamma$ совпадает с различными вариантами задач Дарбу для гиперболического уравнения.

При определенных ограничениях на данные задачи доказано теоремы о существования и единственности задачи $M_1\Gamma$. Отметим, что аналогичные нелокальные задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнения изучена в работе [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства Инновационного развития Республики Узбекистан (фундаментальный проект ФЗ - 202009211).

Литература

1. **Бердышев, А. С.** *Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного парабола-гиперболического и смешанного-составного типов.* “Казахский Национальный педагогический университет имени Абая.” Институт информационных и вычислительных технологий. - Алматы, 2015, -224 ст.

517.956.6

Об одной регуляризация сингулярного интегрального уравнения

Болтаев Н.Д.[1], Мусурмонов М.А.[2], Косимов М.Р.[3]

[1] Ташкентский государственный транспортный университет;

[2,3] Термезский государственный университет; marufmusurmonov185@gmail.com

Рассмотрим следующие сингулярное интегральное уравнение

$$\tau(x) + \lambda \int\limits_0^a \left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right)\tau(t)dt =$$

$$= \lambda \int\limits_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x), \quad x \in (0,a), \tag{1}$$

где $R_2[\tau]-$ регулярный оператор.

Первый интегральный оператор правой части уравнение (1) не является регулярным, так как подинтегральное выражение при $x = 0,\ t = 0$ имеет изолированную особенность первого порядка, и поэтому это слагаемое в (1) выделено отдельно.

Для решения уравнения (1) применим метод Карлемана- Векуа развитого С. Г. Михлиным [1]. Правую часть уравнения (1) временно будем считать известной функцией, и перепишем его в виде

$$\tau(x) + \lambda \int\limits_0^a \left(\frac{a-x}{a-t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right) \tau(t)dt = g_0(x), \tag{2}$$

где

$$g_0(x) = \lambda \int\limits_0^a \frac{\tau(t)dt}{t+x} + R_2[\tau] + F(x). \tag{3}$$

В обозначениях

$$(a-x)^{2\beta-1}\tau(x) = \rho(x), \quad (a-x)^{2\beta-1}g_0(x) = g(x)$$

уравнение (2) запишем в виде

$$\rho(x) + \lambda \int\limits_0^a \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right) \rho(t)dt = g(x). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) будем искать в классе функций Гёльдера H, которая ограничена при $x = a$ и может обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$ при $x = 0$, т.е. в классе $h(a)$ [2, с.43].

Пусть $z-$ произвольная точка комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Следуя идея Карлемана, положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^a \left(\frac{1}{t-z} - \frac{a}{a^2-zt}\right) \rho(t)dt. \tag{5}$$

Очевидно,$\Phi(z)$ голоморфна на всей плоскости z с разрезом вдоль отрезка $[0,a]$ и луча $[a,\infty)$ вещественной оси x. Отметим ещё, что $\Phi(z) \to 0$, если $Rez \to \infty$. Формулы Сохоцкого- Племеля для (5), при $0 < x < a$ имеют вид

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \rho(x), \tag{6}$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^a \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{a^2-xt}\right) \rho(t)dt, \tag{7}$$

где $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)-$ предельные значения функции $\Phi(z)$, когда z стремится к точке Ox действительной оси, соответственно, из верхней или из нижней полуплоскости.

В силу (6) и (7) уравнение (4) имеет вид

$$(1+\lambda\pi i)\Phi^+(x) - (1-\lambda\pi i)\Phi^-(x) = g(x), 0 < x < a. \tag{8}$$

Преобразование

$$W = a^2/z \tag{9}$$

переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот при этом промежуток $(0,a)$ переходит в промежуток (a,∞). Нетрудно проверить, что $\Phi(a^2/z) = (z/a)\Phi(z)$. В силу (9) из (5) для граничных значении $\Phi(z)$ нетрудно получить следующие соотношения

$$\Phi^+(a^2/x) = (x/a)\Phi^-(x),\ \Phi^-(a^2/x) = (x/a)\Phi^+(x). \tag{10}$$

В силу (8) из (10) имеем

$$(1-\lambda\pi i)\Phi^+(x) - (1+\lambda\pi i)\Phi^-(x) = -(a/x)g(a^2/x), \quad a < x < \infty, \tag{11}$$

Так как $\lambda = \cos(\beta\pi)/\pi(1+\sin(\beta\pi))$, то легко вычислить, что $1+\lambda\pi i = e^{i\alpha\pi}/\cos(\alpha\pi),\ 1-\lambda\pi i = e^{-i\alpha\pi}/\cos(\alpha\pi)$, где $\alpha = (1-2\beta)/4$.

Введём функции

$$G(x)=\begin{cases}(1-i\pi\lambda)/(1+i\pi\lambda)=e^{-2i\pi\alpha} \ \text{ при } \ 0<x<a,\\ (1+i\pi\lambda)/(1-i\pi\lambda)=e^{2i\pi\alpha} \ \text{ при } \ a<x<\infty,\\ 1 \ \text{ при } \ x\notin(0,a)\bigcup(a,\infty).\end{cases} \tag{12}$$

$$h(x)=\begin{cases}e^{-i\pi\alpha}\cos(\alpha\pi)g(x) \ \text{ при } \ 0<x<a,\\ -e^{i\pi\alpha}\cos(\alpha\pi)(a/x)g(a^2/x) \ \text{ при } \ a<x<\infty,\\ 0 \ \text{ при } \ x\notin(0,a)\bigcup(a,\infty).\end{cases} \tag{13}$$

При этих обозначениях уравнения (8) и (11) можно объединить в одно уравнение:

$$\Phi^+(x)-G(x)\Phi^-(x)=h(x),\ -\infty<x<\infty. \tag{14}$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (4) приведено к следующей задаче теории функции комплексного переменного: *найти исчезающую на бесконечности функцию $\Phi(z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскостях, удовлетворяюшую граничному условию (14).*

Сначала решим следующую однородную задачу: *найти ограниченную на бесконечности функцию $X(z)$, голоморфную как в верхней полуплоскости, так и в нижней полуплоскости, а на действительной оси Ox удовлетворяющую условию*

$$X^+(x)=G(x)X^-(x).\ \ x\in(-\infty,\infty) \tag{15}$$

или, что тоже

$$\ln X^+(x)-\ln X^-(x)=\ln G(x)$$

Одно из частных решений уравнения (15) имеет вид

$$X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^a\left(\frac{1}{t-z}-\frac{z}{a^2-zt}\right)\ln G(t)dt\right\}. \tag{16}$$

Из (16) легко усмотреть, что $X\left(a^2/z\right)=X(z)$. Из (16) , нетрудно вычислить, что

$$X^+(x)=\frac{(ax)^\alpha}{(a-x)^{2\alpha}}e^{-\alpha\pi i},\ \ X^-(x)=\frac{(ax)^\alpha}{(a-x)^{2\alpha}}e^{\alpha\pi i},\ 0<x<a, \tag{17}$$

Теперь неоднородное граничное условие (14) в силу (15) можно переписать в виде [3, с.33]

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=\frac{h(x)}{X^+(x)},\ \ x\in(-\infty,\infty). \tag{18}$$

Одно из частных решений задачи о скачке (18) имеет вид [3, с.30]

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^a\frac{h(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z}+\int_a^\infty\frac{h(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z}\right], \tag{19}$$

в втором интеграле (19) сделав замену t на a^2/s, с учётом (12), (13), (15) и (17) имеем

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{e^{-i\pi\alpha}\cos(\alpha\pi)}{2\pi i}\int_0^a\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{a}{a^2-zt}\right)dt.$$

Теперь найдём общее решение граничной задачи (18), для этого рассмотрим однородное уравнение $\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=0$. Это уравнение показывает, что $\chi(z)=\Phi(z)/X(z)$ голоморфна на всей комплексной плоскости, кроме, может быть,точек $z=0,\ z=a$, которые могут быть только полюсами. $\chi(z)=\dfrac{c}{z(a-z)}$. Здесь, используя вторую обобщенную теорему Лиувилля об аналитическом продолжении [3, с.29], находим общее решение

$$\Phi(z)=\frac{e^{-i\pi\alpha}\cos(\alpha\pi)}{2\pi i}X(z)\int\limits_0^a\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{a}{a^2-zt}\right)dt+\frac{cX(z)}{z(a-z)}. \tag{20}$$

Здесь с учётом того, что решение $\rho(x)$ в точке $x=a$ имеет особенность порядка ниже $1-2\beta$, а при $x=0$ ограничено, находим, что $c=0$, следовательно в силу формул Сохоцкого– Племеля (6) имеем

$$\rho(x)=\frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}g(x)-\frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\int\limits_0^a\left(\frac{a-t}{a-x}\right)^{2\alpha}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{a^2-xt}\right)g(t)dt.$$

Литература

1. **Михлин С.Г.** *Об интегральном уравнении F.Trikomi.* //ДАН СССР.1948.т.59,№6, с.1053-1056.
2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М.,1985,-304с.
3. **Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.** *Уравнения типа свертки.*М., 1978,-269с.

УДК 517. 956. 6

Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода с нелокальным краевым условием в неограниченном паролелепипеде

Джамалов С. З.[1], Сипатдинова Б. К.[2], Исламова Д.[3],Мирзаева Г.[4]

[1,2]Институт Математики АН РУз;

siroj63@mail.ru sbiybinaz@mail.ru

[3,4]Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;

dildoraislomova01101995@gmail.com., gulimirzoyeva1992@mail.com

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [1]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого,так и второго рода в ограниченных областях изучены в монографии [2]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода второго порядка в неограниченных областях [3,4], а для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях обратные задачи практически не иследованы.

Для решения данной проблемы в настоящей работе, по исследованию однозначной разрешимости обратных задач для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном паролелепипеде предлагается метод, который основан на приведении обратных задач к прямым нелокальным краевым задачам для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в ограниченной прямоугольной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [5].

В области

$$G=(0,1)\times(0,T)\times\mathbb{R}=Q\ \times\mathbb{R}=\{(x,t,z);x\in(0,1);t\in(0,T);z\in\mathbb{R}\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu=k(t)u_{tt}-\Delta u+\alpha\left(x,t\right)u_t+c\left(x,t\right)u=\psi\left(x,t,z\right), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа, $k(0)\leq 0\leq k(T)$,
$\psi\left(x,t,y\right)=g\left(x,t,y\right)+h\left(x,t\right)\cdot f\left(x,t,y\right)$, $g\left(x,t,y\right)$ и $f\left(x,t,y\right)$ -заданные функции, а функция $h\left(x,t\right)$ подлежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [6]. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Линейная обратная задача

Найти функции $(u(x,t,z),\ h(x,t))$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u\left(x,t,z\right)$ удовлетворяет следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1} \tag{3}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0\,(x,t); \ell_0 \in R \tag{4}$$

при $p = 0,1$, где γ и $\eta-$ некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже, а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \{\,(u,h)|\ \ u(x,t,y) \in W_2^{2,3}(G\,);\, h(x,t) \in W_2^2(Q\,).\}$$

.

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$.

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2}\ \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\lambda|^2\right)^3 \cdot \|\hat{u}\,(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha-$ мультииндекс, $D^\alpha-$обобщенная производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\,e^{-i\lambda z}dz$$

-преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$.

Замечание 1. Анологично изучаются обратные задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке научного гранта Министерства инновационного развития Республики Узбекистан, Ф-ФА-2021-424.

Литература

1. **Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г.** *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.* Новосибирск. Наука, С.1969–67

2. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Монография. Ташкент.2021г, С.176.

3. **Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Kh.Sh.** *The Linear Inverse Problem for the Three-Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, T.42.№15, pp. 3606–3615.

4. **Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh.** *On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain.* Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, T.42.№1, pp.1–12.

5. **Нахушев А. М.** *Нагруженные уравнения и их приложения.* Дифференц, уравнения, 1983, Т.19, №1, С.86–94.

6. **Врагов В.Н.** *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983.с.84

УДК 517. 956. 6

Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения Трикоми с нелокальным краевым условием в призматической неограниченной области

Джамалов С. З.[1], Туракулов Х. Ш.[2], Mirzoyeva G.[3]
[1,2]Институт Математики АН РУз; siroj63@mail.ru e-mail hamidtsh87@gmail.com
[3]Бухарский государственный университет; gulimirzoyeva1992@mail.com

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [1]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого,так и второго рода в ограниченных областях изучены в монографии [2]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода (в частности для уравнения Трикоми) второго порядка в неограниченных областях [3,4]. С этой целью в данной работе, для исследования однозначной разрешимости обратных задач для уравнения Трикоми второго порядка в неограниченном паролелепипеде предлагаются методы, которые основаны на приведении обратных задач к прямым нелокальным краевым задачам для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми второго порядка в ограниченной прямоугольной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [5].

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R.\},$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + \alpha\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = \psi\,(x,t,z) \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа. Здесь $\psi\,(x,t,y) = g\,(x,t,y) + h\,(x,t)\,f\,(x,t,y)$, $g\,(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Линейная обратная задача

Найти функции $(u(x,t,z),\ h(x,t))$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u\,(x,t,z)$ удовлетворяет следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p\,u|_{t=0} = D_t^p\,u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p\,u|_{x=-1} = D_x^p\,u|_{x=1} \tag{3}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0\,(x,t); \ell_0 \in R \tag{4}$$

при $p = 0,1$, где $D\,_x^p u = \frac{\partial\,^p u}{\partial\,x\,^p}$, $D\,_x^0\,u = u$; γ и $\eta-$ некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже, а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежат классу

$$U = \left\{ (u,h)|\ \ u \in W_2^{2,3}(G\,);\, h \in W_2^2(Q\,) \right\}.$$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$.

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2}\ \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |\lambda|^2\right)^3 \cdot \|\hat{u}\,(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ - пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{|\alpha| \le 2} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha-$ мультииндекс, $D^\alpha-$обобщенная производная по переменным x и t.

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$.

Замечание 1. Анологично изучаются обратные задачи для многомерного уравнения Трикоми.

Работа выполнена при финансовой поддержке научного гранта Министерства инновационного развития Республики Узбекистан, Ф-ФА-2021-424.

Литература

1. **Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г.** *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.* Новосибирск. Наука,1969, С.67

2. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Монография. Ташкент.2021, С.176.

3. **Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Kh.Sh.** *The Linear Inverse Problem for the Three-Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, T.42.№15, pp. 3606–3615.

4. **Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh.** *On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain.* Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, T.42.№1, pp.1–12.

5. **Нахушев А. М.** *Нагруженные уравнения и их приложения.* Дифференц. уравнения, 1983, Т.19, №1, С.86–94.

6. **Врагов В.Н.** *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983.с.84

УДК 517.956.47

О некоторой линейной четырехточечной обратной задаче для трехмерного уравнения распространения тепла в параллелепипеде

Джамалов С. З.[1], Худойкулов Ш. Ш.[2], Мамбетсапаев К. А.[3],Саматова А.[4]
[1,2] Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз;
siroj63@mail.ru, xudoykulov1194@gmail.com
[1,3] РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина; siroj63@mail.ru, mr.kurbaniyaz@gmail.com
[4] Какандский государственный педагогический университет; azizasamatova1996@gmail.com

В связи с существенно возросшими за последние десятилетия возможностями вычислительной техники в прикладной математике, начинают находить применения сложных математических моделей, учитывающие значительно большее количество физических факторов. Известно что, нелокальная задача первого рода для уравнения Штурма-Лиувиля (когда граничное условие задается в виде линейной комбинации во внутренних точках отрезка) впервые изучалась В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым [1]. Как мы знаем, для таких задач, получить априорные оценки очень сложно, поэтому не удается доказать однозначную разрешимость решения таких задач в многомерных случаях. Чтобы изучить эти задачи в многомерных случаях, нам удалось свести эти задачи к изучению многоточечных обратных задач. Исследование задачи - это нахождение не только решения уравнения, но и четырех-неизвестных внешних сил уравнения, по заданным четырех-известным функциям или дополнительным условиям решения уравнения, так называемым четырехточечным обратным задачам. В этой связи следует особо отметить, что процессы управления колебательных процессов, задачи управления распространения тепла, тесно связаны именно с четерехточечными обратными задачами для трехмерного уравнения распространения тепла [1, 2].

С этой целью в данной работе исследуется однозначная разрешимость некоторой линейной четырехточечной обратной задачи (Л.М.О.З) для трехмерного уравнения распространения тепла в параллелепипеде.

В области $G = (0,T)\times(0,1)\times(0,l) = Q\times(0,l) \subset R^3$ рассмотрим трехмерное уравнение распространения тепла.

$$Lu = u_t - (u_{xx} + u_{yy}) + c(x,t)u = \sum_{i=1}^{4} h_i(x,t) f_i(x,t,y), \tag{1}$$

где $c(x,t)$ и $f_i(x,t,y)$, $\forall i=\overline{1,4}$. - заданные функции.

Л.М.О.З. Найти функции (u,h_1,h_2,h_3,h_4),удовлетворяющие уравнению (1) в области G такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет полунелокальным краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0}=u|_{t=T}; \tag{2}$$

$$u\,|_{x=0}=u\,|_{x=1}=0, \tag{3}$$

$$u\,|_{y=0}=u\,|_{y=l}=0, \tag{4}$$

с дополнительными условиями

$$u\,|_{y=\ell_i}=\varphi_i(x,t), \tag{5}$$

где $i=\overline{1,4}$; и $0=\ell_0<\ell_1<\ldots<\ell_4<\ell_5=\ell<+\infty$, и принадлежит классу
$U=\{(u,h_i,i=\overline{1,4})\in W_2^{2,1}(G),\ D_y^3(u_t,u_x,u_{xx})\in L_2(G),\ D_y^4u\in L_2(G);\ h_i\in W_2^2(Q)\}$.

Введем обозначения. Пусть $f_{ij}(x,t)=f_i(x,t,l_j)$, $\forall i,j=\overline{1,4}$. Тогда через $F=\{f_{ij}\}_{i,j=1}^4$ определим квадратную матрицу четвертого порядка.

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c-c_t\geq\delta>0$, для всех $(x,t)\in\overline{Q}$, где $\lambda=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0$, $|\gamma|>1$, $|\det F|\geq\varepsilon>0$; $\varphi_i,\in W_2^4(Q)$; $\gamma\varphi_i\,|_{t=0}=\varphi_i\,|_{t=T}$; $\varphi_i\,|_{x=0}=\varphi_i\,|_{x=1}=0$; $f_{ij}\in W_2^2(Q)$;
$\forall_{i,j}=\overline{1,4}$, и пусть $\beta\equiv M\sum\limits_{i=1}^{4}\left\|(1+D_y^3)f_i\right\|^2_{W_2^1(G)}<1$, где $M=const(mes(G),\det F)$. Тогда для любых функций f_i таких, что $(1+D_y^3)f_i\in W_2^2(G)$; $f_i\,|_{x=0}=f_i\,|_{x=1}=0$, $\forall i=\overline{1,4}$, существует единственное решение задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Замечание 1. Для уравнения (1) аналогично изучаются Л.М.О.З. с условием Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагается начальное условие $u\,|_{t=0}=u_0(x)$.

Заключения.В данной работе с использованием методов априорных оценок, Галеркина и сжимающихся отображений доказывается однозначная разрешимость некоторой линейной четырехточечной обратной задачи (Л.М.О.З) для трехмерного уравнения распространения тепла в параллелепипеде.

Литература

1. **Ильин. В.А., Моисеев.Е.И.** *Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке.* Т.23.: Дифференциальные уравнения. - 1987. 1198-1207с.
2. **Джамалов.С.З.** *О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для волнового уравнения и уравнения Пуассона.* Т.: ДАН РУз. - 1992. 9-11с.

УДК 517.946

Формулы разложения для гипергеометрических функций от двух переменных и их применения к решению краевых задач

Жабборов Т.М.
Кокандский государственный педагогический институт им.Мукими; toxirjonjabborov05@gmail.com

В настоящей работе найдем формулы разложения для некоторых гипергеометрических функций от двух переменных и применим их к решению основных краевых задач в первой четверти круга для сингулярного эллиптического уравнения.

Рассмотрим следующие гипергеометрические функции двух переменных [1]:

$$F_2\left(a,b,c;d,e;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_m(e)_n m!n!}x^m y^n,$$

$$H_1\left(a,b,c;d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}\,(b)_{m+n}\,(c)_n}{(d)_m\,m!n!}x^m y^n,$$

$$H_2\left(a,b,c,d;e;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}\,(b)_m\,(c)_n\,(d)_n}{(e)_m\,m!n!}x^m y^n,$$

$$H_3\left(a,b;c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{2m+n}\,(b)_n}{(c)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n,$$

где $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$, иными словами, $(a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)...(a+n-1),\ n=1,2,3,...$ – символ Похгаммера. Здесь и далее $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Для любой гипергеометрической функции многих переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одной переменной, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных.

С целью нахождения формулы разложения для гипергеометрической функции F_2, Дж.Берчнелл и Т.Ченди ввели операторы [2]

$$\nabla\left(h\right)=\frac{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(h+\delta+\sigma\right)}{\Gamma\left(h+\delta\right)\Gamma\left(h+\sigma\right)},\quad \Delta\left(h\right)=\frac{\Gamma\left(\delta+h\right)\Gamma\left(\sigma+h\right)}{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(\delta+\sigma+h\right)},$$

где

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\ \ \sigma\equiv y\frac{\partial}{\partial y}.$$

С помощью этих операторов можно получить следующую символическую форму [2]

$$F_2\left(a,b,c;d,e;x,y\right)=\nabla(a)F(a,b;d;x)F(a,c;e;y), \tag{1}$$

которая приводит к разложению

$$F_2(a,b,c;d,e;x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r(b)_r(c)_r}{r!(d)_r(e)_r}x^r y^r F(a+r,b+r;d+r;x)F(a+r,c+r;e+r;y). \tag{2}$$

Здесь и далее $F(a,b;c;z)$ – известная гипергеометрическая функция Гаусса [1]:

$$F(a,b;c;z)\equiv F\left[\begin{array}{cc} a,b; & \\ c; & x\end{array}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Используя обращение символической формы (1) в виде

$$F(a,b;c;x)F(a,d;e;y)=\Delta(a)F_2(a,b,c;d,e;x,y)$$

и соответствующее разложение $\Delta(a)$, наряду с (2) получаем формулу обратного разложения

$$F(a,b;c;x)F(a,d;e;y)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(a)_r(b)_r(c)_r}{r!(d)_r(e)_r}x^r y^r F_2(a+r,b+r,c+r;d+r,e+r;x,y).$$

Для разложения функций H_1, H_2 и H_3 введем в рассмотрение обобщенный оператор Берчнелла-Ченди:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}\left(h\right):=\frac{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(h+\alpha\delta+\beta\sigma\right)}{\Gamma\left(h+\alpha\delta\right)\Gamma\left(h+\beta\sigma\right)},\quad \tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}\left(h\right):=\frac{\Gamma\left(\alpha\delta+h\right)\Gamma\left(\beta\sigma+h\right)}{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(\alpha\delta+\beta\sigma+h\right)},$$

где α и β – целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha,\beta=\pm1,\pm2,....$

С помощью обобщенного оператора Берчнелла-Ченди можно представить функции H_1, H_2 и H_3 в формах

$$H_1\left(a,b,c;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x;-y}\left(a\right)\tilde{\nabla}_{x;y}\left(b\right)F\left(a,b;d;x\right)F\left(b,c;1-a;-y\right),$$

$$H_2\left(a,b,c,d;e;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,y}\left(a\right)F\left(a,b;e;x\right)F\left(c,d;1-a;-y\right),$$

$$H_3\left(a,b;c;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{2x;y}\left(a\right)\tilde{\nabla}_{-x;-y}\left(1-c\right)F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F\left(a,b;c;y\right),$$

которые приводят к разложениям

$$H_1(a,b,c,d;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^{i+j+p}(-i)_{j-q}(j+p)_{i-p}(a)_{i+q}(b)_{i+q}}{i!j!(a)_i(d)_{i+q}}$$

$$\times\frac{(b)_{j+p}(c)_{j+p}}{(1-a)_{j+p}(b)_j}x^{i+q}F(a+i+q,b+i+q;d+i+q;x)$$

$$\times y^{j+p}F(b+j+p,c+j+p;1-a+j+p;-y),$$

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\binom{i}{j}\frac{(-1)^{i+j}(j)_{i-j}(b)_i(c)_j(d)_j}{i!(e)_i(1-a)_j}$$

$$\times x^iy^jF(a+i,b+i;e+i;x)F(c+j,d+j;1-a+j;-y),$$

$$H_3(a,b;c;x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i_0}\sum_{m,q=0}^{j}\binom{i_0}{p}\binom{j}{m}\binom{j}{q}$$

$$\times\frac{p!2^{2p+i_1-i_0}(i_1+p+q)_{j-q}(i+m)_{j-m}(a)_{2i_1+2p+2q}(a)_{i+m}(b)_{i+m}}{i_0!j!p_i!(a)_i(c)_{i+m}(1-c)_j(c)_{i_1+p+q}}$$

$$\times x^{i_1+p+q}F\left(\frac{a}{2}+i_1+p+q,\frac{a+1}{2}+i_1+p+q;c+i_1+p+q;4x\right)$$

$$\times y^{i+m}F(a+i+m,b+i+m;c+i+m;y),$$

где $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – биномиальные коэффициенти.

С помощью обобщенных операторов можно получить так называемые обратные символические формы

$$F(a,b;d;x)F(b,c;1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x;y}(b)\tilde{\Delta}_{x;-y}(a)H_1(a,b,c;d;x,y),$$

$$F(a,b;e;x)F(c,d;1-a;y)=\tilde{\Delta}_{x,y}(a)H_2(a,b,c,d;e;x,-y),$$

$$F\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};c;4x\right)F(a,b;c;y)=\tilde{\Delta}_{-x;-y}(1-c)\tilde{\Delta}_{2x;y}(a)H_3(a,b;c;x,y),$$

которые приводят к обратным разложениям

$$F(a,b;d;x)F(b,c;1-a;y)$$

$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{j}{k}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\frac{(-1)^q(k)_{j-k}(k+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{k-i+p-q}(b)_{k+i+p+q}(c)_{i+q}}{i!j!(1-a)_i(1-b)_j(d)_{k+p}}$$

$$\times x^{k+p}y^{i+q}H_1(a-i+k+p-q,b+i+k+p+q,c+i+q;d+k+p;x,-y),$$

$$F(a,b;e;x)F(c,d;1-a;y)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i}\binom{i}{p}\binom{i}{q}\frac{(-1)^q(p)_{i-p}(q)_{i-q}(a)_{p-q}(b)_p(c)_q(d)_q}{i!(1-a)_i(e)_p}$$

$$\times x^py^qH_2(a+p-q,b+p,c+q,d+q;e+p;x,y).$$

Применение формул разложения.

Формула разложения (2) для функции F_2 существенно используется при упрощении явного решения задач Дирихле, Хольмгрена и Дирихле-Хольмгрена в первой четверти единичного круга для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y=0,\;\;0<2\alpha,\;\;2\beta<1.$$

Литература

1. **Бейтмен А., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Том 1.* - М.: Наука, 1973.- 296 с.
2. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** *Expansions of Appell's double hypergeometric functions* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. — 1940. Ser.11. — P. 249-270.

УДК 517.926

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА Б'ЛГАН ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИРИНЧИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Жураева Д.
Фарғона давлат университети; diljora587@gmail.com

Куйидаги

$$X''(x)+\frac{2\alpha}{x}X'(x)+\mu X(x)=0,\ \ x\in(0,a), \tag{1}$$

тенгламани ва

$$X(0)=0,\ \ X(a)=A,\ \ A=const\neq 0; \tag{2}$$

чегаравий шартларни каноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\alpha\in(-2,1/2),\ \ \mu>0$.

Биринчи бўлиб, (1) тенгламанинг умумий ечимни топамиз. У холда, $\left(t/\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha}p(t)$ кўринишда ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Бу ерда $t=\sqrt{\mu}x$. Натижада куйидаги Бессель тенгламаси деб номланувчи [1]

$$t^2p''(t)+tp'(t)+\left[t^2-(1/2-\alpha)^2\right]p(t)=0$$

тенгламани хосил киламиз.

Бу тенгламанинг умумий ечими маълум бўлиб [1], килинган алмаштиришдан фойдаланиб, x ўзгарувчига кайтадиган бўлсак, (1) тенгламанинг умумий ечимини хосил киламиз:

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sqrt{\mu}x)+c_2x^{1/2-\alpha}Y_{1/2-\alpha}(\sqrt{\mu}x), \tag{3}$$

бу ерда c_1 ва c_2-ихтиёрий ўзгармаслар, $J_l(x)$ ва $Y_l(x)-$ мос холда l тартибли биринчи ва иккинчи тур Бессель функциялари деб номланади [1].

(3) ни (2) шартнинг биринчисига бўйсундирамиз. Натижада $x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ функциянинг $\alpha<1/2$ шартни инобатга олгадиган бўлсак, $x=0$ даги киймати 0 га тенг бўлади, $x^{1/2-\alpha}Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ функциянинг эса $x=0$ даги киймати ўзгармас сонга тенг бўлади ва биз $c_2=0$ дейишга мажбур бўламиз. Натижада (1) тенгламанинг (2) шартлардан биринчисини каноатлантирувчи ечими куйидаги кўринишда бўлишини топамиз:

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sqrt{\mu}x). \tag{4}$$

Охирги тенглама c_1 ўзгарувчига боглик чизикли тенглама хисобланиб, уни ечадиган бўлсак, c_1 куйидаги кІринишда топилади:

$$c_1=A/\left[a^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sqrt{\mu}a)\right]. \tag{5}$$

(5) ни (4) га олиб бориб куйиб, (1), (2) масаланинг ечимини хосил киламиз:

$$X(x)=\frac{Ax^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)}{a^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)}. \tag{6}$$

Масаланинг куйилишидан маълумки, μ сонли параметр мусбат кийматларни кабул килади ва $J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)$ функция куплаб нолларга [1] эга булиши мумкин. Шу сабабли $J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)\neq 0$ деб кабул киламиз, акс холда (6) функция (1), (2) масаланинг ечими хисобланмайди.

Литература

1. **Ватсон Г. Н.** *Теория бесселевых функций.* М.: Наука, – 1949.

УДК 517.956.6

Комбинированная задача с условием Бицадзе-Самарского и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода

Н. Б. Исламов
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека; nosir_24@mail.ru

Начиная с 1953 года после публикации известных работ И.Л. Кароля [1], появился интерес к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода.

Вслед за этими работами, локальные и нелокалные краевые задачи для уравнения эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов второго рода в области, часть границы которой является линией вырождения, рассмотрены в работах М.С. Салахит-динова, С.С. Исамухамедова, Г.А. Ивашкиной, G.C. Wen, Н. К. Мамадалиева, Р.С. Хайрул-лина, Б. Исломова, А.А. Абдуллаева, а в работах К.Б. Сабитова, А.Х. Сулеймановой изучены задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольных областях.

Далее выяснилось, что эти задачи возникают при изучении различных проблем математи-ческой биологии, прогнозировании почвенной влаги, решение проблем физики, плазмы и при математическом моделировании процессов излучения лазера.

Обобщенная задача Трикоми для уравнения смешанного типа первого рода, в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся локально, а на второй части и параллельной ей характеристике задаётся условие типа Бицадзе-Самарского изуче-ны в работах М.С. Салахитдинова и М.Мирсабурова[2], Б. Исломова и Гулбахор Мирсабуро-вой[3]. Такие задачи для уравнения эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболичес-кого типов второго рода исследованы, сравнительно мало. Отметим работы М.С. Салахитди-нова и Н. Б. Исламова[4], Н. Б. Исламова[5].

В настоящей работе изучается краевая задача для вырождающегося уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся нелокальной, а на второй части условие смещения на внутренних характеристиках.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + signy\,|y|^m\,u_{yy} + \alpha\,|y|^{m-1}\,u_y = 0, \tag{1}$$

где $m,\ \ \alpha -$ постоянные, причем

$$0 < m < 2, \qquad m - 1 < \alpha < \frac{m}{2}. \tag{2}$$

Пусть $D -$ конечная односвязная область в плоскости переменных $x,\ y$, ограниченная при $y > 0$ кривой $\Gamma:\ \ x^2 + \frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m} = 1$ с концами в точках $A\,(-1,0)$ и $B\,(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения (1).

Введем следующие обозначения: $\qquad D_1 = D \cap \{(x;y):\ x > 0, y > 0\}$,

$$D_2 = D \cap \{(x;y) : x > 0,\ \ y < 0\}\,,\quad J = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ \ y = 0\}\,,$$

$$J_1 = \{(x,y) : -1 < x < c,\ \ y = 0\}\,,\quad J_2 = \{(x,y) : c < x < c_1,\ \ y = 0\}\,,$$

$$J_3 = \{(x,y) : c_1 < x < 1,\ \ y = 0\}\,,$$

$$EC_1:\ x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = c,\ \ EC_0:\ x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = c,$$

$$E_1D:\ x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = c_1,\qquad E_1D_1:\ x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} =\ c_1,$$

$$E = E(c,0),\ \ c \in J,\qquad E_1 = E_1(c_1,0),\ \ c_1 \in (c,1),\qquad D = D_1 \cup D_2 \cup J,$$

$$2\beta = (2\alpha - m)/\,(2 - m),\qquad -1 < 2\beta < 0, \tag{3}$$

через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристики AC и BC с характеристи-кой, исходящих из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$- интервал оси $y = 0$, а через D_0 и D_1 обозначим точки пересечения характеристик EC_1и BC_1 с характеристикой исходящей из точки $E_1(c_1,0)$, где $c_1 \in (c,1)$.

Пусть $q(x) = \rho - kx$, где $\rho = c_1(1-c)/(1-c_1)$, $\quad k = (c_1 - c)/(1-c_1)$ линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c_1,1]$ в множество точек отрезка $[c,c_1]$, причем $q(c_1) = c_1$, $\ q(1) = c$, $\quad \theta_1(x) = \left(\frac{x-1}{2};\ -\left[\frac{2-m}{4}(x+1)\right]^{\frac{2}{2-m}}\right) -$ точка пересечения характерис-тики AC с характеристикой, выходящей из точки $M_1(x,0) \in J_1$. Через $D_{21},\ \ D_{22},\ \ D_{23},\ \ D_{24}$ и D_{25} соответственно обозначим характеристические треугольники AC_0E, $\ \ EDE_1$, $\ \ E_1D_1B$ и четырехугольники EC_1CC_0, $\ \ E_1D_1C_1D$, $\ \ D^* = D_{21} \cup D_{22} \cup D_{23} \cup D_{24} \cup D_{25}$.

З а д а ч а BC_α**.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1;
3) $u(x,y)$-обобщенное решение уравнения (1) из класса $R_2[1]$, в области D^*;
4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad (x,0) \in \bar{J}, \tag{4}$$

$$D_{-1x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u\left[\theta_1(x)\right] + a(x)u(x,0) = b(x), \qquad (x,0) \in J_1, \tag{5}$$

$$a_0 u[\theta_2(x)] + b_0 u[\theta_3(q(x))] = \psi(x), \quad (x,0) \in J_3, \tag{6}$$

$$u(q(x),0) - u(x,0) = f(x), \ \ (x,0) \in \bar{J}_2 \cup \bar{J}_3, \tag{7}$$

5) $y^\alpha u_y\left(x,y\right) \in C\left(D_1 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3\right)$, $(-y)^\alpha u_y\left(x,y\right) \in C\left(D_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3\right)$ и на интервале $J_1 \cup J_2 \cup J_3$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \to -0} (-y)^\alpha u_y\left(x,y\right) = p(x) \lim_{y \to +0} y^\alpha u_y\left(x,y\right) + h(x), \quad (x,0) \in J \backslash \{c, c_1\}, \tag{8}$$

здесь $\varphi(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $p(x)$, $h(x)$–заданные функции, a_0, b_0– некоторые постоянные, причем

$$a_0 \geq 0, \ b_0 \geq 0, \quad a_0^2 + b_0^2 \neq 0, \quad b(-1) = 0, \quad a(-1) \neq 0, \tag{9}$$

$$a(x) \leq 0, \quad a'(x) \leq 0, \ \ \forall\, x \in \bar{J}_1, \quad p(x) < 0, \quad \forall\, x \in \bar{J}, \tag{10}$$

$$\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_1(x), \ \ \varphi_1(x) \in C^{(0,\alpha)}(\bar{J}), \quad \psi(x) \in C^2(\bar{J}_3), \ \ f(x) \in C^2(\bar{J}_2 \cup \bar{J}_3), \tag{11}$$

$$a(x), \ b(x) \in C^2\left(\bar{J}_1\right), \quad p(x), \ \ h(x) \in C\left(\bar{J}\right) \cap C^2\left(J_1 \cup J_2 \cup J_3\right), \tag{12}$$

$\theta_2(x_0)$ и $\theta_3(q(x_0))$- точки пересечения характеристики E_1D_1 и E_1D_0 с характеристикой, выходящей из точки $M_2(x_0,0)$ и $M_3(q(x_0),0)$соответственно, где $x_0 \in \bar{J}_3$, $q(x_0) \in \bar{J}_2$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если выполнены условия (2), (3), (9), (10), то в области D решение задачи BC_α единственно.

Теорема 1 доказывается с помощью принципа экстремума для эллиптических и гипербо-лических уравнений второго рода.

Теорема 2. Если выполнены условия (2), (3), (9), (11), (12), то в области D решение задачи BC_α существует.

Теорема 2 доказывается с помощью методом интегральных уравнений.

Литература

1. **Кароль И.Л.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико- гиперболи-ческого типа.* Докл. АН СССР. –1953. – **88**(2). –С.197-200.

2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.*–Ташкент. –Университет. –2005. –223 с.

3. **Исломов Б., Мирсабурова Гулбахор. М.** *Задача Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.* Докл АН Узбекистана. –2011. –№ 2. –С. 6-10.

4. **Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б.** *Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо- гиперболического типа второго рода.*. Известия вузов. Математика. –2015. –№6. –С. 43-52.

5. **Исламов Н. Б.** *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода.* Уфимский мат. журнал. –2015. – **7**(1). –С. 31-45.

УДК 517.95; 517.956.6

Краевые задачи для линейных нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа

Б.И.Исломов
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека; islomovbozor@yandex.com

Многие весьма важные задачи математической физики и биологии, особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопере-носа с конечной скоростью, движения мало-сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, оптималь-ного управления агроэкосистемой, приводят к краевым задачам для нагру-женных уравнений с частными производными.

В 1969 году А.М. Нахушев предложил ряд задач нового типа, вошедших в математичес-кую литературу под названием краевые задачи со смещением, которые, как оказалось, тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями.

После этой работ для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, пара-болического, гиперболо-параболичсского и эллиптико-параболического типов существенные результаты были получены в работах А.А. Алиханова, А.Х. Аттаева, А.В. Бородина, М.Т. Дженалиева, В.А. Елеева, Б. Исломова,У.И.Болтаевой, Д.М. Курьязова, В.М. Казиева, А.И. Кожанова, А.М.Нахушева, Л.С.Пулькина, М.И. Рамазанова, К.Б. Сабитов, М.Х. Шханукова, К.У. Хубиева, Дж. Винера и др.

Данная работа посвящена постановке и исследованию краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго и третьего порядка параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов Изучаются новые методы и постановки задач для нагруженных уравнений смешанного типа содержащих след неизве-стной функции и его операторные комбинации.

Б.И.Исломов с учениками изучал различные краевые задачи для нагруженных уравнений параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов. Эти работы опубликованы в следуюших работах:

1. **Исломов Б., Курьязов Д.М.** *Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка.* ДАН РУз. –1996. – № 1–2. – С. 3-6.
2. **Islomov B. I., Baltaeva U. I.** *Boundary value problems for the loaded hyperbolic and mixed type differential equations of the third order.*(Russian. English summary) Ufim. Mat. Zh. –2011. –**3**. –№ 3. –P. 15-25.
3. **Islomov B., Baltaeva U.I.** *Boundary value problems for the classical and mixed integro-differential equations with Riemann-Liuovil operators.* // International Journal of Partial Differential equations.– 2013.– Article ID 157947.–P. 11-17.
4. **Islomov B., Baltaeva U.I.** *Boundary value problems for the third order loaded parabolic-hyperbolic equation with a variable coefficients. International Congress of Mathematicians.* Seoul. –2014. –P.116-117.
5. **Islomov B., Baltaeva U.I.** *Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients.* EJDE. – Texas State University San Marcos. –2015. –V. 2015. –№ 221. –P. 1-10.
6. **Baltaeva U.I.** *The loaded parabolic-hyperbolic equation and its relation to non-local problems.* Nanosystems physics, chemistry, mathematics. –2017. –**8**(4). –P. 413-419.
7. **Baltaeva U.I.** *On the solvability of boundary-value problems with continuous and generalized gluing conditions for equation of mixed type with the loaded summand.* Ukrainian Math. Journal, –2018. – **69**(1) - P. 1845-1854.
8. **Абдуллаев О.Х.** *Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. –2016. –**20**(2). -С. 220–240.
9. **Islomov B. I., Yunusov O.M.** *A boundary value problem for a loaded hyperbolic equation in a special domain.* (Russian) Uzb. Mat. Zh. –2017. –№. 1. –P. 86-95.
10. **Abdullaev O.Kh., Agarwal P.** *A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives.* Mathematical Methods in the Applied Sciences. –2020. –**43**(6). –P. 3716-3726.
11. **Islomov B., Abdullaev O.Kh.** *Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order.* Russian Mathematics. –2020. –**64**(10). –P. 29–42.
12. **Islomov B.I., Yuldashev T.K., Alikulov E.K.** *Boundary-value problems or loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains.* Lobachevskii journal of mathematics. –2020. –**41**(5). –P.922-940.
13. **Абдуллаев О.Х.** *Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью.*Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. –2021. –**25**(1). –С. 7–20.
14. **Abdullaev O.Kh.** *Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term.* Lobachevskii Journal of Mathematics. -2021. –**42**(3).
–P. 479–489.

15. **Islomov, B.I.; Abdullaev, O.Kh.** *On non-local problems for third order equation with caputo operator and non-linear loaded part.* Ufa Mathematical Journal. –2021. –**13**(3). –P. 44-56.
16. **Islomov B.I., Alikulov E.K.** *Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain.* Siberian Electronic Mathematical Reports. –2021. –**18**(1). –P.72-85.
17. **B.I. Islomov, Y.K.Alikulov** *Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. International journal of applied mathematics.* –2021. **-33**(2). –P.158-170.
18. **Исломов Б. И. , Холбеков Ж. А.** *Об одной нелокальной краевой задаче для нагружен-ного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* –2021. –**25**(3). –С.407–422.
19. **Исломов Б.И., Джураев Ф. М.** *Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.* Уфимский мат журнал. –2022. **-14**(1). –С. 41-56.
20. **Исломов Б.И., Носирова Д.А.** *Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода.* Тезисы докладов Традиционная межд. апрелская мат. конф в честь для работников науки Рес. Казахстан. –2022. –Алмата. –С.81-82.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Б.И. Исломов[1], И.А. Ахмадов[2]
[1,2]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека;
islomovbozor@yandex.ru[1], ahmadov.ilhom@mail.ru[2]

В настоящее время возросло изучение и исследование уравнений с дробным оператором. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференциро-вания, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки: в физике, механике, биологии, инженерии и других областях естествознания.

Основная библиография по этим вопросам содержится в работах в Т.Д. Джураева [1], А. М. Нахушева[2], А.В. Псху [3], Н.Ю. Капустин [4], А.С. Бердышева [5].

В работах [6-7] изучены краевые задачи со смещением для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка Капуто в смешанной области, состоящая из характеристичес-кой треугольника и прямоугольника.

В настоящей работе речь пойдет существования и единственность краевой задаче смешан-ного параболо-гиперболического типа с оператором дробного порядка Герасимова - Капуто.

Пусть $D \subset R^2$-конечная область, ограниченная при $x > 0$ отрезками прямых $AA_0 : y = 0,\ \ A_0B_0 : x = 1,\ \ BB_0 : y = 1$, а при $x < 0$ характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = -1$, уравнения смешанного параболо − гиперболического типа

$$Lz(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} {}_cD_{0x}^{\alpha} z(x,y) - z_{yy}(x,y), & \text{x} > 0 \\ \text{z}_{xx}(x,y) - z_{yy}(x,y)\,, & \text{x} < 0 \end{array} \right\} = q(x,y), \tag{1}$$

где ${}_cD_{\sigma x}^{\alpha}\ [\bullet]$ – оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [3]:

$${}_cD_{0x}^{\alpha} f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x |x-t|^{-\alpha} f'(t)dt, & 0 <\alpha < 1, \\ f'(x), & \alpha = 1. \end{array} \right. \tag{2}$$

Задача S. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$z(x,y)|_{y=1} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$z_y(x,y)|_{y=0} = -\beta^2\ {}_cD_{0x}^{\alpha} z(x,y)|_{y=0}\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$$\frac{du\left[\theta_0(t)\right]}{dt} = \beta \frac{du\left[\theta_1(t)\right]}{dt}\,, \quad 0 < t < 1\ . \tag{5}$$

где $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$; $\theta_1(t) = \left(\frac{t-1}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$ точки пересечения AC и AB с характеристиками $x - y = t$ и $x + y = t$ соответственно, $0 \leq t \leq 1$; α – произвольное комплексное число.

Краевые задачи с условиями типа (5) называются задачами со смещением [2] . Параболи-ческую часть смешанной области D обозначим через D_1, а гиперболическую – D_2.

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $L_2\,[0,1]$ – пространство квадратично суммируемых функций на $[0,1]$, $D_1 = D \cap \{x>0\}$, $D_2 = D \cap \{x<0\}$.

Определение 1. Классическим решением задачи S назовем функцию из класса

$$\mathrm{P}_1 = \left\{ z(x,y) : \; z(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C_y^2(D_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_2) \right\},$$

удовлетворяющую краевым условиям (3), (4) и (5) задачи S и обращающую уравнение (3) в тождество.

Заметим, что из класса $z(x,y) \in C^1(\bar{D})$ с учетом (2) следует ${}_cD_{0x}^{\alpha} z(x,y) \in C\,(\bar{D}_1)$.

Определение 2. Функцию $z(x,y) \in L_2(D)$ назовем *сильным решением задачи* S, если существует последовательность функций $\{z_n(x)\}$, $z_n \in P_1$, удовлетворяющих краевым усло-виям (3), (4) и (5) задачи S, такая, что последовательности z_n и Lz_n сходятся в $L_2(D)$ к функциям z и q соответственно.

Теорема 1. Пусть $\beta \neq 0$. Тогда для любой функции $q(x,y) \in L_2(D)$ сильное решение задачи S существует, единственно, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_0 \leq c\,\|f\|_0 . \tag{6}$$

и представимо в виде

$$u(x,y) = \iint_D K(x,y,\xi,\eta) q(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{7}$$

где $K(x,y,\xi,\eta) \in L_2(D \times D)$.

Литература

1.**Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А.** *Краевые задачи для уравнений парабо-ло-гиперболического типа.* Ташкент. –1986.–220 с.

2. **Нахушев А. М.** *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* Москва. –2006.–288 с.

3. **Псху А.В.** *Уравнения в частных производных дробного порядка.* Дифференц. уравнения. Москва. –2005. –199 с.

4. **N. Yu. Kapustin.** *On a Spectral Problem in the Theoryof the Heat Operator.* Differential Equations. –2009, –Vol. 45, –No. 10, –pp. 1544–1546.

5. **Бердышев А.С.** *Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешан-ного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов.* Алматы. –2015.–223 с.

6. **Исломов Б.И., Абдуллаев О.Х.** *О нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с оператором Капуто и нелинейной нагруженной частью.* Уфимск. матем. журн. –2021. –**13.3**. – С.45–57.

7. **Islomov B. I., Akhmadov I. A.** *A Nonlocal Boundary Value Problem with the Frankl Condition for an Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type with the Fractional Gerasimov–Caputo Operator.* Lobachevskii Journal of Mathematics, –2022, –Vol. 43, –No. 3, –pp. 1508–1514. DOI: 10.1134/S1995080222060129.

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения второго рода с двумя линиями изменения типа

Б.И.Исломов[1], Ж.Х.Узоков[2]

[1,2]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека;

islomovbozor@yandex.com jahongir.uzoqov@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} x\,u_{xx} + \alpha_0 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & x > 0, \quad y < 0, \\ u_{yy} - (-x)^n u_{xx}, & x < 0, \quad y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha_0 < 1 + 2\beta < 1, \; 2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad 2\alpha = \frac{n}{n-2}, 0 < m < 1, \quad 0 < n < 1. \tag{2}$$

Пусть

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J_1 \cup J_2,$$

где

Ω_0- область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно;

Ω_1 $-$характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $AB: \quad y=0$, $AN: \quad x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $BN: x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N\left(0,5\,;\,-\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right)$;

Ω_2 $-$характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $AD: \quad x=0$, $AM: \quad y-\frac{2}{2-n}(-x)^{\frac{2-n}{2}}=0$, $DM: \quad y+\frac{2}{2-n}(-x)^{\frac{2-n}{2}}=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $M\left(-\left(\frac{2-n}{4}\right)^{2/(2-n)}\,;\,0,5\right)$,

$$J_1=\{(x,y): 0<x<1,\ y=0\}\,,, \quad J_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\ \}\,.$$

Задача N_T Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$;
2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_0;
3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в областях D_1 и D_2;
4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BC}=\varphi_1(y),\ \ 0\le y\le 1,$$

$$D^{-\beta}_{0x}\frac{d}{dx}u\left[\Theta(x)\right]=a(x)u_y(x,0)+b(x), \quad (x,0)\in J_1,$$

$$D^{-\beta}_{0y}\frac{d}{dy}u\left[\Theta(y)\right]=c(y)u_x(0,y)+d(y), \quad (0,y)\in J_2,$$

5) $u_y\in C\left(D_0\cup J_1\right)\cap C\left(D_1\cup J_1\right)$, $u_x\in C\left(D_0\cup J_2\right)\cap C\left(D_2\cup J_2\right)$ и на линии вырождения J_1 и J_2 выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0}u_y\left(x,y\right)=p_1(x)\lim_{y\to +0}u_y\left(x,y\right)+q_1(x), \quad (x,0)\in J_1,$$

$$\lim_{x\to -0}u_x\left(x,y\right)=p_2(y)\lim_{x\to +0}u_x\left(x,y\right)+q_2(y), \quad (0,y)\in J_2,$$

где $\varphi_1(y),\ a(x),\ b(x)\ ,\ c(y),\ d(y),\ p_j(t),\ q_j(t)\ (j=1,2)-$ заданные функции, причем

$$\varphi_1\left(y\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right), \tag{3}$$

$$\left[\gamma_1-a(x)x^{\beta}\right]p_1(x)<0, \quad \forall\,(x,0)\in\bar J_1, \quad \gamma_1=\frac{(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{2\beta-1}, \tag{4}$$

$$\left[\gamma_2-c(y)y^{\alpha}\right]p_2(y)<0, \quad \forall\,(x,0)\in\bar J_2, \qquad \gamma_2=\frac{(2-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left[2\left(1-2\alpha\right)\right]^{2\alpha-1}, \tag{5}$$

$$p_1(x),\ \ q_1(x)\in C\left(\bar J_1\right)\cap C^2\left(J_1\right), \qquad p_2(y),\ \ q_2(y)\in C\left(\bar J_2\right)\cap C^2\left(J_2\right), \tag{6}$$

$$a(x)\in C^1(\bar J_1)\cap C^3(J_1), \quad c(y)\in C^1(\bar J_2)\cap C^3(J_2), \tag{7}$$

$$b(x)\in C^1\left(0,1\right]\cap C^3(0,1), \quad d(y)\in C^1\left(0,1\right]\cap C^3(0,1), \tag{8}$$

причем $b(x)\left[d(y)\right]$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $-\beta$ при $x\to 0$ $[y\to 0]$, а при $x\to 1$ $[y\to 1]$ ограниченно; $D^{\sigma}_{0t}\left[\cdot\right]-$ оператор интегро-дифференцирования дробного порядка σ [2, с.16], $\Theta(x)(\Theta(y))$-точки пересечения характеристики $AN(AM)$ с характеристикой, исходящей из точки $H_1(x,0)\,(H_2(0,y))$ и имеет вид:

$$\Theta\left(x\right)=\left(\frac{x}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x\right)^{\frac{2}{2-m}}\right), \quad \Theta\left(y\right)=\left(\frac{y}{2};\ -\left(\frac{2-n}{4}y\right)^{\frac{2}{2-n}}\right)\,.$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2) -(8), то в области Ω существует единственное решение задачи N_T.

Используя, принципа экстремума для параболических и гиперболических уравнений[3] доказывается единственности решения задачи N_T, а существование решения задачи N_T– методом интегральных уравнений[4-5].

Литература

1. **Кароль И.Л.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гипербо-лического типа.* Докл. АН СССР. –1953. –**88**(2). –С. 197-200.
2. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.*М.: Высшая школа. –1985. – 304 с.
3. **Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б.** *Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода.* Известия вузов. Математика. – Россия. –2015. –№6. –С. 43-52.
4. **Исламов Н. Б.** *Аналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода.*Уфимск. мат. журн.–2015. –**7**(1). –С.31–45.
5. **Islomov, B. I.; Yuldashev, T. K.; Abdullaev, A. A.** *On Solvability of a Poincare–Tricomi Type Problem for an Elliptic–Hyperbolic Equation of the Second Kind.* Lobachevskii J.Math. –2021. **42**. –No.3. – pp 663–675.

УДК 517.956.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Б. И.[1], Юнусов О. М.[2]
[1,2]Национальный Университет Узбекистана; [1]islomovbozor@yandex.com [2]oybek198543@mail.ru;

Краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического и гиперболо-параболи-ческого типов второго порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции изучены сравнительно мало. Отметим работы А. М.Нахушева[1], Б.Исломова и Д.М.Курьязова [2], Б.Исломова и У.И.Болтаевой[3].

В данной работе изучается нелокальная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в специальной области.

Пусть Ω_0– область, ограниченная отрезками $A_jB_j,\ A_jK_j,\ B_jN_j,\ K_jN_j$ прямых $y=0,\ x=(-1)^{j-1}, x=(-1)^{j-1}q, y=1$ при $y>0$. Ω–область, ограниченная отрезками A_jB_j оси Ox ипри $y<0$ характеристиками

$$A_jC_1: x+(-1)^jy=(-1)^{j-1},\ \ B_jC_2: x+(-1)^jy=(-1)^{j-1}q$$

уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\mu_0 u\left(x,0\right),\ y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}+\mu_j u\left(x,0\right),\ y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu_0>0,\ \mu_j\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\ (j=1,2),\quad 0<q<1.$

Введем обозначения: $I=\{(x,y): x=0, -1<y<-q\}$,

$$J_1=\{(x,y): q<x<1, y=0\},\ J_2=\{(x,y): -1<x<-q, y=0\},$$

$$B_jD_j: x+(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1}q,\ C_2E_j: x+(-1)^{j-1}y=(-1)^jq,$$

$$A_jD_j: x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1},\ \ A_jE_j: x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1},\ (j=1,2).$$

Через Ω_j и Ω_{j+2}, Ω_5 соответственно обозначим характеристические треугольники $A_jB_jD_j$ и четырехугольники $B_jC_2E_jD_j$, $\quad C_2E_1C_1E_2$.

$$\Omega_{5j}=\Omega_5\cap\left\{(-1)^jx<0,\ \ y<0\right\},\ \Omega_{0j}=\Omega_0\cap\left\{(-1)^jx<0,\ \ y>0\right\},$$

$$\Omega_0=\Omega_{01}\cup\Omega_{02},\ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4\cup\Omega_5\cup B_1D_1\cup C_2E_1\cup C_2E_2\cup B_2D_2,$$

$$\Delta = \Omega_0 \cup \Omega \cup I \cup J_1 \cup J_2, \quad \Delta_j = \Omega_j \cup \Omega_{j+2} \cup \Omega_{5j},$$

здесь $D_j,\ E_j\ \in A_jC_1$.

Задача $NoL(\Delta)$. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u\,(x,y) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^{\,1}(\Delta)$;

2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_{0j}) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_j \cup \Omega_{j+2} \cup \Omega_{5j})$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_{0j} \cup \Omega_j \cup \Omega_{j+2} \cup \Omega_{5j}\ \ (j=1,2)$;

3) $u(x,y)$удовлетворяет краевым условиям:

$$u\,(x,y)|_{A_jK_j} = \varphi_j\,(y)\,, \qquad u\,(x,y)|_{B_jN_j} = g_j\,(y)\,, \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u\,[\theta_j\,(x)] + a_j\,(x)\,u\,(x,0) = c_j\,(x)\,, \quad (x,0) \in \bar{J}_j, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{B_jC_2} = \psi_j(x), \quad 0 \le \left((-1)^{j-1}x\right) \le q,\ (j=1,2), \tag{4}$$

где $\varphi_j(y),\quad g_j(y),\quad \psi_j(x),\quad a_j(x),\quad c_j(x)-$ заданные функции и $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\varphi_j(0)(1 + a_j(-1)^{j-1}) = c_j((-1)^{j-1}),\ g_j(0) = \psi_j((-1)^{j-1}q), \tag{5}$$

$$\varphi_j\,(y)\,,\ g_j\,(y) \in C\,[0,1] \cap C^1(0,1),\ a_j(x),\ c_j(x) \in C\left(\bar{J}_j\right) \cap C^2\left(J_j\right), \tag{6}$$

$$\psi_j(x) \in C\left(0 \le \left((-1)^{j-1}x\right) \le q\right) \cap C^2\left(0 < \left((-1)^{j-1}x\right) < q\right), \tag{7}$$

$\theta_j\,(x)$ - точки пересечения характеристики A_jD_j с характеристикой выходящей из точки $N_j(x,0) \in J_j$, $(j=1,2)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (5)- (7), то в области Δ существует единственное решения задачи $NoL(\Delta)$.

Литература

1. **Нахушев А.М.** *Нагруженные уравнения и их приложения.* Дифференциальные уравне-ния. - 1983.– Т.19. – С. 86–94.

2. **Исломов Б., Курьязов Д.М.,** *Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка.* ДАН РУз. – 1966. –No 1-2. –С.3–6.

3. **Исломов Б., Балтаева У.И.,** *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка.* Уфимский математиче-ский журнал. –2011. –Т.3. –No 3. –С.15–25.

УДК 517.957

О некоторых пространствах типа Соболева дробного порядка во всем пространстве и их приложения

Исхоков С.А.[1], Рахмонов Б.А.[2]

[1]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан; [2]Институт математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан;

sulaimon@mail.ru, bakhtovar-1989@mail.ru

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ – длина мультииндекса k. Обозначим через $u^{(k)}(x)$ обобщенную в смысле С.Л. Соболева производную функции $u(x)$ мультииндекса k. Пусть r – натуральное, α – вещественное число. Символом $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных во всем пространстве R^n, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{2;\,\alpha}(R^n)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int d^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^2dx + \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2dx \right\}^{1/2},$$

где $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$. Здесь и далее все интегралы берутся по всему пространству R^n.

Вводим также весовое пространство $L_{2;\,\alpha+r}(R^n)$ измеримых в R^n функций с конечной нормой

$$\|u;\, L_{2;\,\beta}(R^n)\| = \left\{\int d^{2\beta}(x)|u(x)|^2 dx\right\}^{1/2},$$

где β – вещественное число.

По аналогии к случаю ограниченных областей, рассмотренную в [1], можно определить пространство $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ для не целых значений параметра r. Если r – не целое положительное число и $\{r\} \neq 0$ – его дробная часть, то пространство $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ определяется с помощью следующей нормы

$$\|u; V^r_{2;\,\alpha}(R^n)\| = \left[\iint \sum_{|k|=[r]} \frac{\left|d^{\alpha}(x)u^{(k)}(x) - d^{\alpha}(y)u^{(k)}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2\{r\}}} dxdy + \int d^{2(\alpha+r)}(x)|u(x)|^2 dx\right]^{1/2},$$

где $[r] = r - \{r\}$ – целая часть числа r.

Для описании правых частей вырождающихся эллиптических уравнений в процессе исследования разрешимости вариационных задач используются пространства $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ с отрицательным значением параметра r. Чтобы определить пространство $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ при $r < 0$ заметим, что пространство $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ вложено в $L_{2;\,\alpha+r}(R^n)$ при всех $r \geq 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому можно определить пространство $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ при $r < 0$ как пополнение пространства $L_{2;\,-\alpha-r}(R^n)$ по норме

$$\left\|f;\, V^r_{2,\,\alpha}(R^n)\right\| = \sup \frac{|(f,\, v)_{\alpha+r}|}{\left\|v;\, V^{-r}_{2,\,-\alpha}(R^n)\right\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $v(x) \in V^{-r}_{2,\,-\alpha}(R^n)$. При этом элементы пространства $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $V^{-r}_{2,\,-\alpha}(R^n)$.

Справедлива следующая теорема об интерполяционных свойствах пространств $V^r_{2;\,\alpha}(R^n)$:

Теорема 1. *Пусть* $r_j, \alpha_j \in (-\infty, +\infty)$ *для* $j \in \{1,\, 2\}$. *Тогда для всех* $\theta \in (0,\, 1)$ *имеет место равенство*

$$\left(V^{r_1}_{2;\,\alpha_1}(R^n),\, V^{r_2}_{2;\,\alpha_2}(R^n)\right)_{\theta,\,2} = V^r_{2;\,\alpha}(R^n),$$

где $r = (1-\theta)r_1 + \theta r_2$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$.

На функциях $u,\, v \in C_0^{\infty}(R^n)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int d^{2\alpha+2r-|k|-|l|}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{1}$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются ограниченными комплекснозначными функциями. Учитывая плотность класса $C_0^{\infty}(R^n)$ в пространстве $V^r_{2,\alpha}(R^n)$, с помощью неравенства Коши-Буняковского и теорем вложения для пространств $V^r_{2,\alpha}(R^n)$ доказываем, что полуторалинейная форма (1) по непрерывности определяется для всех $u,\, v \in V^r_{2,\alpha}(R^n)$. Поэтому за областью определения формы (1) будем принимать все пространство $V^r_{2,\alpha}(R^n)$.

Для всех $x \in R^n$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$ вводим функцию

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,|l| \leq r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l}$$

и предположим, что для всех $x \in R^n$, $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k| \leq r} \subset \mathbb{C}$ выполнены условия

$$|\arg A(x,\, \zeta)| < \varphi, \tag{2}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leq M \mathrm{Re}\, \{\gamma(x) A(x,\, \zeta)\}, \tag{3}$$

где φ – некоторое число из интервала $(0,\, \pi)$, и отличная от нуля комплекснозначная функция $\gamma(x)$ всюду непрерывна, и для любого числа $\nu > 0$ существует число $R_\nu > 0$ такое, что $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех

$x,\,y\in R^n$ таких, что $|x|>R_\nu$, $|y|>R_\nu$. Здесь и далее считается, что функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\,\pi]$.

Далее сформулируем вариационную задачу Дирихле, связанную с формой (1):

Задача D_λ. *Для заданного функционала $F\in V_{2,-\alpha}^{-r}(R^n)$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения*

$$B[u,\,v]+\lambda\int d^{2(\alpha+r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx=<F,\,v>\quad \forall v\in C_0^\infty(R^n),$$

принадлежащее пространству $V_{2,\alpha}^r(R^n)$.

Замечание 1. *Так как класс бесконечно-дифференцируемых финитных в R^n функций плотен в $V_{2,\alpha}^r(R^n)$, то граничные условия в задаче D_λ формально считаются однородными.*

Разрешимость задачи D_λ ранее изучалась в работах авторов [2, 3].

Далее, чтобы сформулировать наш результат об изоморфизме некоторых нормированных пространств дифференцируемых функций во всем пространстве R^n, вводим некоторые дополнительные обозначения. Пусть m – целое неотрицательное число и $m\le r$. Тогда имеют места следующие ограниченные вложения

$$V_{2;\,\alpha-m}^{r+m}(R^n)\to V_{2;\,\alpha}^r(R^n)\to L_{2;\,\alpha+r}(R^n).$$

Для удобства записи положим $\mathbb{H}_0=L_{2;\,\alpha+r}(R^n)$, $\mathbb{H}_+^m=V_{2;\,\alpha-m}^{r+m}(R^n)$ и символом $\mathbb{H}_-^{-m}$ обозначим пополнения пространства $\mathbb{H}_0$ по норме

$$\|f\|_{-m}=\sup\left|\int d^{2(\alpha+r)}(x)f(x)\overline{u(x)}dx\right|,$$

где верхняя грань берется по всем $u\in C_0^\infty(R^n)$ таким, что $\left\|u;\,V_{2;\,\alpha+m}^{r-m}(R^n)\right\|=1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2), (3), и пусть существует натуральное число $m_0\le r$ такое, что*

$$\left|a_{kl}^{(s)}(x)\right|\le Md^{|s|}(x),\ x\in R^n,$$

для любого мультииндекса $s:\ |s|\le m_0$.

Тогда для любого замкнутого сектора $S\subset\{z\in C:\ |\arg z|<\pi-\varphi\}\cup\{0\}$ с вершиной в нуле найдется положительное число σ такое, что если $\lambda\in S$ и $|\lambda|\ge\sigma_0$, то оператор P_λ, соответствующей задаче D_λ, осуществляет изоморфизм (алгебраический и топологический) пространства $\mathbb{H}_-^{-m}$ на $\mathbb{H}_+^m$ для любого целого числа $m\in[0,\,m_0]$.

Отметим, что ранее изоморфизм весовых функциональных пространств с помощью эллиптических дифференциальных операторов с вырождением, в основном, исследовался в случае, когда полуторалинейная форма, связанная с основным оператором, удовлетворяла условию коэрцитивности (см., например, [4, 5] и имеющуюся в них библиографию). В нашем случае полуторалинейная форма (1) может не удовлетворять условию коэрцитивности. Здесь коэрцитивность полуторалинейной формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [4].

Литература

1. **Трибель Х.** *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* – М.: Мир. – 1980.

2. **Исхоков С.А., Рахмонов Б.А.** *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле во всем пространстве, связанной с некоэрцитивной формой* // Уфимский матем. журнал. 2020. Т. 12, № 1. С. 13–29.

3. **Исхоков С.А., Рахмонов Б.А.** *О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов во всем пространстве* // Доклады АН РТ. 2018. Т. 61, № 3. С. 224–230.

4. **Никольский С.М., Лирозкин П.И., Мирошин Н.В.** *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.

5. **Мирошин Н.В.** *Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 1992. Т. 194, С. 179–195.

УДК 517.946.6

Обратная задача определения функции источника для параболического уравнения второго порядка с оператором Капуто

Кадиркулов Б.Ж.[1], **Жалилов М.А.**[2]
[1] Ташкентский государственный университет востоковедения; **"kadirkulovbj@gmail.com"**
[2] Ферганский государственный университет; **"alimuhammad9978@mail.ru"**

Пусть $\Omega = \{(x,t) : -\pi < x < \pi,\ 0 < t < b\}$, где b – положительное действительное число. В этой области для уравнения параболического типа вида

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u\,(x;t) - \frac{\partial^2 u\,(x;t)}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u\,(-x;t)}{\partial x^2} = f\,(x) $$

где $\varepsilon \in R, 0 < |\varepsilon| < 1$ рассмотрим задачу:

Задача D.Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $f\,(x)$ обладающую следующими свойствами:
1) $u, {}_C D_{0t}^{\alpha} u, u_{xx} \in C(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C[-\pi,\pi]$;
2) удовлетворяют уравнению (1) в области Ω;
3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$ u(x,0) = \varphi(x),\ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,0) - u_t(x,b) = \psi(x),\ -\pi \le x \le \pi, $$

$$ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ 0 \le t \le b. $$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные достаточно гладкие функций, а ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ -оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется следующим образом [1].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$ \varphi(x) \in C^3[-\pi,\pi], \psi(x) \in C^2[-\pi,\pi], $$

$$ \varphi^{(2n)}(\pm\pi) = 0, \psi(\pm\pi) = 0,\ n = \overline{0,1}. $$

Тогда задача D имеет единственное решение.

Литература

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
2. **Юнусова Г.Р.** *Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа,* Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. 2011. 8(89), стр. 108-117.

УДК 517.982

ОПЕРАТОРЫ ЭРДЕЙИ-КОБЕРА В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Каримов Ш. Т.[1], Орипов Ш. А.[2], Хужахонов З. З.[3]
[1,2] Ферганский государственный университет
shaxkarimov@gmail.com; shoripov1991@gmail.com;
[3] Ферганский политехнический институт zaylobiddinmath@mail.ru

Обобщенная функция понимается как непрерывный функционал над некоторым классом основных функций. В зависимости от рассматриваемых задач используются самые разнообразные классы основных функций, учитывающие специфику задачи.

Рассмотрим обобщенные функции на Ω, где Ω – полуось $[0,\ +\infty)$. Основные функции на Ω берутся бесконечно дифференцируемыми внутри Ω с предписанным поведением на концах Ω. Значение обобщенной функции f как функционала над основной функцией φ будет обозначаться в виде (f,φ) [1]. Обобщенная функция называется регулярной, если существует такая локально суммируемая функция $f(x)$, что $\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$ существует для всех основных функций $\varphi(x)$ и

$$ (f,\varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. $$

Все остальные не регулярные обобщенные функции называются сингулярными. Примером сингулярной обобщенной функции является δ – функция Дирака. Известная δ – функция Дирака $\delta(x-x_0),\ \ x_0\in\Omega$, и ее производные, действующие по правилу

$$(\delta^{(k)}(x-x_0),\varphi)=(-1)^k\varphi^{(k)}(x_0),$$

представляют собой пример сингулярных обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Справедливо и обратное утверждение: всякий функционал f, сосредоточенный в точке x_0, имеет вид $f=\sum\limits_{k=0}^{N}c_k\delta^k(x-x_0)$.

Класс $X=X(\Omega)$ основных функций предполагается наделенным топологией (сходимостью). Через $X'=X'(\Omega)$ обозначаем типологически сопряженное к X пространство обобщенных функций.

Существует два основных способа определения дробных операторов от обобщенных функций. Первый восходит к Л.Шварцу и основывается на определении дробного интеграла как свертка функции $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x_{\pm}^{\alpha-1}$ с обобщенной функцией f.

Для основных функций $\varphi(x),\ \psi(x)\in X(\Omega)$ их сверткой называется функция

$$\varphi(x)*\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-y)\psi(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\psi(x-y)dy.$$

Определение операции свертки в области обобщенных функций опирается на понятие прямого произведения обобщенных функций. Напомним, что прямое произведение обобщенных функций $f(x),\ g(y)\in X'(\Omega)$ определяется как функционал $f(x)\times g(y)$, который на основные функции $\varphi(x,y)\in C_0^\infty(R^2)$ действует по формуле

$$(f(x)\times g(y),\,\varphi(x,y))=(f(x),(g(y),\,\varphi(x,y))).$$

Для обобщенных функций $f(x),\ g(y)\in X'(\Omega)$ свертка обобщается по формуле

$$(f*g,\ \varphi)=(f(x)\times g(y),\,\varphi(x+y))=(f(x),(g(y),\,\varphi(x+y))). \qquad (1)$$

Таким образом свертка $f*g$ определяется как значение функционала $f(x)\times g(y)$ двух переменных на функциях $\varphi(x,y)$ вида $\varphi(x+y)$. Однако функция $\varphi(x+y)$, не будучи финитной в R^2, не является основной функцией двух переменных. Очевидно, определение (1) будет иметь смысл, например для обобщенных функций $f(x),\ g(y)$ сосредаточенных на полуоси. В самом деле, пусть носитель основной функции $\varphi(x)$, содержится в интервале $[-a,\,a]$. Так как $f(x)=0,\ x<0,\ g(y)=0,\ y<0$, то функционал (1), не изменится если заменить функцию $\varphi(x+y)$ финитной функцией двух переменных $\psi(x,y)$, совпадающий с $\varphi(x+y)$ в треугольнике $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ x+y\le a$.

Второй, более употребительный способ основан на переходе к сопряженному оператору. Именно, исходя из формул дробного интегрирования по частям, полагают

$$(I_{\eta,\alpha}f,\,\varphi)=(f,\ K_{\eta,\alpha}\varphi), \qquad (2)$$

где [2,3]

$$I_{\eta,\alpha}\varphi\left(x\right)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}\varphi\left(t\right)dt,$$

$$K_{\eta,\alpha}\varphi\left(x\right)=\frac{2x^{2\eta}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_x^{+\infty}\left(t^2-x^2\right)^{\alpha-1}t^{1-2\alpha-2\eta}\varphi\left(t\right)dt.$$

Операторы $I_{\eta,\alpha}$ и $K_{\eta,\alpha}$ называют операторами дробного интегрирования Эрдейи-Кобера.

Подход (2) будет корректен, если $K_{\eta,\alpha}$ непрерывно действует из основного пространства X в X. Часто поступают в более общем виде: f и $I_{\eta,\alpha}f$ рассматривают как обобщенные функции над разными классами X в Y основных функций, так что $f\in X', K_{\eta,\alpha}f\in Y'$ и тогда $K_{\eta,\alpha}$ должен непрерывно действовать из Y в X.

Ввиду (2) мы можем рассматривать дробный интеграл $I_{\eta,\alpha}f$ на обобщенных функциях f, если они определены на основных функциях φ, образующих класс X, инвариантный относительно дробного интегрирования $K_{\eta,\alpha}$.

В работе исследовано свойство операторов Эрдейи-Кобера в классе обобщенных функций и показано их приложение к построению фундаментальных решений операторов с особенностями в коэффициентах.

Литература

1. **Владимиров В.С.** *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1976.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника – 1987.
3. **Нахушев А.М.** *Дробное исчисление и его применение.* М: Физматлит. – 2003.

УДК 517.948

О коэрцитивной оценке и разделимости дифференциального оператора Трикоми в весовом пространстве

Каримов О.Х.[1]
[1]Институт математики им.А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана, г. Душанбе, Таджикистан;
karimov_olim72@mail.ru

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эвериттy и М.Гирцу. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[1]-[5] и имеющиеся там ссылки).

В докладе речь идет о коэрцитивной оценке и разделимости дифференциального оператора Трикоми в весовом гильбертовом пространстве.

Рассмотрим в весовом пространстве $L_{2,k}(R^2)$ дифференциальный оператор Трикоми

$$L[u(x,y)] = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

Найдены условия на функцию $V(x,y)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_{2,k}(R^2)$, и для всех решений $u(x) \in L_{2,k}(R^2) \cap W^2_{2,loc}(R^2)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x,y) \in L_{2,k}(R^2)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|V(x,y)u(x,y); L_{2,k}(R^2)\| + \|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}; L_{2,k}(R^2)\| +$$
$$+ \left\|V^{\frac{1}{2}}(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}; L_{2,k}(R^2)\right\| + \left\|V^{\frac{1}{2}}(x,y)y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; L_{2,k}(R^2)\right\| \le M\|f(x,y); L_{2,k}(R^2)\|,$$

где положительное число М не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

Литература

1. **Бойматов К.Х.** *Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения.* Труды МИАН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 37-76.
2. **Отелбаев М.** *Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n.* Труды МИАН СССР. – 1983. – Т. 161. – – С. 195-217.
3. **Zayed E.M.E., Omran S.A.** *Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existance and Uniqueness Theorem.* Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2011. – V. 6. – № 8. – PP. 353 - 364.
4. **Каримов О.Х.** *О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом.* Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9. – № 1.– С. 55-62.
5. **Каримов О.Х.** *О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.* Чебышевский сборник. – 2021. – Т. 22. – №1. –С. 163-176.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ КОНЦАМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Касимов Ш.Г.[1], Шогдоров У.С.[2], Матякубова Д.М.[3]
[1,2,3]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека; shokiraka@mail.ru1

Постановка задачи. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с. 141-143]. К уравнению колебаний балки приходят также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2]. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times ... \times (0, l)$, а l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее уравнение вида

$$D_j^{\alpha} u(y,t) + a^2 \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial^{4m} u(y,t)}{\partial y_p^{4m}} = f(y,t),\ (y,t) \in Q,\ n-1 \le \alpha < n,\ j = \overline{0, n-1},\ m, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(y,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(y),\ \ i = 0, ..., j-1, \\ \frac{\partial^s u(y,0)}{\partial y^s} = \varphi_s^0(y),\ \ s = 0, ..., n-j-1. \end{cases} \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4k} u(y,t)}{\partial y_p^{4k}}\Big|_{y_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+1} u(y,t)}{\partial y_p^{4k+1}}\Big|_{y_p=0} = 0, \\ \frac{\partial^{4k} u(y,t)}{\partial y_p^{4k}}\Big|_{y_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+1} u(y,t)}{\partial y_p^{4k+1}}\Big|_{y_p=l} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad p = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $(y,t) = (y_1, ..., y_p, ..., y_N, t) \in Q$, число $a > 0$ фиксировано, а $f(y,t)$, $\tilde{\varphi}_i^0(y)$, $i = 0, ..., j-1$, и $\varphi_s^0(y)$, $s = 0, ..., n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $v_{m_1,...,m_N}(x_1, ..., x_N) = X_{m_1}(x_1) \cdot ... \cdot X_{m_N}(x_N)$, где

$$X_{m_p}(x_p) = \frac{1}{\sqrt{1 + b_{m_p}^{4s_p}}} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}\left|tg\frac{b_{m_p} l}{2}\right|} \left(\frac{sh b_{m_p}\left(x_p - \frac{l}{2}\right)}{ch\frac{b_{m_p} l}{2}} - \frac{\sin b_{m_p}\left(x_p - \frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{b_{m_p} l}{2}} \right),\ m_p = 2k_p,\ k_p = 1,\ 2,\ \dots \\ \frac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\frac{b_{m_p} l}{2}\right|} \left(\frac{ch b_{m_p}\left(x_p - \frac{l}{2}\right)}{sh\frac{b_{m_p} l}{2}} + \frac{\cos b_{m_p}\left(x_p - \frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{b_{m_p} l}{2}} \right),\ m_p = 2k_p - 1,\ k_p = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

b_{m_p} - корень уравнения $ch(lb) \cdot \cos(lb) = 1$. Оператор D_j^{α} интегро-дифференцирования в смысле секвенциальной производной Миллера – Росса по Римана – Лиувилля (см. например [3], [4]).

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1, 2s_2, ..., 2s_N}(\Pi)$ функций N переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_N)$ полную ортонормированную систему образуют все произведения $\{v_n(y),\ n \in \mathbb{N}^N\}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(y)$, $i = 0, ..., j-1$, $\varphi_s^0(y)$, $s = 0, ..., n-j-1$ и правая часть $f(y,t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{n-j-1} t^s E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N} \cdot t^{\alpha}; s+1) \varphi_{s;m_1,...,m_N}^0 + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} t^{\alpha-k-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N} \cdot t^{\alpha}; \alpha-k) \tilde{\varphi}_{k;m_1,...,m_N}^0 +$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N}(t-\tau)^{\alpha-1}; \alpha) f_{m_1,...,m_N}(\tau) d\tau \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(1 + b_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty$$

при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1), (2), (3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1, s_2, ..., s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = ... = s_N > 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(y,t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n-j-1} t^s E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N} \cdot t^{\alpha}; s+1) \varphi_{s;m_1,...,m_N}^0 + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} t^{\alpha-k-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N} \cdot t^{\alpha}; \alpha-k) \tilde{\varphi}_{k;m_1,...,m_N}^0 +$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N}(t-\tau)^{\alpha-1};\alpha) f_{m_1,...,m_N}(\tau)d\tau\Bigg]\cdot \tilde{v}_{m_1,...,m_N}(y_1,...,y_N),$$

где коэффициенты определяются по формулам $\mu_{m_1,...,m_N} = -\lambda_{m_1,...,m_N} = -a^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m_j} = -a^2\sum_{j=1}^{N} b_{m_j}^{4m},\ E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1,...,m_N}\cdot t^{\alpha};\alpha-k) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(\mu_{m_1,...,m_N}t^{\alpha})^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-k)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* Москва: Изд-во. МГУ, 1999. 798 с.
2. **Коренев Б.Г.** *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании.* М.: Наука, 1965. 355 с.
3. **Miller K.S., Ross B.** *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* New York: wiley and Sons, 1993. 384 p.
4. **Chirkiy A.A., Matichin I.I.** *Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Miller-Ross.* J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1-11.

УДК 517.956.6

Бузилиш чизиғида узилишга эга бўлган иккинчи тур параболик-гиперболик типдаги тенглама учун параллел характерисикаларда Бицадзе – Самарский шарти билан қўйилган масалани таҳлил қилиш

М. Ж. Қодирова
Муқимий номидаги Қўқон Давлат педагогика институти islomovbozor@yandex.com

Қуйидаги тенгламани қараймиз:

$$0=\begin{cases} x\,u_{xx}+\alpha_0 u_x-u_y, & x>0, \quad y>0,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}, & x>0, \quad y<0,\end{cases} \tag{1}$$

бу ерда

$$0<\alpha_0<1+2\beta<1, 2\beta=m/(m-2), 0<m<1, -1<2\beta<0. \tag{2}$$

Ушбу мақолада (1) кўринишдаги иккинчи тур параболик-гиперболик типдаги тенглама учун бузилиш чизиғида узилишга эга бўлган шарти билан берилган масаланинг бир қийматли ечилиши исботланган.

Ω орқали $x>0,\ \ y>0$ бўлганда $x=0,\ \ x=1,\ \ y=1$ мос равишда тўғри чизиқларда ётган $AA_0,\ BB_0,\ A_0B_0$ кесмалар ва $x>0,\ \ y<0$ бўлганда эса (1) тенгламанинг $AB:\ y=0$, $AC:\ \ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $BC:\ \ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ характеристикалари билан чегараланган соҳани белгилаймиз.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз: $J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$,

$$\Omega_1=\Omega\cap\{x>0,\ \ y>0\}, \Omega_2=\Omega\cap\{x>0,\ \ y<0\}, \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J,$$

$$\lim_{y\to\pm0}u(x,y)=\tau^{\pm}(x),\ \ (x,0)\in\bar{J}, \lim_{y\to\pm0}u_y(x,y)=\nu^{\pm}(x),\ \ (x,0)\in J. \tag{3}$$

$E\,(c,0)\in J$ нуқтасидан чиқиб, (1) тенгламанинг AC ва BC характерисикаларига парал-лел бўлган характерисикаларини мос равишда $EP:\ x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c$ ва $EQ:\ x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c$ белгилаймиз. (1) тенгламанинг $M\,(x,0)\in J_2$ нуқтадан чиқувчи характерисикалари билан мос равишда AC ва EP характерисикаси кесишиш нуқтасининг координаталарини

$$\Theta(x)=\left(\frac{x}{2};\ -\left[\frac{x}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right),\ \Theta^*(x)=\left(\frac{x+c}{2};\ -\left[\frac{x-c}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right) \tag{4}$$

орқали белгилаймиз.

M_p-**масала.** Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:
1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_1\cup\Omega_2\cup J)$;
2) $u(x,y)\in C^{\,2,1}_{x,y}(\Omega_1)$ бўлиб, Ω_1 соҳада (1) тенгламани қаноатлантирсин;

3) $u(x,y)\in R_2$ [1, 113 бет] бIлиб, $D_2\setminus(EP\bigcup EQ)$ соҳада (1) тенгламани умумлашган ечими бўлсин;
4) $u(x,y)$- функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\qquad u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\qquad 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$u(x,y)|_{AQ}=\psi(x),\qquad 0\le x\le \frac{c}{2}, \tag{6}$$

$$u\left[\Theta(x)\right]=\mu\, u\left[\Theta^*(x)\right]+\rho(x),\quad c\le x\le 1; \tag{7}$$

5) J бузилиш чизиғида қуйидаги

$$\lim_{y\to -0}u\left(x,y\right)=p_1(x)\lim_{y\to +0}u\left(x,y\right)+q_1(x),\quad (x,0)\in\bar{J}, \tag{8}$$

$$\lim_{y\to -0}u_y\left(x,y\right)=p_2(x)\lim_{y\to +0}u_y\left(x,y\right)+q_2(x),\quad (x,0)\in J, \tag{9}$$

улаш шартлари бажарилсин, бу ерда $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\psi(x),\rho(x),p_j(x),\ \ q_j(x)\ (j=1,2)-$ берилган функциялар бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

$$\varphi_1(0)=\psi\left(0\right)=0,\psi\left(\frac{c}{2}\right)=\rho(c), \tag{10}$$

$$\varphi_i(y)\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right),\quad (i=1,2), \tag{11}$$

$$\psi(x)\in C^2\left[0;\frac{c}{2}\right],\qquad \rho(x)\in C^2\left[c;1\right], \tag{12}$$

$$p_j(x),\ \ q_j(x)\in C\left(\bar{J}\right)\cap C^2\left(J\right),\ \ (j=1,2), \tag{13}$$

$$\mu=const<0,\qquad p_j(x)<0,\ (j=1,2)\ \ \forall\, x\in\bar{J}. \tag{14}$$

Қуйидаги теоремалар исботланган.

1-Теорема . Агар (2), (14) ва $T(x_0)<0\quad (T(x_0)>0)\,,\ \ x_0\in(0,1)$ шартлар бажарилса, у ҳолда Ω со?ада M_p масаланинг ечими ягонадир,
бу ерда

$$T(x_0)=\frac{sin2\beta\pi}{\pi}\left[{x_0}^{2\beta-1}\ p_1(x)\tau^+\left(x_0\right)+(1-2\beta)\int\limits_0^{x_0}\frac{p_1(x_0)\tau^+(x_0)-\ p_1(t)\tau^+\left(t\right)}{\left(x_0-t\right)^{2-2\beta}}d\,t\right].$$

2-Теорема . Агар (2), (10) -(13) шартлар бажарилса, у ҳолда Ω соҳада M_p масаланинг ечими мавжуд.

M_p масала ечимининг ягоналиги экстремум принципига асосан [2], мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланади.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* -М. -1985. -304с.
2.**Исламов Н. Б.** *Аналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнения пара-боло-гиперболического типа второго рода.* Уфимск. матем. журн., -2015. -**7(1).** -С.31–45.

УДК 517.588

Линейно независимке решения системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрической функции $F_{20}^{(20)}(x,y,z,t)$ второго порядка с четырьмя переменными.

Мавлонов М.[1],
[1]Термезского государственного университета mansurmavlonov2709@gmail.com1

Гипергеометрические функции занимают важное место в ряду специальных функций математической физики. В настоящий момент существует, по крайней мере, четыре подхода к изучению свойств гипергеометрической функции многих переменных. Такие функции могут определяться как суммы степенных рядов определенного вида (так называемых гипергеометрические ряды), как интеграл типа Меллина-Барса, как решения систем дифференциальных уравнений. В тезисе доклада [1] было доказано, что функция [2-5]

$$u(x,y,z,t)=F_{20}^{(4)}\left(\begin{matrix} a_1,a_2,b_1,b_2,b_3; \\ c_1,c_2,c_3; \end{matrix}\ x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1)_{m+n}(b_2)_p(b_3)_q}{(c_1)_{m+q}(c_2)_n(c_3)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1}$$
$$\left\{\sqrt{\frac{|x|}{1-|z|}}+\frac{|x|}{1-|z|}<1, |z|<1, |t|<1,\right\},$$

где $(a)_m=\Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ символ Похгаммера [6], $\Gamma(a)$ гамма-функция Эйлера a_1,a_2,b_1,b_2,b_3, c_1, c_2,c_3 постоянные параметры, удовлетворяет систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left\{\begin{array}{c} x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}+tu_{xt}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}+ \\ +[c_1-(a_1+b_1+1)x]u_x-(a_1+b_1+1)yu_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0, \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-yzu_{yz}-(a_1+b_1+1)xu_x+ \\ +[c_2-(a_1+b_1+1)y]u_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0, \\ z(1-z)u_{zz}-xzu_{xz}-yzu_{yz}-b_2xu_x- \\ -b_2yu_y+[c_3-(a_1+b_2+1)z]u_z-a_1b_2u=0, \\ t(1-t)u_{tt}+xu_{xt}+[c_1-(a_2+b_3+1)t]u_t-a_2b_3u=0 \end{array}\right. \tag{2}$$

В этом докладе определяются линейно независимые решения системы (2) в начале координаты. Линейно независимые решения системы (2) ищем в виде

$$u(x,y,z,t)=x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\delta}w(x,y,z,t), \tag{3}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ постоянные числа, которых следует определить. Подставляя (3) в систему (2), мы имеем

$$\left\{\begin{array}{c} x(1-x)w_{xx}-2xyw_{xy}-xzw_{xz}+tw_{xt}-y^2w_{yy}-yzw_{yz}+ \\ +\{\delta+c_1+2\alpha-[(\alpha+\beta+\gamma a_1)+(\alpha+\beta+b_1)+1]x\}w_x- \\ -[(\alpha+\beta+\gamma+a_1)+(\alpha+\beta+b_1)+1]yw_y-(\alpha+\beta+b_1)zw_z+\alpha x^{-1}tw_t- \\ -\{-\alpha(\alpha-1+\delta+c_1)x^{-1}+(\alpha+\beta+\gamma+a_1)(\alpha+\beta+b_1)\}w=0, \\ y(1-y)w_{yy}-x^2w_{xx}-2xyw_{xy}-xzw_{xz}-yzw_{yz}- \\ -[(\alpha+\beta+\gamma+a_1)+(\alpha+\beta+b_1)+1]xw_x+ \\ +\{2\beta+c_2-[(\alpha+\beta+\gamma+a_1)+(\alpha+\beta+b_1)+1]y\}w_y-(\alpha+\beta+b_1)zw_z- \\ -\{-\beta(\beta-1+c_2)y^{-1}+(\alpha+\beta+\gamma+a_1)(\alpha+\beta+b_1)\}w=0, \\ z(1-z)w_{zz}-xzw_{xz}-yzw_{yz}-(\gamma+b_2)xw_x-(\gamma+b_2)yw_y+ \\ +\{2\gamma+c_3-[(\alpha+\beta+\gamma+a_1)+(\gamma+b_2)+1]z\}w_z-, \\ -[-\gamma(\gamma-1+c_3)z^{-1}+(\alpha+\beta+\gamma+a_1)+(\gamma+b_2)]w=0, \\ t(1-t)w_{tt}+xw_{xt}+\delta xt^{-1}w_x+\{2\beta+\alpha+c_1-[(\delta+a_2)+(\delta+b_3)+1]t\}w_t- \\ -[-\delta(\delta-1+\alpha+c_1)t^{-1}+(\delta+a_2)(\delta+b_3)]w=0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Из системы (4) следует, что должно быть

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha=0, \\ \beta(\beta-1+c_2)=0, \\ \gamma(\gamma-1+c_3)=0, \\ \delta=0. \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha= & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta= & 0 & 1-c_2 & & 1-c_2 \\ \gamma= & 0 & 0 & 1-c_3 & 1-c_3 \\ \delta= & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Следовательно, определяем следующие линейно независимые решения системы (2)

$u_1(x,y,z,t)=F_{20}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)$,

$u_2(x,y,z,t)=y^{1-c_2}F_{20}^{(4)}(1-c_2+a_1,a_2,1-c_2+b_1,b_2,b_3;c_1,2-c_2,c_3;x,y,z,t)$

$u_3(x,y,z,t)=z^{1-c_3}F_{20}^{(4)}(1-c_3+a_1,a_2,b_1,1-c_3+b_2,b_3;c_1,c_2,2-c_3;x,y,z,t)$,

$u_4(x,y,z,t)=y^{1-c_2}z^{1-c_3}F_{20}^{(4)}(2-c_2-c_3+a_1,a_2,1-c_2+b_1,\ 1-c_3+b_2,b_3;c_1,2-c_2,2-c_3;x,y,z,t)$,

Литература

1. **Мавлонов М.,Хасанов А.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари. Халқаро илмий-амалий анжуман материаллари. 2022 йил, 11-12 май БУХОРО – 2022.
2. **H. Exton** *Certain hypergeometric functions of four variables* Bull. Soc. Math. Greece (N.S.) 13, 104–113, 1972.
3. **H. Exton** *Some integral representations and transformations of hypergeometric functions of four variables*Bull. Soc. Math. Greece (N.S.) 14, 132–140, 1973.
4. **H. Exton** *Multiple hypergeometric functions and applications* John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto,1976.
5. **C. Sharma, C. L. Parihar** *Hypergeometric functions of four variables (I)*J. Indian Acad. Math. 11 (2), 99–115, 1989.

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной кравой задаче для уравнения смешанного типа вырождающегося внутри области

Мадрахимова З. С.[1], Турсунова Н. Х.[2]
[1,2] Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека;
zilolaxonmadrahimova@gmail.com, nafisatursunova41@gmail.com

В данной работе изучается одна нелокальная задача с условием Бидсадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа, в случае когда гиперболической часть имеет вырождение.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & x>0, \quad y>0, \\ xu_{xx}+(-x)^n u_{yy}+\alpha u_x, & x<0, \quad y>0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$n>1, \quad \frac{1-n}{2}<\alpha<1. \tag{2}$$

Пусть D_1 - область ограниченная отрезками $AB, \ \ BB_0, \ \ B_0A_0$, и прямыми $y=0, \ x=1, \ y=1, \ x=0$, соответственно, а D_2- характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 на оси Oy и двумя характеристиками

$$AC: y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=0, \quad A_0C: y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=1$$

уравнения (1) при $x<0, \quad y>0$, выходящими из точек $A, \quad A_0$ и пересекающимися в точке $c\left(-\left(\frac{n+1}{4}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \frac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения: $l=\{(x,y): x=0, \ \ 0<y<1\}, \ \ D=D_1\cup D_2\cup l$.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача T_α. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_j \ \ (j=1,2)$;

3) $u_x\in C(D_1\cup I), \ \ (-x)^\alpha u_x\in C(D_2\cup I)$ и на интервале I выполняются условия склеивания

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y)=\lim_{x\to-0}(-x)^\alpha u_x(x,y)$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\mid_{AB}=\varphi_1(x), \quad 0\le x\le 1; \quad u(x,y)\mid_{BB_0}=\varphi_2(x), \quad 0\le y\le 1;$$

$$D^{1-\beta}_{oy}u[\theta_0(y)]=a(y)\lim_{x\to-0}(-x)^\alpha u_x(x,y)+b(y), \quad (0,y)\in I$$

здесь

$$\theta_0(y) = \left(-\left(\frac{n+1}{4}y\right)^{\frac{2}{n+1}}, \frac{y}{2}\right), \quad (0, y) \in I,$$

-точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(0, y)$, с характеристикой AC, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $a(y)$, $b(y)$– заданные функции, причем $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$,

$$\varphi_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{3}$$

$$\varphi_2(y) \in C(\overline{I}) \cap C^1(I), \tag{4}$$

$$a(y), b(y) \in C(\overline{I}) \cap C^2(I). \tag{5}$$

а $D^l_{ax}[\cdot]$– интегро-дифференцияльный оператор дробного порядка [4].

Заметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с вырождением типа и порядка изучены работах [1],[2],[3].

Доказана следующая теорема.

теорема. Если выполнены (2), (3) - (5), то в области D существует единственное решение задачи T_α.

Литература

1. Мадрахимова З.С. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области // Узбекский математический журнал. 2010. №3.С.44-51.
2. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. 2005. 4.С.102-110.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:"Наука". 1981.448с.
4. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. -М.: Высшая школа, 1985.-304с.

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

Мамадалиев Н. А., Тахиров Б. М. А.
Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека;
e-mail:m_numana59@mail.ru bekzodtoxirov907@gmail.com

В данной работе изучены конфликтно-управляемый процесс, описываемой системой дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа. Получено достаточное условие для разрешимости игровые задачи управления пучками траекторий. Данная работа примыкает к исследованиям [2-4].

Постановка задачи. Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \dot{z}(t-h_i) + \sum_{i=0}^{m} B_i z(t-h_i) - f(u(t), v(t)), \ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$, $B_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$, — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $(n \times n)$; соответственно; $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m$ — действительные числа; u — управляющий параметр преследования, v — управляющий параметр убегания. Параметры u и v выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \ 0 \leq t < +\infty, \tag{2}$$

где P и Q — непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно; $f : P \times Q \to \mathbb{R}^n$– непрерывная функция.

Измеримые функции $u = u(t), v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено непустое цилиндрическое терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — компактное подмножество подпространства L, где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$).

В пространстве $\mathbb{R}^n$ кроме множества M выделено множество $N(\Phi(\cdot))$ из точек которого исходят траектории игры (1), называется начальным множеством. В качестве начального множества $N(\Phi(\cdot))$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения

$$\Phi(s),\ -h \le s \le 0 : N(\Phi(\cdot)) = \{z_0(t) : z(s) = z_0(t),\quad z_0(t) \in \Phi(t),\quad -h \le t \le 0\}.$$

Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек начального множества $N(\Phi(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ на терминальное множество M за конечное время.

При изучении игры (1),(2), мы отождествляем себя с преследователем. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ на терминальное множество M.

Задача управления пучками траекторий в игре (1),(2), состоит в нахождении числа $T \ge 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения допустимого управления $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t)$, $0 \le t < +\infty$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t)$, $0 \le t < +\infty$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода*.

Определение. *Пусть* $K(t), 0 < t \le \tau,$ *— единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами*: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}$ *— нулевая матрица порядка* n; b) $K(0) = E_n$, где E_n *— единичная матрица порядка* n; в) *функция* $\sum_{i=0}^{m} C_i K(t - h_i)$ *непрерывна на* $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ *при* $t > 0$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^{m} B_i K(t - h_i). \tag{3}$$

Матричная функция $K(t)$ может быть получена последовательным интегрированием уравнения (3).

Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L:\ \pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow L$; под операцией $\underline{*}$ понимается операции геометрической разности (разность Минковского)[1].

Пусть допустимые управления $u = u(s)$, $v = v(s)$ выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$. Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $\varphi(\cdot) \in N(\Phi(\cdot))$, $(z(t) = \varphi(t), -h \le t \le 0)$, в силу формулы Коши имеет место следующее представление

$$z(t) = -\sum_{i=0}^{m} K(t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} K(t - s - h_i)\Big[A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s)\Big] ds -$$

$$- \int_{0}^{t} K(t - s) f(u(s), v(s)) ds, \tag{1}$$

где $A_0 = -E_n$, E_n — единичная матрица порядка n.

Пусть $\tau > 0-$ положительное число и $t \in [0, \tau]$. Положим

$$\hat{w}(t) = \cap_{v \in Q} F(t, v), \quad W(\tau) = \int_{0}^{\tau} \hat{w}(t) dt,\ 0 \le t \le \tau,$$

где $F(t, v) = \pi K(t) f(P, v)$ и $\pi K(t) f(P, v) = \{\pi K(t) f(u, v) : u \in P\}$.

Предположение 1. *Множество* $\hat{w}(t)$ *непусто при всех* $t \ge 0$ [2].

Далее, через $W_1\Big[M_1 \underline{*} \Omega[\tau, N(\Phi(\cdot))], \tau\Big]$ обозначим следующее множество

$$W_1\Big[M_1 \underline{*} \Omega[\tau, N(\Phi(\cdot))], \tau\Big] = \Big[M_1 \underline{*} \Omega[\tau, N(\Phi(\cdot))]\Big] + W(\tau),$$

где

$$\Omega\Big[t, N(\Phi(\cdot))\Big] = \Big\{-\sum_{i=0}^{m} \pi K(t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(t - s - h_i)\Big[A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s)\Big] ds :$$

$\varphi(s) \in N(\Phi(s)),\ -h_i \leq s \leq 0\Big\}.$

Теорема. *Пологаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1)-(2). Предположим, что при некотором* $\tau = \tau_1$ *имеет место включение* $0 \in W_1\Big[M_1 \underline{*}\, \Omega[\tau, N(\Phi(\cdot))], \tau\Big]$. *Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества* $N(\Phi(\cdot))$ *на множество* M *за время* $T[N(\Phi(\cdot))] = \tau_1$.

Литература

1. **Понтрягин Л.С.** *Избранные научные труды. М .Наука. Том 2. 1998. 576 с.*
2. **Сатимов Н.Ю.** *К методам решения игровых задач управления пучками траекторий //ДАН. 1990. Т.314. № 1. С.132-134.*

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

Мамажонов Ж.Т.[1], Холматов З.А.[2]
[1,2] Ферганский государственный университет;
jmamajonov@gmail.com xolmatovzuxriddin905@gmail.com

Текст статьи

Пусть $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < l, -T < y < 0\}$, $OA = \{(x,0) : 0 < x < l\}$. Тогда в области $\Omega = \Omega_1 \cup OB \cup \Omega_2$ рассмотрим уравнение

$$(x^\alpha u_x)_x + \operatorname{sign} y u_{yy} = f(x,y). \tag{1}$$

где $f(x,y)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$.

Задача D_α Найти функция $u(x,y)$ решение уравнения (1) в области $\Omega \backslash OA$ которая:

1) непрерывна в $\overline{\Omega}$ и непрерывно дифференцируема в Ω;

2) удовлетворяет одному из следующих групп условий:

$$u(x,-T) = u(x,T) = u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad 0 < x < l, \quad -T < y < T;$$

$$u(x,-T) = u(x,T) = u_x(0,y) = u_x(l,y) = 0, \quad 0 < x < l, \quad -T < y < T.$$

Из постановки задачи следует, что на линии изменения типа $y = 0$ выполняются условия склевания:

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad 0 < x < l,$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0), \quad 0 < x < l.$$

Решения задачи D_α при $f(x,y) = 0$ разыскивается в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Тогда, относительно $X(x)$ получится уравнения

$$\left(x^\alpha X'(x)\right)' + \lambda X(x) = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$X(0) = X(l) = 0; \tag{3}$$

или

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{4}$$

Здесь λ - пока неизвестный параметр.

Известно, что общее решение уравнения (2) имеет вид [1]

$$X(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}\left[c_1 J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) + c_2 J_{-p}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)\right]$$

где $p = (1-\alpha)/(2-\alpha)$, а $J_p(\cdot)$ и $J_{-p}(\cdot)$ – бесселовые функция первого рода.

Отсюда следует, что решения уравнения (2) удовлетворяющее условию $X(0) = 0$, имеет вид

$$X(x) = c_1 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что решения уравнения (2), удовлетворяющее условию $X'(0) = 0$, имеет вид

$$X(x) = c_2 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{-p}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) \tag{6}$$

Теперь подчиняя функцию (5) условию $X(l) = 0$, имеем

$$J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right) = 0$$

Пусть ν_n – $n-$ый положительный корень уравнения

$$J_p\,(z) = 0. \tag{7}$$

Известно, что в силу $p > 0$, уравнение (7) имеет счетное число вещественных корней. Принимая во внимание это из полученного уравнения имеем счетное число нулей

$$\nu_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2-\alpha} l^{\frac{2-\alpha}{2}}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Подставляя это в (5), получим функции

$$X_n(x) = c_n x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_p\left[\nu_n \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right], \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{8}$$

которые является нетривиальными решениями в (0,1), удовлетворяющее условиям (1) и (3).

Далее, аналогично подчиняя функцию (6) условию $X'(l) = 0$, нетрудно убедится, что функции

$$X_n(x) = c_n x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{-p}\left[\nu_n \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right], \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{9}$$

является нетривиальными решениями задачи (1), (4), если ν_n – $n-$ый положительный корень уравнения

$$zJ'_{-p}(z) + pJ_{-p}(z) = 0. \tag{10}$$

Известно, что если $(\alpha/\beta) + \nu \geq 0$ то уравнение $\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0$ имеет счетное число вещественных корней. Так как у нас $(\alpha/\beta) = p$, $\nu = -p$, то $(\alpha/\beta) + \nu = 0$, По этому уравнение (10) имеет счетного числа вещественных корней.

Тепер переходим к решению задачи D_α.

Решение изучаемой задачи ищется в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x), \tag{11}$$

где $X_n(x)$ - функции, определенные равенствами (8) или (9).

Подставляя (11) в уравнение (1) и разлагая функцию $f(x, y)$ по функциям (8), имеем

$$\mathrm{sign} y Y''_n(y) - \lambda_n Y_n(y) = f_n(y), \quad n = 1, 2, ...$$

Решая эти уравнения методом вариации постоянных, имеем

$$Y_n(y) = a_n(0) e^{\sqrt{\lambda_n} y} + b_n(0) e^{-\sqrt{\lambda_n} y} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^y f_n(\tau)\, \mathrm{sh}\, \sqrt{\lambda_n}(y-\tau) d\tau, \quad y > 0, \quad n = 1, 2, ...$$

$$Y_n(y) = c_n(-T)\cos\sqrt{\lambda_n}y + d_n(-T)\sin\sqrt{\lambda_n}y - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_{-T}^{y} f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(y-\tau)d\tau, \quad y<0, \quad n=1,2,...$$

Здесь a_n, b_n, c_n и d_n пока неизвестные коэффициенты.

Найденные эти функции удовлетворяя условиям склеивания, нетрудно убедится что при выпольнении условия

$$\operatorname{th}\left[\frac{2-\alpha}{2}\nu_n T l^{\frac{\alpha-2}{2}}\right] + \operatorname{tg}\left[\frac{2-\alpha}{2}\nu_n T l^{\frac{\alpha-2}{2}}\right] \neq 0$$

коэффициенты a_n, b_n, c_n и d_n находятся однозначно и имеет вид

$$Y_n(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\displaystyle\int_{-T}^{T} E_{n1}(y,\tau)\cdot f_n(\tau)d\tau, & y>0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\displaystyle\int_{-T}^{T} E_{n2}(y,\tau)\cdot f_n(\tau)d\tau, & y<0, \end{cases}$$

где

$$E_{n1}(y,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T+\tau)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-y)}{M_n(\tau)}, & -T\le\tau\le 0, \\ K_{n1}(y,\tau) & 0\le\tau\le T, \end{cases}$$

$$E_{n2}(y,\tau) = \begin{cases} K_{n2}(y,\tau), & -T\le\tau\le 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(T+y)}{M_n(\tau)} & 0\le\tau\le T, \end{cases}$$

$$K_{n1}(y,\tau) = \begin{cases} \dfrac{[\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}y\sin\sqrt{\lambda_n}T + \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y\cos\sqrt{\lambda_n}T]\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)}{M_n(T)}, & y\le\tau\le T, \\ \dfrac{[\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau\sin\sqrt{\lambda_n}T + \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau\cos\sqrt{\lambda_n}T]\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-y)}{M_n(T)}, & y\le\tau\le 0, \end{cases}$$

$$K_{n2}(y,\tau) = \begin{cases} \dfrac{[\sin\sqrt{\lambda_n}y\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}T - \cos\sqrt{\lambda_n}y\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}T]\sin\sqrt{\lambda_n}(T+\tau)}{M_n(T)}, & -T\le\tau\le y, \\ \dfrac{[\sin\sqrt{\lambda_n}\tau\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}T - \cos\sqrt{\lambda_n}\tau\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}T]\sin\sqrt{\lambda_n}(T+y)}{M_n(T)}, & y\le\tau\le 0, \end{cases}$$

$$M_n(T) = \sin\sqrt{\lambda_n}T\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}T + \cos\sqrt{\lambda_n}T\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}T$$

А во втором задаче при $n=0$

$$Y_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T}\left[\displaystyle\int_{-T}^{0}(T+\tau)(T-y)\cdot f_0(\tau)d\tau - \int_{0}^{T}(T-\tau)(T+y)\cdot f_0(\tau)d\tau\right] + \\ \qquad + \displaystyle\int_{0}^{y}(y-\tau)\cdot f_0(\tau)d\tau, & y>0, \\ \dfrac{1}{2T}\left[\displaystyle\int_{-T}^{0}(T-\tau)(T+y)\cdot f_0(\tau)d\tau - \int_{0}^{T}(T-\tau)(T+y)\cdot f_0(\tau)d\tau\right] + \\ \qquad + \displaystyle\int_{0}^{y}(y-\tau)\cdot f_0(\tau)d\tau, & y<0, \end{cases}$$

Литературы

1. Смирнов В.И. Курс высший математики. - *М.: Гостехиздат*, т.2, 1954, 627 с.

УДК 517.957

Задача Коши для уравнения Хирота в классе периодических бесконечнозонных функции.

Маннонов Г. А.[1], Эшбеков Р. Х.[2], Хасанов Т. Г.[3], Жонузоков Ш. Ш [4]
[1,2,3,4]Самаркандский государственный университет;
mannonov.g@mail.ru rayxonbek@mail.ru temur.xasanov.2018@mail.ru sharofjonzoqov1996@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача Коши для уравнения Хирота

$$\left\{ \begin{array}{l} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6(p^2+q^2)p_x\right] + b(t)\left[-q_{xx} + 2(p^2+q^2)q\right] \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6(p^2+q^2)q_x\right] + b(t)\left[p_{xx} - 2(p^2+q^2)p\right] \end{array} \right. , \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{l} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ \ q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^5(R),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5(R) \end{array} \tag{2}$$

в классе действительных безконечнозонных π-периодических по x функций

$$\begin{array}{l} p(x+\pi,t) = p(x,t),\ q(x+\pi,t) = q(x,t),\ x \in R,\ t>0, \\ p(x,t),\ q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $a(t),\ b(t) \in C\left([0,\infty)\right)$-заданные непрерывные ограниченные функции. В данной работе предлагается алгоритм построения решения $p(x,t),\ q(x,t),\ x \in R,\ t>0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x \in R,\ \tau \in R,\ t>0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Следует обметит, что уравнение Хироты

$$iu_t + \beta\left(u_{xx} \pm 2\left|u\right|^2 u\right) - i\alpha\left(u_{xxx} \pm 6\left|u\right|^2 u_x\right) = 0,\ \alpha,\beta \in R$$

было проинтегрировано в работах [1-4], а также [5-7] в классе быстроубывающих и конечнозонных функции.

Если запишем уравнения Хироты соответствующие (-) дефокусирующему случаю в вида эквивалентной ему на вещественную и мнимую части функции $u(x,t) = q(x,t) - ip(x,t),\ \ i = \sqrt{-1}$, то получим система уравнения вида (1).

Обозначим через
$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t),\, c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t),\, s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$
решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака L чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in R:\ |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \backslash \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\, \lambda_{2n})\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\, \lambda_{2n}),\ n \in Z$ называются лакунами, где λ_n корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t),\, n \in Z$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1},\, \lambda_{2n}]$. Числа $\xi_n(\tau,t),\ n \in Z$и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sign\left\{s_2(\pi,\,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\,\xi_n,\tau,t)\right\}$называются спектральными параметрами оператора L. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in Z$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t),\ n \in Z$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Теперь с помощью начальных функций $p_0(x+\tau),\ q_0(x+\tau),\ x,\tau \in R$ построим оператор Дирака виде $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\, \xi_n^0(\tau),\, \sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\, n \in Z\right\}$ оператора $L(\tau,t)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $p(x,t),\ q(x,t),\ x \in R,\ t>0$ является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)\},\ n \in Z$ оператора $L(\tau,t)$удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

1. $\frac{\partial \lambda_n(\tau,t)}{\partial t} = 0,\ \ n \in Z$

2. $\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \left\{ a(t) \left[\xi_n^3(\tau,t) + 4p(\tau,t)\xi_n^2(\tau,t) + \right.\right.$

$$+2\left(p^2(\tau,t)+q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t)+2\left(p(\tau,t)q_\tau(\tau,t)-p_\tau(\tau,t)q(\tau,t)\right)+$$

$$+2p(\tau,t)\left(p^2(\tau,t)+q^2(\tau,t)\right)-p_{\tau\tau}(\tau,t)\Big]+b(t)\Big[\left(p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)\right)^2+$$

$$+q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)+\xi_n^2(\tau,t)\Big]\Big\}\ ,\ n\in Z. \tag{5}$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in Z, \tag{6}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm 1,\ n\in Z$-спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$с коэффициентами $p_0(x+\tau),\ q_0(x+\tau),\ \tau\in R$. Последовательность $h_n(\xi),\ n\in Z$,участвующая в уравнении (5), определяется по формуле:

$$\begin{array}{l} h_n(\xi)=\sqrt{\left(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1}\right)\left(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t)\right)}f_n(\xi), \\ f_n(\xi)=\sqrt{\prod_{k=-\infty,k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}. \end{array} \tag{7}$$

Далее, с помощью замены переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right)\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\in Z$$

систему уравнения Дубровина (5) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\ \ \ x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau),\ \ \ x^0(\tau)\in K \tag{8}$$

где

$$\begin{array}{l} K=\{x(\tau,t)=(...,\,x_{-1}(\tau,t),\,x_0(\tau,t),\,x_1(\tau,t),...):\\ \|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+|n|\right)\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right)|x_n(\tau,t)|<\infty\right\}. \end{array}$$

Лемма 1. Если $p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^5(R)$, $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K:

$$\|H\left(x(\tau,t)\right)-H\left(y(\tau,t)\right)\|\le L\left\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\right\|,\ \forall x,y\in K$$

где

$$L=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+|k|\right)|k|^3\gamma_k\le\infty,\ \ A>0, \tag{9}$$

$$\gamma_k=\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}=\frac{c_k}{2^4\,|k|^5}+\frac{\delta_k}{k^6},\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_k^2<\infty, \tag{10}$$

Следует отметить, что оценка (11) получена в работе (см.[8], стр.98).

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 1 дают метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные $\lambda_n,\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm 1,\ n\in Z$ оператора Дирака $L(\tau,0)$.
Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через λ_n, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$. Теперь решая задача Коши (5), (6) при произвольном значении τ, находим
$\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$. Из формулы следов

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right), \tag{11}$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \tag{12}$$

определим функции $p(\tau,t)$ и $q(\tau,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальные функции $p_0(x),\ q_0(x)$ удовлетворяют условиям*

$$p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^5(R),\ \ q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(R),$$

то существует однозначно определяемое решение $p(\tau,t),\ \ q(\tau,t)$ задачи (1)-(3), которое определяется, соответственно, суммой рядов (11), (12) и принадлежит классу $C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0)$.

Литература

1. *Hirota R.* Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // J.Math Phys. 1973, vol.14, pp. 805–809.
2. *Hirota R.* Exact N-soliton solutions of the wave equation of Long waves in shallow water and in nonlinear lattices // J.Math Phys. 1973, vol.14, pp. 810–815.
3. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Решения типа "волнубийц"уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход // ТМФ, 2016, т.186, No2, с.191–220.
4. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии // Зап.научн.сем. ПОМИ, 2018, т.473, с.205–227.
5. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодических и антипериодических краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, II // Теория функцией, функциональный анализ и их приложения-Харьков: Выша школа, 1978, вып.30. с.90-101.; 1979, вып.31, с.102–109.

УДК: 517.968.72+517.958:536.2

Численные алгоритмы для решение обратной задачи поставленной уравнению смешанного типа

Меражова Ш. Б.[1], Меражов Н. И.[2], Саидова Н. М.[3]
[1,2,3]Buxoro Davlat Universiteti;
s.b.merajova@buxdu.uz, shsharipova@mail.ru, Nilufarsaidova93@gmail.com

В работе предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\theta(t)u_t(x,t) + \theta(-t)u_{tt}(x,t) - \lambda u_{xx}(x,t) = g(x), \quad (x,t) \in (0,l) \times (-\alpha,\beta), \tag{1}$$

здесь $\theta(t)$ — θ-функция Хевисайда. Краевые условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [-\alpha,\beta]. \tag{2}$$

Условия склейки при $t = 0$:

$$[u]_0 = 0, \quad [u_t]_0 = 0, \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

и считаем, что имеет место нелокальное условие:

$$u(x,\beta) - u(x,-\alpha) = \phi(x), \quad x \in [0,l]. \tag{4}$$

Будем считать, что функция $g(x)$ непрерывна и $g(0) = g(l) = 0$.

Соотношения (1)-(4) являются прямой задачей, т.е., если известны функции $\phi(x)$, $g(x)$ и постоянная λ, то решение $u(x,t)$ может быть найдено из соотношений (1)-(4).

Обратная задача: Необходимо определить функцию $g(x)$, если о решении прямой задачи (1)-(4) известна следующая дополнительная информация:

$$u(x,\beta) = \psi(x), \quad x \in [0,l]. \tag{5}$$

Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений.

Предложено три алгоритма численного решения обратной задачи:

- Алгоритм 1 основан на рягуляризация суммирования ряда Фурье, чьи коэффициенты содержат возрастающий множитель ω_k^2;

  Следуя работе [1], решение задачи (1)-(5) представляется в виде ряда:

$$g(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \big(\psi_k - a_k\phi_k \mathrm{e}^{-\lambda\omega_k^2\beta}\big) \sin(\omega_k x).$$

- Алгоритм 2 основан на решении уравнения Фредгольма 1-ого рода оптимизационным методом с регуляризацией по Тихонову;

  Показали, что решение обратной задачи (1)-(5) эквивалентно решению полученному следующему уравнению Фредгольма 1-ого рода:

$$\int_0^l K(x,s)g(s)ds = \phi_\beta(x).$$

- Алгоритм 3 основан на решении специальной обратной задачи для параболического уравнения.

Проведен ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

Алгоритм 2 дал наилучшее по точности восстановленное решение. Результат восстановления по Алгоритму 3 может быть улучшен, если в функционале невязки использовать регуляризатор Тихонова. Алгоритм 1 дал результат, менее удовлетворительный по сравнению с другими алгоритмами, поскольку восстановленная функция имеет слишком сглаженный вид.

Литература

1. **Сабитов К.Б.,Сафин Э.М.** *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области.* Изв. вузов. Математика 4, стр. 55–62, 2010.

УДК 517.956

Композиция интегралов с подвижными и неподвижными интегрируемыми особенностями.

Мирсабурова Г. М.[1], Тошпулатов Б. Р.[2], Абдурахмонова Г. М.[3]
[1,2,3]Термезский государственный университет;
umirsaburova@gmail.com, boburtoshpulatov909@gmail.com, abdurahmonovagulruh06@gmail.com

В работе вычеслена композиция интегралов с подвижными и неподвижными особенностями.

Вычислим интеграл

$$B(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{2\beta}} \int_{-1}^{1} \frac{\tau'(p(s))ds}{(1-bs-at)^{1-2\beta}}, \tag{1}$$

здесь поменяем порядок интегрирования, и получим

$$B(x) = \int_{-1}^{1} \tau'(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-bs-at)^{1-2\beta}}.$$

В внутреннем интеграле сделав замену переменного интегрирования $t = -1 + (1+x)\sigma$, имеем

$$B(x) = \int_{-1}^{1} \tau'(p(s))ds \int_{0}^{1} \frac{(1+x)d\sigma}{(1+x)^{2\beta}(1-\sigma)^{2\beta}(1-bs+a)^{1-2\beta}\left(1-\frac{a(1+x)\sigma}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta}} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{1-2\beta}\tau'(p(s))}{(1-bs+a)^{1-2\beta}}ds \int_{0}^{1} (1-\sigma)^{2\beta}\left(1-\frac{a(1+x)\sigma}{1-bs+a}\right)^{-(1-2\beta)} d\sigma.$$

Здесь используя формулу интегрального представления для гипергеометрической функции:

$$\int_0^1 \sigma^{a-1}(1-\sigma)^{c-a-1}(1-x\sigma)^{-b}d\sigma = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;x)$$

получим

$$B(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\tau'(p(s))(1+x)^{1-2\beta}}{(1-bs+a)^{1-2\beta}} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right) ds =$$

$$= \frac{a^{2\beta-1}}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta} F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)\tau'(p(s))ds.$$

Здесь выполним операцию интегрирования по частям и с учетом формул

$$F(a,b,b;x) = (1-x)^{-a}, \quad \frac{d}{dx}x^b F(a,b,c;x) = bx^{b-1}F(a,b+1,c;x)$$

имеем

$$u = \left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta} F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right), \quad dv = \tau'(p(s))ds, \quad v = \frac{1}{a}\tau(p(s))$$

$$du = (1-2\beta)\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{-2\beta} F\left(1, 2-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)\frac{ab(1+x)}{(1-bs+a)^2}ds =$$

$$= (1-2\beta)\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{-2\beta}\left(1-\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{-1}\frac{ab(1+x)}{(1-bs+a)^2}ds =$$

$$= (1-2\beta)\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1-bs-ax}{1-bs+a}\right)^{-1}\frac{ab(1+x)}{(1-bs+a)^2}ds =$$

$$= (1-2\beta)\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta}\frac{b}{1-bs-ax}ds.$$

Следовательно, с учетом $\tau(c) = 0, \quad \tau(-1) = 0$ имеем

$$B(x) = \frac{a^{2\beta-1}}{1-2\beta}\left[\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta} F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)\frac{\tau(p(s))}{a}\Big|_{-1}^{1} -\right.$$

$$\left. -\frac{1-2\beta}{a}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta}\frac{b\tau(p(s))}{1-bs-ax}ds\right] =$$

$$= \frac{a^{2\beta-1}}{1-2\beta}\left[\left(\frac{a(1+x)}{2a}\right)^{1-2\beta} F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{1+x}{2}\right)\frac{\tau(c)}{a} - \left(\frac{a(1+x)}{2}\right)^{1-2\beta}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot F\left(1, 1-2\beta, 2-2\beta; \frac{a(1+x)}{2}\right)\frac{\tau(-1)}{a} - \frac{b(1-2\beta)}{a}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-bs-ax}\right].$$

т.е.

$$B(x) = -\frac{a^{2\beta-1}b}{a}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1+x)}{1-bs+a}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-bs-ax}.$$

Формула (1) доказана.

УДК 517.956

Об одной композиции несобственных интегралов со слабыми особенностями.

Мирсабурова Д. М.[1], Тогаев Т. Х.[2], Тоштемиров У. Э.[3]
[1]Термезский государственный университет;
mirsaburovad@mail.ru
[2,3]Денауский институт предпринимательства и педагогики СамГУ;
turdimurodtogayev33@gmail.com, ulugbek69toshtemirovofficial@gmail.com

Работа посвяшена вычеслению двойного интеграла с подвижными интегрируемыми особенностями.

Теорема.1. Пусть $\mu(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta > 2\beta$, тогда имеет место равенство

$$A(x) = a\int_{-1}^{1}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{(t-s)\tau'(p(s))ds}{|t-s|^{2-2\beta}} =$$

$$\frac{\pi(1-\mu(x))}{\sin(2\beta\pi)}\tau(p(x)) - \int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{s}^{x}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}(t-s)^{1-2\beta}}dt -$$

$$-\pi ctg(2\beta\pi)(1-\mu(x))\tau(p(x)) - (1-\mu(x))\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{t-x} + \frac{\mu(x)-\mu(-1)}{(1+x)^{2\beta}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1+s)^{1-2\beta}} + \int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{s}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}(s-t)^{1-2\beta}}dt. \tag{1}$$

Доказательство.

$$A(x) = a\int_{-1}^{1}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{(t-s)\tau'(p(s))ds}{|t-s|^{2-2\beta}} = A_1(x) - A_2(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}A_{1\varepsilon}(x) - \lim_{\varepsilon\to 0}A_{2\varepsilon}(x), \tag{2}$$

где

$$A_{1\varepsilon}(x) = a\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{t-\varepsilon}\frac{\tau'(p(s))ds}{(t-s)^{1-2\beta}},\ A_{2\varepsilon}(x) = a\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\tau'(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}.$$

a). Вычислим

$$A_{1\varepsilon}(x) = \int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{t-\varepsilon}(t-s)^{2\beta-1}d\tau(p(s)).$$

Здесь во внутреннем интеграле выполнив операцию интегрирования по частям имеем

$$A_{1\varepsilon}(x) = \int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[(t-s)^{2\beta-1}\tau(p(s))\Big|_{-1}^{t-\varepsilon} - (1-2\beta)\int_{-1}^{t-\varepsilon}(t-s)^{2\beta-2}\tau(p(s))ds\right], \tag{3}$$

с учетом равенства

$$\int_{-1}^{t-\varepsilon}(t-s)^{2\beta-2}\tau(p(s))ds = \varepsilon^{2\beta-1}\tau(p(t-\varepsilon)) - \frac{1}{1-2\beta}\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t-\varepsilon}(t-s)^{2\beta-1}\tau(p(s))ds,$$

соотношение (3) запишем в виде

$$A_{1\varepsilon}(x) = \int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[(t-s)^{2\beta-1}\tau(p(s))\Big|_{-1}^{t-\varepsilon} - \varepsilon^{2\beta-1}\tau(p(t-\varepsilon)) + \frac{d}{dt}\int_{-1}^{t-\varepsilon}\frac{\tau(p(s))ds}{(t-s)^{1-2\beta}}\right] =$$

$$= \int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t-\varepsilon}\frac{\tau(p(s))ds}{(t-s)^{1-2\beta}} - (1+t)^{2\beta-1}\tau(p(-1))\right]. \tag{4}$$

В (4) переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$A_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}A_{1\varepsilon}(x) = \frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}(1-\mu(x))\tau(p(x)) + \int_{-1}^{x}\frac{(\mu(x)-\mu(t))}{(x-t)^{2\beta}}dt\frac{d}{dt}\int_{-1}^{t}\frac{\tau(p(s))ds}{(t-s)^{1-2\beta}},$$

здесь выполнив операцию интегрирования по частям получим

$$A_1(x)=\frac{\pi(1-\mu(x))}{\sin(2\beta\pi)}\tau(p(x))-\int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{s}^{x}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}(t-s)^{1-2\beta}}dt. \qquad (5)$$

b). Вычислим

$$A_{2\varepsilon}(x)=a\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\tau(p(s))}{(s-t)^{1-2\beta}}ds=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-1}d\tau(p(s)).$$

Здесь во внутреннем интеграле выполнив операцию интегрирования по частям имеем

$$A_{2\varepsilon}(x)=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[(s-t)^{2\beta-1}\tau(p(s))\Big|_{t+\varepsilon}^{1}-(2\beta-1)\int_{-1}^{x}(s-t)^{2\beta-2}\tau(p(s))ds\right]=$$

$$=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[(1-t)^{2\beta-1}\tau(p(1))-\varepsilon^{2\beta-1}\tau(p(t+\varepsilon))-(2\beta-1)\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-2}\tau(p(s))ds\right]. \qquad (6)$$

С учетом равенства

$$\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-2}\tau(p(s))ds=-\frac{\varepsilon^{2\beta-1}\tau(p(t+\varepsilon))}{2\beta-1}-\frac{1}{2\beta-1}\frac{d}{dt}\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-1}\tau(p(s))ds.$$

соотношение (6) запишем в виде

$$A_{2\varepsilon}(x)=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\left[(1-t)^{2\beta-1}\tau(c)-\varepsilon^{2\beta-1}\tau\left(p(t)+\varepsilon\right)+\varepsilon^{2\beta-1}\tau\left(p(t)+\varepsilon\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-1}\tau(p(s))ds\right]=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\frac{d}{dt}\int_{t+\varepsilon}^{1}(s-t)^{2\beta-1}\tau(p(s))ds.$$

Здесь переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$A_2(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}A_{2\varepsilon}(x)=\int_{-1}^{x}\frac{(1-\mu(t))dt}{(x-t)^{2\beta}}\frac{d}{dt}\int_{t}^{1}(s-t)^{2\beta-1}\tau(p(s))ds. \qquad (7)$$

Равенство (7) запишем в виде

$$A_2(x)=-\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)(1-\mu(x))D_{-1,x}^{2\beta-1}D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(p(x))+\int_{-1}^{x}\frac{\mu(x)-\mu(t)}{(x-t)^{2\beta}}dt\frac{d}{dt}\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}=$$

$$=-\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)(1-\mu(x))D_{-1,x}^{2\beta-1}D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(p(x))+\int_{-1}^{x}\frac{\mu(x)-\mu(t)}{(x-t)^{2\beta}}dt\frac{d}{dt}\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}.$$

Теперь выполнив операцию интегрирования по частям имеем

$$A_2(x)=-\frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}(1-\mu(x))\tau(p(x))+\frac{\mu(x)-\mu(t)}{(x-t)^{2\beta}}\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}\Bigg|_{-1}^{x}-$$

$$-\int_{-1}^{x}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}}dt\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}.$$

Здесь с учетом того, что $\mu(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка $\delta>2\beta$, имеем

$$A_2(x)=-\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)(1-\mu(x))D_{-1,x}^{2\beta-1}D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(p(x))-\frac{\mu(x)-\mu(-1)}{(1+x)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1+s)^{1-2\beta}}-$$

$$-\int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{s}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}(s-t)^{1-2\beta}}dt.$$

В силу формулы

$$D_{a,x}^{-\alpha}D_{t,b}^{\alpha}\Phi(x)=\cos(\alpha\pi)\Phi(x)-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_{a}^{b}\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha}\frac{\Phi(t)dt}{t-x}$$

имеем

$$A_2(x)=-\frac{\pi(1-\mu(x))}{\sin(2\beta\pi)}\left[\cos((1-2\beta)\pi)\tau(p(x))-\frac{\sin((1-2\beta)\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{t-x}\right]=$$

$$=\pi ctg(2\beta\pi)(1-\mu(x))\tau(p(x))+(1-\mu(x))\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(t))dt}{t-x}-$$

$$-\frac{\mu(x)-\mu(-1)}{(1+x)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1+s)^{1-2\beta}}-\int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{s}\frac{2\beta(\mu(x)-\mu(t))-\mu^{'}(t)(x-t)}{(x-t)^{1+2\beta}(s-t)^{1-2\beta}}dt. \quad (8)$$

Теперь из (2) в силу соотношений (5) и (8) получим формулу (1).

УДК 517.956

Об одном двойном интеграле с подвижными и неподвижными интегрируемыми особенностями.

Мирсабурова Д. М.[1], Юлдашева И. З.[2], Хайдаров О. Д.[3]
[1]Термезский государственный университет; mirsaburovad@mail.ru
[2,3]Денауский институт предпринимательства и педагогики СамГУ;
iqbolyoldasheva01@gmail.com omonjonhaydarov98@gmail.com

Работа посвяшена вычеслению интеграла с интегрируемой подвижной и неподвижной особенностью.
Теорема.1. Пусть функция $\mu(x)\in C^1[-1,1]$, тогда имеет место формула

$$C(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(p(s))\,ds}{(1-as-bt)^{1-2\beta}}=-\mu(1)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))\,ds}{1-as-bx}-$$

$$-(1-2\beta)\int_{-1}^{1}\tau(p(s))\,ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(1))\,dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{2-2\beta}}. \quad (1)$$

Доказательство.

$$C(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau^{'}(p(s))ds}{(1-as-bt)^{1-2\beta}},$$

здесь поменяв порядок интегрирования имеем

$$C(x)=\int_{-1}^{1}\tau^{'}(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}=\int_{-1}^{1}\tau^{'}(p(s))ds\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(1)+\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}=\mu(1)\int_{-1}^{1}\tau^{'}(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\tau^{'}(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}=\mu(1)C_1(x)+C_2(x) \tag{2}$$

1) Вычислим $C_1(x)$, во внутренном интеграле сделаем замену переменного интегрирования $t=-1+(1+x)\sigma$. Тогда $C_1(x)$ примет вид

$$C_1(x)=\int_{-1}^{1}\tau^{'}(p(s))ds\int_{-1}^{1}\frac{(1+x)d\sigma}{(1+x)^{2\beta}(1-\sigma)^{2\beta}(1-as+b)^{1-2\beta}\left(1-\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}}=$$

$$=\frac{b^{2\beta-1}}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta;\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)\tau^{'}(p(s))ds.$$

Здесь выполним операцию интегрирования по частям

$$u=\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta;\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right),$$

$$du=(1-2\beta)\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{-2\beta}F\left(1,2-2\beta,2-2\beta;\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)\frac{ab(1+x)}{(1-as+b)^2}ds=$$

$$=(1-2\beta)\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{a}{1-as+b}\left(1-\frac{b(1+x)}{(1-as+b)}\right)^{-1}ds=$$

$$=(1-2\beta)\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{a}{1-as+b}\frac{1-as+b}{1-as-bx}ds=$$

$$=(1-2\beta)\left(\frac{b(1+x)}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{a}{1-as-bx}ds,$$

$$dv=\tau^{'}(p(s))ds,\ v=\frac{1}{a}\tau(p(s)),\ p(s)=as-b.$$

Следовательно,

$$C_1(x)=\frac{b^{2\beta-1}}{a(1-2\beta)}\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1-2\beta}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta;\frac{1+x}{2}\right)\tau(c)-\right.$$

$$\left.-\frac{b(1+x)}{2}F\left(1,1-2\beta,2-2\beta;\frac{b(1+x)}{2}\right)\tau(-1)\right]-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-as-bx}$$

таким образом, с учетом $\tau(-1)=0,\ \tau(c)=0$, имеем

$$C_1(x)=-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-as+b}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-as-bx}. \tag{3}$$

Теперь вычислим

$$C_2(x) = \int_{-1}^{1} \tau^{'}(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}.$$

Здесь так же выполнив операцию интегрирования по частям:

$$u = \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}, \quad d_s u = \int_{-1}^{x} \frac{a(1-2\beta)(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{2-2\beta}} ds,$$

$$dv = \tau^{'}(p(s))ds, \quad v = \frac{1}{a}\tau(p(s)),$$

имеем

$$C_2(x) = \frac{\tau(p(s))}{a} \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{1-2\beta}}\bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} \tau(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{(1-2\beta)(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-as-bt)^{2-2\beta}} =$$

$$= \frac{\tau(c)}{a} \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(b(1-t))^{1-2\beta}} - \frac{\tau(-1)}{a} \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1+a-bt)^{1-2\beta}} ds-$$

$$-(1-2\beta)\int_{-1}^{1} \tau(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}((1-as-bt))^{2-2\beta}}.$$

Таким образом, с учетом $\tau(-1)=0,\ \tau(c)=0$ получим

$$C_2(x) = -(1-2\beta)\int_{-1}^{1} \tau(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}((1-as-bt))^{2-2\beta}}. \tag{4}$$

Теперь, в силу (3) и (4) из (2) получим

$$C(x) = \mu(1)C_1(x) + C_2(x) = -\mu(1)\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-as+b}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(p(s))ds}{1-as-bx} -$$

$$-(1-2\beta)\int_{-1}^{1} \tau(p(s))ds \int_{-1}^{x} \frac{(\mu(t)-\mu(1))dt}{(x-t)^{2\beta}((1-as-bt))^{2-2\beta}}.$$

Формула (1) доказана.

УДК 517.956

О некоторых композициях несобственных интегралов.

Мирсабурова У. М.[1], Норкулова М. Н.[2].
[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан; umirsaburova@gmail.com
[2]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
maftunanormurodova1997@gmail.com

1. Вычислим интеграл

$$D(x)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1-p(t)p(s))^{2-2\beta}}, \tag{1}$$

здесь поменяв порядок интегрирования имеем

$$D(x)=\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-p(t)p(s))^{2-2\beta}}.$$

Теперь во внутренном интеграле сделав замену переменного интегрирования $t=-1+(1+x)\sigma$ имеем

$$D(x)=\frac{a^{2\beta-1}}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+s}\right)^{1-2\beta}\frac{ds}{1-p(x)p(s)}.$$

Формула (1) доказана.

2. Вычислим интеграл

$$E(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1-q(t)q(s))^{2-2\beta}}, \tag{2}$$

здесь поменяем порядок интегрирования

$$E(x)=\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(-1)+\mu(-1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)q(s))^{2-2\beta}}=\mu(-1)E_1(x)+E_2(x).$$

В внутренном интеграле $E_1(x)$ и $E_2(x)$ сделав замену переменного интегрирования $t=-1+(1+x)\sigma$ имеем

$$E(x)=\mu(-1)E_1(x)+E_2(x)=\frac{\mu(-1)}{(1-2\beta)b^{1-2\beta}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-q(t)q(s)}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(-1))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)q(s))^{2-2\beta}}.$$

Формула (2) доказана.

3. Вычислим интеграл

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1-p(t)q(s))^{2-2\beta}}, \tag{3}$$

здесь поменяв порядок интегрирования

$$F(x)=\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-p(t)q(s))^{2-2\beta}}.$$

Теперь в внутренном интеграле сделав замену переменного интегрирования $t=-1+(1+x)\sigma$ имеем

$$F(x)=\frac{1}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(s)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-p(x)q(s)}.$$

Формула (3) доказана.

4. Вычислим интеграл

$$G(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}, \tag{4}$$

здесь поменяв порядок интегрирования, получим

$$G(x)=\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}=$$

$$=\mu(x)\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(x))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}=\mu(x)G_1(x)+G_2(x).$$

Вычислим

$$G_1(x)=\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}$$

Здесь в внутренном интеграле сделав замену переменного интегрирования $t=-1+(1+x)\sigma$ имеем

$$G_1(x)=\frac{1}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(s)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-q(x)p(s)}.$$

Таким образом,

$$G(x)=\frac{\mu(x)}{1-2\beta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-p(s)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(p(s))ds}{1-q(x)p(s)}+\int_{-1}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(x))dt}{(x-t)^{2\beta}(1-q(t)p(s))^{2-2\beta}}.$$

Формула (4) доказана.

5. Вычислим интеграл

$$T(x)=D_{-1,x}^{2\beta-1}\mu(x)D_{x,1}^{1-2\beta}\tau(p(s)). \tag{5}$$

$$T(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)}{(x-t)^{2\beta}}\frac{d}{dt}D_{t,1}^{-2\beta}\tau(p(t))dt=$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{x}\frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}}\frac{d}{dt}\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{x}\frac{(\mu(t)-\mu(x)+\mu(x))dt}{(x-t)^{2\beta}}\frac{d}{dt}\int_{t}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(s-t)^{1-2\beta}}.$$

Следовательно

$$T(x)=\cos(1-2\beta)\pi\mu(x)\tau(p(x))-\frac{\sin(1-2\beta\pi)\mu(x)}{\pi}\frac{\mu(-1)-\mu(x)}{(1+x)^{1-2\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(p(s))ds}{(1+s)^{1-2\beta}}-$$

$$-\int_{-1}^{x}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{s}\frac{\mu^{'}(t)(x-t)+2\beta(\mu(t)-\mu(x))}{(x-t)^{1+2\beta}(s-t)^{1-2\beta}}dt-$$

$$-\int_{x}^{1}\tau(p(s))ds\int_{-1}^{x}\frac{\mu^{'}(t)(x-t)+2\beta(\mu(t)-\mu(x))}{(x-t)^{1+2\beta}(s-t)^{1-2\beta}}dt$$

Формула (5) доказана.

УДК 517.956

Задача в неограниченной области с условием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристики для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами.

Мирсабуров М.[1], Тураев Р. Н.[2]
[1]Термезский государственный университет; mirsaburov@mail.ru
[2]Термезский государственный университет; rasul.turaev@mail.ru

1.Постановка задачи BSF (Бицадзе-Самарский, Франкль).

Пусть $D=D^{+}\bigcup D^{-}\bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C=\{z=x+iy\}$, где D^{+} -полуплоскость $y>0$, D^{-} -конечная область полуплоскости $y<0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^{m}u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha_{0}}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_{x}+\frac{\beta_{0}}{y}u_{y}=0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y=0$. Через C_0 и C_1 соответственно обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$.

В уравнение (1) предполагается, что m,α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлет- воряюшие условиям $m>0,\ |\alpha_0|<(m+2)/2,\ -m/2<\beta_0<1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^*B_0^*C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^*C_0^*:\beta_0+\alpha_0=-m/2,\ B_0^*C_0^*:\beta_0-\alpha_0=-m/2,\ A_0^*B_0^*:\beta_0=1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай когда $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta E_0^*C_0^*B_0^*\bigcup E_0^*C_0^*$, где $E_0^*=E_0^*(0,1)$.

В работе [1] в конечной области была исследована задача с условием Бицадзе-Самарского [2] на граничной характеристике AC и параллельной ей внутренней характеристике EC_0. В настоящей работе в неограниченной области исследуется задача, где условие Бицадзе-Самарского задается на части AC_0 граничной характеристике AC и параллельной ей внут- ренней характеристике EC_1 т.е. часть C_0C граничной характеристике AC освобождена от условия Бицадзе-Самарского и это недостаюшее нелокальное условие заменена аналогом условия Франкля [3-6] на отрезке вырождения AB.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R=A_R(-R,0),\ B_R=B_R(R,0)$

$$\sigma_R:x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=R^2,\ -R\le x\le R,\ 0\le y\le\left((m+2)R/2\right)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I=\{(x,y):-1<x<1,\ y=0\},\ \overline{I}_1=\{(x,y):-\infty<x\leq -1,\ y=0\},\ \overline{I}_2=\{(x,y):1\leq x<+\infty,\ y=0\},\ D_R=D_R^{+}\bigcup D^{-}\bigcup I,\ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Введем линейные функции $p(x)=ax-b$ и $q(x)=a-bx$, отображаюшие отрезок $[-1,1]$ на отрезки $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответсвенно, причем $p(-1)=-1,\ p(1)=c,\ q(-1)=1,\ q(1)=c,\ a=(1+c)/2,\ b=(1-c)/2.$ [7]

Задача BSF. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1[8, с.104] в области D^-;

4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in I, \tag{2}$$

причем пределы в (2) при $x=\pm1$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ y>0,$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x),\ \forall x\in\overline{I}_i,\ i=1,2;$$

$$\mu_0(1+x)^{\alpha}D_{-1,x}^{1-\beta}u\left[\theta\left(p(x)\right)\right]=\mu_1(1-x)^{\alpha}D_{x,1}^{1-\beta}u\left[\theta^*\left(q(x)\right)\right]+\psi(x),\ x\in[-1,1]; \tag{3}$$

$$u\left(p(x),0\right)-u\left(q(x)\right)=f(x),\ x\in[-1,1], \tag{4}$$

где $\mu_0,\ \mu_1-$ некоторые постоянные, $\mu_0^2+\mu_1^2\neq0,\ D_{-1,x}^{1-\beta},\ D_{x,1}^{1-\beta}-$ операторы дифференцирования дробного порядка [8,с.16].

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(m+2)}{4}(1+x_0)\right]^{2/(m+2)},\ x_0\in[-1,c]$$

-аффикс точки пересечения характеристики $AC_0\subset AC$ с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0,0)$, $x_0\in[-1,c]$;

$$\theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left[\frac{(m+2)}{4}(x_0-c)\right]^{2/(m+2)},\ x_0\in[c,1]$$

-аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0,0),\ x_0\in[c,1]$, $\tau_1(x),\ \tau_2(x),\ \psi(x),\ f(x)$ - заданные функции, причем $\tau_1(-1)=0,\ \tau_2(1)=0,\ \tau_1(-\infty)=0,\ \tau_2(+\infty)=0,\ f(1)=0,\ \psi(x)\in C\left[-1,1\right]\bigcap C^1(-1,1),\ f(x)\in C\left[-1,1\right]\bigcap C^1(-1,1)$, функции $\tau_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на любых отрезках $[-N,-1]\,,[1,N]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)|\leq M|x|^{-\delta_0},\ \delta_0$ -положительная постоянная.

Заметим, что условие Бицадзе-Самарского (3) задается на части AC_0 (где $\theta\left(p(x)\right)\in AC_0$), граничной характеристике AC и на внутренной характеристике EC_1 (где $\theta^*\left(q(x)\right)\in EC_1$), а условие (4) (где $-1\leq p(x)\leq c,\ c\leq q(x)\leq 1$) есть аналог условия Франкля на отрезках $[-1,c]$ и $[c,1]$ отрезка вырождения AB. Обозначим $u(x,0)=\tau(x)$, тогда условие (4) принимает вид

$$\tau\left(p(x)\right)-\tau\left(q(x)\right)=f(x),\ x\in(-1,1).$$

Работа исследуется методом работы [7].

Литература

1. **Мирсабуров М., Бобомуродов У.** *Задача с условием Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.* Дифференциальные уравнения. - 2012. Т.48, №11. - с.730-737.

2. **Бицадзе А.В., Самарский А.А.** *О некоторых простейших обобшениях линейных эллиптических краевых задач.* Докл.АН СССР. - 1969. Т.185, №4. - с.739-740.

3. **Франкль Ф.И.** *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной,оканчиваю- щейся прямым скачком уплотнения.* Прикладная математика и механика. - 1956. Т.20, №2. - с.196-202.
4. **Линь Цзянь-бин.** *О некоторых задачах Франкля.* Вестник ЛГУ. Математика механика астрономия. - 1961. Т.3, №13. - с.28-39.
5. **Девингталь Ю.В.** *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франк- ля.* Известия вузов.Математика. - 1958. Т.2, №3. - с.39-51.
6. **Рузиев М.Х.** *Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффици- ентами.* Известия вузов.Математика. - 2022. №7. - с.18-29.
7. **Мирсабуров М.** *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках.* Дифференциальные уравнения. - 2001. Т.37, №9. - с.1281-1284.
8. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* Москва. Высшая школа. - 1985. - 304 с.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Муминов З.М.[1], Номонова С.О.[2]
[1,2] Ферганский государственный университет zaylobiddinmuminov@mail.ru

В смешанной области D рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} L_c u = 0, \tag{1}$$

ограниченной отрезками $A\left(0,0\right)B\left(1,0\right)$, $B\left(1,0\right)B_0(1,1)$, $B_0\left(1,1\right)A_0\left(0,1\right)$ прямых $y=0$, $x=1,\ y=1$ и характеристиками $AC: x+y=0, A_0C: y-x=1$ уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

пересекающимися в точке $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, т.е.

$$D = D_1 \cup AA_0 \cup D_2, \quad AA_0 = \{(x,y) : x=0,\ 0<y<1\},$$

$$D_1 = \{(x,y) : 0<x<1,\ \ 0<y<1\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) : -\frac{1}{2} < x < 0,\ \ -x<y<1+x\right\};$$

$$L_c u = \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_y + c_1 u \quad D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2 u \quad D_2. \end{array} \right.$$

Задача D. Требуется определить функцию $u\left(x,y\right)$ со следующими свойствами:
1) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;
2) является регулярным решением уравнения (1) в области D 3) при $x \neq 0$;
4) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_1(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u_y(x,0) = f_2(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

$$u\Big|_{AC} = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_2(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{6}$$

5) функция $u(x,y)$ и её первые производные удовлетворяют на отрезке AA_0 непрерывным условиям склеивания.

Здесь $n-$ внутренняя нормаль к A_0C, $\varphi_1(y)$, $f_i(x)$, $\psi_i(y)$ $(i=\overline{1,2})-$ заданные достаточно гладкие функции.

Доказательство существования и единственности поставленной задачи D проводится путём построения решения.

Литература

1. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** *Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа.* Т.: Фан, 1986, 220 с.

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Муминов З.М.[1], Самижонова С.А.[2]
[1,2] Ферганский государственный университет zaylobiddinmuminov@mail.ru

Пусть $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, 0 < y < +\infty\}$, $J = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < +\infty\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup J \cup \Omega_2$.

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} L_c u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_c u = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_1 u & \Omega_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2 u & \Omega_2, \end{cases}$$

c_1, c_2 - заданные вещественные числа.

Задача К. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) она непрерывна в замкнутой области

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y) : y = 0, \ -\infty < x < +\infty\},$$

вместе с производными до второго порядка включительно;

2) является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega \backslash J$;

3) удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = f_1(x), \quad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x \le 0, \tag{3}$$

$$u_y(x,0) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \le 0, \tag{4}$$

4) удовлетворяет на J следующим условиям склеивания:

$$u(-0,y) = u(+0,y) = \tau(y), \ \ 0 \le y < +\infty, \tag{5}$$

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = v(y), \ \ 0 \le y < +\infty, \tag{6}$$

$$u_{xx}(-0,y) = u_{xx}(+0,y) = \mu(y), \ \ 0 \le y < +\infty. \tag{7}$$

Здесь через $\tau(y), \ \nu(y), \ \mu(y)$ обозначены неизвестные следы искомого решения и его производных, а $f_1(x), \ \varphi_i(y), \ (i = 1,2)-$ заданные достаточно гладкие функции, причём они ограничены при $x \to \pm\infty$.

Заметим, что J является нехарактеристической линией изменения типа оператора L_c.

Доказательство существования и единственности поставленной задачи К проводится путём построения решения.

Литература

1. **1. Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1977, 736 с.

УДК 517.946

Формулы конечного суммирования для гипергеометрических функций Аппеля и их применения к решению краевых задач

Муминова Н. И.
Ферганский государственный университет; abdulhaymominov92@gmail.com

Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Положим

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

иными словами,

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1),\ n = 1, 2, 3, ...$$

Символ $(a)_n$ называют *символом Похгаммера*.

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда:

$$F(a, b; c; z) \equiv F\left[\begin{array}{c} a, b; \\ c; \end{array} x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. Здесь параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, -2, ...$, а $(a)_n$ есть символ Похгаммера.

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Особенно, большие успехи в теории гипергеометрической функции одной переменной стимулировали развитие соответствующих теорий для функций двух и многих переменных. Аппель определил в 1889 г. четыре ряда F_1–F_4 (см. ниже равенства (1)–(4)), каждый из которых аналогичен ряду Гаусса $F(a, b; c; z)$. Пикар указал, что один из этих рядов тесно связан с функцией, изученной Похгаммером в 1870 г., а Пикар и Гурса построили теорию рядов Аппеля, которая аналогична теории Римана для гауссовского гипергеометрического ряда. Гумберт изучил конфлюэнтный (вырожденный) гипергеометрический ряд двух переменных. Изложение этих результатов французской школы со ссылками на оригинальную литературу содержатся в монографии Аппеля и Кампе-де-Ферье, которая является основным трудом в этой области. Эта работа содержит также обширную библиографию, содержащую все существенные работы до 1926 г.

В литературе принято делить гипергеометрические функции на два вида: полные и конфлюэнтные и, как правило, конфлюэнтные функции являются предельными формами для полных функций. Согласно *списку Горна* существуют 14 полных и 20 конфлюэнтных функций двух переменных.

С целью облегчить процесс изучения свойств функций многих переменных впервые Дж.Берчнелл и Т.Ченди [1] разложили 4 полные и 7 конфлюэнтные гипергеометрические функции из списка Горна в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса.

Полные гипергеометрические функции Аппеля определяются следующим образом:

$$F_1\left(a, b, b'; c; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m \left(b'\right)_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n,\ \ |x| < 1,\ |y| < 1;$$

$$F_2\left(a, b, b'; c, c'; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m \left(b'\right)_n}{(c)_m \left(c'\right)_n m! n!} x^m y^n,\ \ |x| + |y| < 1;$$

$$F_3\left(a, a', b, b'; c; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m \left(a'\right)_n (b)_m \left(b'\right)_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n,\ \ |x| < 1,\ |y| < 1;$$

$$F_4\left(a, b; c, c'; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m \left(c'\right)_n m! n!} x^m y^n,\ \ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1.$$

В настоящей работе исследуем конечные суммы гипергеометрических функций Аппеля, определенных равенствами (1) – (4).

Справедливы следующие формулы конечного суммирования:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c)_k} F_1\left(a+k, b, b'; c+k; w, z\right) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n} F_1\left(a, b, b'+n; c; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{(1-c')_k}{(2-c'-n)_k} F_2\left(a, b, b'; c, c'-k; w, z\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{(a)_n (b')_n}{(c')_n (c'-1)_n} z^n F_2\left(a+n, b, b'+n; c, c'+n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a')_k}{(c)_k} z^k F_3\left(a, a'+k, b, b'+k; c+k; w, z\right) = F_3\left(a, a', b, b'+n; c, c'; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^k F_1\left(a+k, b, b'+k; c+k; w, z\right) = F_1\left(a, b, b'+n; c; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)_k}{(c')_k} z^k F_2\left(a+k, b, b'+k; c, c'+k; w, z\right) = F_2\left(a, b, b'+n; c, c'; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(b')_k}{(a)_k} z^k F_3\left(a, a'+k, b, b'+k; c+k; w, z\right) = F_3\left(a, a'+n, b, b'; c, c'; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)_k (b')_k}{(c'-n)_k (c')_k} z^k F_2\left(a+k, b, b'+k; c, c'+k; w, z\right) = F_2\left(a, b, b'; c, c'-n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)_k (b)_k}{(c'-n)_k (c')_k} z^k F_4\left(a+k, b+k; c, c'+k; w, z\right) = F_4\left(a, b; c, c'-n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (1-c')_k}{(2-c'-n)_k} F_2\left(a, b, b'; c, c'-k; w, z\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n (a)_n (b')_n}{(c')_n (c'-1)_n} z^n F_2\left(a+n, b, b'+n; c, c'+n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (1-c')_k}{(2-c'-n)_k} F_4\left(a, b; c, c'-k; w, z\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n (a)_n (b)_n}{(c')_n (c'-1)_n} z^n F_4\left(a+n, b+n; c, c'+n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (c'+n-1)_k}{(c')_k} F_2\left(a, b, b'; c, c'+k; w, z\right) =$$

$$= \frac{(a)_n (b')_n}{(c')_{2n}} z^n F_2\left(a+n, b, b'+n; c, c'+2n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (c'+n-1)_k}{(c')_k} F_4\left(a, b; c, c'+k; w, z\right) =$$

$$= \frac{(a)_n (b)_n}{(c')_{2n}} z^n F_4\left(a+n, b+n; c, c'+2n; w, z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} F_1\left(a, -k, b'; c; w, z\right) = \frac{(a)_n}{(c)_n} w^n F\left(a+n, b'; c+n; z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} F_2\left(a, -k, b'; c, c'; w, z\right) = \frac{(a)_n}{(c)_n} w^n F\left(a+n, b'; c; z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) F_3\left(-k, b, a', b'; c; w, z\right) = \frac{(a')_n}{(c)_n} w^n F\left(b, b'; c+n; z\right);$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{(-1)^k (b)_k}{(b-a-n+1)_k} F_3\left(a, a', b+k, b'; c; w, z\right) = \frac{(a)_n}{(a-b)_n} F_3\left(a+n, a', b, b'; c; w, z\right).$$

Эти равенства доказываются методом математической индукции.

Формулы конечного суммирования используются при исследовании краевых задач для вырождающихся уравнений с частными производными, особенно, для гиперболических и эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

Литература

1. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** *Expansions of Appell's double hypergeometric functions* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. 1940, Ser.11, P. 249–270.

УДК 517.954

Нелокальная задача для уравнения смешанного типа

Муминов Ф.М[1]., Каримов С.Я[2].

[1,2]Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова; mfarhod007@gmail.com, mr_man89@mail.ru

В этом статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения смешанного типа. При определенных условиях на коэффиценты и правую часть уравнения доказывается корректность этих задач.

Пуст D_- квадрат $0 < -y$, $x < 1$, а D_+ -односвязная область при $y \geq 0$, ограниченная простой дугой G с концами в точках, $(0,0),(1,0)$ и интервалом $J = (0,1)$ оси X. Обозначим через j множества всех точек, лежащих на диагональ D_-, а на ∂D_- отметим точки $a(x,1)$, $b(0,x-1)$,$c(1-x,0)$, $d(1,-x)$, $e(x,0)$, $f(1,x-1)$, $g(-1,x-1)$, $h(0,-x)$.

Задача. Определить в $D_- \bigcup D_+$ решение $u(x,y)$ уравнения

$$u_{xx} + sgnyu_{yy} = 0$$

Классе $C(\overline{D_+}) \bigcup C(\overline{D_-}) \bigcap C^{'}(\overline{D_+} \bigcup J) \bigcap C^{'}(\overline{D_-} \bigcup J \setminus j)$ $C^2(D_+) \bigcap C^2(D_- \setminus j)$ удовлетворяющее условиям

$$u/_{\gamma} = \varphi(t), t \in G$$

$$a_j(x)u(a) + ... + h_j(x)u(h) = \psi_i(x)$$

$$x \in [0,1], j = 1,2,3$$

$$u(x,-0) = \alpha(x)u(x,+0) + j_0(x), x \in [0,1]$$

где $_+0(-0)$ означает предел при $y \to 0$ из $D_+(D_-)$. В окрестностях концов J производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Предполагается, что $\alpha, j_0, a_i, .., h_j, \psi_j \in c_\mu^2[0,1)$, $(j = 1,2,3)$, $\varphi \in c_\mu(\overline{G})$, $j_i \in c_\mu[0,1)$, $\beta = const \neq 0$. Под c_μ^k понимается пространство к раз непрерывно дифференцируемых функций с гельдеровой k-ой производной.

Литература

1.Нахушев А.М. *Дифференциал уравнения* 1970. 190-191 с.

2.Соболев С.И. *Пример корректности кривой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе* Докл. А.К. СССР 1956. T109 №4 707-709 с

3.Бицадзе А.В. *К проблеме уравнений смешанного типа. Труды математического института* АК СССР. 1953 Т4 3-57 с

4.Врагов В.К. *К вопросу о постановка корректных краевых задач для неклассических уравнений математической физике* Новосибирск, 1981 24-31 с

5. Муминов Ф.М. *Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа* Ташкент 2022.

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Нишонова Ш. Т.[1] **Муйдинжонова Б. А.**[2]

[1,2]Ферганский государственный университет; shahnoza_910@mail.ru

Пусть Ω- конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная дугой $\sigma_0 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ 0 < y < x\right\}$ и отрезками $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{DA}$ прямых $y = x$, $y = -x$, $y = x - 1$ соответственно, где $O\left(0,0\right)$, $A\left(1,0\right)$, $B\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$,$D\left(1/2, -1/2\right)$. Части области Ω при $y > 0$, $y < 0$, $y = 0$ соответственно обозначим через Ω_0, Ω_1,OA.

В области Ω рассмотрим задачу Трикоми в следующей формулировке.

Задача $T^{(2)}$. Найти регулярное в Ω решение $u\left(x,y\right) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ уравнения

$$u_{xx} + signy \cdot u_{yy} + \left(2\beta/x\right) u_x + \left(2\beta/\left|y\right|\right) u_y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to -0} \left(-y\right)^{2\beta} u_y\left(x,y\right) = \lim_{y\to +0} y^{2\beta} u_y\left(x,y\right), 0 < x < 1; \tag{2}$$

$$u\left(x,y\right) = \varphi\left(x,y\right),\ \ (x,y) \in \overline{\sigma}_0; \tag{3}$$

$$u\left(x,y\right)|_{\overline{OB}} = \psi\left(y\right),\ \ 0 \le y \le 1/\sqrt{2} \tag{4}$$

$$u\left(x,y\right)|_{\overline{AD}} = f_1\left(x\right), \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi\left(x,y\right)$, $\psi\left(y\right)$, $f\left(x\right)$ – заданные функции, а $\beta = const \in R$, причем $0 < \beta < 1/2$.

Пусть $u\left(x,y\right)$ - решение задачи $T^{(2)}$ и

$$u\left(x,-0\right) = \tau\left(x\right) \in C\left[0,1\right] \cap C^2\left(0,1\right),\ \lim_{y\to -0} \left(-y\right)^{2\beta} u_y\left(x,y\right) = \nu\left(x\right) \in C^2\left(0,1\right), \tag{6}$$

а $\nu\left(x\right)$- может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \to 1$. Тогда функция $u\left(x,y\right)$ в области Ω_1, как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (6), представима в виде [1]

$$u\left(x,y\right) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \tau\left(\zeta^{1/2}\right) \left[z\left(1-z\right)\right]^{\beta-1} dz -$$

$$-\gamma_2 (-xy)^{1-2\beta} \int\limits_0^1 \zeta^{\beta-1/2} \nu\left(\zeta^{1/2}\right) \left[z\left(1-z\right)\right]^{-\beta} dz, \tag{7}$$

где $\zeta = \left(x+y\right)^2 - 4xyz$, $\gamma_1 = \Gamma\left(2\beta\right)/\Gamma^2\left(\beta\right)$, $\gamma_2 = \Gamma\left(1-2\beta\right)/\Gamma^2\left(1-\beta\right)$; $\Gamma\left(z\right)$-гамма функция Эйлера [2].

Удовлетворяя функцию (7) условию (5), имеем

$$\gamma_1 \Gamma\left(\beta\right) \left(1-x\right)^{1-2\beta} D_{x1}^{-\beta} \left[\left(1-x\right)^{\beta-1} \tau\left(x^{1/2}\right)\right] -$$

$$-\gamma_2 4^{2\beta-1} \Gamma\left(1-\beta\right) D_{x1}^{\beta-1} \left[x^{\beta-\frac{1}{2}} \left(1-x\right)^{-1/2} \nu\left(x^{1/2}\right)\right] = f_1\left[\left(\sqrt{x}+1\right)/2\right],\ \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{8}$$

где D_{xb}^{α} - оператор дробного интегродифференцирования [3]:

$$D_{xb}^{\alpha} \varphi\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)} \displaystyle\int\limits_x^b \left(t-x\right)^{-\alpha-1} \varphi\left(t\right) dt & \alpha < 0; \\ \varphi\left(x\right), & \alpha = 0; \\ \left(-1\right)^n \dfrac{d^n}{dx^n} D_{xb}^{\alpha-n} \varphi\left(x\right), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Умножая обе части равенства (8) на $(x-1)^{2\beta-1}\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$ и применяя оператор D_{xb}^{β} к полученному равенству, с учетом равенств [3]

$$D_{xb}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x)\,,D_{xb}^{\alpha}(1-x)^{2\alpha-1}D_{xb}^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)=(b-x)^{\alpha-1}D_{xb}^{2\alpha-1}f(x)\,,$$

получим

$$\tau\left(x^{1/2}\right)=\gamma_3 D_{x1}^{2\beta-1}\left[(x)^{\beta-1/2}\nu\left(x^{1/2}\right)\right]+$$

$$+\gamma_4 D_{x1}^{\beta}\left[(1-x)^{2\beta-1}f_1\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)\right](1-x)^{1-\beta},\ \ \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{9}$$

где $\gamma_3=4^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\gamma_4$, $\gamma_4=\Gamma(\beta)/[\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$.

(9) есть основное функциональное соотношение между $\tau(x)$и $\nu(x)$ на OA, получаемое из того условия, что решение задачи $T^{(2)}$ должно удовлетворить условию (5).

Докажем единственность решения задачи $T^{(2)}$.Пусть $u(x,y)$- решение задачи $T^{(2)}$ при $\varphi(x,y)\equiv\psi(y)\equiv f(x)\equiv 0$. Тогда в области Ω_0 справедливо тождество (1). Умножая обе части этого тождества на $(xy)^{2\beta}u(x,y)$ и интегрируя полученное тождество в области Ω_0, получим

$$\iint\limits_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy=\iint\limits_{\Omega_0}\left\{\left[(xy)^{2\beta}uu_x\right]_x+\left[(xy)^{2\beta}uu_y\right]_y\right\}dxdy.$$

Отсюда, пользуясь формулой Грина - Остроградского и учитывая равенства (2) и $u|_{\overline{\sigma_0}}(x,y)=u|_{\overline{OB}}(x,y)=0$, получим

$$\iint\limits_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\int\limits_0^1 x^{2\beta}\tau(x)\,\nu(x)\,dx=0. \tag{10}$$

В интеграле $l=\int\limits_0^1 x^{2\beta}\tau(x)\,\nu(x)\,dx$ выполняем замену $x=z^{1/2}$ и подставляем функцию $\tau\left(z^{1/2}\right)$ из (9). Затем, принимая во внимание $f_1(x)\equiv 0$ и формулу [2]

$$(t-z)^{-2\beta}=[\Gamma(2\beta)\cos\beta\pi]^{-1}\int\limits_0^{\infty}\xi^{2\beta-1}\cos[(t-z)\,\xi]\,d\xi,$$

получим

$$l=\frac{1}{\pi}\gamma_3\sin\beta\pi\int\limits_0^{\infty}\xi^{2\beta-1}d\xi\int\limits_0^1 dz\int\limits_z^1 z^{\beta-1/2}\nu\left(z^{1/2}\right)t^{\beta-1/2}\nu\left(t^{1/2}\right)\cos[(t-z)\,\xi]\,dt. \tag{11}$$

В силу равенства

$$\int\limits_z^1 g(z)\,g(t)\,[\cos z\xi\cos t\xi+\sin z\xi\sin t\xi]\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\left(\int\limits_z^1 g(t)\cos t\xi dt\right)^2+\left(\int\limits_z^1 g(t)\sin t\xi dt\right)^2\right]$$

и неравенства $\gamma_3>0$, $\sin\beta\pi>0$, из равенства (11) следует, что $l\ge 0$.

Если учесть это, то из (10) следует, что $u(x,y)\equiv const$ в Ω_0. Так как $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}_0\right)$ и $u(x,y)|_{\overline{\sigma}_0}=0$, то $u(x,y)\equiv 0$ $\overline{\Omega}_0$, откуда следует единственность решения задачи $T^{(2)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уринов А.К., Каримов К.Т. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2008, N 2. C.15-19.
2. Бейтман Г, Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том I. -М.:Наука,1965.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. - М.: Высшая школа,1985.
4. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Задачи Трикоми и Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа в одной специальной области //Естественные и технические науки.М: 2010. N 2(46)

УДК 517.9

Об одной оценке метода усреднения для периодических систем интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием

Нуржанов О. Д.[1], Жамалов К. Н.[2]
[1,2]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха;
nurjanov@list.ru qayratdinjamalov95@gmail.com

Рассмотрим периодическую систему интегро-дифференциальных уравнений с запазды-ванием и с малым параметром вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x(t), x(t-\tau)) + \varepsilon \int\limits_{t-\tau}^{t} \varphi(t, s, x(s))ds, \tag{1}$$

где ε - малый положительный параметр, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - n-мерный вектор, $f(t, x, y) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ - n-мерные вектор-функции, периодические, соответственно, по t и t, s с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$, $\nu = \text{const} > 0$; $\tau > 0$ - некоторая постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе; не ограничивая общности будем счи-тать, что $0 < \tau \leqslant T$.

Пусть выполняются условия:

1) периодические по t и s с периодом T функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по x и y для всех $t \in R = (-\infty, \infty)$, $s \in R$, $x \in D$, $y \in D$, D - замкнутая ограниченная область евклидового пространства E_n;

2) вектор-функции $f(t, x, y)$ и $\varphi(t, s, x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\|f(t, x, y)\| \leqslant M,$$

$$\|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')\| \leqslant K_1\|x' - x''\| + K_2\|y' - y''\|,$$

$$\|\varphi(t, s, x)\| \leqslant N,$$

$$\|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')\| \leqslant K_3\|x' - x''\|$$

для всех (t, s, x, y), (t, s, x', y'), (t, s, x'', y'') из области $R \times R \times D \times D$, где M, N, K_1, K_2, K_3 - некоторые положительные постоянные.

При выполнении этих условий для исследования периодического решения системы урав-нений (1) применим метод усреднения [1 - 3]. Одновременно с системой (1) рассмотрим соответствующую ей усредненную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f_0(\xi, \xi) + \varepsilon \int\limits_{t-\tau}^{t} \varphi(t, \xi)dt, \tag{2}$$

где

$$f_0(\xi, \xi) = \frac{\nu}{2\pi} \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{\nu}} f(t, \xi, \xi)dt,$$

$$\varphi_0(t, \xi) = \frac{\nu}{2\pi} \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{\nu}} \varphi(t, s, \xi)ds.$$

Тогда решения $x = x(t, \varepsilon)$ системы уравнений (1) сравниваются с решениями $\xi = \xi(\varepsilon t)$ $(\xi(0) = x(0, \varepsilon) = x_0 \in D)$ усредненной системы уравнений (2).

Для этих решений на основании результатов работы [1] получена оценка

$$\max_{t\in\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right]}\|x(t,\varepsilon)-\xi(\varepsilon t)\|\leqslant\varepsilon C,$$

которая является оценкой обоснования метода усреднения для периодических систем вида (1). Здесь L и C - некоторые положительные постоянные.

Литература

1. **Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.** *Математические проблемы нелинейной механики.* Киев: Вища шк. - 1987. - 72 с.
2. **Филатов А.Н., Шарова Л.В.** *Интегральные неравенства и теория нелинейных коле-баний.* Москва: Наука. - 1976. - 152 с.
3. **Станжицкий А.Н., Мынбаева С.Т., Марчук Н.А.** *Усреднение в краевых задачах для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн., 2020, 2. - С. 245-266.

УДК 517.925

О периодических решениях одного класса систем интегро-дифференциальных уравнений

Нуржанов О. Д.[1], Тожибаев Ж. И.[1]
[1,2]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха;
nurjanov@list.ru jasurbektojibayev@gmail.com

В настоящей работе численно-аналитическим методом А. М. Самойленко [1, 2] изучаются периодические решения двумерной системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием вида

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+f(t,x)+\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(t,s,x(s))ds, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $t\in R=(-\infty,\infty)$, $s\in R=(-\infty,\infty)$; $f(t,x)=(f_1,f_2)$, $\varphi(t,s,x)=(\varphi_1,\varphi_2)$ – 2-мерные вектор-функции, $P(t)$ – (2×2)-мерная матрица вида

$$P(t)=\begin{pmatrix} 0 & p(t)\\ -p(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что периодические решения систем уравнений вида (1) изучались во многих работах, в частности в работах [3, 4].

Пусть вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(t,s,x)$ и матрица $P(t)$ определены в области

$$(t,s,x)\in\Omega=R\times R\times D,$$

$$D=\{x\mid 0\leq r\leq\|x\|\leq R\},\quad \|x\|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$$

и удовлетворяют следующим условиям:

1) матрица $P(t)$ непрерывна, периодична по t с периодом T, причем функция $p(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^T p(t)dt=2\pi l,$$

где l - целое число.

2) вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна, T-периодична по t и удовлетворяет условиям:

$$\|f(t,x)\|\leqslant M,\quad \|f(t,x)-f(t,\bar{x})\|\leqslant K_1\|x-\bar{x}\|$$

для всех (t,x), $(t,\bar{x})\in\Omega$, где $M>0$, $K_1>0$ – постоянные.

3) вектор-функция $\varphi(t,s,x)$ непрерывна, периодична по t и s с периодом T и выполняются неравенства:

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t,s,x(s))ds \right\| \leqslant N$$

для всех $-\infty < s \leqslant t < \infty$, $x \in D$,

$$\|\varphi(t,s,x) - \varphi(t,s,\bar{x})\| \leqslant K_2(t,s)\|x - \bar{x}\|$$

для всех (t,s,x), $(t,s,\bar{x}) \in \Omega$, причем

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{t} K_2(t,s)ds \right\| \leqslant K_2, \quad K_2 > 0;$$

4) выполняются также неравенства:

$$\bar{M} \leqslant \frac{R-r}{T}, \quad \bar{M} = M + N,$$

$$Q = \frac{T}{2}\left(K_1 + K_2\right) < 1.$$

При этих предположениях следуя работе [2] рассмотрим последовательность периодических функций

$$x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int\limits_0^t X(t,\tau)\left\{f\left(\tau, x_{m-1}(\tau,\xi)\right) + \right.$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau} \varphi\left(\tau, s, x_{m-1}(s,\xi)\right)ds - \frac{1}{T}\int\limits_0^T X(\tau,\theta)\left\{f\left(\theta, x_{m-1}(\theta,\varepsilon\right) + \right. \tag{2}$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-\infty}^{\theta} \varphi\left(\theta, s, x_{m-1}(s,\theta)\right)ds \right\} d\theta \right\} d\tau,$$

$$x_0(t,\xi) = X(t)\cdot\xi, \quad \xi = (\xi_1,\xi_2), \quad X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau), \quad m = 1,2,\ldots,$$

где $X(t)$ – матрицант однородной линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x,$$

т.е. линейной части системы уравнений (1).

При выполнении выше указанных условий 1) – 4) доказывается равномерная сходимость последовательности функций (2) и выясняется связь предельной функции этой последова-тельности с периодическим решением рассматриваемой системы уравнений (1).

Литература

1. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** *Численно-аналитический метод исследования периоди-ческих решений.* Киев: Выща шк. - 1976. - 180 с.
2. **Король І.І.** *Про періодичні розвязки одного класу систем диференціальних рівнянь* // Укр. мат. журн., 2005, 4. - С. 483-495.
3. **Burton T.A.** *Periodic solutions of integrodifferential equations* // J. London Math. Soc., 1985, 2. - 537-548 p.
4. **Yoshihiro Hamaya** *Periodic solutions of nonlinear integrodifferential equations* // Tohoku Math. J., 1989, 41. - 101-116 p.

УДК 517.95

Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода

Окбоев А. Б.[1]
[1] Наманганское отделение института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекитан; akmaljon12012@gmail.com

В области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup AB$ для уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^{\delta} u - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

сформулируем и исследуем задачи Трикоми, где Ω_1-область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AB, BB_0, A_0B_0, AA_0 прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно, Ω_2 - область, ограниченная при $y < 0$ дугами AC, BC, AB характеристик $x - 2\sqrt{-y} = 0$, $x + 2\sqrt{-y} = 1$, $y = 0$ уравнения (1), $\delta \in (0,1)$, $\alpha \in (-1/2, 0)$, а λ- действительное или чисто мнимое число, $D_{0x}^{\alpha}\varphi(x)$- интегро-дифференциальный оператор порядка α в смысле Римана-Лиувилля [1]

$$D_{0x}^{\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n}\varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Задача T_0. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

а) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1 и решением класса R_{00}^{λ} в области Ω_2;

б) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = \lim_{y\to +0} y^{1-\delta} u(x,y), \quad 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y) - A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right] = \lim_{y\to +0} y^{1-\delta} \frac{\partial}{\partial y}\left[y^{1-\delta} u(x,y)\right], \quad 0 < x < 1;$$

в) на границе области Ω удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AA_0} = \varphi_0(y), \;\; u|_{BB_0} = \varphi_1(y), \; 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u|_{AC} = \psi(x), 0 \le x \le 1/2, \tag{3}$$

где $A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)$ - определяется формулой

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{\beta} \overline{J}_{\beta}(\sigma)\, dz + \frac{8\gamma_1 y}{(1+\beta)(1+2\beta)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left(\lambda^2 - \frac{d^2}{d\zeta^2}\right) \tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{1+\beta} \overline{J}_{1+\beta}(\sigma)\, dz,$$

$\gamma_1 = \Gamma(1+2\alpha)/\Gamma^2(1/2+\alpha)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\zeta = x - 2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\tau(x) = u(x,-0)$, а $\varphi_0(y), \varphi_1(y)$ и $\psi(x)$ - заданные непрерывные функции.

Определение 1 [2]. Регулярным в области Ω_1 решением уравнения (1), называется функция $u(x,y)$, удовлетворяющая в области Ω_1 уравнению (1) и следующим условиям $u_{xx}(x,y)$, $D_{0y}^{\delta} u(x,y) \in C(\Omega_1)$, $D_{0y}^{\delta-1} u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$.

Определение 2 [3]. Функция $u(x,y)$, определяемая в области Ω_2 формулой

$$u(x,y) = A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) - 2^{-2+4\beta}\gamma_2 \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma)\,\nu(t)\, dt,$$

называется решением уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$ из класса R_{0p}^{λ} при $-1/2 < \alpha < 0$, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x) = sign(x-p)\int\limits_p^x |x-t|^{-2\beta}\bar{I}_{-\beta}[\lambda(x-t)]\,T(t)dt,$$

где $\nu(x),\ T(x) \in C[0,1]\bigcap C^1(0,1)$ и $\nu'(x),\ T'(x) \in L(0,1)$, $\gamma_2 = 2\Gamma(2-2\alpha)/\Gamma^2(3/2-\alpha)$, $\sigma = \lambda\sqrt{(\eta-t)(t-\xi)}$.

Теорема 1. Если λ - действительное число или чисто мнимое число, отличное от $i\pi n, n \in Z$, а заданные функции удовлетворяют условиям $\psi^{(m)}(0) = 0$, $m = 0,1,2$, $\psi'''(s/2) = s^p\psi_0(s)$, $p > -2-2\beta$, $\psi_0(s) \in C[0,1]$ и $y^{1-\delta}\varphi_1(y)$, $y^{1-\delta}\varphi_2(y) \in C[0,1]$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_1(y) = 0$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_2(y) = 0$, то задача T_0 имеет единственное решение.

Литература

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.
2. **Mamchuev M.O.** *Solutions of the Main Boundary Value Problems for a Loaded Second-Order Parabolic Equation with Constant Coefficients* Differ. Uravn., 2016, vol. 52, no. 6, pp. 789-797.
3. **Окбоев А.Б.** *Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа* // Бюллетень Института математики. -Ташкент. 2020. №1. -С. 95 - 103.

УДК: 517.956

Краевая задача с интегральным условием склеивания для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с дифференциальным оператором Римана-Лиувилля.

Н.К. Очилова [1,a], Э.Б.Хайдаров[2,b]

[1] *Ташкентский интернациональный университет Киме*
[2] *Бухарский государственный университет*
[a] *nargiz.ochilova@gmail.com*, [b]*elyor.haydarov.86@bk.ru*

Это работа посвящена нахождению классического решения локальной задачи с интегральным условием склейки для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа с дифференциальным оператором Римана-Лиувилля дробного порядка α $(0 < \alpha \leq 1)$.

Рассмотрим уравнение:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D_{oy}^{\alpha}u, & \text{при } y > 0 \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

с дифференциальным-оператором Римана-Лиувилля (см [1]):

$$D_{oy}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}u(x,t)dt,$$

где α, $m = const$, $m > 0$, $0 < \alpha < 1$ $\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$.

Пусть $\Omega-$ конечная область ограниченная отрезками: $A_1A_2 = \{(x,y):\ x = 1,\ 0 < y < h\}$, $B_1B_2 = \{(x,y):\ x = 0,\ 0 < y < h\}$, $B_2A_2 = \{(x,y):\ y = h,\ 0 < x < 1\}$ при $y > 0$ и характеристиками уравнения

$$A_1C:\ x + (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{(1-2\delta)}} = 1; \quad B_1C:\ x - (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}} = 0$$

уравнения (1) при $y < 0$, где $\delta = \frac{m}{2(m+2)}$, $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\delta}\right)$.

Введем обозначения $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$ и $I = \{(x,y):\ y = 0,\ 0 < x < l\}$.

Задача I. Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций:

$$V = \left\{u(x,y):\ D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) \in C(\bar{\Omega}^+), u \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C^2(\Omega^-),\ u \in C\left(\Omega^+ \cup B_1B_2\right),\right.$$

$u_{xx} \in C\left(\Omega^{+}\right),\ D_{oy}^{\alpha} u \in C\left(\Omega^{+} \cup I\right)\}$ удовлетворяющие краевым условиям:

$$u(1, y)=\varphi_1(y),\ \ 0 \leq y<h,\ u_x(0, y)=\varphi_2(y),\ \ 0 \leq y<h,$$

$$u\left(x,-\left(\frac{x}{1-2 \delta}\right)^{1-2 \delta}\right)=\psi(x), \quad x \in I_1 .$$

и условиям склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow+0} y^{1-\alpha} u(x, y)=u(x,-0), 0 \leq x \leq l,$$

$$\lim_{y \rightarrow+0} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha} u(x, y)\right)_y=\lambda_1(x) u_y(x,-0)+\lambda_2(x) \int_0^x r(t) u(t, 0) d t+\lambda_3(x),\ \ (x, 0) \in A_1 B_1$$

где $\varphi_i(y)\,(i=1,2)$, $\psi(x)$, $r(x)$, $\lambda_j(x)\,(j=\overline{1,4})$ – заданные функции, причем $\sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j^2(x) \neq 0$.

Ключевые слова: Дробное дифференцирование, локальная задача, нелинейное условие склеивание, однозначная разрещимость, метод последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kilbas A.A.,Srivastava H.M.,Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* // North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

УДК: 517.956

Исследование краевой задачи с условием Бицадзе-Франкля для уравнения смешанного типа с дробной производной

Н.К. Очилова [1,a], Б.Зарипов[2,b]

[1] *Ташкентский интернациональный университет Кимё, Ташкент, Узбекистан. 100114*
[2] *Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан. 100011*
E-mail: [a] nargiz.ochilova@gmail.com, [b]zaripov@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию краевых задач типа Франкля для уравнения:

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C D_{oy}^{\alpha} u, & \text{при } y>0 \\ (-y)^m u_{xx}-x^n u_{yy}, & \text{при } y<0\end{cases} \tag{2}$$

с дифференциальным оператором Капуто[1]:

$${}_C D_{oy}^{\alpha} u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y(y-t)^{-\alpha} u_t(x, t) d t, \tag{3}$$

где $\alpha,\ m, n=const$, $m>0$, $n>0$, $0<\alpha<1$.

Пусть в области $\Omega=\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup I$, где Ω_0- область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h_2$, $x=0$, соответственно, а Ω_1-характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси x и двумя характеристиками $AC:\ \frac{1}{q} x^q-\frac{1}{p}(-y)^p=0$, $BC:\ \frac{1}{q} x^q+\frac{1}{p}(-y)^p=1$ уравнения (2), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(h_1, 0)$, пересекающимися в точке $C\left((q/2)^{1/q},-(p/2)^{1/p}\right)$, $I=\{(x, y):\ 0<x<h_1,\ y=0\}$, $2p=m+2$, $2q=n+2$, $h_1=q^{1/q}$, $h_2>0$ причем $m>n$.

Введем обозначения:

$$I_1=\left\{(x, y):\ 0<x<(q \kappa)^{1/q}, y=0\right\},\ I_2=\left\{(x, y):\ (q \kappa)^{1/q}<x<h_1, y=0\right\},$$

$2\beta=m/(m+2)$, $2\gamma=n/(n+2), 0<k<1$,

$$0<\gamma<\beta<\frac{1}{2}, \tag{4}$$

а через C_1 и C_2, соответственно, точку пересечения характеристики AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(\kappa_1, 0) \in I$, где $0 < \kappa_1 < h_1,\ \kappa_1 = (q\kappa)^{1/q}$.

Пусть $\Omega_{11}\,[\Omega_{12}]$ – область, ограниченная характеристиками $AC_1,\ EC_1\ [BC_2,\ EC_2]$ уравнения (2) и отрезком $I_1\ [I_2]$, $\Omega_{13} = \Omega_1 \backslash (\Omega_{11} \cup \Omega_{12})$. Функция $\sigma(x) \in C^2\,[0\,,\,\kappa_1]$ – диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,\,\kappa_1]$ во множество точек отрезка $[\kappa_1,\,h_1]$, причем $\sigma'(x) < 0,\ \sigma(0) = h_1,\ \sigma(\kappa_1) = \kappa_1$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $\sigma(x) = h_1 - k_0\,x,\ \ k_0 = (h_1 - \kappa_1)/\kappa_1$.

Задача BF. Требуется определить функцию $u(x,y)$, из класса функций $W = \{u(x,y):$ $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_{11} \cup \Omega_{12}),\ u_{xx} \in C(\Omega_0),\ u_x \in C(\Omega_0 \cup BB_0),\ {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_0)\}$ обладающую свойствами:

1) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2) в областях Ω_0 и $\Omega_1 \backslash (EC_1 \cup EC_2)$;

2) $u_x \in C(\Omega_1 \cup I)$, причем на AB выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha} u_y(x,+0) = u_y(x,-0), (x,0) \in AB,$$

3) $u(x,y)$ удовлетворяющие краевым условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi_1\,(y)\,, 0 \le y \le h_2,\ u_x|_{x=1} = \varphi_2\,(y)\,, 0 \le y < h_2,$$

$$u[\theta(x)] = (x^{2q})^{\frac{\beta-\gamma}{2}} F_{ox} \begin{bmatrix} \dfrac{1-\gamma-\beta}{2}, & \dfrac{\gamma-\beta}{2}, \\ 1-\beta, & x^{2q} \end{bmatrix} (x^{2q})^{\frac{\gamma-\beta-1}{2}} [a(x)u_y(x,0) + b(x)],\ (x,0) \in I,$$

$$\mu u(x,0) = u(\sigma(x),0) + \psi(x),\ 0 \le x \le h_1,$$

где $0 < \mu < 1$ и $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$,$b(x)$,$\psi(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C\,[0,h_2] \cap C^1\,(0,h_2)\,,\ a(x), \psi(x) \in C\,[0,h_1] \cap C^2\,(0,h_1)\,,\ b(x) \in C^2(0,h_1)$$

Здесь $\theta(x) = \left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q} - i\left(\frac{px^q}{2q}\right)^{1/q}$точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0) \in I_1$ с характеристикой AC_1, $F_{ox}[\cdots]$ и обобщеный интегральной оператор дробного порядка[1].

Единственность решения доказана методом интегральной энергии с использованием необходимых свойств гипергеометрических функций и интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. Существование доказывается методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: Краевая задача, вырождающееся уравнение, смешанный тип, существование и единственность решения, принцип экстремума, метод интегральных уравнений, дробная производная Капута.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kilbas A.A.,Srivastava H.M.,Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* // North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

УДК 517.953

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ ЗАДАННОГО НА МЕТРИЧЕСКОМ ЛЕСТНИЧНОМ ГРАФЕ

Рахимов Камоладдин Уринбаевич
Национальный Университет Узбекистана; kamoliddin_ru@inbox.ru

Известно, что уравнение диффузии широко используется во многих областях науки, включая физику, биологию, механику, химию и другие (см. [1], [2]). В конце 80-х годов прошлого столетия русским ученым Мерковом начато исследование уравнение диффузии на графах (см. [4]). Чешские ученые П.Экснер и П.Себа исследовали краевые-задачи для классических уравнений на графе (см. [6]). Последние годы широко применяется и уравнение субдиффузии – уравнения диффузии с дробной производной по времени. Метод функций Грина является мощным инструментом для решения краевых задач. Метод функций Грина для уравнений дробного порядка исследован А. В. Псху в [5]. В Сначала, вводим понятие дробного производного типа Римана-Лиувилля. Определение 1. (см. [3]) Оператор, определяемый соотношениям

$$\partial_{\eta t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta}^{t} \frac{g'(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

называется дробной производной Римана-Лиувилля. Оператор, определяемый равенством

$$D_{\eta t}^{-\alpha} g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta}^{t} \frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{1-\alpha}} d\xi, \quad 0<\alpha<1,\ \eta \leq t \qquad (2)$$

называется оператором дробного интегрирования (см. [3], стр. 51). Иногда вместо обозначение $D_{\eta t}^{-\alpha} g(t)$ используется $J_{\eta t}^{\alpha} g(t)$.

Рассмотрим граф лестничного типа с $3m-1$ равными ребрами. Определяем координаты ребер графа через изометрическое отображение этого ребра на интервал от 0 до L. Ребра обозначим через $B_k,\ k=\overline{1,3m-1}$. Мы рассмотрим начально – краевую задачу для уравнении субдиффузии. При четных и нечетных значениях краевые ребра графа отличаются. Поэтому рассмотрим два случая. Пусть m четное число. Рассмотрим уравнение субдиффузии

$$D_{0t}^{\alpha} u_j-\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j=f(x,t),\ 0<x<L,\ 0<t<T,\ j=\overline{1,3m-1} \qquad (3)$$

где $0<\alpha<1$, с начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_k(x,t)=\varphi_k(x), 0 \leq x \leq L,\ k=\overline{1,3m-1}. \qquad (4)$$

Во всех внутренних точках графа требуем следующие условия склеивание (Кирхгоффа)

$$u_{6j+2}(0,t)=u_{6j+3}(0,t)=u_{6j+5}(0,t),$$

$$u_{6j+4}(0,t)=u_{6j+6}(0,t)=u_{6j+7}(0,t),$$

$$u_{6j+1}(L,t)=u_{6j+3}(L,t)=u_{6j+4}(L,t),$$

$$u_{6j+5}(L,t)=u_{6j+6}(L,t)=u_{6j+8}(L,t) \qquad (5)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+2}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+5}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+4}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+7}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+1}(x,t)+u_{6j+3}(x,t)+u_{6j+4}(x,t)\right)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{6j+5}(x,t)+u_{6j+6}(x,t)+u_{6j+8}(x,t)\right)=0 \qquad (6)$$

для всех $t \in[0,T],\quad j=\overline{0,[\frac{m-2}{2}]}$. Эти условия характеризуют локальное сохранение потока в точках ветвление. В крайних точках графа требуем выполнение следующих граничных условий

$$u_1(0,t)=\psi_1(t),\ u_{3m-1}(0,t)=\psi_2(t),$$

$$u_2(L,t)=\psi_3(t),\ u_{3m-2}(L,t)=\psi_4(t). \qquad (7)$$

(7) Задача. Найти регулярные решения уравнении (3), удовлетворяющие условиям (4) – (6). Доказано существование и единственность решении поставленной задачи. Теорема 1. Поставленная задача имеет не более одного решения. Доказательство теоремы обоснуется на априорные оценки

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|w\|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{m} w_j \partial_{0t}^{\alpha} w_j=2\left(-w_1(0,t) \sum_{j=1}^{m} w_{j,x}(0,t)-\left\|w_x\right\|^2\right) \leq 0.$$

Далее, построим решение поставленной задачи. В силу известной теоремы 3.1.2. (см. [5] стр.116) будем искать решение в виде

$$u(x,t)=\int_0^t\left(G(x,t;L,\tau) u_{\xi}(L,\tau)-G(x,t;0,\tau) u_{\xi}(0,\tau)-G_{\xi}(x,t;L,\tau) u(L,\tau)+\right.$$

$$+G_\xi(x,t;0,\tau)u(0,\tau))d\tau-\int_0^L\varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi-\int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (8)$$

где

$$G=\begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} & ... & G^{1(3m-1)} \\ G^{21} & G^{22} & ... & G^{2(3m-1)} \\ ... & ... & ... & ... \\ G^{(3m-1)1} & G^{(3m-1)2} & ... & G^{(3m-1)(3m-1)} \end{pmatrix}$$

является матричная функция Грина. Заметим, что в силу оценки все интегралы в формуле (8) сходится равномерно. Каждый элемент матрицы удовлетворяет уравнение

$$G_{\xi\xi}-D^\alpha_{t\tau}G=0,$$

для всех $\xi\neq x, 0<\tau<t$. Будем искать функцию Грина в виде

$$G=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A_n\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau)+B_n\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)),$$

(9) где A_n и B_n неизвестные матрицы размерности $(3m-1)\times(3m-1)$ и $\Gamma(s,t)$ определяется формулой

$$\Gamma(s,t)=\frac{1}{2}t^{\alpha/2-1}e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}(-\frac{|s|}{t^{\alpha/2}}).$$

Требуется определить матрицы A_n и B_n. Имеет места следующая Теорема 2. Пусть $\phi_i(t)\in C[0,T], \varphi_i(x)\in C[0;L],\ (i=\overline{1,3m-1}, T>0), m-$четное число и $f(x,t)\in C^{0,1}\{(x,t):0\leq x\leq L, 0\leq t\leq T\}$. Тогда поставленная задача имеет решение в виде

$$u(x,t)=\int_0^t(G_\xi(x,t;0,\tau)U^{1,3m-1}(0,\tau))d\tau-\int_0^t(G_\xi(x,t;L,\tau)U^{2,3m-2}(L,\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^L\varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi-\int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $U^{i,j}=(0,0,...0,u_i,0,...,0,u_j,0,...,0)^T,\ F=(f_1,...,f_{3m-1})^T$ и $G(x,t;\xi,\tau)$ определяется с формулой

$$G=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(M^n\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau)+(DC^{-1})^n\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\Big).$$

Здесь матрицы определяется следующим образом:

$$M=\frac{1}{m}\begin{pmatrix} 2-m & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2-m & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2 & ... & 2-m \end{pmatrix}$$

Таким образом, поставленная задача решена и найдено точное представление решения.

Литература

1. **Natalie E.S.** *Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact.* // Applied Mathematical Modelling. - 2017. 46. P. 450-464.
2. **Piecuch M.** *Diffusion in multilayers.* // Revue de Physique Appliquee. - 1988. 23. 10. P. 1727-1732.
3. **Podlubny, I.** *Fractional Differential Equations.* Academic Press: San Diego, CA, USA. - 1998. P. 340.
4. **Мерков А.Б.** *Уравнение теплопроводности на графах.* // УМН. - 1987. В. 42:5(257). - С. 213 - 214.
5. **Псху А.В.** *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М. "Наука 2005. стр. 200.
6. **Exner P., Seba P.** *Free quantum motion on a branching graph.* // Reports on Mathematical Physics. - 1989. Vol. 28(1). - P. 7 - 26.

УДК 517.946

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.Г.Рахимов[1], С.Каххаров[2]
[1]Филиал Российского университета нефти и газа имени И. М. Губкина в городе Ташкенте; davranaka@yandex.com
[2]Каршинский государственный университет; sqahhar@mail.ru

В данной статье методом редукции предложенным в работах [1,2], рассматривается задача возмущения линейных уравнений, в случае неполных обобщенных жордановых наборов.

Пусть E_1, E_2 –некоторые банаховы пространства, $A(\varepsilon) \in L(E_1, E_2)$ –линейная оператор-функция, аналитически зависящая от малого параметра $\varepsilon \in \mathbb{C}$, более того $A(0) = B$ –является Фредгольмовым оператором с $Ker(B) = \{\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}\}$, $Ker(B^*) = \{\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}\}$, и неполным обобщенным жордановым набором (ОЖЦ) $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$

$$B\varphi_i^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} A_k \varphi_i^{(s-k)},\ \left\langle \sum_{k=1}^{s-1} A_k \varphi_i^{(s-k)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle = 0,\ s = \overline{2, p_i}, i, j = \overline{1, n},$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle \neq 0,\ i, j = \overline{1, n},\ D_p = det \left\| \left\langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_i^{(p_i+1-k)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle \right\| = 0. \qquad (*)$$

Рассмотрим возмущенное линейное уравнение

$$By = h + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y \qquad (1)$$

Пусть $\{\gamma_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{z_i\}_{i=\overline{1,n}}$ –биортогональные системы к $\{\varphi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{\psi_i^{(1)}\}_{i=\overline{1,n}}$ соответственно.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ введем операторы $B_i = B + \sum\limits_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_j \rangle z_j$. Несложно убедиться в том, что $N(B_i) = \{\varphi_i^{(1)}\}$, $N^*(B_i) = \{\psi_i^{(1)}\}$. Строим возмущенные оператор-функции $\overline{A}_i(\varepsilon) = B_i - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k$. и рассмотрим уравнения

$$B_i y = h + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y \qquad (2)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $B \in L(E_1, E_2)$ – фредгольмовый оператор с количеством нулей $n > 1$, которые имеют $A-$ ОЖЦ с конечными длинами $p_i, i = \overline{1, n}$. Тогда каждое уравнение из (2) имеет единственное решение $y_i(\varepsilon)$, которые при условии $p_i - q_i \leq 0$ будут аналитическими в точке $\varepsilon = 0$ и в некоторой окрестности, и при условии $p_i > q_i$, имеют в точке $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_i - q_i$.

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) оператор B –фредгольмов с $N(B) = \{\varphi_i\}_1^n, N^*(B) = \{\psi_i\}_1^n$ и с соответствующим неполным ОЖН $\{\varphi_i^{(s)}\}_{i=\overline{1,n}}^{s=\overline{1,p_i}}$ состоящий из A–обобщенных жордановых цепочек конечной длины $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$, и пусть определитель полноты имеет ранг равный $n - 1$. Если y_n –решение уравнения (2), то уравнение (1) имеет решение вида

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \Big[\xi \Big(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \Big)^{-1} \varphi_n + \Big(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \Big)^{-1} \varphi_j \Big]. \qquad (3)$$

Если дополнительно выполнено неравенство $p_n \leq q_n$, то решение $y(\varepsilon)$ будет аналитичным при $\varepsilon = 0$ и в ее некоторой окрестности, и при условии $p_n > q_n$ оно имеет в точке $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_n - q_n$.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$B_n y = h + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k y + \sum_{s=1}^{n-1} \langle y, \gamma_s \rangle z_s,$$

где $B_n = B + \sum\limits_{s=1}^{n-1} \langle \cdot, \gamma_s \rangle z_s$. Тогда в силу условия $\langle \sum\limits_{s=1}^{p_n} A_s \varphi_n^{(p_n)}, \psi_n \rangle \neq 0$ существует число ρ_0 такое, что для всех ε из круга $0 < |\varepsilon| < \rho_0$ оператор $\left(B_n - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right)$ непрерывно обратим. Поэтому имеем

$$y = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right)^{-1} h + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right)^{-1} z_s$$

или

$$y = y_n + \sum_{s=1}^{n-1} \xi_s \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right)^{-1} z_s, \ \ \xi_s = \langle y, \gamma_s \rangle, s = \overline{1, n-1}. \tag{4}$$

Вычислим выражение

$$x_s = \left(B_n - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right)^{-1} z_s = \left(\widetilde{B_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle z_n \right)^{-1} z_s =$$

$$= \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle \varphi_n \right)^{-1} \varphi_s$$

Откуда

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k - \langle \cdot, \gamma_n \rangle \varphi_n \right) x_s = \varphi_s$$

или

$$\left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right) x_s - \langle x_s, \gamma_n \rangle \varphi_n = \varphi_s$$

Введя обозначение $\xi'_s = \langle x_s, \gamma_n \rangle$ переводим второй член левой части в правую сторону равенства. Обращая оператор $(I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k)$ имеем:

$$x_s = \xi'_s \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_s.$$

Подставляя его в правую сторону в выражении для ξ'_s получим уравнение для определения ξ'_s :

$$\xi'_s = \xi'_s \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n, \gamma_n \right\rangle + \left\langle \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_s, \gamma_n \right\rangle.$$

Применяя к нему равенства (*) приходим к уравнению:

$$\xi'_s \cdot \varepsilon^{p_n} \Big[\Big\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_n \Big\rangle + O(\varepsilon) \Big] =$$

$$= -\varepsilon^{p_s} \Big[\Big\langle \sum_{k=1}^{p_s} A_k \varphi_s^{(p_s+1-k)}, \psi_n \Big\rangle + O(\varepsilon) \Big].$$

Так как $p_s \leq p_n$, то ξ'_s имеет полюс порядка $p_n - p_s$ в точке $\varepsilon = 0$.

Подставляя значение x_s в (3) имеем

$$\begin{cases} y = y_n + \sum\limits_{s=1}^{n-1} \xi_s \left[\xi'_s \left(I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_s \right], \\ \xi_l = \langle y, \gamma_l \rangle, \, l = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Теперь подставим первое уравнение во вторые, и после нескольких преобразований приходим к системе:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a_{ij} = -\langle y_n, \gamma_i \rangle,\ i = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

где

$$a_{ij} = \varepsilon^{p_j} \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_j} A_k \varphi_j^{(p_j+1-k)}, \psi_i \right\rangle + O(\varepsilon) \right]$$

и

$$\langle y_n, \gamma_i \rangle = \varepsilon^{q_n} \cdot \left[\left\langle \sum_{k=1}^{p_n} A_k \varphi_n^{(p_n+1-k)}, \psi_i \right\rangle + \varepsilon^{q_i - q_n} \langle h_i^{(q_i)}, \psi_i \rangle + O(\varepsilon) \right].$$

Так как определитель системы (5) $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{p_1+\dots+p_{n-1}} \cdot (D_p^{'} + O(\varepsilon)) \neq 0$, то она имеет единственное решение. Теперь определим порядок зависимости коэффициентов ξ_i от параметра ε. Для этого оценим сопутствующие определители

$$\Delta_i = \varepsilon^{q_n + \sum\limits_{j \neq i} p_j} \cdot (D_{pk} + O(\varepsilon)),\ i = \overline{1, n-1}. \tag{5}$$

Тогда $\xi_i = \varepsilon^{q_n - p_i} \cdot C(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$. Поэтому $\xi_i \cdot \xi_i' = \varepsilon^{q_n - p_n} \cdot C(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$. Откуда следует, что при $q_n \geq p_n$, все ξ_i и в том числе решение y будут непрерывными в точке $\varepsilon = 0$ и в некоторой ее окрестности. В случае $q_n < p_n$, решение имеет полюс порядка $p_n - q_n$. Теорема доказана.

Литература

1. **Рахимов Д.Г.** *О возмущениях фредгольмовых собственных значений линейных операторов.* Журнал Средне-волжского Математического общества (Журнал СВМО) - т. 17. No 3,2015, стр. 37-43.
2. **Рахимов Д.Г.** *О возмущениях фредгольмовых собственных значений линейных операторов.* Журнал Дифференциальные уравнения. Минск, 2017, т. 53, No 5, стр.615-623.

УДК 517.956.6

Сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенглама учун Бицадзе-Самарский шарти билан қўйилган нолокал масалани тахлил қилиш

Раҳмонова Н. А.
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
nilufaradhamovna@gmail.com

Ушбу мақолада

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-m/2}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \tag{1}$$

сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенглама учун Бицадзе-Самарский шарти билан қўйилган нолокал масала ечимининг бир қийматли ечилиши ўрганилади.

(1) тенгламада қатнашган m, α_0 ва β_0 ҳақиқий сонлар бўлиб, қуйидаги

$$m > 0, \quad -\frac{m}{2} < \beta_0 < \frac{m+2}{4}, \quad |\alpha_0| < \frac{m+2}{2}. \tag{2}$$

шартларни қаноатлантиради.

D орқали (1) тенгламанинг $AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1$, $BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ характеристикалари ва $J \equiv AB = \{(x,y):\ -1 < x < 1,\ \ y = 0\}$ чизи?билан чегараланган соҳани белгилаймиз. M_0 и M_1 нуқталар орқали мос равишда $E(c, 0) \in J$ нуқтадан чиққан (1) тенгламанинг $EM_0: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = c$ ва $EM_1: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = c$, характеристикалари билан AC ва BC характеристикаларнинг кесишиш нуқталарини белгилаймиз,

қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$J_1 = \{(x,y):\ -1 < x < c,\ \ y = 0\},\ J_2 = \{(x,y):\ c < x < 1,\ \ y = 0\},$$

$$\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}, \beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}, 0<\alpha,\ \beta<0,5,\ \ \alpha+\beta\neq 0, \tag{3}$$

$$\theta_j\left(x\right) = \left(\frac{x-1}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}(1+x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right),\ \theta_2\left(x\right) = \left(\frac{1+x}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), \tag{4}$$

бу ерда $\theta_0(x)$ $(\theta_1\left(x\right)$ва $\theta_2\left(x\right))$ - (1) тенгламанинг $N\left(x,0\right)\in J_1$ $\left(M\left(x,0\right)\in J_2\right)$ нуқтадан чиқувчи характеристикаси билан мос равишда AC (AC ва BC) характеристикаси кесишиш нуқтасининг координаталари. AM_0E, EM_1B учбурчак ва EM_0CM_1 тўртбурчак соҳаларни мос равишда D_1, D_2 ва D_3 орҳали белгилаймиз, $D=D_1\bigcup D_2\bigcup D_3$.

D соҳада (1) тенглама учун қуйидаги янги типдаги нолокал масалани ечамиз.

BS **масала.** (1) тенгламанинг $u\left(x,y\right)\in C\left(\bar{D}\right)\bigcap C^2\left(D_1\cup D_2\cup D_3\right)$, синфга тегишли ва D_j $(j=\overline{1,3})$ соҳада (1) тенгламани ва

$$p(x)\lim_{y\to -0}u(x,y)+q(x)\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y)=\varphi(x),\quad (x,0)\in J, \tag{5}$$

$$D^{1-\beta}_{-1x}u\left[\theta_0\left(x\right)\right]=a_1\left(x\right)\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y)+b_1\left(x\right)u\left(x,0\right)+\delta_1(x),(x,0)\in J_1, \tag{6}$$

$$a_2(x)(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{cx}u\left[\theta_1\left(x\right)\right]+b_2(x)(1-x)^{\beta}D^{1-\beta}_{x1}u\left[\theta_2(x)\right]=\delta_2(x),\quad (x,0)\in J_2 \tag{7}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ ечими топилсин, бу ерда $p(x)$, $q(x)$, $\varphi(x)$, $a_j(x)$, $b_j(x)$, $\delta_j(x)$ $(j=1,2)-$ берилган функциялар болиб, қуйидаги шартларни қаноатлан-тиради:

$$p^2(x)+q^2(x)\neq 0,\quad \forall\left(x,0\right)\in \bar{J}, \tag{8}$$

$$a^2_j(x)+b^2_j(x)\neq 0,\quad \forall\left(x,0\right)\in \bar{J}_j,\ \ (j=1,2), \tag{9}$$

$$p(x),\ \ q(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J),\quad a_j(x),\ b_j(x)\in C(\bar{J}_j)\cap C^2(J_j), \tag{10}$$

$$\varphi(x)\in C^2(J),\quad |\varphi(x)|\leq const\left(1+x\right)^{\beta-1}\left(1-x\right)^{2\beta-1}, \tag{11}$$

$$\delta_j\left(x\right)\in C^2(J_j), \tag{12}$$

$\delta_1\left(x\right)\left[\delta_2\left(x\right)\right]$ функция мос равишда $x\to -1$ ва $x\to c$ $[x\to c$ ва $x\to 1$] да $1-2\beta$ $[1-\beta$ ва $1-2\beta]$ дан кичик тартибда чексизликка интилиши мумкин, $D^{1-\beta}_{-1\,x}$, $D^{1-\beta}_{c\,x}$, $D^{1-\beta}_{x\,1}-$тартиби $1-\beta$ тенг бўлган каср тартибли дифференциал опраторлар[1-2].

қуйидаги теорема исботланган.

Теорема . Агар (2), (3), (8)-(12) шартлар бажарилса, у ҳолда D соҳада BS масала бир қийматли ечилади.

Адабиётлар

1. **Самко С.Г., Килбас А.А.Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* –Минск. –Наука и техника. –1987. –668 с.

2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* –2005. –Ташкент: –Universitet. –224 с.

УДК 517.956.6

Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области, когда нагруженная часть уравнения содержит след вторую производную от искомой функции

Т.Ж. Рузиева
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека
ruziyevatuxtagul2498@gmail.com

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + signy u_{yy} - \rho^2 u(x,y) + \mu(y) u_{xx}(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ -p < y < q\}$, где $\rho \geq 0$, $p > 0,\ q > 0$ – заданные действительные числа, $h(y) = h_1(y)$ при $y \geq 0$, $h(y) = h_2(y)$ при $y \leq 0$,
$h_j(y)\ (j = 1,2)$– заданные непрерывно - дифференцируемые функции.

Введем обозначения:

$$J = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\},\quad \Omega_1 = \Omega\ \cap\ \{(x,y):\ x > 0,\ y > 0\},$$

$$\Omega_2 = \Omega\ \cap\ \{(x,y):\ x > 0,\ y < 0\},\ D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

Задача D. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2),\quad u_{xx}(x,0) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = 0,\quad (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \tag{3}$$

$$u(0,y) = 0,\qquad u(1,y) = 0,\qquad -p \leq y \leq q, \tag{4}$$

$$u(x,q) = \varphi(x),\quad u(x,-p) = \psi(x),\quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ –заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1-2] для уравнения параболо-гиперболического и эллиптико- гиперболического типов в прямоугольной области, когда нагруженной часть уравнения содержит след искомой функции изучена начально-граничная задача и задача Дирихле. Методом спектральных разложений установлены критерий единственности решения этих задач и само решения построены в виде суммы рядов по собственным функциям соответству-ющей одномерной задачи на собственные значения.

Задача Дирихле для уравнения (1) при $\mu(y) = 0$ изучалась в работах [3]–[4].

В данной работе при всех $\rho \geq 0$, установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи (1)–(5) в прямоугольной области и само решение построено в виде суммы ряда Фурье. Показана устойчивость решения от граничных функций.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует решение $u(x,y)$ задачи D, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\Delta_{pq}(n) \equiv cos\ \lambda_n p sh\lambda_n q + \ sin\ \lambda_n p ch\lambda_n q +$$

$$+\frac{\mu_n^2}{\lambda_n}\left[h_{1n}(q) sin\lambda_n p + h_{2n}(-p) sh\lambda_n q\right] \neq 0 \text{ при всех } n \in N,$$

$$\lambda_n^2 = \rho^2 + \mu_n^2,\qquad \mu_n = \pi n.$$

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $h_j(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^3[0,1]$,

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0,\ \psi(x) \in C^3[0,1],\ \psi(0) = \psi(1) = 0,\ \psi''(0) = \psi''(1) = 0,$$

$$h_1(y) \in C^1[0,q],\ \ h_2(y) \in C^1[-p,0],\ \ h_j(0) = 0,\ \ (j = 1,2)$$

и выполнены оценка

$$|\Delta_{pq}(n)| \geq C_0 e^{\pi n q} > 0 \text{ при всех } n > n_0.$$

Тогда 1) если $\Delta_{pq}(n) \neq 0$ при всех $n = \overline{1, n_0}$, то задача (1)–(5) имеет единственное решение, которое определяется рядом

$$u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y)\, sin\pi n x\ ;$$

2) если $\Delta_{pq}(n) = 0$ при $n = n_1, n_2, ...n_\theta \leq n_0$, то задача (1)–(5) разрешима тогда, когда выполнены условия $\varphi_l = \psi_l = 0$, $l = n_1, n_2, ...n_\theta$ и решение в этом случае определяется рядом

$$u(x,y) = \sqrt{2}\left[\sum_{n=1}^{n_1 - 1} + \sum_{n=n_1+1}^{n_2-1} + ... + \sum_{n=n_\theta+1}^{+\infty}\right] u_n(y)\, sin\pi n x + \sum_l A_l u_l(y) sin\pi l x, \tag{6}$$

здесь

$$u_l(y) = \begin{cases} \frac{m_l}{sin\lambda_l p}\Delta_{py}(n), & y > 0, \\ \frac{m_l}{\lambda_l sin\lambda_l p}B_{py}(n), & y < 0, \end{cases}$$

m_l-произвольная постоянная, $A_l = const$, в сумме $\sum_l[.]$ индекс l принимает значения $n_1, n_2, ...n_\theta$ конечные суммы в (6) следует считать нулями, если верхний придел меньше нижнего,

$$B_{py}(n) = \lambda_n sin\lambda_n(p+y) + \mu_n^2 h_{2n}(y) sin\lambda_n p + \mu_n^2 h_{2n}(-p) sin\lambda_n y.$$

Литература

1. **Сабитов К.Б.** *Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.* Докл. АМАН. –2009. –**11** (1). –С. 66–73.
2. **Сабитов К. Б., Мелишева Е. П.** *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области.* Изв. вузов. Матем. –2013. –№7. – С. 62–76.
3. **Хачев М.М.** *Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной области.* Дифференц. уравнения. –1978. –**14** (1). –С.136–139 .
4. **Сабитов К.Б.** *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области.* Докл. РАН. –2007. –**413** (1). –С.23–26.

УДК 517.956.6

Краевая задача для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Рузиев М. Х.[1], Адхамова Д. Т.[2]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru
[2] Ферганский государственный университет; Dilafruzadxamova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

в неограниченной области D, ограниченной полупрямыми $x = 0$, $x = 1$, расположенными в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками $OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ пересекающимися в точке $C(\frac{1}{2}, -\left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}})$.

В (1) m, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Примем следующие обозначения: $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$, I- единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача A. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+ \cup D^-$;

2)

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$$

равномерно по $x \in [0,1]$;

3) удовлетворяет краевым условием

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(1,y) = \varphi_2(y), y \geq 0,$$

$$u|_{OC} = \psi(x), x \in [0,1/2],$$

и условию сопряжения $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$,

причем эти пределы при $x = 0$ и $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и $\psi(x)$-заданные функции, причем $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_1(y), y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_2(y) \in L(0,\infty)$, $\psi(x) \in C[0,1/2] \cap C^{(3,\delta)}(0,1/2)$, $\varphi_1(\infty) = 0$, $\varphi_2(\infty) = 0$.

С помощью принципа экстремума доказана теорема единственности.

Методами разделения переменных и интегральных уравнений доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия: $\varphi_i(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_i(y) \in L(0,\infty)$, $\psi(x) \in C[0,1/2] \cap C^{(3,\delta)}(0,1/2)$, $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = 0$. Тогда решение задачи A существует.

Отметим, что краевые задачи для уравнения смешанного типа в области D изучены в работах [1-3].

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа* . М.: Высшая школа. - 1985. - 304 с. 2. **Салахитдинов М.С., Рузиев М.Х.** *Задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области.* Узбекский математический журнал. 2005. №2, С. 77–83.
3. **Абашкин А.А.** *Об одной задаче для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в бесконечной полуполосе.* Вестник Самарского гос.тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. №1 (26), С.39-45.

УДК 517.956.2

Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения

Рузиев М. Х.[1], Жураев Ф. Э.[2]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru
[2] Ферганский государственный университет; jurayevfaxriddin@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y + \beta_1 y^m u = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, $\beta_1 = -\lambda^2$, $\lambda \in R$, в вертикальной полуполосе $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$.

Пусть $\bar{D} = D \cup \bar{J_0} \cup \overline{OB} \cup \bar{J_1}$, где $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $J_0 = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$, $J_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 0\}$.

Задача. Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup J_0 \cup J_1) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D;

2)

$$\lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0 \tag{2}$$

равномерно по $x \in [0, 1]$;

3) удовлетворяет краевым условием

$$u(0, y) = u(1, y), y \geq 0, \tag{3}$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), y > 0, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \tau(x),\ x \in [0, 1], \tag{5}$$

где $\tau(x)$ - заданная функция.

Имеет место следующая

Теорема 1. Задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы проводится с помощью принципа экстремума.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\tau(x) \in C^2[0, 1]$ и на сегменте $[0, 1]$ имеет кусочно-непрерывную производную третьего порядка, $\tau(0) = \tau(1)$, $\tau''(0) = \tau''(1)$. Тогда решение задачи существует.

Доказательство. Применив метод разделения переменных согласно условий (3)-(5), нетрудно получить явный вид функции $u(x, y)$:

$$u(x, y) = y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda^2 + (2\pi n)^2}}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \right) sin(2\pi n x),$$

где

$$c_n = \frac{4}{\Gamma(\frac{1-2\beta}{2})} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + (2\pi n)^2}}{m+2} \right)^{\frac{1-2\beta}{2}} \int_0^1 \tau(t) sin(2\pi n t) dt,$$

$K_\nu(z)$- модифицированная функция Бесселя третьего рода(функция Макдональда) [1], $\beta = \frac{2\beta_0 + m}{2(m+2)}$, $\Gamma(z)$- гамма функция Эйлера.

Справедливость условия (2) вытекает из асимптотического разложения функции Макдональда $K_\nu(z) \sim (\pi/(2z))^{\frac{1}{2}} exp(-z)$, $z \to \infty$. Отметим, что для уравнения (1) в случае $m = 0$ нелокальная краевая задача изучена в работе [2].

Литература

1. **Олвер Ф.** *Асимптотика и специальные функции.* М. - 1990. -528с.
2. **Лернер М.Е., Репин О.А.** *Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца.* Дифференциальные уравнения. 2001, т.37, №11, с. 1562–1564.

УДК 517.956.2

Краевая задача для уравнения Холмгрена с сингулярным коэффициентом в вертикальной полуполосе

Рузиев М. Х.[1], Маматмуминов Д. Т.[2]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru
[2] Термезский государственный университет; dilshod310797mdt@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, в вертикальной полуполосе $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, y > 0\}$.

Пусть $\bar{D} = D \cup \bar{J}_0 \cup \overline{OB} \cup \bar{J}_1$, где $O(0,0)$, $B(1,0)$, $J_0 = \{(x,y) : x = 0, y > 0\}$, $J_1 = \{(x,y) : x = 1, y > 0\}$.

Задача N. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D;

2)
$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 \tag{2}$$
равномерно по $x \in [0,1]$;

3) удовлетворяет краевым условием

$$u(0,y) = \varphi_1(y), y \geq 0, \tag{3}$$

$$u(1,y) = \varphi_2(y), y \geq 0, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \nu(x),\ x \in [0,1], \tag{5}$$

где $\nu(x)$ - заданная функция.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\varphi_i = \varphi_i(x) \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i \in L(0,\infty)$, $i = 1,2$, $\nu = \nu(x) \in C^2[0,1]$, на сегменте $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную третьего порядка, и $\nu(0) = \nu(1)$, $\nu''(0) = \nu''(1)$. Тогда решение задачи N существует.

Доказательство. Согласно условиям теоремы, применив преобразования Ханкеля и метод Фурье, решение задачи N в области D представимо в явном виде

$$u(x,y) = \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int\limits_0^\infty \frac{sh(1-x)s}{sh(s)} s J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) ds$$

$$\times \int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \varphi_1(t) dt + \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int\limits_0^\infty \frac{sh(xs)}{sh(s)} s J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) ds$$

$$\times \int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} J_{\frac{2\beta-1}{2}} \left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \varphi_2(t) dt$$

$$-\frac{4y^{\frac{1-\beta_0}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+2\beta}{2}\right)} \int\limits_0^1 \nu(t) \sum_{n=1}^\infty \frac{sin(\pi nt) sin(\pi nx)}{\pi n} \left(\frac{\pi n}{m+2} \right)^{\frac{1+2\beta}{2}} K_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\pi n}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \right) dt,$$

где

$J_\nu(z)$ - функция Бесселя первого рода [1], $K_\nu(z)$ - функция Макдональда [1].

Литература

1. **Олвер Ф.** *Асимптотика и специальные функции.* М. - 1990. -528с.

УДК 517.956.6

О задаче типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами

Рузиев М. Х.[1], Мирсабурова Д. М.[2]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru
[2] Термезский государственный университет; dmirsaburova@mail.ru

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ - область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+-полуплоскость $y > 0$, D^--конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек A(-1,0), B(1,0), и отрезком AB прямой $y = 0$, I- интервал $-1 < x < 1$ прямой $y = 0$.

В уравнении (1) предполагается, что m, α_0, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, y = 0\}$, $I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

Свойства решений уравнения (1) существенно зависят от коэффициентов α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1). На плоскости параметров $\alpha_0 0 \beta_0$ рассматривается треугольник $A_0B_0C_0$, ограниченный прямыми $B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2$, $A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2$, $A_0B_0 : \beta_0 = 1$, и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in A_0B_0C_0$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, y)$ которая:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+ \cup D^-$;

2)

$$\lim_{R\to\infty} u(x, y) = 0, R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, y \geq 0;$$

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условием

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \varphi_i(x),\ \forall x \in I_i, i = 1, 2,$$

$$D^{1-\beta}_{-1,x} u[\theta_0(x)] = a(x)\nu(x) + b(x), x \in (-1, 1),$$

и условию сопряжения $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim\limits_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y$.

Пределы при $x = -1$ и $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\varphi_i(x)$, $a(x)$, $b(x)$ заданные функции, причем $a(x), b(x) \in C^1[-1, 1]$, функция $\varphi_i(x), i = 1, 2$ принадлежат $C(I_i)$ и могут обращаться в бесконечность порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, при $x = -1$, $x = 1$ соответственно, а при достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-1-\delta},$$

где δ, M - положительные постоянные,

$D^{1-\beta}_{-1,x}$ - оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1], а точкой пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0), x_0 \in (-1, 1)$, является $\theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0-1}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{2/(m+2)}\right)$.

Методами интегральных уравнений и интеграл энергии доказывается однозначная разрешимость задачи.

Отметим, что нелокальная краевая задача для уравнения (1) в случае $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ изучена в работе [2].

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа* . М.: Высшая школа. - 1985. - 304 с.

2. **Репин О.А., Кумыкова С.К.** *Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области.* Дифференциальные уравнения. 2012, т.48, №8, С. 1140–1149.

УДК 517.956.6

Краевая задача типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа

Рузиев М. Х.[1], Рахимова Г. Б.[2]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru
[2] Ферганский государственный университет; graximova888@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ - первый квадрант плоскости, D^- - конечная область четвертый квадрант плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и пересекающиеся в точке $C(\frac{1}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}})$ и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. В (1) m, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$. Введем обозначения: $I_0 = \{(x,y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x,y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

Задача BS. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$ для которой:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+ \cup D^-$;

2)

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, x > 0, y > 0;$$

3) удовлетворяет краевым условием

$$u(0,y) = \varphi(y), \ y \geq 0,$$

$$u(x,0) = \tau_1(x), \ x \in \bar{I}_1,$$

$$D^{\beta}_{0,x} x^{2\beta-1} u[\theta_0(x)] = a(x)u(x,0) + b(x), x \in (0,1),$$

и условию сопряжения $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim\limits_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y$.

Пределы при $x = 0$ и $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $\varphi(y)$, $\tau_1(x)$, $a(x)$, $b(x)$ заданные функции, причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x = 1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x) \in C(\bar{I}_1)$ и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \leq \frac{M}{x^{\varepsilon}}$, ε, M - положительные константы, $\varphi(y) \in C(\bar{I}_0)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi(y) \in L(0,\infty)$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $D^{\beta}_{0,x}$ - оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1], точкой пересечения характеристики OC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0), x_0 \in (0,1)$, является $\theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}x_0\right)^{2/(m+2)}\right)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: $\varphi(y) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$,$b(x) \equiv 0$, $a(x)$ - неположительная невозрастающая функция, причем $a(x) \in C^{(0,\delta_0)}[0,1]$, где $\delta_0 > 1 - 2\beta$. Тогда задача BS имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью принципа экстремума.

Теорема 2. Пусть $b(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $b(0) = 0$, $b(1) = 0$, $a(x)$ - неположительная невозрастающая функция, причем $a(x) \in C^{(0,\delta_0)}[0,1] \cap C^3(0,1)$, где $\delta_0 > 1 - 2\beta$, $\varphi(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi(y) \in L(0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$. Тогда решение задачи BS существует.

При доказательстве теоремы применяется метод интегральных уравнений.

Отметим, что нелокальные краевые задачи для уравнения (1) в области D изучены в работах [2,3].

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа* . М.: Высшая школа. - 1985. - 304 с.

2. **Рузиев М.Х., Юлдашева Н.Т.** *Краевая задача с условием Геллерстедта и аналогом условия Франкля для уравнения смешанного типа.* Бюллетень Института математики. 2022. №2, С. 62–71.

3. **Ruziev M.Kh.** *Generalized Frankl–Rassias problem for a class of mixed type equations in an infinite domain.* Journal of Partial Differential Equations. 2014. Vol.27, Issue 2, pp.176-188.

УДК 517.956.6

О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами

Рузиев М. Х.[1], Юлдашева Н. Т.[1]
[1] Институт Математики АН РУз; mruziev@mail.ru, nyuldasheva87@gmail.com

Рассмотрим уравнение
$$signy|y|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, \tag{1}$$
в области $D=D^+\cup D^-\cup I$ комплексной плоскости $z=x+iy$, где D^+ - полуплоскость $y>0$, D^- - конечная область полуплоскости $y<0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), исходящими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$, и отрезком AB прямой $y=0$, $I=\{(x,y): -1<x<1, y=0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m,α_0,β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m>0$, $|\alpha_0|<(m+2)/2$, $-\frac{m}{2}<\beta_0<1$.

Введем обозначения: $I_1=\{(x,y): -\infty<x<-1, y=0\}$, $I_2=\{(x,y): 1<x<\infty, y=0\}$, C_0 и C_1 - соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in I$ - произвольное фиксированное число.

Пусть $q(x)\in C^1[c,1]$ - диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c,1]$ в множество точек отрезка $[-1,c]$, причем $q'(x)<0$, $q(1)=-1$, $q(c)=c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $q(x)=p-kx$, где $k=\frac{1+c}{1-c}$, $p=2c/(1-c)$.

Свойства решений уравнения (1) существенно зависят от коэффициентов α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1). На плоскости параметров $\alpha_0 0\beta_0$ рассматривается треугольник $A_0B_0C_0$, ограниченный прямыми $B_0C_0:\beta_0-\alpha_0=-m/2$, $A_0C_0:\beta_0+\alpha_0=-m/2$, $A_0B_0:\beta_0=1$, и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0,\beta_0)\in A_0B_0C_0$.

Задача A. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:
1)$u(x,y)\in C(\bar{D})$, где $\bar{D}=\bar{D^-}\cup D^+\cup \bar{I}_1\cup \bar{I}_2$;
2) $u(x,y)\in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 ([1].с.35) в области D^-;
4) выполняются равенства
$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\ R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2},\ y\geq 0; \tag{2}$$
5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям
$$u(x,y)|_{y=0}=\varphi_i(x),\ \forall x\in\bar{I}_i, \tag{3}$$
$$(1+x)^\alpha D^{1-\beta}_{-1,x}u[\theta(x)]=\mu(x)(x-c)^\alpha D^{1-\beta}_{c,x}u[\theta^*(x)]+\psi(x), c<x<1, \tag{4}$$
$$u(q(x),0)=\mu_0 u(x,0)+f(x),\ c\leq x\leq 1, \tag{5}$$
и условию сопряжения
$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I\setminus\{c\}, \tag{6}$$
причем эти пределы при $x=-1$, $x=1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=\frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$ $\beta=\frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$ - заданные функции, причем $f(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_0}(c,1)$, $f(c)=0$, $f(1)=0$, $\mu(x),\psi(x)\in C[c,1]\cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, μ_0 - постоянная, функции $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$, $N>1$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $\varphi_i(x)\leq M|x|^{-\delta}$, где δ, M -положительные постоянные, $D^{1-\beta}_{-1,x}$ и $D^{1-\beta}_{c,x}$- операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля ([1],с.16) точками пересечения характеристик $C_0C(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $c<x_0<1$ являются
$\theta(x_0)=\left(\frac{x_0-1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)\right)^{\frac{2}{m+2}}$,
$\theta^*(x_0)=\left(\frac{x_0+c}{2},-\left(\frac{m+2}{4}(x_0-c)\right)\right)^{\frac{2}{m+2}}$.

Краевая задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования, ядра которых содержат гипергеометрические функции Гаусса, для уравнения (1) в случае, когда $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$, в области D

исследована в работе [2]. Изучению краевой задачи для сингулярного уравнения с сильным вырождением посвящена работа [3]. Нелокальная задача для уравнения (1) в случае, когда $\alpha_0 = 0$, изучена в работе [4].

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \leq 0$. Тогда задача A имеет лишь тривиальное решение.

Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия $q(x) = p - kx$, где $p = 2c/(1-c)$, $k = (1+c)/(1-c)$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \leq 0$, $\beta_0 > \frac{2-m}{4}$. Тогда решение задачи A существует

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа* . М.: Высшая школа. - 1985. - 304 с.
2. **Репин О.А., Кумыкова С.К.** *Нелокальная задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа в неограниченной области.* Известия вузов. Математика. 2015. №4 с. 60–64
3. **Хайруллин Р.С.** *Краевая задача для сингулярного уравнения с сильным вырождением* Матем. моделирование и краевые задачи. №3. 2010. с.272–274
4. **Мирсабуров М., Рузиев М.Х.** *Об одной краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области* Дифференциальные уравнения. том 47. №1. 2011. с.112–119

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ЦИЛИНДРЕ

Рузиков М.М.[1]

[1] Ферганский государственный университет; ruzikov91uz@mail.ru

В цилиндрической области $\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 < a^2, z \in (0,c)\right\}$ рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение с сингулярным коэффициентом

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0, \qquad (1)$$

где $U = U(x,y,z)-$ неизвестная функция, а $a, c, \gamma \in R$, причем $a, c > 0$.

В работе [1] для равномерно эллиптических уравнений второго порядка, изучены обобщенные решения задачи Дирихле в ограниченной области.

В зависимости от места нахождения параметра γ для уравнения (1) в области Ω можно сформулировать ряд основных краевых задач.

Пусть $\gamma < 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача D. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$U(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega), \qquad (2)$$

$$U(x,y,z) = F_1(x,y,z), \ (x,y,z) \in S_0; \qquad (3)$$

$$U(x,y,0) = \Psi_1(x,y), \quad (x,y,0) \in S_1; \qquad (4)$$

$$U(x,y,c) = \Psi_2(x,y), \ \ (x,y,c) \in S_2, \qquad (5)$$

где $S_0 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1,\, z \in [0,c]\right\}$, $S_1 = \bar{\Omega} \cap \{z = 0\}$, $S_2 = \Omega \cap \{z = c\}$, а $F_1(x,y,z)$, $\Psi_1(x,y)$, $\Psi_2(x,y)-$ заданные непрерывные функции.

Пусть $-1/2 < \gamma < 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача DN$_1$. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2), (4), (5), $\frac{\partial}{\partial n} U(x,y,z) = F_2(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S_0$, где $\partial U/\partial n-$ производная по внешней нормали к поверхности S_0, а $F_2(x,y,z)-$ заданная непрерывная функция.

Пусть $-1/2 < \gamma < 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача DN$_2$. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (2), (3), $\lim\limits_{z\to 0} z^{2\gamma} U_z(x,y,z) = \Psi_3(x,y)$, $(x,y,0) \in S_1$; $U_z(x,y,c) = \Psi_4(x,y)$, $(x,y,c) \in S_2$, где $\Psi_3(x,y)$, $\Psi_4(x,y)$ $-$заданные непрерывные функции.

Литература

1. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

УДК 517.957

Решение задачи Коши для нагруженного уравнения мКдФ с самосогласованным источником

Ш. К. Собиров[1], Ш.О.Жуманазарова[2], Ж.Ш.Матякубов[3]
[1,2,3]Ургенчский государственный университет;
shexzod19941@mail.ru, shodiyajumanazarova932@gmail.com, matyakubov01343@gmail.com

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$u_t+\beta(t)u(x_0,t)\left(6u^2u_x+u_{xxx}\right)+\gamma(t)u(x_1,t)u_x$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1}C^j_{m_k-1}\left(g^j_{k1}g^{m_k-1-j}_{k1}-g^j_{k2}g^{m_k-1-j}_{k2}\right) \tag{1}$$

$$L(t)g^0_k=\xi_k g^0_k,\quad L(t)g^j_k=\xi_k g^j_k+jg^{j-1}_k,\quad Im\,\xi_k>0,$$

$$g^j_k\in L^2_2(-\infty,\,\infty),\quad k=\overline{1,N},\ \ j=\overline{0,m_k-1},$$

где $L(t)=i\begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & -u(x,t)\\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$, $g^j_k=\left(g^j_{k1}(x,t),\,g^j_{k2}(x,t)\right)$, $C^l_n=\frac{n!}{(n-l)!l!}$,
$g^0_k=\left(g^0_{k1}(x,t),\ g^0_{k2}(x,t)\right)^T$ - собственная вектор-функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k ($Im\,\xi_k>0$) кратности m_k, $k=\overline{1,N}$, а $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_k-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(g^{m_k-1}_{k1}g^{m_k-1-l}_{k2}+g^{m_k-1}_{k2}g^{m_k-1-l}_{k1}\right)dx=A^k_{m_k-1-l}(t), \tag{2}$$

где $A^k_{m_k-1-l}(t)$ – изначально заданные непрерывные функции $l=\overline{0,m_k-1}$. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in R. \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|dx<\infty. \tag{4}$$

2) Оператор $L(0)=i\begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & -u_0(x)\\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений
$\xi_1(0),\xi_2(0),\dots,\xi_{2N}(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),\dots,m_{2N}(0)$.

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left((1+|x|)\,|u(x,t)|+\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx<\infty. \tag{5}$$

Основная цель данной работы - получить представления для решения $u(x,t)$, $g^j_k(x,t)$, $k=\overline{1,N},\ j=\overline{0,m_k-1}$, задачи (1)-(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Основным результатом данной работы являетмя следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k=1,\ 2,\ ...,\ N$, $j=0,\ 1\ ,...,m_k-1$ является решением задачи (1)-(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$m_k(t)=m_k(0),\ \ \xi_k(t)=\xi_k(0),\quad k=\overline{1,N},$$

$$\frac{dr^+}{dt}=\left(8i\xi^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi\gamma(t)u(x_1,t)\right)r^+,\quad Im\xi=0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_0^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\tfrac{d\chi_1^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_0^n(t)\right)\chi_1^n$$

$$+\left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t)-2i\gamma(t)u(x_1,t)+A_1^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\tfrac{d\chi_2^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_0^n(t)\right)\chi_2^n$$

$$+\left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t)-2i\gamma(t)u(x_1,t)+A_1^n(t)\right)\chi_1^n$$

$$+\left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t)+A_2^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\tfrac{d\chi_3^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_0^n(t)\right)\chi_3^n$$

$$+\left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t)-2i\gamma(t)u(x_1,t)+A_1^n(t)\right)\chi_2^n$$

$$+\left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t)+A_2^n(t)\right)\chi_1^n$$

$$+\left(8i\beta(t)u(x_0,t)+A_3^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\tfrac{d\chi_l^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_0^n(t)\right)\chi_l^n$$

$$+\left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t)-2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t)+A_1^n(t)\right)\chi_{l-1}^n$$

$$+\left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t)+A_2^n(t)\right)\chi_{l-2}^n$$

$$+\left(8i\beta(t)u(x_0,t)+A_3^n(t)\right)\chi_{l-3}^n+\sum_{s=0}^{l-4}A_{l-s}^n(t)\chi_s^n$$

$$n=1,\ 2,\ ...,N,\quad l=4,\ 5,\ ...,\ m_n-1.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} u_t+\beta(t)u(1,t)(6u^2u_x+u_{xxx})+\gamma(t)u(0,t)u_x=2\left(g_{11}^2-g_{12}^2\right) \\ Lg_1=\xi_1g_1 \end{cases}$$

$$u(x,0)=-\frac{2}{ch\,2x}$$

где

$$A_0^1(t)=\frac{1}{4}e^{\frac{3t}{2t+4}},\ \beta(t)=\frac{ch\left(\frac{7t+8}{2t+4}\right)}{-16(t+2)^2},\gamma(t)=\frac{\left(4+(t+2)^2e^{\frac{3t}{2t+4}}\right)ch\left(\frac{3t}{2t+4}\right)}{-8(t+2)^2},$$

Решение данной задачи имеет вид

$$u\left(x,t\right)=-\frac{2}{\mathrm{ch}\left(2x+\frac{3t}{2t+4}\right)},g_{11}(x,t)=\frac{e^{-3x-\frac{3t}{2t+4}}}{1+e^{-4x-\frac{3t}{t+2}}},g_{12}(x,t)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-4x-\frac{3t}{t+2}}}.$$

Литература

1. Gardner C. S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, P. 1095-1097.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 697 с.
3. Hoitmetov U.A., Integration of the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions.// Siberian Adv. Math. 2022. V. 33, N.2. P. 102-114.
4. Хасанов А.Б., Хоитметов У.А. Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Мат.. 2021. N.7. C. 52-66.
5. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On complex-valued solutions of the general loaded Korteweg-de Vries equation with a source // Diff. Eq. 2022. V. 58, N.3. P. 381-391.

УДК 517.956.6

Краевые задачи для неоднородного уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка со спектральными параметрами в прямоугольной области

Тожиев Ш. А.
Термезский государственный университет. shavkattojiyev1997@gmail.com

В 1959 г. И.М. Гельфанд[1] предложил изучить задачу о движении газа в канале, окруж-енном пористой средой, при этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его - уравнением диффузии. В этом работе не было математической постановки задачи, и из физического смысла предлагаемой задачи следует, что такая задача должна изучаться в прямоугольной области, в связи, с чем К.Б.Сабитов работе [2] исследована начально-граничная задача для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа изучалась в работах[3],[4].

В данной работе изучаются краевые задачи для неоднородного уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка со спектральными параметрами в прямоугольной области.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + signy u_{yy} - \rho^2 u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ -p < y < q\}$, где $\rho \geq 0$, $p > 0$, $q > 0$ $-$ заданные действительные числа, $f(x,y)-$известная функция.

Введем обозначения: $J = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $D_1 = D\ \cap\ \{(x,y):\ x > 0,\ y > 0\}$,

$$D_2 = D\ \cap\ \{(x,y):\ x > 0,\ y < 0\},\quad D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

В области D исследуем следующие задачи.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2);\quad Lu(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ f_2(x,y), & (x,y) \in D_2; \end{cases} \tag{2}$$

$$u(0,y) = g_1(y),\quad u(1,y) = g_2(y),\quad -p \leq y \leq q\,, \tag{3}$$

$$u(x,q) = \varphi(x),\quad u(x,-p) = \psi(x),\quad 0 \leq x \leq 1\,, \tag{4}$$

где $f_j(x,y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $-$заданные достаточно гладкие функции, причем

$$g_1(-p) = \psi(0),\quad g_2(-p) = \psi(1),\quad g_1(q) = \varphi(0),\quad g_2(q) = \varphi(1). \tag{5}$$

Задача 2. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим усло-виям (3), (4) и

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D_1} \cup \overline{D_2}) \cap C^2(D_1 \cup D_2);\quad Lu(x,y) = f_j(x,y),\quad (x,y) \in D_j\ (j = 1,2);$$

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = \alpha(x) \lim_{y\to +0} u(x,y) + \beta(x),\quad (x,0) \in \bar{J},$$

$$\lim_{y\to -0} u_y(x,y) = \gamma(x) \lim_{y\to +0} u_y(x,y) + \delta(x),\quad (x,0) \in J\,,$$

где $f_j(x,y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)-$заданные достаточно гладкие функции.

Исследование задачи 1.

Не теряя общности в постановке задачи 1 можно положить, что

$$g_1(y) = g_2(y) = 0, \quad -p \le y \le q, \quad \varphi(x) = \psi(x) = 0, \;\; 0 \le x \le 1.$$

Действительно, вместо функции $u(x, y)$ введем новую функцию

$$\upsilon(x,y) = \begin{cases} u(x,y) - z(x,y) - w_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u(x,y) - z(x,y) - w_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$z(x,y) = g_1(y) + x\left[g_2(y) - g_1(y)\right], \tag{7}$$

$$w_1(x,y) = \frac{y\varphi(x)}{q} - \frac{y}{q}\left[(1-x)\varphi(0) + x\varphi(1)\right], \tag{8}$$

$$w_2(x,y) = -\frac{y\psi(x)}{p} + \frac{y}{p}\left[(1-x)\psi(0) + x\psi(1)\right]. \tag{9}$$

Тогда в силу условия (5) функция $\upsilon(x, y)$ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad -p \le y \le q\,, \quad u(x,q) = 0, \quad u(x,-p) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \tag{10}$$

и уравнения

$$L\upsilon(x,y) = F(x,y) = \begin{cases} F_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ F_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{11}$$

здесь

$$F_1(x,y) = f_1(x,y) - Lz(x,y) - Lw_1(x,y), \quad F_2(x,y) = f_2(x,y) - Lz(x,y) - Lw_2(x,y).$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует решение $u(x, y)$ задачи (10)-(11), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\Delta_{pq}(n) = cos\lambda_n p\, sh\lambda_n q + sin\lambda_n p\, ch\lambda_n q \ne 0 \quad \text{при всех } n \in N, \;\; \lambda_n = \sqrt{(\pi n)^2 + \rho^2}. \tag{12}$$

Теорема 2. Пусть

$$F_1(x,y) \in C(\bar{D}_1) \cap C^{3,0}_{x,y}(\bar{D}_1), \; F_1(0,y) = F_1(1,y) = 0, \; F''_{1xx}(0,y) = F''_{1xx}(1,y) = 0, \;\; y \in [0,q]\,;$$

$$F_2(x,y) \in C(\bar{D}_2) \cap C^{3,0}_{x,y}(\bar{D}_2), \; F_2(0,y) = F_2(1,y) = 0, \; F''_{2xx}(0,y) = F''_{2xx}(1,y) = 0, \;\; y \in [-p,0]$$

и выполнена оценка

$$|\Delta_{pq}(n)| \ge C_1 e^{\pi n q} > 0.$$

Тогда если $\Delta_{pq}(n) \ne 0$ при всех $n = \overline{1, n_0}$, то задача (10)-(11) имеет единственное решение, которое определяется рядом

$$\upsilon(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n(y)\, sin\,\pi n\, x,$$

где

$$Y_n(y) = \begin{cases} c_n ch\lambda_n y + d_n sh\lambda_n y + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^y f_{1n}(t) sh\left[\lambda_n(y-t)\right]dt, & y > 0, \\ a_n cos\lambda_n y + b_n sin\lambda_n y - \frac{1}{\lambda_n}\int_y^0 f_{2n}(t) sin\left[\lambda_n(y-t)\right]dt, & y < 0, \end{cases}$$

$$f_{jn}(y) = \sqrt{2}\int_0^1 F_j(x,y) sin\,\pi n x dx, \quad (j = 1,2),$$

$$c_n = a_n = -\frac{1}{\Delta_{pq}(n)}\left[\frac{sin\lambda_n p}{\lambda_n}\int_0^q f_{1n}(t) sh\left[\lambda_n(q-t)\right]dt + \frac{sh\lambda_n q}{\lambda_n}\int_{-p}^0 f_{2n}(t) sin\left[\lambda_n(p+t)\right]dt\right],$$

$$d_n = b_n = \frac{1}{\Delta_{pq}(n)}\left[\frac{ch\lambda_n q}{\lambda_n}\int_{-p}^0 f_{2n}(t) sin\left[\lambda_n(p+t)\right]dt - \frac{cos\lambda_n p}{\lambda_n}\int_0^q f_{1n}(t) sh\left[\lambda_n(q-t)\right]dt\right].$$

Замечание. Аналогичные теоремы 1 и 2 можно доказать для задачи 2.

Литература

1. **Гельфанд И.М.** *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений..* УМН. -1959. -Т.**14**. -вып. 3(87). -С.3–19.
2. **Сабитов К.Б.** *Нелокальная задача для неоднородного уравнения смешанного типа.* Труды СФ АН РБ. Сер. "Физ.-мат. и техн науки".-Уфа. -Гилем. -2009. -вып.6. -С. 85–93.
3. **Сабитов К.Б.** *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области.* Докл. РАН. -2007. -**413** (1). -С. 23–26 .
4. **Хачев М.М.** *Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямо-угольной области.* Дифференц. уравнения. -1978. -**14** (1). -С. 136–139 .

УДК 517.946

Бесконечные суммы гипергеометрических функций двух переменных и их применения к решению краевых задач

Туйчиев Ш. М.
Ферганский государственный университет; toyciyevshohboz@gmail.com

Обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [1]

$$
{}_pF_q \left[\begin{array}{c} a_1, ..., a_p; \\ c_1, ..., c_q; \end{array} z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n \, n!} z^n,
$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. Здесь параметры a_1 - a_p, c_1 - c_q и переменная z могут быть комплексными, причем $c_1, ..., c_p \neq 0, -1, -2, ...$, а $(a)_n$ есть символ Похгаммера:

$$
(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1),\ n = 1, 2, 3, ...
$$

Рассмотрим гипергеометрическую функцию Аппеля от двух переменных [2,3]:

$$
F^{h:a;b}_{g:c;d} \left[\begin{array}{c} (H_h) : (A_a) \, ; (B_b) \, ; \\ (G_g) : (C_c) \, ; (D_d) \, ; \end{array} x, y \right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{((H_h))_{m+n} \, ((A_a))_m \, ((B_b))_n}{((G_g))_{m+n} \, ((C_c))_m \, ((D_d))_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}
$$

Теорема. Справедливы следующие формулы бесконечного суммирования:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_1)_k}{k!} t^k F^{h:a;b}_{g:c;d} \left[\begin{array}{c} (H_h) : A_1 + k, A_2, ..., A_a; (B_b) \, ; \\ (G_g) : (C_c) \, ; (D_d) \, ; \end{array} w, z \right]
$$

$$
= (1-t)^{-A_1} F^{h:a;b}_{g:c;d} \left[\begin{array}{c} (H_h) : (A_a) \, ; (B_b) \, ; \\ (G_g) : (C_c) \, ; (D_d) \, ; \end{array} \frac{w}{1-t}, z \right]; \tag{1}
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(H_1)_k}{k!} t^k F^{h:a;b}_{g:c;d} \left[\begin{array}{c} H_1 + k, H_2, ..., H_h : (A_a) \, ; (B_b) \, ; \\ (G_g) : (C_c) \, ; (D_d) \, ; \end{array} w, z \right]
$$

$$
= (1-t)^{-H_1} F^{h:a;b}_{g:c;d} \left[\begin{array}{c} (H_h) : (A_a) \, ; (B_b) \, ; \\ (G_g) : (C_c) \, ; (D_d) \, ; \end{array} \frac{w}{1-t}, \frac{z}{1-t} \right]. \tag{2}
$$

Доказательство. Докажем формулу бесконечного суммирования (1). Формула (2) доказывается аналогично.

Согласно определению двойной гипергеометрической функции $F^{h:a;b}_{g:c;d}$, левую часть тождества (1) можно записать в виде

$$
\sum_{k,m,n=0}^{\infty} \frac{(A_1)_k \, ((H_h))_{m+n} \, (A_1 + k)_m \, (A_2)_m \dots (A_a)_m \, ((B_b))_n}{((G_g))_{m+n} \, ((C_c))_m \, ((D_d))_n \, m! n! k!} w^m z^n t^k.
$$

Применив легкопроверяемое равенство $(A_1)_k \, (A_1 + k)_m = (A_1)_m \, (A_1 + m)_k$ и вычислив в первую очередь сумму по k, получим

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{((H_h))_{m+n}((A_a))_m((B_b))_n}{((G_g))_{m+n}((C_c))_m((D_d))_n\, m!n!} w^m z^n {}_1F_0 \left[\begin{matrix} A_1+m; \\ -; \end{matrix}\ t \right]$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{((H_h))_{m+n}((A_a))_m((B_b))_n}{((G_g))_{m+n}((C_c))_m((D_d))_n\, m!n!} w^m z^n (1-t)^{-A_1-m},$$

здесь мы воспользовались тем, что обобщенная гипергеометрическая функция ${}_1F_0$ даёт обобщенный бином Ньютона[3]:

$${}_1F_0 \left[\begin{matrix} A_1+m; \\ -; \end{matrix}\ t \right] = (1-t)^{-a}.$$

После выполнения элементарных преобразований получим правую часть тождества (1). Теорема полностью доказана.

Рассмотрим примеры на применение формул (1) и (2).

Пример 1. Формулы бесконечного суммирования для функций Аппеля:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_1)_k}{k!} t^k F_1 [a; b_1+k, b_2; c; w, z] = (1-t)^{-b_1} F_1 \left[a; b_1, b_2; c; \frac{w}{1-t}, z \right];$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} t^k F_4 [a+k; b; c_1, c_2; w, z] = (1-t)^{-a} F_4 \left[a; b; c_1, c_2; \frac{w}{1-t}, \frac{z}{1-t} \right].$$

Пример 2. Формулы бесконечного суммирования для функций Гумберта:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{k!} t^k \Xi_1 [\alpha_1+k, \alpha_2; \beta; \gamma; w, z] = (1-t)^{-\alpha_1} \Xi_1 \left[\alpha_1, \alpha_2; \beta; \gamma; \frac{w}{1-t}, z \right];$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} t^k \Phi_1 [\alpha+k; \beta; \gamma; w, z] = (1-t)^{-\alpha} \Phi_1 \left[\alpha; \beta; \gamma; \frac{w}{1-t}, \frac{z}{1-t} \right];$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} t^k \Psi_1 [\alpha; \beta+k; \gamma_1, \gamma_2; w, z] = (1-t)^{-\beta} \Psi_1 \left[\alpha; \beta; \gamma_1, \gamma_2; \frac{w}{1-t}, z \right].$$

Кроме того, формулы бесконечного суммирования используются при исследовании краевых задач для сингулярных эллиптических уравнений [4].

Литература

1. **Бейтмен А., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Том 1.* — М.: Наука, 1973. — 296 с.
2. **Srivastava H.M., Karlsson P.W.** *Multiple Gaussian Hypergeometric Series.* New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press. — 1985. 428 p.
3. **Slater L.J.** *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge: Cambridge University Press; 1966.
4. **Уринов А.К., Эргашев Т.Г.** *Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами.* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2018. —55. — С. 45-56.

УДК 517.956

Нелинейная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции.

Тураев Р. Н.[1], Мирзаев Ф. С.[2].
[1,2]Термезский государственный университет;
rasul.turaev@mail.ru, nfazliddin0197@gmail.com

Последние годы в современной науке задачи со свободной границей широко применяются при исследовании различных проблемах экологии и др. [1].

В одномерном пространстве уравнение диффузии реакции конвекции с нелинейном членом можеть быть записано в следующем общем виде:

$$u_t = au_{xx} + (b(u))_x + c(u).$$

В этой формулировке представлены коэффициенты диффузии, $b(u)-$ нелинейная функция конвективного потока, $b'(u)-$ может рассматриваться как нелинейная скорость, $c(u)-$ обозначает член реакции [2].

Нелинейные задачи со свободной границей обычно используются для описании экологических процессов.

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)-$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция

Литературы

1. Okubo A., Levin S.A. Diffusion and Ecological Problems.Springer, 2002, pp.470.
2. Ren-Hu Wang, Lei Wang, Zhi-Cheng Wang. Free boundary problem of a reaction-diffusion with nonlinear convection term. //J.Math.Anal.Appl.2018. T.467, P.1233–1257.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Тураев Р. Н.[1], Рузиев Ш. Н.[2]
[1,2]Термезский государственный университет;
[1]rasul.turaev@mail.ru

Настоящее время в современной науке изучается новые классы задач со свободной границей типа Стефана и Флорина с двумя свободными границами, которые возникают в природных моделях, описывающие биологические, экологические, химические, медико-биологические и технологические процессы [1,2.3].

В данной работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина с двумя свободными границами для уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции.

Постановка задачи. Требуется найти функций $h(t), s(t), u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$u_t(t,x) = a(t,x,u)u_{xx}(t,x) + bu_x^2(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u(t,x_1) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,x_2) = u(t,h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

$$u_x(t,h(t)) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{6}$$

где $x = h(t)$ и $x = s(t)$-свободные (неизвестные) границы, которая определяется вместе с функцией $u(t,x)$.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки Шаудеровского типа для $h(t), s(t), u(t,x)$ и их производные.

Далее, на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения перво
начальной задачи. И в итоге доказываеися существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера.

Литература

1. Guo J.S., Wu C.H. Dinamics for two-species competition-diffusion model with two free boundares. Nonlinearity. 28(2015),pp.1-27.

2. Lincoln Chayes and Inwon C.Kim. A Two-Sided Contracting Stefan Problem. Communications in Partial Differential Equations, 2008.pp.2225-2256.

3. Wang M.X., Zhang Y. Two kinds of free boundary problems for the diffusive prey-predator model, Nonlinear Anal.:Real World Appl., 24(2015), No.2, pp. 73-82.

УДК 517.983

О решениях простейшего функционального уравнения

Тураев Х.[1], Маматалиева Э.[2],
[1,2]Термезский государственный университет;
jahongirturaxanov1995@gmail.com, mamatalievaezoza39@gmail.com

Введем на рассмотрение множество E. Множество E может быть подмножеством множество R или множеством R, т.е. $E \subset R$ или $E = R$.

Пусть на множестве $E \subset R$ задана функция $\sigma(x) : E \to E,\ \sigma(x) \neq x$ и начальная точка $x_0 \in E$.

Обозначим множество решений системы

$$\begin{cases} \sigma(x) \le x_0 \\ \quad x > x_0 \end{cases},\ \text{при}\ \sigma(x) < x, x \in E,$$

либо системы

$$\begin{cases} \sigma(x) \le x_0 \\ \quad x > x_0 \end{cases},\ \text{при}\ \sigma(x) < x, x \in E, \text{через}\ E_1$$

Положим $E_0 = \sigma(x) : x \in E_1, E_{k+1} = x : \sigma_{k+1}(x) \in E_0\ \ k = \ldots -2, 1, 2, \ldots$, где $\sigma_0(x) = x$, $\sigma_1(x) = \sigma(x) \ldots \sigma_{m+1}(x) = \sigma(\sigma_m(x))$ при $m = 0, 1, \ldots.$, $\sigma_{-m}(x)$ означает обратную функцию для $\sigma_m(x)$, где $\sigma(x)$- строго монотонная функция.

Очевидно что $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E_k =\ E \in E, E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и из $x \in E_{k+1}$ следует $\sigma(x) \in E_k$ из $x \in E_k$ следует $\sigma_k(x) \in E_0$, $\sigma_(k+1)(x) \in E_(-1)$ [3].

Пример. $\sigma(x) = x - 1, x_0 \in E = R$. Тогда $E_k = (x_0 + (k-1), x_0 + k)$.

Возможен следующей случай, что $\sigma_j(x)$ периодическая функция по индексу, с периодом m, если для любого x из E имеет место соотношение $\sigma_{j+m}(x) = \sigma_j(x),\ \ j = 0, 1, 2, \ldots$ Например, функция $\sigma(x) = \frac{1}{x}$, на множестве $E = (0; +\infty)$ является периодической по индексу, с периодом $m = 2$, здесь $E_0 = (0; 1)$, $E_1 = (1; +\infty)$; a функция $\sigma(x) = \frac{x+1}{x}$ на множестве $E = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1 + \infty)$ является периодической по индексу $m = 3$, здесь $E_{-1} = (-\infty; 0)$, $E_0 = (0; 1)$, $E_1 = (1, +\infty)$; функция же $\sigma(x) = x + 1$, на множестве $E = (-\infty; +\infty)$ не является периодической по индексу, здесь можно положить, например, $E_k = (k; k+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим уравнение

$$\omega(\sigma(x)) = \omega(x), x \in E(\sigma(x) \neq x) \tag{1}$$

это уравнение допускает бесконечное множество решений, зависящих от одной произвольной функции, если, например, $\sigma(x)$ монотонна. Любое решение $\omega(x)$ этого уравнения будем называть условно-произвольной функцией и условием произвольности. Из (1) видно, что

$$\omega(x) = \omega(\sigma(x)) = \omega(\sigma_2(x)) = \cdots .$$

Т.Турдиев [1] рассматривает уравнение (1) как условие существования решения уравнения,

$$F(x, y(x), y(\sigma_1(x), y(\sigma_2(x), \ldots, y(\sigma_n(x), y'(x)) = 0,$$

где $\sigma_i(x) \le x(i = 1, 2, \ldots, n)$ и F-непрерывные функции. В [2] Е.Ю.Захарчук рассматривает как необходимые и достаточные условия существования таких, тождественно не равных нулю, функций и методы их построения.

Пуст на одном множеств E_k, например на E_0, задана произвольная функция $\varphi(x)$. Легко проверить, что функция определяемая из равенств

$$\varphi(x) = \varphi(\sigma_k(x)), x \in E_k \text{ при } k \ge 0,$$

$\omega(\sigma_(-k)(x)) = \varphi(x),\ \sigma_(-k)(x) \in E_k$ при $k < 0$

удовлетворяет уравнению (1) на всем множестве E. Поэтому это уравнение имеет бесконечное множество решений, зависящих от одной произвольной функции.

Если $\sigma(x)$ строго монотонна, то общее решение можно записать в виде

$$\omega(x) = \varphi(\sigma_k(x)), x \in E_k,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Такое решение, которое удовлетворяет уравнению на всем множестве E , назовём двусторонним решением данного уравнения.

Множество решений (1) обозначим через Ω .

Очевидно , что, если $\sigma(x)$ непрерывна, строго монотонна, а начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна и удовлетворяет краевому условию $\varphi(\sigma(x_0)) - 0) = \varphi(x_0)$ при $\sigma(x) > x$ или $(\varphi(\sigma(x_0)) + 0) = \varphi(x_0)$ при $\sigma(x) < x$, то все решения уравнения (1) будут непрерывными на E.

Множество решений (1), соответствующее таким $\varphi(x)$, обозначим через Ω_1. Очевидно, Ω_1 – множество непрерывных решений уравнения (1).

Пусть $\varphi(x)$ – дифференцируемая функция на E_0 и выполняется дополнительное условие

$$\varphi'(x_0 - 0) = \omega'(x_0 + 0).$$

Множество решений уравнения (1), соответствующее таким $\varphi(x)$ обозначим через Ω'. Очевидно, Ω'- множество дифференцируемых решений уравнения (1).

Следовательно, множество всех решений уравнения (1) разделяется на три класса: множество Ω, множество Ω_1, множество Ω' и при этом выполняется соотношения $\Omega' \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Примеры:

1. $\omega(x + p) = \omega(x)$. Одним из множеств решений этого уравнения является $\Omega' = \left\{\sin\frac{2\pi x}{p}, \cos\frac{2\pi x}{p}, \dots\right\}$. Это множество всех дифференцируемых, периодических решений периода p.
2. $\omega(\frac{x}{2}) = \omega(x)$. Одним из множеств решений этого уравнения является $\Omega' = \left\{\sin\frac{2\pi \ln x}{\ln 2}, \cos\frac{2\pi \ln x}{\ln 2}, \dots\right\}$. Это множество всех дифференцируемых, периодических решений периода $\ln 2$.
3. $\omega(\frac{1}{x}) = \omega(x), x > 0$. Множеством всех решений этого уравнения является множество всех четных функций вида
$$\Omega = \left\{\cos\ln 2, \cos(\ln x)^2 \dots\right\}$$

Литература:

1. **Т.Турдиев.** *О двусторонней задаче для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.* Диссертация. Ташкент, 1965.
2. **Захарчук Е.Ю.** *О решениях функционального уравнения* $f(\varphi(x)) = f(x)$.Гродненский Гос.пединститут, Уч. зап. Вып. I,сер. Матем. , 1955.
3. **Х.Тураев, О.Хидиров.** *Дидактические аспекты решения функциональных уравнений с периодическими коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента.* Вестник Термезский гос. Университет Жайхун, 2009.

УДК 917.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Тургунбаева К. Н.

Ферганский государственный университет; kamilka2108@mail.ru

Одним из важных классов уравнений с частными производными являются уравнения составного и смешанно-составного типов. Корректные краевые задачи для уравнений составного и смешанно-составного типа впервые были исследованы А. В. Бицадзе [1], М. С. Салахитдинов [2], Т. Д. Джураевым [3]. Обзор работ, посвященных изучению уравнений составного и смешанно-составного типов имеется в монографиях М. С. Салахитдинова и Т. Д. Джураева. Рассмотрим следующее уравнение составного типа.

В односвязной области $D \subset R^2$, ограниченной единичным кругом $\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta U + CU = f \tag{1.1}$$

Задача. Найти решение $U\left(x,y\right) \in C^4\left(D\right) \cap C^2\left(\bar{D}\right)$уравнения (1.1) удовлетворяющее краевым условиям Дирихле

$$U\left(x,y\right) = f_1\left(x,y\right),\ \frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial n} = f_2\left(x,y\right),\quad \left(x,y\right) \in \Gamma \tag{1.2}$$

здесь $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ - заданные функции n- внешняя нормаль к Γ, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператора Лапласа

Единственность решения задачи.

Теорема. Если функция $C(x,y) \geq 0$, то однородная задача не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать , что уравнение (1.1) с однородными условиями

$$U|_{\Gamma} = 0,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{1.3}$$

не имеет нетривиальных решений.

Положим $D_\varepsilon = \{(x,y)\}\,\epsilon D; dist\,[\Gamma,(x,y)] > \varepsilon$

Пусть $U(x,y)$ есть решение (1.1), (1.3). тогда умножая уравнение (1.1) на функцию $U(x,y)$ и интегрируя по областям D_ε, получим

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} (U(\frac{\partial^2}{\partial x^2})(\Delta U) + CU^2)dxdy = 0 \tag{1.4}$$

Нетрудно проверить , что в D, а следовательно и в D_ε имеют место следующие соотношения:

$$U(\frac{\partial^2}{\partial x^2})(\Delta U) = \left(U(\frac{\partial}{\partial x})(\Delta U)\right)_x - U_x(\frac{\partial}{\partial x})(\Delta U) = \left(U(\frac{\partial}{\partial x})(\Delta U)\right)_x - ((U_x\Delta U)_x - U_{xx}\Delta U)$$

Применяя формулу Гаусса-Остоградского [4]:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial (Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{\partial(D)} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy (1.5)$$

из равенства (1.4), учитывая условия (1.3), а также (1.5) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\oint_{\partial(D)} ((U_xU_{xy})\,dx + (U\Delta U)_x dy + \oint_{\partial(D)} (U_xU_{xx})dx + \iint\limits_{D} (W_x^2 + W_y^2 + CU^2)dxdy = 0 \tag{1.6}$$

Здесь

$$W(x,y) = U_x \tag{1.7}$$

Известно, что на Γ выполняется равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial n} \times \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial s} \times \frac{\partial y}{\partial s}$$

Так как $U|_{\Gamma} = 0$, $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$ и следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial n} \times \frac{\partial y}{\partial n},\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial n} \times \frac{\partial x}{\partial n} \tag{1.8}$$

Отсюда, учитывая второе условие (1.3) получим $U_x = 0$ на Γ . Поэтому из соотношения (1.6) находим, что

$$\iint\limits_{D} (W_x^2 + W_y^2 + CU^2)dxdy = 0 \tag{1.9}$$

Отсюда следует, если $C = 0$, то $W = const$ в D , так как $U \in C^2(\overline{D})$, то $W(x,y) = 0$ в $\overline{D}$. Учитывая это и (1.7) имеем

$$U_x = 0 \tag{1.10}$$

Легко показать, что решением уравнения (1.10) удовлетворяющим условию $U(x,y) = 0\ (x,y) \in \Gamma$, является только функция $U \equiv 0$ в области D. Если $C > 0$ то из (1.9) следует что $U = 0$ в D.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанно-составного типа. В сб. "Некоторые проблемы математики и механики". Новосибирск . СО АН СССР, 1961
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент. Фан.1974.-156с
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно составного типов. Ташкент. Фан. 1979.-240 с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е. - М: Наука, 1988.

УДК 517.946

Выражения гипергеометрических функций двух переменных через элементарные функции и их применения к решению краевых задач

Турдалиев Б. Х.
Ферганский государственный университет; turdaliyevbotirjon13@gmail.com

Обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [1, стр. 183]

$$ {}_pF_q\left[\begin{array}{l} a_1, ..., a_p; \\ c_1, ..., c_q; \end{array} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n ... (a_p)_n}{(c_1)_n ... (c_q)_n \, n!} z^n, $$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. Здесь параметры a_1 - a_p, c_1 - c_q и переменная z могут быть комплексными, причем $c_1, ..., c_p \neq 0, -1, -2, ...$, а $(a)_n$ есть символ Похгаммера:

$$ (a)_0 = 1, \ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1), \ n = 1, 2, 3, ... $$

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Особенно, большие успехи в теории гипергеометрической функции одной переменной стимулировали развитие соответствующих теорий для функций двух и многих переменных. Аппель определил в 1889 г. четыре ряда [1, стр.219-220], каждый из которых аналогичен ряду Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$.

Легко заметить, что обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q$ при некоторых частных значениях числовых параметров a_1 - a_p, c_1 - c_q выражаются через элементарные функции (см. подробно, [2, стр.382–517])

Рассмотрим вторую функцию Аппеля [1, стр.219]:

$$ F_2\left(\sigma; \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; x, y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\sigma)_{m+n} (\alpha_1)_m \, (\alpha_2)_n}{(\beta_1)_m \, (\beta_2)_n \, m! n!} x^m y^n, |x| + |y| < 1. $$

В настоящей работе займемся исследованием гипергеометрической функции Аппеля F_2 при частных значениях числовых параметров.

Воспользовавшись следующим двумерным интегральным представлением для гипергеометрической функции Аппеля

$$ F_2\left(\sigma; \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; x, y\right) = \frac{\Gamma\left(\beta_1\right) \Gamma\left(\beta_2\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right) \Gamma\left(\alpha_2\right) \Gamma\left(\beta_1 - \alpha_1\right) \Gamma\left(\beta_2 - \alpha_2\right)} \times $$

$$ \times \int_0^1 \int_0^1 u^{\alpha_1 - 1} \tau^{\alpha_2 - 1} (1-u)^{\beta_1 - \alpha_1 - 1} (1-\tau)^{\beta_2 - \alpha_2 - 1} (1 - xu - y\tau)^{-\sigma} du d\tau, \qquad (1) $$

$\Re\beta_j > \Re\alpha_j$, $j = 1, 2$, $|x| + |y| < 1$ и подставив известное интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса

$$ {}_2F_1\left[\begin{array}{c} a, b; \\ c; \end{array} z\right] = \frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right) \Gamma\left(c-b\right)} \int_0^1 \tau^{b-1} (1-\tau)^{c-b-1} (1 - z\tau)^{-a} d\tau $$

в интегральное представление (1), после нескольких преобразований, получим одномерное интегральное представление для функции Аппеля в виде

$$F_2\left(\sigma;\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2;x,y\right)=\frac{\Gamma\left(\beta_1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\beta_1-\alpha_1\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\beta_1-\alpha_1-1}}{(1-xu)^{\sigma}}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{c}\sigma,\alpha_2;\\ \beta_2;\end{array}\frac{y}{1-xu}\right]du. \tag{2}$$

Используя представление (2) и свойства гипергеометрической функции ${}_2F_1$, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема. При $|x|+|y|<1$ гипергеометрическая функция Аппеля F_2 дается формулами

$$F_2\left(a+1;\alpha_1,1;\beta_1,2;x,y\right)=-\frac{1}{ay}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{c}a,\alpha_1;\\ \beta_1;\end{array}x\right]+\frac{1}{ay(1-y)^a}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{c}a,\alpha_1;\\ \beta_1;\end{array}\frac{x}{1-y}\right]$$

когда $a\neq 0$, и

$$F_2\left(1;\alpha_1,1;\beta_1,2;x,y\right)=-\frac{\ln(1-y)}{y}+$$

$$+\frac{\alpha_1}{\beta_1 y}\left\{\frac{x}{1-y}\cdot{}_3F_2\left[\begin{array}{c}\alpha_1+1,1,1;\\ \beta_1+1,2;\end{array}\frac{x}{1-y}\right]-x\cdot{}_3F_2\left[\begin{array}{c}\alpha_1+1,1,1;\\ \beta_1+1,2;\end{array}x\right]\right\}.$$

Примеры.

$$F_2\left(\frac12;-\frac12,1;-\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x-y}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;-\frac12,1;\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x-y}+\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}-\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)\right];$$

$$F_2\left(\frac12;\frac12,1;-\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1-y}{\sqrt{1-x-y}}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;1,1;-\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-1}-(1-y)^{3/2}(1-x-y)^{-1}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;\frac32,1;-\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-3/2}-(1-y)^{2}(1-x-y)^{-3/2}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;\frac32,1;\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[\frac{1-2x}{\sqrt{1-x}}-\frac{1-2x-y}{\sqrt{1-x-y}}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;2,1;-\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[(1-x)^{-2}-(1-y)^{5/2}(1-x-y)^{-2}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;1,1;\frac12,2;x,y\right)=\frac{2}{y}\left[1-\sqrt{1-y}-\sqrt{x}\left(\coth\sqrt{x}-\coth\sqrt{\frac{x}{1-y}}\right)\right];$$

$$F_2\left(\frac12;2,1;3,2;x,y\right)=\frac{8}{15x^2y}\left[2-2(1-x)^{\frac52}-(2+3x)(1-x)^{\frac32}+(2+3x-2y)(1-x-y)^{\frac32}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;2,1;4,2;x,y\right)=-\frac{16}{35x^3y}\left[4-4(1-x)^{\frac72}-7x+7x(1-y)^{\frac52}-\right.$$

$$\left.-(4+3x)(1-x)^{\frac52}+(4+3x-4y)(1-x-y)^{\frac52}\right];$$

$$F_2\left(\frac12;\frac52,1;\frac72,2;x,y\right)=\frac{5}{24x^2y}\left[\frac{3(1-y)^3-x(1-y)^2-10x^2(1-y)+8x^3}{\sqrt{1-x-y}}\right.$$

$$\left.-\frac{3-x-10x^2+8x^3}{\sqrt{1-x}}-3\frac{(1-y)^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right];$$

$$F_2\left(2;\frac{2}{3},1;\frac{8}{3},2;x,y\right)=-\frac{5}{9y\sqrt[3]{x^5}}\left[\frac{1-x-y}{\sqrt[3]{1-y}}\ln\frac{1-x-y}{\left(\sqrt[3]{1-y}-\sqrt[3]{x}\right)^3}-(1-x)\ln\frac{1-x}{(1-\sqrt[3]{x})^3}-\right.$$

$$\left.-2\sqrt{3}\left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{1-x}}\arctan\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{1-y}+\sqrt[3]{x}}-(1-x)\arctan\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)\right];$$

$$F_2\left(1;0,1;a,2;x,y\right)=-\frac{\ln(1-y)}{y};$$

$$F_2\left(1;a,1;a,2;x,y\right)=\frac{1}{y}\ln\frac{(1-x)}{1-x-y};$$

$$F_2\left(1;a+1,1;a,2;x,y\right)=\frac{1}{a}\frac{x}{(x-1)(x+y-1)}+\frac{1}{y}\ln\frac{(1-x)}{1-x-y};$$

$$F_2\left(2;a,1;2,2;x,y\right)=\frac{1}{(a-1)xy}\left[\left(\frac{1-x-y}{1-y}\right)^{1-a}-(1-x)^{1-a}\right].$$

В заключении отметим,что элементарные функции, получающиеся при частных значениях параметров гипергеометрической функции Аппеля используются при решении основных краевых задач для уравнения Лапласа в конечных областях, ограниченных в полуплоскости и четверть плоскости (за подробностями см. [3] и [4]).

Литература

1. **Бейтмен А., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Том 1.* - М.: Наука, 1973.- 296 с.
2. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* М.: Наука, 1986. — 800 с.
3. **Ergashev T.G., Abbasova M.O.** *Holmgren's problem for the Laplace equation in the hyperoctant of the multidimensional ball.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №6. 1303-1312.
4. **Эргашев Т.Г., Комилова Н.Д.** *Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами.* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020, № 63, 47-59.

УДК 517.956.6

Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Капуто в прямоугольной области

У. Ш. Убайдуллаев[1], З. Р.Саидназаров[2]
[1]Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета
ulugbekuz88@ mail.ru
[2]Термезского государственного университета saidnazarovzoir@gmail.com

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фунда-ментальных исследований (проект **ФЗ-202009211, ТерГУ**).

В прямоугольной области $\Omega=\{(x,y):\ \ 0<x<1,\ \ -p<y<q\ \}$ рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\frac{\partial}{\partial y}Lu=0 \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv\left\{\begin{array}{ll} u_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u, & x>0,\ \ y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}, & x>0,\ \ y<0,\end{array}\right. \tag{2}$$

$p>0$, $q>0$ $-$ заданные действительные числа, а ${}_cD_{0y}^{\alpha}-$ оператор дробного дифференциро-вания по y в смысле Капуто порядка $\alpha\in(0,\,1]$, определяемый по формуле

$${}_cD_{0y}^{\alpha}f(y)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y(y-t)^{-\alpha}f'(t)dt, & 0<\alpha<1,\\ \frac{d}{dy}f(y), & \alpha=1.\end{array}\right. \tag{3}$$

Введем обозначения: $J = \{(x,y) : 0 < x < 1,\, y = 0\}\,,\quad \Omega_1 = \Omega\ \cap\ \{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0\}\,,$

$$\Omega_2 = \Omega\ \cap\ \{(x,y) :\ x > 0,\ y < 0\}\,, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2\ \cup J$$

В области Ω исследуем следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти функции $u(x,y)$ с следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}), u_{yyy} \in C(\Omega_2),\quad u_{xxy} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2),\ \frac{\partial}{\partial y}\left[{}_cD_{0y}^{\alpha}u\right] \in C(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j (j = 1,2)$;

2) $y^{1-\alpha}u_y(x,y) \in C(\Omega_1 \cup J)$, $u_y(x,y) \in C(\Omega_2 \cup J)$ и на линии J выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lim_{y\to\ -0} u_y(x,y), \quad (x,0) \in J; \tag{4}$$

3) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad -p \le y \le q\,, \tag{5}$$

$$u(x,q) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1\,, \tag{6}$$

$$u(x,-p) = \psi(x), \quad u_y(x,-p) = g(x), \quad 0 \le x \le 1\,, \tag{7}$$

где $\varphi(x),\ \psi(x),\ g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0.$

Заметим, что прямые и обратные задачи для уравнения пароболо-гиперболического типа целого порядка исследовано в работе К.Б.Сабитова [1]. В работах [2], [3] доказаны единственость и существование решения краевых задач для уравнений пароболо-гиперболи-ческого типа третьего порядка в прямоугольной области, а уравнения с оператором дробного порядка изучено в [4].

Уравнение (1) в области Ω равносильно уравнению параболо- гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu(x,y) = f_j(x), \quad (x,y) \in D_j\ (j = 1,2). \tag{8}$$

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача 2. Найти в области Ω функции $u(x,y)$ и $f_j(x)$, удовлетворяющие условиям (4),(5),(6),(7) и

$$Lu(x,y) = f_j(x), \quad (x,y) \in D_j,\ (j = 1,2), \quad f_j(x) \in C(0,1) \cap L_2\,[0,1]\,. \tag{9}$$

Теорема 1. Если в области Ω существует решение $u(x,y)$ задачи 2 , то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\Delta_{pq}(n) = \left\{q\lambda_n E_{1/\alpha}\left[-\lambda_n^2\, q^{\alpha}, 2\right] sin\ \lambda_n p + 1 - cos\ \lambda_n p\right\} \ne 0 \quad \text{при всех } n \in N, \tag{10}$$

где $E_{1/\alpha}(z,\sigma)$ –известная функция Миттаг-Леффлера [4-5], $\lambda_n = \pi n$.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x),\ \ \psi(x) \in C^5\,[0,1]\,,\quad g(x) \in C^4\,[0,1]$ и $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0,\quad \varphi^{(i)}(0) =\ \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(1) =\ \psi^{(i)}(1) = 0,\quad i = 0,2,4$ *и выполнены условия* $|\Delta_{pq}(n)| > \frac{C_0}{n}$ при всех $n > n_0$. Тогда обратная задача 2 однозначно разрешимо и это решение определяется рядами

$$u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin\pi nx, \qquad f_j(x) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_{jn} sin\pi nx,\ \ (j = 1,2), \tag{11}$$

где $f_{1n} = -\lambda_n^2\ \varphi_n$, $f_{2n} = -\lambda_n^2\psi_n - \frac{\lambda_n}{\Delta_{pq}(n)}\left\{\ \left[(cos\lambda_n p - 1)g_n - \lambda_n(\varphi_n - \psi_n) sin\ \lambda_n p\right] sin\ \lambda_n p + \right.$

$$\left. + \left[\lambda_n(\varphi_n - \psi_n) cos\ \lambda_n p - \ \left\{q\lambda_n E_{1/\alpha}\left[-\lambda_n^2\ q^{\alpha}, 2\right] + sin\ \lambda_n p\right\} g_n\right] cos\ \lambda_n p\right\}\,.$$

$$u_n(y) = \begin{cases} \varphi_n - \frac{1}{\Delta_{pq}(n)} \int_y^q E_{1/\alpha}\left[-\lambda_n^2\ t^{\alpha}, 1\right]\ d\,t \times \\ \times \left[(cos\lambda_n\, p - 1)\ g_n - \lambda_n\,(\varphi_n - \psi_n)\, sin\ \lambda_n\ p\right], & 0 < y < q, \\ \psi_n + \frac{1}{\lambda_n\ \Delta_{pq}(n)} \left\{\left[(\ cos\lambda_n\ p - 1)\ g_n - \lambda_n(\varphi_n - \psi_n)\, sin\ \lambda_n\ p\right] \times \right. \\ \times (sin\ \lambda_n\, y + sin\ \lambda_n\, p) - \left[\lambda_n(\varphi_n - \psi_n)\, cos\ \lambda_n\, p - \left(q\,\lambda_n E_{1/\alpha}\left(-\lambda_n^2\ q^{\alpha}, 2\right) + \right.\right. \\ \left.\left.\left. + sin\ \lambda_n\, p\right) g_n\right] (cos\ \lambda_n\, y - cos\ \lambda_n\, p)\right\}, & -\,p < y < 0. \end{cases}$$

Литература

1. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гипербо-лического типа.* - Москва. -Наука. -2016. -271 с.
2. **Сабитов К. Б.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка.* Докл. РАН. -2009. -Т. 427. -№ 5. -С. 593–596.
3. **Сабитов К. Б.** *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области.*Диффер. уравн., -2011. -Т. 47. - № 5. -С. 705–713.
4. **Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh.** *On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics. -2020. -Vol. 41. -No. 9. -pp. 1801–1810.
5. **Псху А.В.** *Уравнения в частных производных дробного порядка.*-М.: -Наука. -2005. -199 с.

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уринов А.К.[1], Каримов К.Т.[2]
[1,2] Ферганский государственный университет; urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

Пусть $\Omega-$ трехмерная область, ограниченная цилиндрической поверхностью

$$S_0 = \left\{(x,y,z):\, x^2+y^2=1,\ x>0,\, y>0,\, z\in(0,c)\right\},$$

прямоугольниками

$$S_1 = \{(x,y,z):\, x\in(1/2,1),\ x-y=1,\ z\in(0,c)\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z):\, x\in(0,1/2),\, x+y=0,\, z\in(0,c)\},$$
$$S_3 = \{(x,y,z): x=0,\, y\in(0,1),\, z\in(0,c)\}$$

и плоскими фигурами $S_4 = M_0\cup I_1\cup M_1$, $S_5 = M_2\cup I_2\cup M_3$, где $M_1 = \{(x,y,z): -y<x<1+y, -1/2<y<0, z=0\}$, $M_0 = \{(x,y,z): x^2+y^2<1, x>0, y>0, z=0\}$, $M_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2<1,\ x>0, y>0, z=c\}$, $M_3 = \{(x,y,z)\,:\, -y<x<1+y, -1/2<y<0,\ z=c\}$, $I_1 = \{(x,y,z)\,:\, x\in(0,1), y=0,\ z=0\}$, $I_2 = \{(x,y,z):\, x\in(0,1), y=0,\ z=c\}$. В области Ω рассмотрим уравнение

$$L_{\beta\beta\gamma}U \equiv U_{xx} + (\mathrm{sgn}y)U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \tag{1}$$

где $\beta,\gamma\in R$, причем $0<\beta<1/2$, $-2<\gamma<1/2$. Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая задача:

Задача. Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x,y,z)\in C\left(\bar\Omega\right)\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Omega_0\cup\Omega_1\right), x^{2\beta}U_x,\ z^{2\gamma}U_z\in C\left(\bar\Omega\right);$$

$$a\frac{\partial}{\partial n}U(x,y,z) + bU(x,y,z) = F(x,y,z),\ (x,y,z)\in S_0;\ U(x,y,z)=0,\ (0,y,z)\in\bar S_3;$$

$$U(x,y,z)|_{\bar S_2}=0,\ U(x,y,z)|_{\bar S_4}=0, U(x,y,z)|_{\bar S_5}=0,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y(x,y,z) = \lim_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y,z),\quad x\in(0,1),\ z\in(0,c),$$

где $\partial U/\partial n-$ производная по внешней нормали к поверхности S_0, a, $b=const\neq0$, а $F(x,y,z)-$ заданная непрерывная функция. Поставленная задача при $a=0$ и $b\neq0$ исследована в работе [1].

Литература

1. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник НУУз. - Ташкент, 2016. -№ 2/1. -С. 14-25.

УДК 517.39

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Уринов А. К.[1], Усмонов Д. А.[2]
[1,2]Ферганский государственный университет; urinovak.mail.ru usmonov-doniyor.inbox.ru

В данной работе в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<1;-a<t<b\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$$0=\begin{cases} t^{\gamma}\,{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u\left(x,t\right)+\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\left(x,t\right)\right]_{xx}, & (x,t)\in\Omega_1=\Omega\cap\{t>0\}, \\ {}_{C}D_{t0}^{\delta_2}u\left(x,t\right)+\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\left(x,t\right)\right]_{xx}, & (x,t)\in\Omega_2=\Omega\cap\{t<0\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $u\left(x,t\right)$ - неизвестная функция, ${}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u\left(x,t\right)$, ${}_{C}D_{0t}^{\delta_2}u\left(x,t\right)$ - дробные производные Герасимова - Капуто [1] от функции $u\left(x,t\right)$ по аргументу t, $\Gamma\left(z\right)$ -гамма функция Эйлера, а a, b, α, β, γ, δ_1, δ_2 - заданные действительные числа, причем $a>0$, $b>0$, $0<\delta_1<1$, $1<\delta_2<2$, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$.

Очевидно, что уравнение (1) вдоль линий $x=0$, $x=1$ и $t=0$ вырождается.

Задача $S_{p_1\,q_1}^{p_2\,q_2}$**.** Найти функцию $u\left(x,t\right)$, обладающую следующими свойствами:

1)$u\left(x,t\right)$, $u_x\left(x,t\right)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_x\in C\left(\bar{\Omega}\right)$; $t^{\gamma}\,{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u\left(x,t\right)\in C\left(\Omega_1\right)$, ${}_{C}D_{0t}^{\delta_2}u\left(x,t\right)\in\left(\Omega_2\right)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx}\in C\left(\Omega_1\cup\Omega_2\right)$.

2) в области $\Omega_1\cup\Omega_2$ удовлетворяет уравнению (1).

3) на границе области Ω выполняются следующие краевые условия:

$$\left.\begin{array}{c} p_1u\left(0,t\right)=q_1u_x\left(0,t\right),\ t\in[0,T]; \\ p_2u\left(1,t\right)=q_2u_x\left(1,t\right),\ t\in[0,T]; \\ p_1\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}u_{xx}\left(x,t\right)=q_1\lim\limits_{x\to0}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\left(x,t\right)\right]_x,\ t\in[0,T]; \\ p_2\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\beta}u_{xx}\left(x,t\right)=q_2\lim\limits_{x\to1}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\left(x,t\right)\right]_x,\ t\in[0,T]; \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$u\left(x,b\right)+\varphi\left(x\right)=u\left(x,-a\right),\ x\in[0,1]; \tag{3}$$

4) удовлетворяет следующие условия склеивания:

$$u\left(x,+0\right)=u\left(x,-0\right),\ \ \lim_{t\to+0}t^{\gamma}\,{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u\left(x,t\right)=u_t\left(x,-0\right),\ \ x\in[0,1], \tag{4}$$

где $\varphi\left(x\right)$ - заданная непрерывная функция, p_1, q_1, p_2 и q_2 - заданные действительные числа, причем $p_1^2+q_1^2\ne0$, $p_2^2+q_2^2\ne0$.

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv\equiv\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right)\right]''=\lambda v\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{5}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$v\left(x\right),\ v'\left(x\right)\in C[0,1], \tag{6}$$

$$x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right),\ \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right)\right]'\in C\left[0,1\right]; \tag{7}$$

$$p_1v\left(0\right)=q_1v'\left(0\right),\ p_2v\left(1\right)=q_2v'\left(1\right) \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_1\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}v''\left(x\right)=q_1\lim\limits_{x\to0}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right)\right]', \\ p_2\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right)=q_2\lim\limits_{x\to1}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''\left(x\right)\right]'. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Доказано, что задача (5) – (9) имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_k < ...,\quad \lambda_k \to +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), ..., v_k(x)...$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если функции $\varphi(x)$, $M\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (6)-(9), а функция $M^2\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (6), (8), $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\left[M^2\varphi(x)\right]'' \in L_2(0,1)$;

$$\Delta(k) = E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k a^{\delta_2}\right] + a\lambda_k E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k a^{\delta_2}\right] - E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k b^{\delta_1-\gamma}\right] \neq 0, \forall\, k \in N$$

и $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ \gamma$ - удовлетворяют неравенствам, $p_1(q_2-p_2) \neq q_1 p_2$, $0 \le \gamma < \delta_1$, то функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi_k}{\Delta(k)} E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma}\right] v_k(x),\ (x,t) \in \Omega_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi_k}{\Delta(k)} \left\{E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right] - t\lambda_k E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]\right\} v_k(x),\ (x,t) \in \Omega_2, \end{cases}$$

определяет единственное решение задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$, где λ_k и $v_k(x)$, $k \in N$ - собственные значения и собственные функции задачи (5) – (9), $M^2 g(x) = M[Mg(x)]$, $E_{\delta_2,\delta}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]$ - функция Миттага-Леффлера [2], $\delta = \overline{1,2}$, а $E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma}\right]$ - функция Килбаса-Сайго [1], φ_k – коэффициент Фурье по системе $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ справедлива следующая оценка:

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_0\left\{\|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \left\|[M\varphi(x)]''\right\|_{L_{2,r}(0,1)}\right\},\ \ C_0 = const > 0,$$

где $\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|$, $\|f(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int\limits_0^1 r(x)[f(x)]^2 dx\right]^{1/2}$, $r(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$.

Литература

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. - 523 p.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы.* -Москва: Наука, 1967. -300 с.

УДК 519.6+517.95

Условная корректность начально-краевой задачи для системы уравнений смешаннокого типа с двумя линиями вырождения

Фаязов К. С.[1], Худайберганов Я. К.[2]
[1]Туринский политехнический университет в г. Ташкенте; kudratillo52@mail.ru
[2]Национальный университет Узбекистана имени Мирза Улугбека; komilyashin89@mail.ru

В работе исследуется начально-краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Пусть пара функций $(u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t))$ является решением системы уравнений в частных производных смешаннокого типа

$$\begin{cases} u_{1tt} + sgn(x)u_{1xx} + sgn(y)u_{1yy} + u_{1zz} + au_2 = 0, \\ u_{2tt} + sgn(x)u_{2xx} + sgn(y)u_{2yy} + u_{2zz} + bu_1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$, где $\Omega_0 = \left\{x,y,z|(-1;1)^2 \times (0;\pi), x \neq 0, y \neq 0\right\}$, $Q = (0;T), T < \infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

начальным

$$\left.\frac{\partial^i u_1(x,y,z,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x,y,z)\,,\ (x,y,z) \in [-1;1]^2 \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$
$$\left.\frac{\partial^i u_2(x,y,z,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \psi_i(x,y,z)\,,\ (x,y,z) \in [-1;1]^2 \times [0;\pi] \times \bar{Q}\,, \tag{2}$$

граничным

$$u_j(x,y,z,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0,\ (y,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$
$$u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0,\ (x,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q}, \tag{3}$$
$$u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{z=0\\z=\pi}} = 0,\ (x,y,t) \in [-1;1]^2 \times \bar{Q},$$

а также условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$
$$\left.\frac{\partial^i u_j(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q}, \tag{4}$$

где $(i = 0,1)$,$(j = 1,2)$, $a, b-$ некоторые константы, и $\varphi_i(x,y,z)$, $\psi_i(x,y,z)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_i(x,y,z)|_{\partial\Omega_0} = 0,\ \psi_i(x,y,z)|_{\partial\Omega_0} = 0.$

Исследование некорректных краевых задач для уравнений в частных производных смешанного и смешанно-составного типа является одним из важных направлений современной теории обратных и некорректных задач. Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах А.Л. Бухгейма, М. М. Лаврентьева [1], H.A. Levine, С.Г Крейна, К. С. Фаязова [2], а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И.О. Хажиева [3], К. С. Фаязова и Я. К. Худайберганова [4].

В данной работе доказана некорректность рассматриваемой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

Литература

1. М. М. Лаврентьев., Л. Я. Савельев // Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.
2. К. С. Фаязов // Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. УзМЖ. 1995. No 2. с. 89-93.
3. K.S. Fayazov, I.O. Khajiev // Estimation of conditional stability of the boundary-value problem for the system of parabolic equations with changing direction of time. Reports on mathematical physics, Vol. 88 (2021),No. 3. p. 419-431.
4. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. с. 647-660.

УДК 517.984

О РЕШЕНИЕ СИСТЕМА ЧАСТИЧНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ВЫРОЖДННЫМИ ЯДРАМИ

Хайруллаев И.[1], Кучимов М.[2]
[1,2]Термезский государственный университет;
xayrullayev0809@mail.ru1 muxriddinkuchimovofficial26@gmail.com2

Исследование спектральных свойств, в частности существование связанных состояний, гамильтонианов нескольких не сохраняющимся числом квазичастиц физики твердого тела, квантовой теории поля статистической физики тесно связаны с задачей изучения системы частично интегральных уравнений специального вида (1) (см [1-2]).

Пусть C одномерное комплексное пространство, $C_{[a,b]}$-Банахово пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций и $C_{[a,b]\times[a,b]}$ подпространство симметрических и непрерывных функций определенных на квадрате $[a,b]\times[a,b]$ В Банаховом пространстве $H = C\oplus C_{[a,b]}\oplus C^S_{[a,b]\times[a,b]}$ рассмотрим следующую систему частично интегральных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} f_0 + \lambda_1 \int\limits_a^b a_1(t)f_1(t)dt = g_0, \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x)\int\limits_a^b a_2(t)f_1(t)dt + \lambda_3 a_3(x)\int\limits_a^b a_3(t)f_2(x,t)dt = g_1(x), \\ f_1(x) + f_2(x,t) + \lambda_4 a_4(x)\int\limits_a^b a_4(t)f_2(x,t)dt+ \\ +\lambda_5 a_5(x)\int\limits_a^b a_5(t)f_2(x,t)dt = g_2(x,y). \end{array}\right. \tag{1}$$

И соответствующее ей систему однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} f_0 + \lambda_1 \int\limits_a^b a_1(t)f_1(t)dt = 0, \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x)\int\limits_a^b a_2(t)f_1(t)dt + \lambda_3 a_3(x)\int\limits_a^b a_3(t)f_2(x,t)dt = 0, \\ f_1(x) + f_2(x,t) + \lambda_4 a_4(x)\int\limits_a^b a_4(t)f_2(x,t)dt+ \\ +\lambda_5 a_5(x)\int\limits_a^b a_5(t)f_2(x,t)dt = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Здесь $a_i(1,2,\ldots,s)$- данные непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int\limits_a^b a_i(t)dt = 0, \ \int\limits_a^b a_i^2(t)dt = 1, \ \ i = 1,2,3,4,5;$$

$g = (g_0, g_1(x), g_2(x,y)) \in H$ –данная функция,$f = (f_0, f_1(x), f_2(x,y)) \in H$–искомая функция. Отметим, что частично интегральные уравнения изучались в работах [3-6].

1-Теорема . Если $\lambda_2 \neq -1, \lambda_4 \neq -1, \lambda_5 \neq -1$ и $\lambda_4 + \lambda_5 \neq -1$ то: а) система имеет единственное решение для любого б) однородная система (2) имеет тривиальное решение.

Для доказательства теоремы сначала необходимо получить некоторое интегральное уравнение типа Фредгольма. С этой целью будем сначала решить частично- интегральное уравнение, т.е. функцию $f_2(x,y)$ выразим через $g_2(x,y)$ и $f_1(x)$. Очевидно, что из первого уравнения системы (1) f_0 выражается через интегралы f_1 и g_0. Если полученные выражения для $f_2(x,y)$ и f_0 подставим во второе уравнение системы, то мы получим искомое частично-интегральное уравнение Фредгольма с вырожден-ным ядром. Решая интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром определим неизвестную функцию $f_1(x)$ через данные системы уравнении (1). Далее, подставляя полученное для $f_1(x)$ выражение в соответствующие выражения для функций f_0 и $f_2(x,y)$ мы явно находим единственное решение системы (1).

Литература

1. **Mattis D.** *The few-body problem on a lattice* Rev. Modern phys. 58(1986), 361-379.
2. **Mogilner A.I.** *Hamiltonians in Solid-State Physics as Multipartcle Discrete Schrodinger Operators.*Advances in Sovet Mathematics. V.S.(1991),139-194.
3. **Abdus Salam.** *Fredholm Solutions of Partial Integral Equations.* Proc. Cambridge. Philos. Soc. 49(1952), 213-217.
4. **Stefan Fenyo.** *Beitreg Sur Theorie der Linearen Integral-gleichungen.*Publs, mat 1955. no; 1,2. P.98-103.
5. **Лихтарников Л.М.** *Дифференциальные уравнения.* 1975, 11, N6, С. 1108-1117.
6. **Лакаев С.Н., Соатов У .А.** *О решении частично интегрального уравнения для функций трех переменных* ДАН РУз, 1997, N 11.

УДК 517.83

О разрешимости однородной системы частично интегралных уравнений специального вида.

Хайруллаев И.Н., Турдиев И.А.

Расмотрим однородную систему линейных частично- интегралных уравнений вида

$$(1)\begin{cases} f_0+\lambda_1\int_a^b \alpha_1(t)f_1(t)dt=0 \\ f_0+f_1(x)+\lambda_2\alpha_2(x)\int_a^b \alpha_2(t)f_1(t)dt+\lambda_3\alpha_3(x)\int_a^b \alpha_3 f_2(x,t)dt=0 \\ f_1(x)+f_2(x,y)+\lambda_4\alpha_4\int_a^b \alpha_4(t)f_2(t,y)dt+\lambda_5\alpha_5(y)\int_\alpha^b \alpha_5(t)f_2(x,t)dt=0 \end{cases}$$

где фунции $\alpha_j(.), j=\overline{1,5}$ принадлежат пространству $L_2[\alpha,b]f_0\in C^1, \lambda_i, i=1,5$ -числовые параметры;

$$f_2(x,y)\in L_2([\alpha,b]^2), f_1(x)\in L_2[\alpha,b]$$

искомые функции

В этой заметке изучена разрешимост однородной системы (1) при всех значениях параметров $\lambda_i, i=(1,5)$ кроме случая .

$$\lambda_i\neq 0, i=(1,5)?$$

Всюду в далнейшем интеграл понимается по отрезку $[\alpha,b]$. Основными результатами являются следующие. Пусть детерминанты $D_1(\lambda_1=1+\lambda_1\int_\alpha^b a_1^2(t))dt$ dt Фредгольма [1] ядра $\alpha_1(t)$

Теорема 1. Пусть $\lambda_1\neq 0, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ тогда а) если $D_1(\lambda_1)\neq 0$ то система (1) имеет только нулевое решение:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

б). $D_1(\lambda_1)=0$,то однородная система имеет решение

$$f_0=f_0, f_1(x)=f_2(x,y)=f_0, f_0\in C^1, f_0\neq 0$$

$D_2(\lambda_2=1+\lambda_2\int a_2^2(t)dt)$ детерминант Фредгольма ядро $K(x,t)=a_2(x)a_2(t)$

Теорема 2 Пусть $\lambda_2\neq 0, \lambda_1=\lambda_3=\lambda_4==\lambda_5=0$ тогда

а) если $D_2(\lambda_2)=0$ то система (1) имеет только нулевое решение: .

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ca_2(x)\\-ca_2(x)\end{pmatrix}$$

б). $D_1(\lambda_1)\neq 0$,то однородная система имеет решение: Аналогичные результаты как в теореме (2) получено и в случаях:

$$1)\lambda_3\neq 0, \lambda_i=0, i=1,2,3,4;$$

$$2)\lambda_4\neq 0, \lambda_i=0, i=4;$$

$$2)\lambda_5\neq 0, \lambda_i=0, i=5;$$

Теорема 3 Пусть $\lambda_2\neq 0, \lambda_1=\lambda_3=\lambda_4==\lambda_5=0$ тогда

а) если $D_1(\lambda_1)\neq 0$ то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt=0$ имеет решение вида $f_0=0, f_1(x)-\lambda_2 ca_2(x), f_2(x,y)=\lambda_2 ca_2(x)$ где c – произволная постоянная

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt\neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$f_0=A(a_1,a_2), f_1(x)=-c_1-\lambda_2 c_2 a_2(x), f_2(x,y)=c_1+\lambda_2 c_2 a_2(x)$ где $A(a_1,a_2)=fracc\lambda_1\lambda_2\int a_1(t)a_2(t)dtD_1(\lambda_1)=c^{\text{`}}.C_1,c_2,c^{\text{`}}$постоянные

Адабиётлар рўйхати

1. **Смирнов В.И.** *Курс высшей математики " Т.4. , Часть I. ,М. "Наука", 1974 г*

2. **1. Рид М., Саймон Б** *"Методы современной математической физики. М.: Мир. 1977, 1, Функциональный анализ.*

3. **2. Хайруллаев И.Н** *Некоторые частично-интегральные операторы и их спектральные свойства //Кандидатская диссертационная работа. Ташкент, 2001.*

УДК 517.83

Вольтерранинг чизиқли бўлмаган интеграл тенгламалари ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида.

Хайруллаев И. Н.[1], Джўраев Й. Х.[2].

Биз ишда чизиқли Вольтерра II-тур интеграл тенгламалари ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремаларига ўхшаш, Вольтерра II-тур интеграл тенгламаларни чизиқли бўлмаган ҳол учун кўриб чиқамиз. Бунда асосан кетма-кет яқинлашиши усули қўлланилади. Мазкур усул, дифференциал тенгламалардагидек, ечимни тақрибий қуриш имконини ҳам беради.

Ушбу

$$\varphi(f) = f(t) + \int_a^t K(t, s, \varphi(s))$$

интеграл тенгламани қараймиз, бунда f(t) функция $J(\alpha \leqslant t \leqslant b)$ сегментда, $K(t, s, \varphi)$ функция эса $P(\alpha \leqslant t, \mid \varphi \mid \leqslant r)$ (ёки $T(\alpha \leqslant t, \mid \varphi \mid \leqslant \infty)$ соҳада берилган узлуксиз функциялардир.

1-тариф. Агар $K(t, s, \varphi)$ функция P (ёки T) соҳада аниқланган бўлиб, шу функция учун шундай мусбат L сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(t, s, \varphi_1) \in P$ (ёки $\in T$) $(t, s, \varphi_2) \in P$ (ёки $\in T$) нуқталар учун ушбу

$$|K(t, s, \varphi_1) - K(t, s, \varphi_2)| \leqslant L|\varphi_1 - \varphi_2|$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $K(t, s, \varphi)$ функция P (ёки T) соҳада бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади. L эса Липшиц коэффитциенти (ёки ўзгармаси) дейилади.

2-тариф. Агар $K(t, s, \varphi)$ функция P соҳада аниқланган, узлуксиз бўлиб, шу функция учун $P_2(\alpha \leqslant t \leqslant b, \alpha \leqslant s \leqslant t, |\nu| \leqslant K)$ соҳада аниқланган, узлуксиз ва ν аргументи бўйича монотон камаядиган шундай $g(t, s, \nu)$ функция мавжуд бўлсаки,

$$\nu(f) = \int_a^t g(t, s, \nu(s))ds$$

интеграл тенглама фақат ноль ечимга эга бўлганда $(t, s, \varphi_1) \in P(t, s, \varphi_2) \in P$ нуқталар учун

$$|K(t, s, \varphi_1) - K(t, s, \varphi_2)| \leqslant g(t, s, |\varphi_1 - K(t, s, \varphi_2)|)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $K(t, s, \varphi)$ функция P соҳада ? бўйича Осгуд шартини қаноатлантиради дейилади.

Теорема Агар f(t) функция J сегментда аниқланган ва узлуксиз, $K(t, s, \varphi)$ функция эса P соҳада t,s ва φ лар бўйича аниқланган ва узлуксиз бўлиб, φ бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда шундай ўзгармас τ сон топиладики,(1) тенглама $J_\tau(\alpha \leqslant t \leqslant \tau)$ интервалда ягона узлуксиз ечимга эга бўлади, бу ерда

$$\tau = \min(\frac{H}{M}, b)$$

$$H = M(b - \alpha), M = \max|K(t, s, \varphi)|,$$

$$r = N + H, N = \max|f(t)|.$$

Бундан ташқари, агар $\in \varphi_n t(1)$ тенгламанинг ечимига n-яқинлашиш, $\varphi(t)$ эса унинг аниқечими бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leqslant \frac{L^n M(b - \alpha)^n + 1}{n + 1!} exp(L(b - \alpha))$$

Адабиётлар рўйхати

1. **Т.Н.Нуримов.** *Интеграл тенгламалар ва тенгсизликлар. Тошкент "ўқитувчи" 1985.*
2. **М.Л.Краснов.** *"Интегральные уравнение" Москва "Наука" 1975 г.*
3. **У.В. Ловитт.** *"Линейные интегральные уравнения" Гос.тех. издат. Москва-1957.*

УДК 517.956.6

Улаш шартида узилишга эга бўлган учинчи тартибли параболик-гиперболик типидаги тенглама учун параллел характеристикаларда Бицадзе-Самарский шарти билан берилган масалани таҳлил қилиш

Халимова Ж. Э.
Қарши Давлат Университети halimovajaxona@gmail.com

Ушбу мақолада

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - sign\, y)\, u_{yy} - \frac{1}{2}(1 + sign\, y)\, u_y\right) = 0 \qquad (1)$$

учинчи тартибли параболо-гиперболик типдаги тенгламалар учун параллел характеристикаларда Бицадзе- Самарский шарти билан берилган масаланинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

D соҳа деб $y > 0$ бўлганда $x = 1$, $y = h$, $x = 0$ тўғри чизиқларда мос равишда жойлашган BB_0, B_0A_0, A_0A, кесмалари билан, $y < 0$ бўлганда эса (1) тенгламанинг

$$AC: \ x + y = 0, \quad BC: \ x - y = 1$$

характеристикалари билан чегараланган соҳани белгилаймиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $J = \{(x, y): \ 0 < x < 1, \ y = 0\}$,

$$J_1 = \{(x, y): \ 0 < x < c, \quad y = 0\}, \quad J_2 = \{(x, y): \ c < x < 1, \quad y = 0\}, \quad c \in J,$$

$$D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup J,$$

$$\theta_i(x) = (x/2; \ -x/2), \ (i = 0, 1), \qquad \theta_2^*(x) = ((x + c)/2; \ (c - x)/2), \qquad (2)$$

бу ерда $\theta_i(x)$ ва $\theta_2(x)$ – (1) тенгламанинг $M_1(x, 0) \in J_1$ ва $M_2(x, 0) \in J_2$ нуқтадан чиқувчи характеристикаси билан мос равишда AC ва BC характеристикаси кесишиш нуқтасининг координаталари. C_1 и C_2 нуқталар орқали мос равишда $E(c, 0) \in J$ нуқтадан чиққан
(1) тенгламанинг $EC_1: x - y = c$ ва $EC_2: x + y = c$ характеристикалари билан AC ва BC характеристикаларнинг кесишиш нуқталарини белгилаймиз.

Қуйидаги белгилашни амалга оширамиз:

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

(1) тенгламанинг ихтиёрий регуляр ечими қуйидаги

$$u_j(x, y) = \upsilon_j(x, y) + \omega_j(y), \quad j = 1, 2 \qquad (3)$$

кўринишда ифодаланади, бу ерда

$$\upsilon(x, y) = \begin{cases} \upsilon_1(x, y), & y > 0, \\ \upsilon_2(x, y), & y < 0; \end{cases} \qquad \omega(y) = \begin{cases} \omega_1(y), & y > 0, \\ \omega_2(y), & y < 0, \end{cases} \qquad (4)$$

$\upsilon_j(x, y)$ $(j = 1, 2)$ функциялар $L\upsilon_j = 0$ тенгламанинг регуляр ечими, $\omega_1(y)$ бир марта, $\omega_2(y)$ эса икки марта узлуксиз дифференциаланувчи функциялар бўлиб, бу функцияларга умумийликка зиён етказмаган ҳолда қуйидаги

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0 \qquad (5)$$

шартларни бўйсундириш мумкин. Бу алмаштиришларга кўра қуйидаги масала ечилади.

S_p**- масала**. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D}_1\cup\bar{D}_2)\cap C^1(D_1\cup D_2\cup J_1\cup J_2)$;

2) $u_{xxx}(x,y),\quad u_{xyy}(x,y),\quad u_{xy}(x,y)\in C(D_1\cup D_2)$ синфга тегишли бўлиб, D_1 ва $D_2\backslash\{EC_1\cup EC_2\}$ соҳаларда (1) тенгламанинг регуляр ечими бўлсин;

3) $u_x\in C(\overline{AA_0}\cup\overline{AC}),\quad u_y\in C(\overline{AC})$ синфларга тегишли бўлсин;

4) $u(x,y)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u|_{x=1}=\varphi_2(y),\quad u_x|_{x=0}=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le h, \tag{6}$$

$$a(x)u\left[\theta_0(x)\right]+b(x)u(x,0)=d(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_1, \tag{7}$$

$$u\left[\theta_1(x)\right]=\mu\, u\left[\theta_2^*(x)\right]+\delta(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_2, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{9}$$

5) J бузилиш чизиЎида қуйидаги

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)=p_0(x)\lim_{y\to+0}u(x,y)+q_0(x),\quad (x,0)\in\bar{J}, \tag{10}$$

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=p_i(x)\lim_{y\to+0}u_y(x,y)+q_i(x),\quad (x,0)\in J_i,\ (i=1,2), \tag{11}$$

улаш шартлари бажарилсин, бу ерда n −ички нормал, $\varphi_j(y),\ (j=\overline{1,3}),\quad a(x),\quad b(x),\ d(x),\ \delta(x),\ p_i(x),\ q_i(x)\ (i=\overline{0,2})-$ берилган функциялар бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантиради

$$\left[a(0)+b(0)\right]\varphi_1(0)=d(0),\quad \mu a(c)+b(c)\ne0,\quad d(c)=a(c)\delta(c), \tag{12}$$

$$p_i(x)>0,\quad \forall x\in J_i\ (i=1,2),\quad \left[(a(x)+2b(x))p_0(x)\right]'_x\ge0,\quad \forall x\in J_1, \tag{13}$$

$$a^2(x)+b^2(x)\ne0,\quad \mu\ne1,\quad p_0'(x)\ge0,\ \forall x\in J_2, \tag{14}$$

$$\varphi_j(y)\in C\left[0,h\right]\cap C^1(0,h),\quad (j=\overline{1,3}), \tag{15}$$

$$a(x),\ b(x),\ d(x)\ \in C^1(\bar{J})\cap C^2(J),\quad \delta(x)\in C^1(\bar{J}_2)\cap C^3(J_2), \tag{16}$$

$$\psi(x)\in C^1\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\ \frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

$$p_j(x),\ q_j(x)\in C\left(\bar{J}\right)\cap C^2(J),\ (j=\overline{0,2}). \tag{18}$$

Қуйидаги теоремалар исботланган.

1-Теорема. Агар (13), (14) шартлар бажарилса, у ҳолда D соҳада S_p нолокал масала-нинг ечими ягонадир.

2-Теорема. Агар (12), (15) -(18) шартлар бажарилса, у холда D соҳада S_p нолокал масала-нинг ечими мавжуд.

S_p масала ечимининг ягоналиги экстремум принципига асосан[1], мавжудлиги эса интег-рал тенгламалар усули ёрдамида[2] исботланади.

Адабиётлар

1. **Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов. М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа..* -Т.: -Фан. -1986. -220 с.

2. **Islomov, B.I.; Vafoev, S. S.** *A boundary value problem of a new type for an equation of parabolic-hyperbolic type. (Russian)* Scientific Journal of Samarkand University.-2020. -No. 1 (119). -pp 30-35.

УДК 517.957

Задачи Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций

Хасанов А. Б.[1], Нормуродов Х. Н.[2], Худаёров У. О.[3], Боймуродов Д.[4].
[1,2]Самаркандский государственный университет;
ahasanov2002@mail.ru normurodov.96@bk.ru
[3,4]Самаркандского архитектурно-строительного института;
xudayorov.2002@bk.ru dboymurodov94@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона вида

$$q_{xt} = chq, \quad q = q(x,t),\ x \in R,\ t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R) \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π- периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t),\ x \in R,\ t > 0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спеткральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x \in R,\ t > 0,\ \tau \in R \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q'_x(x,t) \\ \frac{1}{2}q'_x(x,t) & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in R:\ |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R\backslash \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),\ n \in Z\backslash\{0\}$, называются лакунами, где λ_n, корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической ($y(\pi) = \pm y(0)$) задачи для уравнения (4). Нетрудно доказывается, что $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$, т.е. $\lambda = 0$ является двукратным собственным значением периодической задачи для (4). Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in Z\backslash\{0\}$. Числа $\xi_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\} = \pm 1$, $n \in Z\backslash\{0\}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in Z\backslash\{0\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$. Теперь с помощью начальных функций $q_0(x+\tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\ \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n \in Z\backslash\{0\}\right\}$ оператора $L(\tau,0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $q(x,t),\ x\in R,\ t>0$, *является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные*$\{\lambda_n(\tau,t),\, \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1\}$, $n\in Z\setminus\{0\}$, *оператора* $L(\tau,t)$, *удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина:*

$$1.\frac{\partial\lambda_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\quad n\in Z\setminus\{0\}\,; \tag{5}$$

$$2.\frac{\partial\xi_n\,(\tau,t)}{\partial t}=(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)),\ n\in Z\setminus\{0\}. \tag{6}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t), n\in Z\setminus\{0\}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in Z\setminus\{0\} \tag{7}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z\setminus\{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательность $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi),\ n\in Z\setminus\{0\}$ участвующая в уравнении (6) определяется по формулам:

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi)=\sqrt{\prod_{k=-\infty,k\neq n}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}, \tag{8}$$

$$g_n(\xi)=\frac{1}{2\xi_n\,(\tau,t)}\exp\{q(\tau,t)\}$$

Замечание 1. Учитывая формулы следов

$$q_\tau'\,(\tau,t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\sigma_k\,(\tau,t)\,h_k\,(\xi\,(\tau,t))\,, \tag{9}$$

$$0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k}+\lambda_{2k-1}}{2}-\xi_k\,(\tau,t)\right) \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{2}q_\tau\,(\tau,t)\right)^2+\frac{1}{2}q_{\tau\tau}\,(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2\,(\tau,t)\right) \tag{11}$$

систему (6) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial\xi_n\,(\tau,t)}{\partial t}=(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t,\tau))}\cdot f_n(\xi)\cdot g_n(\xi(\tau,t)) \tag{12}$$

где

$$g_n(\xi)=\frac{1}{2\xi_n\,(\tau,t)}\times$$

$$\times\exp\left\{C(t)+2\int_0^\tau\left(\sum_{k=-\infty,\,k\neq0}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\sigma_k\,(s,t)\,h_k\,(\xi\,(s,t))\right)ds\right\} \tag{13}$$

Здесь $C(t)$-некоторая огрониченная непрерывная функция.

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\in Z\setminus\{0\}$$

систему дифференциальных уравнения Дубровина (12) и начальные условия (7) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве :

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,t)|_{t=0} = x^0(\tau) \in K \tag{14}$$

где

$$K = \{x(\tau,t) = (..., x_{-1}(\tau,t), x_1(\tau,t), ...) :$$

$$\left. \|x(\tau,t)\| = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} (1+|n|)\,(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|x_n(\tau,t)| < \infty \right\},$$

Для длины лакун оператора $L(\tau,0)$, имеет место равенства (см. [4], стр. 98):

$$\gamma_n = \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} = \frac{\alpha_n}{|n|}, \ \ |n| \to \infty, \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \alpha_n^2. < \infty. \tag{15}$$

Лемма 1. Если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t)$, $y(\tau,t) \in K$ выполняется следующие неравенство

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| \leq L\,\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\|\,, L = C \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \alpha_n \frac{|n|+1}{|n|^2} < \infty.$$

Замечание 2. Теорема 1 и лемма 1 дают метод нахождения решения задачи (1)-(3).

Замечание 3. Функция $q_\tau(\tau,t)$ построенная с помощью системы уравнений Дубровина (12) и формула следа (9) действительно удовлетворяет уравнение 1.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R)$, то существует однозначно определяемое решение $q_\tau(\tau,t)$задачи (1)-(3), которое определяется, как сумма ряда (9), и принадлежит классу $C^{1,1}_{x,t}(t>0) \bigcap C(t \geq 0)$.*

Литература

1. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Полное описание решений "Sin-Gordon"уравнения. //Докл. АНСССР. 1974. т. 219, №6, с.1334-1337.

2. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Sugur H.* Method for solving the sine-Gordon equation // Phys. Rev.Lett. 1973. v.30, №25, p.1262-1264.

3. *Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н (мл), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев: Наукова думка, 1987.

4. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I // Теория функцией, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1978. т.30 с.90-101.

УДК 517.588

Интегральные представления типа эйлера гипергеометрической функции $f^{(4)}_{20}(X,Y,Z,T)$ от четырех переменных второго порядка

Хасанов А.[1], Нортожиева Н.[2],
[1]Институт Математики АН РУз; anvarhasanov@yahoo.com1
[2]Термезский государственный университет; nortojiyevanilufar96@gmail.com

Как известно, многие задачи современной математики и теоретической физики приводят к исследованию гипергеометрических функций многих комплексных переменных. К ним относятся, например, задачи теории супер струн [1], аналитического продолжения интегралов типа Меллина-Бернса [2] и алгебраической геометрии [3]. Системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа широко используются в качестве нетривиальных модельных примеров при реализации и отладке алгоритмов для символьных вычислений, используемых в современных системах компьютерной алгебры [4].

Гипергеометрические функции многих переменных возникают в квантовой теории поля как решения уравнений Книжника-Замолодчикова [5]. Эти уравнения могут рассматриваться как обобщенные уравнения гипергеометрического типа, а их решения допускают интегральные представления, обобщающие классические интегралы Эйлера для гипергеометрических функций одной переменной. Такой подход позволяет связать специальные функции гипергеометрического типа и актуальные задачи теории представлений алгебр Ли и квантовых групп. В работах [6]˘[7] изучены свойства гипергеометрических функций и эти свойства использованы при решении краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений. В этом докладе определены некоторые интегральные представления типа Эйлера для гипергеометрической функции $F_{20}^{(4)}(x,y,z,t)$

$$u(x,y,z,t)=F_{20}^{(4)}\left(\begin{matrix} a_1,a_2,b_1,b_2,b_3; \\ c_1,c_2,c_3; \end{matrix}\ x,y,z,t\right)=$$

$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1)_{m+n}(b_2)_p(b_3)_q}{(c_1)_{m+q}(c_2)_n(c_3)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1}$$

$$\left\{\sqrt{\frac{|x|}{1-|z|}}+\frac{|x|}{1-|z|}<1,|z|<1,|t|<1,\right\},$$

где $(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), a\in C, k\in N_0\equiv(0,1,\dots)$ - обозначение Похгаммера [8]. Имеет место несколько интегральные представления типа Эйлера. Например:

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\frac{\Gamma(c_3)}{\Gamma(b_3)\Gamma(c_3-b_2)}$$

$$\times\int_0^1\xi^{b_2-1}(1-\xi)^{c_3-b_2-1}(1-z\xi)^{-a_1}F_{9a}\left(a_1,b_1,a_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-z\xi},\frac{z}{1-z\xi},t\right)\tag{2}$$

$Rec_3>Reb_2>0,$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;\delta_1+\delta_2,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$

$$\frac{\Gamma(c_3)\Gamma(\delta_1+\delta_2)}{\Gamma(b_3)\Gamma(c_3-b_2)\Gamma(\delta_1)\Gamma(\delta_2)}\int_0^1\int_0^1\xi^{b_2-1}\eta^{\delta_1-1}(1-\xi)^{c_3-b_2-1}(1-\eta)^{\delta_2-1}(1-z\xi)^{-a_1}$$

$$\times F_4\left(a_1,b_1;c_2;\frac{x\eta}{1-z\xi},\frac{z}{1-z\xi},t\right)F\left(a_2,b_3;\delta_2;t(1-\eta)\right)d\xi d\eta\tag{3}$$

$Rec_3>Reb_2>0, Re\delta_1>0, Re\delta_2>0,$

где

$$F_{9a}(a_1,a_2,a_3,a_4;c_1,c_2;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(a_3)_p(a_4)_p}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}m!n!p!}x^my^nz^p,\tag{4}$$

$\{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1,|z|<1\},$

$$F_4(a,b;c_1,c_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_nm!n!}x^my^n,\ \{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1\},\tag{5}$$

$$F_4(a,b;c;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^m,\quad \{|x|<1\}. \tag{6}$$

Полученные интегральные представления доказываются разложением подынтегральных гипергеометрических функции.

Литература:

1. **Candelas P. , De la Ossa X. , Greene P. , Parkes L.** *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble super conformal theory.* Nucl. Phys. 1991. V. B539. P. 21-74.
2. **Horja R. P.** *Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties.*Preprint. 1999. math.AG/9912109. P. 1-103.
3. **Saito M. , Sturmfels B. , Takayama N.** *Grobner Deformations of Hypergeometric Differential Equations.* Springer Verlag. Berlin, Heidelberg. 1999.
4. **Virchenko A.** *Multidimensional Hypergeometric Functions and Representation Theory of Lie Algebras and Quantum Groups.* Series in Mathematical Physics 21. World Scientific. 1995.
5. **Passare M. , Tsikh A. , Zhdanov O.** *A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals.*Aspects Math. E. 26, 1994, pp. 233–241.
6. **Hasanov A.** *Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation.*Complex Variables and Elliptic Equations. 52 (8), 2007, pp. 673–683.
7. **Франкль Ф. И.** *Избранные труды по газовой динамике..* Москва, Наука, 1973.
8. **A. Erde'lyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi,** *Higher Transcendental Functions.* Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.

УДК 517.957

О нахождении быстроубывающих решений уравнения синус-Гордона с переменными, зависящими от времени коэффициентами и дополнительными членами

Хасанов А.Б.[1], Хоитметов У.А.[2]
[1]Самаркандский государственный университет; ahasanov2002@mail.ru
[2]Ургенчский государственный университет; x_umid@mail.ru

Уравнение Синус-Гордон

$$u_{xt}=\sin u,$$

является полностью интегрируемым нелинейным эволюционным уравнением, наряду с уравнением Кортевега-де Фриза, модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза, нелинейным уравнением Шрёдингера и др. Это уравнение имеет многочисленные приложения в дифференциальной геометрии, распространении магнитного потока в джозефсоновских контактах, распространении деформаций вдоль двойной спирали ДНК и многих других.

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}&u_{xt}=\rho(t)\sin u+\omega(t)u_{xx}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\right)d\eta,\\&L(t)\phi=\eta\phi,\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$L(t)=i\begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & \frac{u_x}{2}\\ \frac{u_x}{2} & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix},\qquad u_{xx}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\qquad u_{xt}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t},$$

$\rho(t)$, $\omega(t)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции. Система уравнений рассматривается при начальном условии

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$u_0(x) \equiv 0(\mathrm{mod} 2\pi) \text{ при } x \to \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)\,|u_0'(x)| + |u_0''(x)|\right) dx < \infty; \tag{3}$$

2) оператор $L(0)$ не имеет спектральных особенностей и в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$.

В рассматриваемой задаче вектор-функция $\phi = (\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t))^T$ решения системы уравнений $L(t)\phi = \eta\phi$ определяется асимптотическим поведением

$$\phi(x,\eta) \to h(\eta,t) \begin{pmatrix} \exp(-i\eta x) \\ \exp(i\eta x) \end{pmatrix}, \quad \text{при } x \to \infty, \tag{4}$$

где $h(\eta,t)$ – изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$h(-\eta,t) = h(\eta,t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(\eta,t)|^2\, d\eta < \infty, \tag{5}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет достаточную гладкость и довольно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, так что

$$u(x,t) \equiv 0(\mathrm{mod} 2\pi) \;\; x \to \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)\,|u_x(x,t)| + |u_{xx}(x,t)|\right) dx < \infty. \tag{6}$$

Основная цель настоящей работы – получить представления для решения $u(x,t), \phi(x,\eta,t)$ задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи для оператора $L(t)$. Обратная задача для оператора $L(t)$ на всей оси была изучались в [3].

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. Если функции $u(x,t)$, $\phi_1(\eta,x,t)$, $\phi_2(\eta,x,t)$ являются решением задачи (1)-(5), то в классе функций (6) данные рассеяния оператора $L(t)$ изменяются по t следующим образом:

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(-\frac{i\rho(t)}{2\xi} + 2i\xi\omega(t) + \pi h^2(\xi,t) + i v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{\xi+\eta} d\eta\right) r^+, \quad (\mathrm{Im}\,\xi = 0),$$

$$m_n(t) = m_n(0), \qquad \frac{d\xi_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi^n_{m_n-1-j}}{dt} = 2i\xi_n\omega(t)\chi^n_{m_n-1-j} + 2i\omega(t)\chi^n_{m_n-2-j}$$

$$+i\sum_{s=j}^{m_n-1}(-1)^{m_n-1-s}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(1+r^+(\eta,t)r^+(-\eta,t))\,(\eta+\xi_n)^{m_n-s}} d\eta - \frac{\rho(t)}{2\xi_n^{m_n-s}}\right)\chi^n_{s-j},$$

$$n = 1,2,\ldots,N, \quad j = m_n-1, m_n-2, \ldots, 0.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(6).

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$u_{xt} = (4t+\pi)\sin u + (1-t)u_{xx} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right) d\eta,$$

$$L\phi = \eta\phi,$$

$$u(x,0) = 4\mathrm{arctg}\left(e^{-2x}\right), \quad h(\eta,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение данной задачи Коши имеет вид:

$$u(x,t) = 4\mathrm{arctg}\left(e^{-2x-2t}\right),$$

$$\phi_1(x,\eta) = \frac{e^{-i\eta x}}{\sqrt{\eta^2+1}}(1 - \frac{2e^{-4(x+t)}}{(i\eta+1)(1+e^{-4(x+t)})} + \frac{2e^{-2(x+t)+2i\eta x}}{(i\eta-1t)\left(1+e^{-4(x+t)}\right)}),$$

$$\phi_2(x,\eta) = \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{\eta^2+1}}(1 + \frac{2e^{-4(x+t)}}{(i\eta-1)\left(1+e^{-4(x+t)}\right)} + \frac{2e^{-2(x+t)-2i\eta x}}{(i\eta+1)\left(1+e^{-4(x+t)}\right)}).$$

Литература

1. **Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H.** *Method for solving the sine-Gordon equation*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1262 (1973).
2. **Hasanov A.B., Hoitmetov U.A.** *On Integration of the Loaded Korteweg-de Vries Equation in the Class of Rapidly Decreasing Functions*, Proceedings of the Institute of Math. and Mech., National Academy of Sciences of Azerbaijan, **47**:2, 250 (2021).
3. **Khasanov A.B.** *An inverse problem in scattering theory for a system of two first-order nonselfadjoint differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **277**: 3, 559 (1984) (in Russian).
4. **Khasanov A.B., Hoitmetov A.B.** *On Integration of the Loaded mKdV Equation in the Class of Rapidly Decreasing Functions*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **38**, 19 (2021).
Khasanov A.B., Urazboev G.U. *I*ntegration of the sine-Gordon equation with a self-consistent source of the integral type in the case of multiple eigenvalues, Russian Mathematics, **53**: 3, 45 (2009).

УДК 517.968.2

Об одном выделение нефредгольмовых операторов ядра которых имеют особенности первого порядка в изолированной особой точке.

Хасанова Д. У[1], Мерганов Р.А. [2], Олтиев Б. Ж[3]
[1,2,3] Термезский государственный университет; dildorahasanova95@gmail.com

Рассмотрим следующие системы интегральных уравнений

$$\nu_0(x) = -\frac{A_0(1)}{1+\pi^2 A_0^2(x)} \int_{-1}^{1} \frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1} + \frac{A_0(1)A_0(x)}{1+\pi^2 A_0^2(x)} \int_{-1}^{1} b\nu_1(s)ds \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right) \frac{dt}{bs-at+1} +$$

$$+T_1[x,\nu_1] + F_0^*(x), \quad x \in I, \tag{1}$$

$$\nu_1(x) = -\frac{A_1(-1)}{1+\pi^2 A_1^2(x)} \int_{-1}^{1} \frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1} + \frac{A_1(-1)A_1(x)}{1+\pi^2 A_1^2(x)} \int_{-1}^{1} a\nu_0(s)ds \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{-\alpha_0} \times$$

$$\times \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha_1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right) \frac{dt}{as-bt-1} +$$

$$+H_0[x,\nu_0]+H_1[x,\nu_1]+F_1^*(x),\ x\in I, \tag{2}$$

где $a=(1+c)/2$, $b=(1-c)/2$, $a+b=1$, $a-b=c$, $\nu_0(x)=\nu(ax-b)$, $\nu_1(x)=\nu(bx+a)$, $A_0(x)=a_1/\pi f(ax-b)$, $A_1(x)=a_1/\pi f(bx+a)$, $f(x)-$заданная гладкая функция, $f(x)=a_1$ при $x\in(-1,c)$, а $T_1[x,\nu_1]$, $H_0[x,\nu_0]$, $H_1[x,\nu_1]-$ регулярные операторы. $F_0^*(x)$, $F_1^*(x)-$ известные функции.

В правых частях (1) и (2) вычислим внутренние интеграли, для этого рациональные части подинтегральных выражений этих интегралов разложим на простые дроби:

$$\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\frac{1}{bs-at+1}=\frac{1}{bs-ax+1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{a}{bs-at+1}\right)-$$

$$-\frac{a}{1-(ax-b)(bs+a)}\left(\frac{1}{bs-at+1}-\frac{ax-b}{1-(ax-b)(at-b)}\right);$$

$$\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\frac{1}{as-bt-1}=\frac{1}{as-bx-1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{b}{as-bt-1}\right)-$$

$$-\frac{b}{1-(bx+a)(as-b)}\left(\frac{1}{as-bt-1}-\frac{bx+a}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)$$

и к полученным интегралам применим формулы [1, с.125]

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{t-x}=\frac{\pi ctg(\beta\pi)}{(1+x)^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}-\frac{2^{\beta-1}B(\alpha,\beta-1)}{(1+x)^{1-\alpha}}F\left(\alpha,1-\beta,2-\beta;\frac{1-x}{2}\right);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{t-x}=\frac{-\pi ctg(\alpha\pi)}{(1-x)^{1-\beta}(1+x)^{1-\alpha}}+\frac{2^{\alpha-1}B(\beta,\alpha-1)}{(1-x)^{1-\alpha}}F\left(\beta,1-\alpha,2-\alpha;\frac{1+x}{2}\right);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{1-(bx+a)(bt+a)}=\frac{2^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)}{1-c(bx+a)}F\left(\alpha,1,\alpha+\beta;\frac{2b(bx+a)}{1-c(bx+a)}\right);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{1-(ax-b)(at-b)}=\frac{2^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)}{1-c(ax-b)}F\left(\beta,1,\alpha+\beta;\frac{2a(b-ax)}{1-c(ax-b)}\right);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{ax-bt-1}=-\frac{\pi}{sin(\alpha\pi)}\frac{a^{\alpha-1}b^{1-\alpha-\beta}}{(1+b-ax)^{1-\beta}}\frac{1}{(1-x)^{1-\alpha}}-\frac{B(\beta,\alpha-1)}{2^{2-\alpha-\beta}b}\times$$

$$\times F\left(2-\alpha-\beta,1,2-\alpha;-\frac{a(1-x)}{2b}\right);$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{bx-at+1}=\frac{\pi}{sin(\beta\pi)}\frac{b^{\beta-1}a^{1-\alpha-\beta}}{(1+a+bx)^{1-\alpha}(1+x)^{1-\beta}}+\frac{B(\alpha,\beta-1)}{2^{2-\alpha-\beta}a}\times$$

$$\times F\left(2-\alpha-\beta,1,2-\beta;-\frac{b(1+x)}{2a}\right),$$

где $B(\alpha,\beta)-$ бета функция Эйлера, далее выделив интегралы с особенностями первого порядка в изолированных особых точках с учётом тождеств

$$tg(\alpha_1\pi)=\pi A_0(1),\quad \frac{\pi}{sin(\pi\alpha_1)}\frac{A_0^2(1)}{1+\pi^2A_0^2(1)}=\frac{sin(\alpha_1\pi)}{\pi},$$

$$tg(\alpha_0\pi) = \pi A_1(-1), \quad \frac{\pi}{sin(\pi\alpha_0)}\frac{A_1^2(-1)}{1+\pi^2 A_1^2(-1)} = \frac{sin(\alpha_0\pi)}{\pi}$$

уравнения (1) и (2) соответственно запишем в виде

$$\nu_0(x) = -\frac{sin(\alpha_1\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{b(1+s)}{a(1-x)}\right)^{\alpha_1}\frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1} + T_2[x,\nu_1] + F_0^*(x), \quad x\in I,$$

$$\nu_1(x) = -\frac{sin(\alpha_0\pi)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)}\right)^{-\alpha_0}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1} + \overline{H}_0[x,\nu_0] +$$
$$+H_1[x,\nu_1] + F_1^*(x), \quad x\in I,$$

где $T_2[x,\nu_1]$, $\overline{H}_0[x,\nu_0]$– регулярные операторы.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005."Universitet "Yangi yo‘l poligraf servis"224 с.

УДК 517.957

О задаче Коши для уравнения синус-Гордона с переменными коэффициентами, зависящими от времени и дополнительными членами

Хоитметов У.А.
Ургенчский государственный университет; x_umid@mail.ru

В данной работе мы будем рассматривать следующую систему уравнений

$$u_{xt} = \rho(t)\sin u + \omega(t)u_{xx} + 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_{k-1}} C_{m_k-1}^{j}\left(f_{k1}^{j}f_{k1}^{m_k-1-j} - f_{k2}^{j}f_{k2}^{m_k-1-j}\right) \qquad (1)$$

$$L(t)f_k^j = \xi_k f_k^j + jf_k^{j-1}, \quad Im\,\xi_k>0, \quad k=\overline{1,N}, \ \ j=0,1,\ldots,m_k-1, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Здесь

$$C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!l!}, \quad L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{u_x}{2} \\ \frac{u_x}{2} & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t},$$

$\rho(t),\omega(t)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции, вектор-функции

$$f_k^j = (f_{k1}^j(x,t), f_{k2}^j(x,t))^T, \ \ j=0,1,\ldots,m_k-1,$$

при любом неотрицательном t принадлежат пространству суммируемых с квадратом вектор-функций $L^2(-\infty,\infty)$, а $f_k^0 = (f_{k1}^0(x,t), f_{k2}^0(x,t))^T$ – собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению ξ_k, $(\mathrm{Im}\,\xi_k>0)$ кратности m_k, $k=\overline{1,N}$.

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$u_0(x)\equiv 0(mod\,2\pi) \text{ при } x\to\infty; \qquad \int_{-\infty}^{\infty}((1+|x|)|u_0'(x)|+|u_0''(x)|)dx<\infty, \qquad (4)$$

2) оператор

$$L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{u_x(x,0)}{2} \\ \frac{u_x(x,0)}{2} & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

не имеет спектральных особенностей и имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_k - 1 - s)!} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{k1}^{m_k-1} f_{k2}^{m_k-1-s} + f_{k2}^{m_k-1} f_{k1}^{m_k-1-s}) dx = A_{m_k-1-s}^k(t), \tag{5}$$

где $A_{m_k-1-s}^k(t)$ – изначально заданные непрерывные функции от t $(t \geq 0)$, $k = \overline{1,N}$, $s = 0, 1, \ldots, m_k - 1$.

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет достаточную гладкость и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.е.

$$u(x,t) \equiv 0 (mod\, 2\pi) \text{ при } x \to \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1 + |x|)|u_x(x,t)| + |u_{xx}(x,t)|) dx < \infty. \tag{6}$$

Основная цель настоящей работы – получить представления для решения $u(x,t), f_k^j(x,t)$, $k = \overline{1,N}$, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$, задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи для оператора $L(t)$. Обратная задача рассеяния для оператора $L(t)$ на всей оси изучалась в [4].

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Если функции $u(x,t)$, $f_k^j(x,t)$, $k = \overline{1,N}$, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$ являются решением задачи (1)–(6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = \overline{1,N}.$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(-\frac{i\rho(t)}{2\xi} + 2i\xi\omega(t)\right) r^+.$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = i\left(2\xi_n\omega(t) - \frac{\rho(t)}{2\xi_n} + \frac{i}{2}A_0^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = i\left(2\omega(t) + \frac{\rho(t)}{2\xi_n^2} + \frac{i}{2}A_1^n(t)\right)\chi_0^n + i\left(2\xi_n\omega(t) - \frac{\rho(t)}{2\xi_n} + \frac{i}{2}A_0^n(t)\right)\chi_1^n,$$

$$\frac{d\chi_{m_n-1-\nu}^n}{dt} = 2i\xi_n\omega(t)\chi_{m_n-1-\nu}^n + 2i\omega(t)\chi_{m_n-2-\nu}^n$$

$$-i\sum_{s=\nu}^{m_n-1}\left(\frac{(-1)^{m_n-1-s}\rho(t)}{2\xi_n^{m_n-s}} - \frac{i}{2}A_{m_n-1-s}^n(t)\right)\chi_{s-\nu}^n, \quad n = \overline{1,N}, \quad \nu = m_n - 1, m_n - 2, \ldots, 0.$$

Замечание. Полученные соотношения полностью задают временную эволюцию данных рассеяния для $L(t)$ и, таким образом, позволяют использовать метод обратного преобразования рассеяния для решения задачи (1)-(6).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} u_{xt} = \frac{8-e^{4t}}{2}\sin u + \frac{4+e^{4t}}{4}u_{xx} + 2\left(f_{11}^2 - f_{12}^2\right), \\ Lf_1 = if_1, \end{cases}$$

$$u(x,0) = 4\arctan(e^{-2x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь
$$2\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,t)f_2(x,t)dx = A_0(t) = -\frac{e^{4t}}{4}.$$
Решение данной задачи имеет вид:
$$u(x,t) = 4\arctan\left(e^{-2x-4t}\right), \quad f_{11} = -\frac{e^{-3x-4t}}{1+e^{-4x-8t}}, \quad f_{12} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-4x-8t}}.$$

Литература

1. **Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.** *Method for solving the sine-Gordon equation*, Physical Review Letters, 19, 1975, pp.824-826.
2. **Hoitmetov U.A.** *Integration of the loaded general Korteweg-de Vries equation in tne class of rapidly decreasing complex-valued functions*, Eurasian mathematical journal, 13:2, 2022, pp.43-54.
3. **Hoitmetov U.A.** *Integration of the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions*, Siberian Advances in Mathematics, 33:2, 2022, pp.102-114.
4. **Khasanov A.B.** *Обратная задача теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка*, Докл. АН СССР, 277:3, 1984,С.559-562 (in Russian).
5. **Khasanov A.B., Urazboev G.U.** *On the sine-Gordon equation with a self-consistent source corresponding to multiple eigenvalues*, Differential Equations, 43:4, 2007, pp.561-570.

УДК 517.957

Алгоритм решения задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в случае движущихся собственных значений в классе быстроубывающих функций

Хоитметов У.А.[1], Хасанов Т.Г.[2]
[1,2]Ургенчский государственный университет;
u.xoitmetov@mathinst.uz temur.xasanov.2018@mail.ru

В данной работе изучается нагруженное уравнение КдФ с источником вида:
$$\begin{gathered} u_t+\beta(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx}-6uu_x\right)+\gamma(t)u(x_1,t)u_x = 2\sum_{m=1}^{N}\xi_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_m(x,t)\psi_m(x,t)\right), \\ -\varphi_m''+u(x,t)\varphi_m=\lambda_m(t)\varphi_m, \;\; m=\overline{1,\ N} \\ -\psi_m''+u(x,t)\psi_m=\lambda_m(t)\psi_m, \;\; m=\overline{1,\ N} \end{gathered} \tag{1}$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$- заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $\xi_m, m = 1,2,...,N$, заданное вещественные число. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии
$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x\in\mathbb{R} \tag{2}$$
где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующими свойствами:

1)
$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\left|u_0(x)\right|dx<\infty; \tag{3}$$

2) оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2}+u_0(x)$, $x\in\mathbb{R}$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, ..., $\lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задачи $\varphi_m(x,t)$ является собственной функцией уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом $u(x,t)$, а $\psi_m(x,t)$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, причём
$$W\left\{\varphi_m(x,t),\psi_m(x,t)\right\} = \varphi_m\frac{\partial\psi_m}{\partial x}-\psi_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} = \omega_m(t)\neq 0, \quad m=1,2,...,N, \tag{4}$$

где $\omega_m(t)$ изначально заданные непрерывные функции от t удовлетворяющие условию

$$\int_0^t \omega_m(\tau)d\tau < -\lambda_m(0), \quad m = 1, 2, ..., N$$

При всех неотрицательных значениях t.

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам в точке $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) \left(|u(x,t)| + \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty, \quad j = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\ \psi_m(x,t)$, $x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ m = \overline{1,\ N}$ задачи (1)-(5), с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля.

Теорема 1. Если функции $u(x,t),\ \varphi_m(x,t),\ \psi_m(x,t),\ m = \overline{1,N},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$ являются решениями задач (1)-(5), то данные рассеяния $\left\{ r^+(k,t),\, \lambda_n(t) = -\chi_n^2(t),\, B_n(t),\ n = \overline{1,N} \right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\chi_n}{dt} = -\frac{\omega_n}{2\chi_n}, \ \ n = 1, 2, ..., N$$

$$\frac{dr^+(k,t)}{dt} = \left(8ik^3\beta(t)u(x_0,t) - 2ik\gamma(t)u(x_1,t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{ik\omega_n}{\chi_n\left(k^2+\chi_n^2\right)} \right) r^+(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = \left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t) + 2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t) + \frac{i\eta_n\xi_n\omega_n}{2\chi_n} \right) B_n(t), \ \ n = 1, 2, 3, ..., N$$

Замечание 1. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Пусть задана функция $u_0(x)\,(1+|x|) \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда решения задач (1)-(5) находится с помощью следующего алгоритма.

1. Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{ r^+(k),\, \chi_n,\, B_n,\, n = \overline{1,N} \right\}$ для оператора $L(0)$.

2. Используя теорему , находим данные рассеяния для $t > 0$

$$\left\{ r^+(k,t),\, \chi_n(t),\, B_n(t),\, n = \overline{1,N} \right\}.$$

3. Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t > 0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi_m(x,t)$ уравнения $L(t)\varphi_m(x,t) := -\varphi_m''(x,t) + u(x,t)\varphi_m(x,t) = \lambda_m\varphi_m(x,t),\ m = 1, 2, ..., N$, а $\psi_m(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$ линейно независимое с $\varphi_m(x,t)$ решение, удовлетворяющее (4).

Литература

1. **Hasanov A.B., Hoitmetov U.A.** *On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions.* National academy of sciences of Azerbaijan. Vol., 47, N:2, 2021, p. 250-261.

2. **Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г.** *Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций.* Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).
3. **Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г.** *Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником.* СибЖИМ. т. 25, N:2(90). ст. 127-142. (2022).

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, когда нагруженная часть содержит интегральный оператор дробного порядка

Холбеков Ж. А.[1], Мирзакулова М. Й.[2]
[1]Ташкентский государсвенный технический университет им. И.Каримова xolbekovja@mail.ru
[2]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека mirzakulova9904@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\left\{\begin{array}{lc} u_{xx}-u_y-\lambda D_{0x}^{-\alpha}u(x,0), & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-\ u_{yy}+\mu_j signy H_j\left[u(x,y)\right], & (x,y)\in\Omega_j,(j=\overline{1,3}),\end{array}\right. \tag{1}$$

где $\lambda,\ \ \mu_j\ (j=\overline{1,3})$ – заданные действительные числа, причем

$$0<\alpha<1,\ \lambda>0,\ \ \mu_j\geq 0,\ \ (j=\overline{1,3}), \tag{2}$$

$$H_j\left[u(x,y)\right]=\left\{\begin{array}{c} u(x,0)\quad \text{при}\quad j=1,\\ u(0,y)\quad \text{при}\quad j=2,\quad \xi=x+y,\\ u(1,y)\quad \text{при}\quad j=3,\quad \eta=y-x+1,\end{array}\right.$$

$D_{0x}^{-\alpha}[...]$– интегральный оператор дробного порядка [1];

Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно;

Ω_1– характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x+y=0$, $BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N\,(0,5\,;\ -0,5)$;

Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$, $DK: y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K\,(-0,5\,;\ 0,5)$;

Ω_3 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и характеристиками $CM: x+y=2$, $BM:\ x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M\,(1,5\,;\ 0,5)$;

$$\Omega=\sum_{j=0}^{3}\Omega_j\cup\ AB\cup BC\cup DA,\quad J_1=\left\{(x,y):0<x<1,\ \ y=0\right\},$$

$$J_2=\left\{(x,y):0<y<1,\ \ x=0\right\},\quad J_3=\left\{(x,y):0<y<1,\ \ x=1\right\},$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_0,\quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup AD\cup\Omega_0\cup BC\cup\Omega_3.$$

Задача. Найти решение уравнения (1) в классе функций

$$W=\{u:\ \ u(x,y)\in C\left(\bar\Omega\right)\cap C_{x,y}^{2,1}\left(\Omega_0\right)\cap C^2\left(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\right),$$

$$u_y\in C\left(\Omega_2^*\right)\cap C\left(\Omega_0\cup AB\right)\cap C\left(\Omega_1\cup AB\right),$$

$$u_x \in C\left(\Omega_1^*\right) \cap C\left(\Omega_0 \cup AD \cup BC\right) \cap C\left(\Omega_2 \cup AD\right) \cap C\left(\Omega_3 \cup BC\right)\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$a(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{x-1}{2}\right) =$$

$$= m(x)u(x,0) + n(x)u_y(x,0) + c(x), \quad (x,0) \in J_1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AK} = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{BM} = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{5}$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,+0) = \alpha_1 u_y(x,-0), \quad (x,0) \in J_1, \tag{6}$$

$$u_x(+0,y) = \alpha_2 u_x(-0,y), \quad (0,y) \in J_2, \tag{7}$$

$$u_x(1+0,y) = \alpha_3 u_x(1-0,y), \quad (1,y) \in J_3, \tag{8}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $m(x)$, $n(x)$, $c(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ − заданные функции, а α_j $(j = \overline{1,3})$− известные постоянные, причем

$$\varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 \in (-\infty;\ +\infty) \setminus \{0\}, \tag{9}$$

$$a^2(x) + b^2(x) \ne 0, \quad m^2(x) + n^2(x) \ne 0, \quad \forall x \in \overline{J}_1, \tag{10}$$

$$a(x), \quad b(x), \quad m(x), \quad n(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1),$$

$$c(x) \in C^2(J_1), \tilde{a}(x) = a(x) - b(x) + 2n(x) \ne 0, \quad \forall x \in \overline{J}_1, \tag{11}$$

$$\varphi_j(y) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right), (j = 1, 2). \tag{12}$$

Заметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в случае, когда $a(x) = 1$, $b(x) = m(x) = n(x) = 0$, $\lambda \equiv 0$, $\mu_j \equiv 0$, $(j = \overline{1,3})$ изучен в работах[2-3].

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2), (9)-(12) и

$$\frac{a(x) + b(x)}{\tilde{a}(x)} \le 0, \quad \left(\frac{a(x) + b(x)}{\tilde{a}(x)}\right)' \le 0,$$

$$\frac{2m(x)}{\tilde{a}(x)} \le 0, \quad \frac{\mu_1 a(x)}{\tilde{a}(x)} \le 0, \quad \frac{\mu_1 b(x)}{\tilde{a}(x)} \ge 0,$$

то в области Ω существует единственное регулярное решение поставленной задачи.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* "Высшая школа". Москва. -1985.-304с.

2. **Исломов Б. И., Холбеков Ж.А.** *Об одной нелокальной краевой задаче для нагру-женного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. -2021. **25**, -№3. -С. 407–422.

3. **Исломов Б.И., Холбеков Ж.А.** *Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-I, II.* Узбекский математи-ческий журнал. -2015. -№4. -С.47-56(I); -2016. -№1. -С.49-56(II).

Интегральные представления гипергеометрической функции Кампе де Ферiет $F^{2;1;1}_{1;1;1}[x,y]$ от двух переменных третьего порядка

Холиёров Ш.

Термезский государственный университет, Термез
sharofiddinxoliyorov311@gmail.com

Признано, что многие проблемы теоретической физики и современной математики приводят к изучение различных гипергеометрических функции нескольких комплексных переменных. К ним относятся, например; проблемы теории супер струн [2], аналитического продолжения контурных интегралов типа Меллина-Барнса [3, 4] и алгебраической геометрии [5].

Гипергеометрические функции многих переменных возникают в квантовой теории поля как решения уравнения Книжника-Замолодчикова, в теории поля и описывающие поведение корреляционных функций в модели Весса-Зумино-Виттена. Дринфельд [6] подтвердил, что один из монодромии уравнения (ассоциатор Дринфельда) удовлетворяет пентагональному уравнению и является производящей функцией для значения гипергеометрических функций с несколькими аргументами в целых точках. Такой подход позволяет связать специальные функции гипергеометрического типа к актуальным задачам теории представлений алгебр Ли и квантовых групп, а также другие прикладные задачи [6 - 8]. Гипергеометрические функции также используются при решении краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений. [10-11]. Некоторые формулы разложения для гипергеометрических функции доказаны в работах [13-16]. В этом докладе доказываются некоторые интегральные представления для гипергеометрической функции $F^{2;1;1}_{1;1;1}[x,y]$ [1, 12]

1. P. App ell, J. Kamp?e de F?eriet. Fonctions hyperg?etriques et hypersphriques, polyn?omes d'Hermite, Gauthier-villars, Paris, 1926. 2. P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green, L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Nucl. Phys. B 359 (1), 21–74, 1991. 3. M. Passare, A. Tsikh, A. A. Cheshel. Multiple Mellin-Barnes integrals as periods of Calabi-Yau manifolds with several moduli, Theor. Math. Phys. 109 (3), 1544–1555, 1996. 4. R. P. Horja. Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties, Preprint. math., AG/9912109, 1-103, 1999.

$$F^{2;1;1}_{1;1;1}\begin{bmatrix} a_1, a_2; b; c; \\ d; e; f; \end{bmatrix} x, y \Bigg] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b)_m(c)_n}{(d)_{m+n}(e)_m(f)_n m!n!} x^m y^n, \tag{1}$$

где $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)...(a+k-1)$, $a \in \mathbb{C}$, $k \in N_0 \equiv \{0,1,...\}-$ обозначение Похгаммера [1, 9, 12]. Имеет место следующие интегральные представления:

$$F^{2;1;1}_{1;1;1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2; & b; c; \\ d_1+d_2; & e; f; \end{matrix}\ x, y\right] = \frac{\Gamma(d_1+d_2)}{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \xi^{d_1-1}(1-\xi)^{d_2-1} F^{2;1;1}_{1;1;1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2; & b; & c; \\ -; d_1, & e; d_2, & f; \end{matrix}\ x\xi, y(1-\xi)\right] d\xi,\ Red_1>0,\ Red_2>0, \tag{2}$$

$$F^{2;1;1}_{1;1;1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2; & b; c; \\ b+c; & e; f; \end{matrix}\ x, y\right] = \frac{\Gamma(b+c)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \xi^{b-1}(1-\xi)^{c-1} F_4(a_1, a_2; e, f; x\xi, y(1-\xi))\, d\xi,\ Reb>0,\ Rec>0, \tag{3}$$

$$F_{1;1;1}^{2;1;1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2; b; c; \\ d; e; f; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)}{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(e-b)\Gamma(f-c)} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 \xi^{b-1}\eta^{c-1}(1-\xi)^{e-b-1}(1-\eta)^{f-c-1} F(a_1, a_2; d; x\xi + y\eta) d\xi d\eta,$$

$$Ree > Reb > 0, \; Ref > Rec > 0, \tag{4}$$

$$F_{1;1;1}^{2;1;1}\left[\begin{matrix} a_1, a_2; b; c; \\ d; e; f; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(a_1)\Gamma(d-a_1)} \times$$

$$\times \int_0^1 \xi^{a_1-1}(1-\xi)^{d-a_1-1} F_2(a_2; b, c; e, f; x\xi, y\xi)\, d\xi, \; Red > Rea_1 > 0. \tag{5}$$

Литература

1. *P. App ell, J. Kamp?e de F?eriet.* Fonctions hyperg?etriques et hypersphriques, polyn?omes d'Hermite, Gauthier-villars, Paris, 1926.
2. *P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green, L. Parkes.* A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Nucl. Phys. B 359 (1), 21–74, 1991.
3. *M. Passare, A. Tsikh, A. A. Cheshel.* Multiple Mellin-Barnes integrals as periods of Calabi-Yau manifolds with several moduli, Theor. Math. Phys. 109 (3), 1544–1555, 1996.
4. *R. P. Horja.* Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties, Preprint. math., AG/9912109, 1-103, 1999.
5. *V. G. Drinfeld.* Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras, and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations, Reports of the USSR Academy of Sciences 268 (2), 285–287, 1983.
6. *L. Bers.* Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John Wiley and Sons, 176, New York, 1958.
7. *G. Lohofer.* Theory of an electromagnetically levitated metal sphere 1: Absorbed power, SIAM J. Appl. Math. 49 (2), 567—581, 1989.
8. *A. W. Niukkanen.* Generalised hypergeometric series NF (x1; : : : ; xN) arising in physical and quantum chemical applications, J. Phys. A: Math. Gen. 16, 1813—1825, 1983.
9. *A. Erd?elyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi.* Higher Transcendental Functions, Vol. I, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.
10. *T. G. Ergashev, A. Hasanov.* Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation, Uzbek Math. J. 1, 55–64, 2018.
11. *A. Hasanov.* Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, Complex Var. Elliptic Equ. 52 (8), 673—683, 2007.
12. *H. M. Srivastava, P. W. Karlsson.* Multiple Gaussian hypergeometric series, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1985.

УДК 519.6+517.95

Краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с двумя линиями вырождения

Худайберганов Я.К [1], Рахимов Д.И [2], Хусаинов А.Г.[3]
[1,2,3]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан;
komilyashin89@mail.ru inoyatovich97@bk.ru askarbekhusainov@gmail.com

Пусть $u\,(x, y, z, t)$ является решением уравнения

$$u_t(x,y,z,t) + sgn(x)u_{xx}(x,y,z,t) + sgn(y)u_{yy}(x,y,z,t) = 0,$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$, где $\Omega_0 = \left\{x, y, z|(-1;1)^2 \times (0;\pi)\,, x \neq 0, y \neq 0\right\}$, $Q = (0;T)\,, T < \infty$ и удовлетворяет следующим условиям:
начальным

$$u(x,y,z,t)\,|_{t=0} = \varphi(x,y,z)\ ,\ (x,y,z) \in [-1;1]^2 \times [0;\pi]\,,$$

граничным

$$u(x,y,z,t)\left|_{\substack{x=-1\\x=+1}}\right. = 0,\ (y,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$

$$u(x,y,z,t)\left|_{\substack{y=-1\\y=+1}}\right. = 0,\ (x,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$

$$u(x,y,z,t)\left|_{\substack{z=0\\z=\pi}}\right. = 0,\ (x,y,t) \in [-1;1]^2 \times \bar{Q},$$

а также условиям склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q},$$

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,z,t) \in [-1;1] \times [0;\pi] \times \bar{Q}\,,$$

где $(i = \overline{0,1}), \varphi(x,y,z)$- заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(x,y,z)|_{\partial\Omega_0} = 0$.

Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики в смысле Ж. Адамара, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректные задачи для некоторых дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах А. Л. Бухгейма, М. М. Лаврентьева [1], H.A. Levine, С. Г. Крейна, К. С. Фаязова, а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова [2], К. С. Фаязова и И. О. Хажиева [3], К. С. Фаязова и Я.К. Худайберганова [4].

Уравнения смешанного типа возникают в моделях задач приложения, например, в газовой динамики, в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

В данной работе доказана некорректность искомой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

Литература

1. М. М. Лаврентьев., Л. Я. Савельев // Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.

2. К. С. Фаязов // Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. УзМЖ. 1995. No 2. с. 89-93.
3. K.S. Fayazov, I.O. Khajiev // Estimation of conditional stability of the boundary-value problem for the system of parabolic equations with changing direction of time. Reports on mathematical physics, Vol. 88 (2021),No. 3. p. 419-431.
4. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. с. 647-660.

УДК 517.956.6

Задача с условием Геллерстедта на параллельных характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа

Хуррамов Н. Х[1], Шерматов Ш.Х. [2], Чоршанбиев Т. А.[3]
[1] Термезский государственный педагогический институт; nxurramov22@mail.ru
[2] Денауский институт предпринимательства и педагогики;
[3] Термезский государственный университет;

I. **Постановка задачи** TG_1**.** Пусть $D-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x))$ с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, заданной уравнением $x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, а при $y < 0$ – характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = -1 \quad \text{и} \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точка пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1) , выходящими из точки $E(c, 0)$, где $c-$ некоторое число, принадлежащее интервалу $I = \{x : -1 < x < 1\}$ оси $y = 0$.

С. Геллерстедт $[1, c.186, c.201]$ для обобщённого уравнения Ф.Трикоми исследовал задачи, при постановке которых в гиперболической части области D значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик разного семейства EC_0 и EC_1 или AC_0 и BC_1 . При этом в эллиптической части области D граничные значения задаются на нормальной кривой σ_0. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, отличается от задачи Геллерстедта тем, что значения искомого решения задаются на характеристиках одного семейства, т.е на граничной характеристике AC_0 и параллельной ей внутренней характеристике EC_1.

Задача TG_1. Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщённым решением класса R_1 уравнения (1) ($u(x, y) \in R_1$ если в формуле Даламбера $\tau'(x), \nu(x) \in H$ (см. $[2, c.39]$, $[1, .104]$);

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = b(x) \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x),\ x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

причём эти пределы при $x = \pm1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) для любых $x \in \overline{I}$ выполняются равенства

$$u(x, y) \mid_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{AC_0}=\psi_0(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{EC_1}=\psi_1(x),\quad x\in[c,(c+1)/2], \tag{5}$$

$b(x),\ b_0,\ \varphi(x),\ \psi_0(x),\ \psi_1(x)$ заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(x)\in C[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1),\ \psi_0(x)\in C[-1,(c-1)/2]\cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2),\ \psi_1(x)\in C[(c+1)/2,1]\cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2,1),\ \alpha_0\in(0,1)$, причём $\varphi(x)=(1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x)\in C^{0,\alpha_0}[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1),\ \psi_0(-1)=0,\ \psi_1(c)=0$.

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле, заданным на σ_0, а условия (4) и (5)– это условие Геллерстедта заданное на граничной характеристике AC_0, и на внутренней характеристике EC_1 . При $c=-1$ или $c=1$ задача TG_1 совпадает с задачей Трикоми (см., например, $[1,c.128]$).

Доказательство корректности задачи при определенных ограничениях на заданные функции проводиться методом работа [3].

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* М.,1985.–304 с.
2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* Ташкент 2005.-224 с
3. **Хуррамов Н.Х.** *Об одном обобщении задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа.* //Бюллетень Института математики 2020, №3, С.183-198.

УДК 517.956

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ СМЕЩЕНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

Чориева С.Т.,[1] Туропова С.[2]

Термезский государственный университет; sanamchoriyeva3@gmail.com

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y<0$ - характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0/y)u_y=0, \tag{1}$$

где $m>0$, $\beta_0\in(-m/2,1)$ постоянные. Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками выходящих из точки $E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$.

Пусть $p(x)=\delta-kx-$ линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ во множество точек отрезка $[c,1]$ со свойствами $p(-1)=1, p(c)=c$, где $\delta=2c/(1+c), k=(1-c)/(1+c)$.

В работе В.И.Жегалова [1] и А.М.Нахушева [2] условие смещения задавалась на граничных характеристиках AC и BC.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи с условием смещения на параллельных характеристиках AC_0 и EC_1, аналогом условия Франкля [3-8] на отрезке AB линии вырождения $y=0$.

Задача А. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

2) функция $u(x,y)$ является обобщенным решением класса $R_1[7, c.35]$ уравнения (1) в области $\Omega^- \setminus (EC_0 \cup EC_1)$;

3) на интервале вырождения AB имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x\in I \tag{2}$$

эти пределы при $x=\pm 1$, могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$;

4) выполнены условия

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad -1\le x\le 1. \tag{3}$$

$$a(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1,x}u[\theta_0(x)] + b(c-x)^{\beta}D^{1-\beta}_{x,c}u[\theta^*(p(x))] = \psi(x), \quad x\in(-1,c], \tag{4}$$

$$u(p(x),0) - u(x,0) = f(x), \quad x\in[-1,c], \tag{5}$$

где $D^{1-\beta}_{-1,x}$– оператор дробного дифференцирования [2], $\theta_0(x_0)$ и $(\theta^*(p(x_0)))$– аффикс точки пересечения характеристики $AC_0(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0), x_0 \in [-1,c], ((p(x_0),0), p(x_0)\in[c,1])$

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0-1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

$$\theta^*(p(x_0)) = \frac{c+p(x_0)}{2} - i\left[\frac{(m+2)(p(x_0)-c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

Заданные функции: $\varphi(x), \psi(x), f(x)$ достаточно гладкие функции, причем $f(-1)=f(c)=0$.

Заметим, что:

-Условие (4) является условием смещения [1,2] заданное на параллельных характеристиках AC_0 и EC_1;

-Условие (5) является аналогом условия Франкля [3] на отрезке вырождения AB, которое заменяет недостающее граничное условие на характеристике C_0C. Условие (5) при обозначении $u(x,0)=\tau(x)$ примет вид

$$\tau(p(x)) - \tau(x) = f(x), \quad x\in[-1,c]. \tag{5*}$$

Краевая задача на сопряжения со сдвигом для уравнения смешанного типа рассмотрена в работе [9].

Формула Дарбу, дающее в области Ω^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными:

$$u(x,0)=\tau(x), \quad x\in\overline{I}; \quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x\in I,$$

имеет вид [7,c.34]

$$u(x,y) = \gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1-t)^{\beta-1}(1+t)^{\beta-1}dt +$$

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\beta}dt, \tag{6}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}2^{1-2\beta}, \quad \gamma_2 = -\frac{\Gamma(2-2\beta)2^{2\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

В силу формулы Дарбу (6) из краевого условия (4) получим

$$a\nu(x) + k^{1-2\beta}b\nu(p(x)) =$$

$$= \gamma \left[aD^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x) + bD^{1-2\beta}_{x,c}\tau(x) \right] + \Psi(x), \quad x \in (-1, c], \tag{7}$$

где $\gamma = 2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)((m+2)/4)^{2\beta}/(\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta))$

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-2\beta} \frac{1}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\psi(x) + \gamma b D^{1-2\beta}_{x,c} f(x).$$

Соотношение (7) является первым уравнением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенным на промежуток $(-1, c]$ отрезка AB из области Ω^-.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жегалов В.И.** Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. //Учен. зап. Казанского университета 122(3).1962, т.122(3),с.3-14.
2. **Нахушев А.М.** О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференц.уравнение. 1969.Т.5,No1,с.44-59.

УДК 517.95

Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренными сингулярными линиями

Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С.
Бохтарский государственный университет им.Носира Хусрава, Бохтар, Таджикистан;
faizullo100@yahoo.com, ruziboivaliev@gmail.com

В дальнейшем, через D обозначим прямоугольник

$$D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\}, \Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma^0_1 = \{y = x, 0 \le x \le a\}, \quad \Gamma^0_2 = \{y = -x, -a \le y \le a\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}u = \dfrac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p}, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1(x, y), b_1(x, y), c_1(x, y), f_i(x, y), i = 1, 2-$ заданные функции в области D $m = 2$, $n = 2, p = 1, u(x, y)-$ искомая функция.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределённых систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]- [4].

Используя методику разработанного в [1] для системы уравнений (1), получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Пусть первое уравнение системы (1) является главным, тогда получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1) $m = n = 2, p = 1$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), f_1(x,y), b_1(x,y),$
$c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $c_1(x,y) = (x^2-y^2)^4 \frac{\partial}{\partial x}(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^2}) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;

3) $a_1(x,x) < 0, b_1(y,y) > 0, a_2(0,0) > 0$;

4) $\mid a_1(x,y) - a_1(x,x) \mid \leq H_1|x-y|^{\alpha_1}, H_1 = const, \alpha_1 > 1$ *в окрестности* Γ_1^0,

$\mid a_1(x,y) - a_1(x,x) \mid \leq H_2|x+y|^{\alpha_2}, H_2 = const, \alpha_2 > 1$ *в окрестности* Γ_2^0,

$\mid b_1(x,y) - b_1(y,y) \mid \leq H_3|x-y|^{\beta 1}, H_3 = const, \beta_1 > 1$ *в окрестности* Γ_1^0,

$\mid b_1(x,y) - b_1(y,y) \mid \leq H_4|x+y|^{\beta 2}, H_4 = const, \beta_2 > 1$ *в окрестности* Γ_2^0,

$\mid a_2(x,0) - a_2(0,0) \mid \leq H_5 x^{\lambda_1}, H_5 = const, \lambda_1 > 1$;

5) a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^2}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)}$ *в* D ,

b) $$(x^2-y^2)^4 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)} + (x^2-y^2)a_1(x,y)f_2(x,y) = (x^2-y^2)^4 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)} -$$

$$-\frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^2} \exp[-W_{b_1}^2(x,y) + b_1(y,y)\omega_2^1(x,y](\psi_1(y) +$$

$$+\int_0^x \frac{f_1(t,y)}{(t^2-y^2)^4} \exp[w_{b_1^2}(t,y) - b_1(y,y)\omega_2^1(t,y)]dt) + f_1(x,y)$$

в D;

6) $f_1(x,y) = o(\exp[b_1(y,y)\omega_2^1(x,y](x-y)^{\mu_1})\mu_1 > 3$ *в окрестности* Γ_1^0,

$f_1(x,y) = o(\exp[b_1(y,y)\omega_2^1(x,y](x+y)^{\mu_2})\mu_2 > 3$ *в окрестности* Γ_2^0,

$f_2(x,0) = o(x^{\vartheta_1}), \vartheta_1 > 1$.

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\backslash\ (\Gamma_0^1 \bigcup \Gamma_0^2))$ *представимо в виде*

$$u(x,y) = \exp[-w_{a_1}^2(x,y) - a_1(x,x)\omega_2^2(x,y]\{\varphi_1(x) + \int_0^y \exp[w_{a_1}^2(x,s) + a_1(x,x)\omega_2^2(x,s] - W_{b_1}^2(x,s) +$$

$$+b_1(s,s)](\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s)}{(t^2-s^2)^4} \exp[w_{b_1}^2(t,s) - b_1(s,s)\omega_2^1(t,s]dt)\} \equiv \chi_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)), \quad (2)$$

$$\varphi_1(x) = \exp[-w_{a_2}^2(x,0) - a_2(0,0)\omega_2(x)](c_1 +$$

$$+\int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^2} \exp[w_{a_2}^1(t,0) - a_2(0,0)\omega_1(t)]dt) \equiv N_1(c_1, f_2(x,0)), \quad (3)$$

$$\psi_1(y) = \frac{1}{a_2(0,y) - y^2 b_1(0,y)}[y^8 \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}|_{x=0} - y^2 a_1(x,0)f_2(0,y) - f_1(0,y) = G(y), \quad (4)$$

$$w_{a_1}^2(x,y) = \int_0^y \frac{a_1(x,s) - a_1(x,x)}{(x^2-s^2)^2} ds, \quad \omega_2^2(x,y) = \frac{y}{2x^2(x^2-y^2)} + \frac{1}{4x^3} \ln|\frac{x+y}{x-y}|,$$

$$w_{b_1}^2(x,y)=\int_0^x \frac{b_1(t,y)-b(y,y)}{(t^2-y^2)^2}dt,\quad \omega_2^1(x,y)=\frac{x}{2y^2(x^2-y^2)}+\frac{1}{4x^3}\ln|\frac{x-y}{x+y}|,$$
$$w_{a_2}^2(x,0)=\int_0^x \frac{a_2(t,0)-a_2(0,0)}{t^2}dt,\quad \omega_1(x)=\frac{1}{x},$$

c_1- *произвольная постоянная.*

Полученное решение обладает свойствами:
1°. Если $y\to 0$, то $u(x,0)=\varphi_1(x)$.
2°. Если $y\to 0$ и $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}u(x,y)\}=\varphi_1(0)=o(\exp[a_2(0,0)\omega_1(x)]).$$

3°. $$\lim_{x\to 0}\{\exp[-a_2(0,0)\omega_1(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\}=c_1.$$

4°. Если $x\to 0$ и $y\neq 0$, то

$$u(x,y)=O(\exp[a_1(x,x)\omega_2^2(x,y)]).$$

Задача A_1. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D\setminus(\Gamma_0^1\bigcup\Gamma_0^2))$ по начальному условию

$$\lim_{x\to 0}\{\exp[-a_2(0,0)\omega_1(x)]\lim_{y\to 0}u(x,y)\}=p_1,$$

где p_1- заданная известная постоянная.

Решение задача A_1. Для решения этой задачи используем интегральное представление (2), (3), (4) и начальное условие задачи A_1 и получим, что $c_1=p_1$.
Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть в системе уравнений (1)* $m=n=2$, $p=1$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда единственное решение задачи* A_1 *даётся формулами (2), (3), (4), где* $c_1=p_1$.

Литература

1. **Раджабов Н.** *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* – Душанбе. изд. ТГУ, 1992. – 236с.

2. **Тасмамбетов Ж. Н.** *Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.* - Актобе: 2015. - 463 с.

3. **Хасанов А.Х.** *Краевые задачи для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца* // Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании"(21-22 февраля 2015г.) Актобе, университет им. К. Жубанова, 2015. - С. 242-247.

4. **Шамсуддинов Ф. М.** *Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью* // Доклады Адыгской (Черкеской) Международной академии наук.– 2014.– Т.16, №1. – С. 40-46.

УДК 517.946

Рекурсивные формулы для гипергеометрической функции Лауричелла от трех переменных и их применения к решению краевых задач

Эргашева И. Х.
Наманганский государственный университет; irodaergasheva014@gmail.com

В 2012 г. Ванг [1] получил целый класс рекурсивных формул для гипергеометрических функций Аппеля двух переменных. Вдохновляясь исследованиями Ванга, в настоящей работе доказываем рекурсивные формулы для гипергеометрических функций Лауричелла трех переменных.

Положим

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

иными словами,

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1),\ n = 1, 2, 3, ...$$

Символ $(a)_n$ называют *символом Похгаммера.*

Гипергеометрические функции Лауричелла от трех переменных определяются следующим образом:

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] := \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_n\,(b_3)_p}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!};$$

$$F_B^{(3)}\left[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3; c; X\right] := \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m\,(a_2)_n\,(a_3)_p\,(b_1)_m\,(b_2)_n\,(b_3)_p}{(c)_{m+n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!};$$

$$F_C^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] := \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}\,(b)_{m+n+p}}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!};$$

$$F_D^{(3)}\left[a, b_1, b_2, b_3; c; X\right] := \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_n\,(b_3)_p}{(c)_{m+n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!},$$

где a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 – комплексные числа, причем c_1, c_2, $c_3 \neq 0, -1, -2, ...$ Здесь для краткости принята запись: $X := (x, y, z)$.

Теорема 1.

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+n, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + \frac{b_1 x}{c_1}\sum_{k=1}^{n} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+k, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$+\frac{b_2 y}{c_2}\sum_{k=1}^{n} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+k, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right] + \frac{b_3 z}{c_3}\sum_{k=1}^{n} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+k, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right]; \qquad (1)$$

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-n, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] - \frac{b_1 x}{c_1}\sum_{k=0}^{n-1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-k, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$-\frac{b_2 y}{c_2}\sum_{k=0}^{n-1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-k, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right] - \frac{b_3 z}{c_3}\sum_{k=0}^{n-1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-k, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right].$$

Доказательство. Согласно определению функции Лауричелла и известному соотношению для символа Похгаммера

$$(a+1)_{m+n+p} = (a)_{m+n+p}\left(1+\frac{m+n+p}{a}\right) \quad ,$$

имеем

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + \frac{b_1 x}{c_1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$+\frac{b_2 y}{c_2} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right] + \frac{b_3 z}{c_3} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right].$$

Применяя это смежное соотношение к функции $F_A^{(3)}$ с параметром $a+2$, получим

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$+\frac{b_1 x}{c_1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + \frac{b_2 y}{c_2} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right]$$

$$+\frac{b_3 z}{c_3} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$+\frac{b_1 x}{c_1}\left\{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right]\right\}$$

$$+\frac{b_2 y}{c_2}\left\{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right] + F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right]\right\}$$

$$+\frac{b_3 z}{c_3}\left\{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right] + F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+2, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right]\right\}.$$

Теперь вычислив функцию $F_A^{(3)}$ с параметром $a+n$ за n шагов, мы формулу (1) в этой теореме. Повторяя рассуждения при $a \to a-1$, будем иметь

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-1, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] - \frac{b_1 x}{c_1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right]$$

$$-\frac{b_2 y}{c_2} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1, c_2+1, c_3; \end{array} X\right] - \frac{b_3 z}{c_3} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1, c_2, c_3+1; \end{array} X\right].$$

Применяя это соотношение к функции $F_A^{(3)}$ с параметром $a-n$ за n шагов, получим вторую рекурсивную формулу в теореме 1. Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие теоремы:

Теорема 2.

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+n, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\binom{n-i-j}{k}\times$$

$$\times\frac{(b_1)_i (b_2)_j (b_3)_k}{(c_1)_i (c_2)_j (c_3)_k} x^i y^j z^k F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+i+j+k; b_1+i, b_2+j, b_3+k; \\ c_1+i, c_2+j, c_3+k; \end{array} X\right]$$

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a-n, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\binom{n-i-j}{k}\times$$

$$\times\frac{(b_1)_i\,(b_2)_j\,(b_3)_k}{(c_1)_i\,(c_2)_j\,(c_3)_k}(-x)^i(-y)^j(-z)^k F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a; b_1+i, b_2+j, b_3+k; \\ c_1+i, c_2+j, c_3+k; \end{array} X\right].$$

Теорема 3.

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1+n, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + \frac{ax}{c_1}\sum_{k=1}^{n} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1+k, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right];$$

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1-n, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] - \frac{ax}{c_1}\sum_{k=0}^{n-1} F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1, b_1-k, b_2, b_3; \\ c_1+1, c_2, c_3; \end{array} X\right].$$

Теорема 4.

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1+n, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(a)_k}{(c_1)_k} x^k F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+k, b_1+k, b_2, b_3; \\ c_1+k, c_2, c_3; \end{array} X\right];$$

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a, b_1-n, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(a)_k}{(c_1)_k} (-x)^k F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+k, b_1, b_2, b_3; \\ c_1+k, c_2, c_3; \end{array} X\right].$$

Теорема 5.

$$F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a; b_1, b_2, b_3; \\ c_1-n, c_2, c_3; \end{array} X\right] = F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a; b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{array} X\right] + ab_1x\sum_{k=1}^{n}\frac{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1; b_1+1, b_2, b_3; \\ c_1+2-k, c_2, c_3; \end{array} X\right]}{(c_1-k)\,(c_1-k+1)}$$

$$+ab_2y\sum_{k=1}^{n}\frac{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1; b_1, b_2+1, b_3; \\ c_1+2-k, c_2, c_3; \end{array} X\right]}{(c_1-k)\,(c_1-k+1)} + ab_3z\sum_{k=1}^{n}\frac{F_A^{(3)}\left[\begin{array}{c} a+1; b_1, b_2, b_3+1; \\ c_1+2-k, c_2, c_3; \end{array} X\right]}{(c_1-k)\,(c_1-k+1)}.$$

В заключении отметим, что рекурсивные формулы, доказанные в настоящей работе, имеют важные приложения. Например, рекурсивная формула (1) в теореме 1 используется при решении основных краевых задач (задач Дирихле, Хольмгрена и др.) в первом октанте шара для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами вида

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0,$$

где $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Аналогичные теоремы доказываются и для функций Лауричелла F_B, F_C, F_D.

Литература

1. **Wang X.** *Recursion formulas for Appell functions.* Integral Transforms and Special Functions, 23(6), 2012, pp. 421–433.

УДК 517.956

Задача с недостающим условием Гурса и аналогом условия Франкля для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.

Эргашева С. Б.[1], Нарзиев Ф. Б.[2], Кодирова Ш. У.[3].
[1,2,3]Термезский государственный университет;
sarvinozergasheva96@mail.ru nfazliddin0197@gmail.com shaxnozaqodirova98@mail.ru

Постановка задачи G. Пусть Ω^- характеристический треугольник полуплоскости y<0 ограниченная характеристиками AC_1 и BC_1, где $A = A_1(-1,0)$, $B = B_1(1,0)$, $C_1 = C_1\left(0, -\left((m+2)/2^{2/(m+2)}\right)\right)$ уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0,\ y < 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0$, и отрезком AB оси $y = 0$.

Обозначим через A_0 и B_0- точки пересечения соответственно характеристик AC и BC с характеристиками, выходящими из точки $E(c, 0)$, а через C^*-точку пересечения характерис- тики EC_1 с характеристикой, выходящей из точки $E_1(c_1, 0)$, где c, c_1-некоторые числа, принадлежащие интервалу $J = (-1, 1)$ оси $y = 0$, причем $c < c_1 < 1$.

Пусть $p(x) = a_1x - b_1$ и $q(x) = a_2 - b_2x$ -линейные функции, отображающие отрезок $[c, 1]$ на отрезки $[c, c_1]$ и $[c_1, 1]$ соответственно, причем $p(c) = c,\ p(1) = c_1$ и $q(c) = 1,\ q(1) = c_1$, т.е. $a_1 = (c_1 - c)/(1 - c),\ b_1 = c(c_1 - 1)/(1 - c)$ и $a_2 = (1 - cc_1)/(1 - c),\ b_2 = (1 - c_1)/(1 - c)$ при этом $a_1 + b_2 = 1,\ a_2 + b_1 = 1$.

В задаче Гурса [1, с.174] краевые условия задавались на всех точках характеристик AC_1 и BC_1. В настоящей работе исследуется корректность задачи, в которой характеристика AC_1 произвольным образом разбита на два куска AA_0 и A_0C_1 и на $AA_0 \subset A_0C_1$ задано условие Гурса, а A_0C_1 освобождена от краевого условия, и это недостающее условие Гурса заменено аналогами условия Франкля [2-3] на внутренней характеристике EB_0 и на отрезке вырождения $EB \subset AB$. На всей характеристике BC_1 задано условия Гурса.

Задача G. (Гурса обобщенная). Требуется найти в области Ω^- функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}^-)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y)$-обобщенное решение уравнения (1) из класса $R_1[4, c.104]$;

2) выполняются равенства

$$u(x, y)|_{AA_0} = \psi_1(x),\ -1 \le x \le (c-1)/2, \tag{2}$$

$$u[\theta^*((p(x))] - \mu u[\theta^*((q(x))] = \psi_2(x),\ c \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u(p(x), 0) - u(q(x), 0) = f(x),\ c \le x \le 1, \tag{4}$$

$$u(x, y)|_{BC_1} = \psi_3(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где μ-постоянная, $\mu \in (0, 1)$, а $\theta^*(x) = (x_0 + c)/2 - [(m+2)(x_0 - c)/4]^{2/(m+2)}$- аффикс точки пересечения характеристики EB_0 с характеристикой выходящей из точки $M(x_0, 0)$, где $x_0 \in (c, 1)$, $\theta^*(x_0) \in EB_0$ [4,с.209], функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x)$, $\psi_3(x)$ заданы и

$$\psi_1(x) \in C\,[-1, (c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}\,(-1, (c-1)/2)\,,$$

$$\psi_2(x),\ f(x) \in C[c, 1] \cap C^{1,\alpha_0}(c, 1),$$

$$\psi_3(x) \in C[0,1] \cap C^{1,\alpha}(0,1),$$

причем $\psi_1(-1)=0,\ f(1)=0,\ \psi_3(1)=0$.

Заметим, что условия (3) и (4) являются аналогами условия Франкля [2] на внутренней характеристике $EB_0 = EC^* \cup C^*B_0$ и на отрезке вырождения $EB = (EE_1 \cup E_1B) \subset AB$ соответственно.

Обозначим $u(x,0)=\tau(x),\ x \in \bar{J}$, тогда условие (4) примет вид

$$\tau\left(p(x)\right) - \tau\left(q(x)\right) = f(x),\ x \in [c,1].$$

Пусть Ω^+-область, симметричная области Ω^- относительно оси $y=0$, лежащая в полу- плоскости $y>0$ и пусть $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup AB$. Область Ω^+ ограничена характеристиками AC_2 и BC_2, где $C_2 = C_2\left(0, ((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$ уравнения

$$-y^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0,\ y>0, \tag{6}$$

и отрезком AB оси $y=0$.

Заметим, что если $u(x,y)-$есть решение уравнения (1) в полуплоскости $y<0$, то $u(x,-y)$-есть решение уравнения (6) в полуплоскости y>0. В силу этого свойства решений уравнений (1) и (6) в симметричной области Ω рассмотрим вспомагательную задачу G^* [3].

Постановка задачи G^*. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющее условиям:

1) $u(x,y)$-есть обобщенное решение из класса $R_1[4, c.104]$ в областях Ω^- и Ω^+;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет условию

$$u(x,y)|_{BC_2} = \psi_1(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

и условиям (2),(3) и (4) задачи G, на отрезке вырождения $y=0,\ -1<x<1$, имеет место условие сопряжения,

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = -\lim_{y\to +0} y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ x \in (-1,1)$$

и эти пределы при $x=\pm 1,\ x=c,\ x=c_1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы.

Заметим, что в силу условий (5) и (7) имеем $u(x,y)|_{BC_1} = u(x,y)|_{BC_2}$, решение задачи G^* в области $\Omega^- = \Omega \cap \{y<0\}$ будет и решением задачи G в этой же области Ω^-. Таким образом, исследование задачи G сведена к решению задачи G^*.

Методом работы [3] доказано корректность задачи G.

Литература

1. **Бицадзе А.В.** *Уравнения математической физики.* Москва. Наука. - 1976. - 296 с.
2. **Франкль Ф.И.** *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной,оканчиваю- щейся прямым скачком уплотнения.* Прикладная математика и механика. - 1956. Т.20, №2. - с.196-202.
3. **Девингталь Ю.В.** *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франкля.* Известия вузов.Математика. - 1958. Т.2, №3. - с.39-51.
4. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* Москва. Высшая школа. - 1985. - 304 с.

Исследование поведения фазовых траекторий двумерной системы дифференциальных уравнений в бесконечности

Эргашев В. Э.
Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова; vafokul-ergashev@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\left(a_1x^m + b_1y^m + c_1\right) = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = y\left(a_2x^m + b_2y^m + c_2\right) = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1, b_1,\ a_2, b_2,\ c_1, c_2$ постоянные коэффициенты, $m > 1$ натуральное число.

Оси координат является интегральными прямыми этой системы и при нечетном m на них могут лежать три особые точки. Кроме того, если

$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (1) имеет еще одну особую точку $M\left(x_0, y_0\right)$, не лежащая на осях координат и определяется системой уравнений

$$\begin{cases} P\left(x,y\right) = 0 \\ Q\left(x,y\right) = 0 \end{cases}$$

Можно доказать, что система (1) не имеет периодических траекторий вокруг особой точки $M\left(x_0, y_0\right)$.

Для изучения поведения фазовых траекторий системы дифференциальных уравнений (1) применяем к этой системе преобразование Пуанкаре

$$x = \frac{1}{z},\ \ y = \frac{\tau}{z}$$

Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -\left(a_1 + b_1\tau^m + c_1z\right)z^{1-m} \\ \frac{d\tau}{dt} = [\left(a_2 - a_1\right)\tau + \left(b_2 - b_1\right)\tau^{m+1} + (c_2 - c_1)\tau z^m]z^{-m} \end{cases}$$

Из этой системы исключая время, получим следующее уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z(a_1 + b_1\tau^m + c_1z^m)}{\left(a_2 - a_1\right)\tau + \left(b_2 - b_1\right)^{1-m} + (c_2 - c_1)\tau z^m}$$

Для определения характера особых точек составляем характеристическое уравнение и находим характеристические корни для каждой особой точки.

Имеет место теорема.

Теорема 1. Все три изолированные бесконечно удаленные особые точки

$A\left(z = 0,\ \tau_1 = 0\right)$, $B\left(z = 0,\ \tau_2 = \left(-\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}\right)^{\frac{1}{m}}\right)$, $C\left(z = 0,\ \tau_3 = \mu = 0\right)$ системы уравнений (1) не могут быть седлами.

Используя теорию индексов и уравнения Брио-Буке, мы можем более детально исследовать характер этих особых точек. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если система (1) при $\Delta \neq 0$ имеет три бесконечно удаленные изолированные особые точки, то реализуются следующие случаи их совместного сосуществования 1) три узла; 2) два узла, седло; 3) узел, два седла.

Справедливость этой теоремы можно рассмотреть на следующем примере.

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\left(-x^{2k+1} + 4y^{2k+1} + c_1\right) \\ \frac{dy}{dt} = y\left(2x^{2k+1} + y^{2k+1} + c_2\right) \end{cases}$$

Эта система имеет на экваторе следующие три особые точки: два узла $A\,(z=0,\ \tau_1=0)$, $B\,(z=0,\ \tau_2=-1)$ и седло $C\,(z=0,\ \tau_3=0)$

Аналогично можно рассмотреть случай $\Delta=0$. Тогда $a_1=Sb_1,\ a_2=Sb_2$,

где $S\neq 0$. В этом случае система уравнений (1) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=x\left(Sb_1x^{2k+1}+b_2y^{2k+1}+c_1\right) \\ \frac{dy}{dt}=y\left(Sb_2x^{2k+1}+b_2y^{2k+1}+c_2\right) \end{array}\right. \tag{2}$$

Для системы (2) на экваторе существуют три изолированные особые точки, угловые коэффициенты направления которых определяются следующими выражениями:

$$\tau_1=0,\quad \tau_2=(-S)^{\frac{1}{2k+1}},\quad \tau_3=\infty$$

Для определения характера особых точек вычислим корни характеристических уравнений, соответствующих особым точкам. Найдены коэффициентные критерии совместного сосуществования особых точек системы (2). Особые точки $A\,(z=0,\ \tau_1=0)$ и $C\,(z=0,\quad \mu=\tau_3=0)$ могут быть обе узлами или одна из них узел, другая седло. Особая точка

$C\left(z=0,\quad \tau_2=(-S)^{\frac{1}{2k+1}}\right)$ является открытым седло-узлом.

Проведя полное качественное исследование системы (1) в проективной плоскости, можно построить полную качественную картину фазовых траекторий при $\Delta\neq 0$. Показано что система дифференциальных уравнений (1) имеет три типа топологический различных фазовых траекторий в фазовой плоскости. Некоторые частные случаи системы (1) при четном m были рассмотрены в работах [1-2].

Литература

1. **Буриев Т.Э., Эргашев В.Э.** *О числе особых точек и отсутствии периодических траекторий двумерной дифференциальной системы.* Международная конференция, посвященная 60-летию академика Жаутикова. 26-28 сентябрь 2001 г. Алма-Ата.

2. **Буриев Т.Э., Эргашев В.Э.** *Геометрическое исследование двумерной системы дифференциальных уравнений в одном случае.* Труды республиканской конференции « Дифференциальные уравнения и их приложения. Самарканд, 27-28 октябрь, 2005 год

УДК 517.946

Формулы разложения для гипергеометрических функций двух переменных и их применения к решению краевых задач

Эргашев Т. Г.[1], Туйчиев С. Б.[2]

[1]Национальный исследовательский университет ТИИИМСХ; ergashev.tukhtasin@gmail.com

[2] Наманганский государственный университет; sanjarxon177@gmail.com

Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Большие успехи в изучении гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для рядов от двух или многих переменных. В 1889 году Горн дал общее определение гипергеометрической функции двух переменных и он установил, что существуют 34 существенно различных сходящихся ряда порядка 2. Кроме того, Горн выделил эти

34 гипергеометрические ряды на полные и конфлюэнтные гипергеометрические функции (Список Горна). Оказывается, существуют 14 полных рядов и существуют 20 конфлэнтных рядов, которые являются предельными формами для полных рядов.

Для исследования гипергеометрической функции многих переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных.

С целью облегчить процесс изучения свойств функций многих переменных впервые Дж.Берчнелл и Т.Ченди [1,2] в 1940–41 гг. разложили 4 полные и 7 конфлюэнтные гипергеометрические функции из списка Горна в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса.

Настоящая работа посвящена нахождению формул разложения для некоторых гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна.

Положим

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

иными словами,

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1),\ n = 1,2,3,...$$

Символ $(a)_n$ называют *символом Похгаммера.*

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$$F(a,b;c;z) \equiv F\left[\begin{array}{c} a,b; \\ c; \end{array} x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

а при $|z| \geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. Здесь параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0,-1,-2,...$, а $(a)_n$ есть символ Похгаммера.

Гипергеометрический ряд Гаусса $F(a,b;c;z)$ может быть обобщен путем введения p параметров, играющих ту же роль, что a и b, и q параметров, играющих ту же роль, что c. При этом получается ряд

$${}_pF_q\left[\begin{array}{c} a_1,...,a_p; \\ c_1,...,c_q; \end{array} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(c_1)_n \dots (c_q)_n\, n!} z^n,$$

который называют *обобщенным гипергеометрическим рядом.*

Рассмотрим следующую гипергеометрическую функцию из списка Горна:

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n}\,(b)_m}{(d)_m\, m!n!} x^m y^n,\ \ |x| < 1,$$

для которой до сих пор не была известна формула разложения. Усовершенствовав метод Бернчнелла-Ченди (за подробностями см. [3]), получим формулу разложения для функции H_3 в виде

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} \left(\begin{array}{c} i \\ k \end{array}\right) \frac{(-1)^{i+k}(k)_{i-k}\,(b)_i}{i!\,(1-a)_k\,(d)_i}$$
$$\times x^i y^k F\left(a+i,b+i;d+i;x\right){}_0F_1\left(1-a+k;-y\right).$$

Теперь покажем важное применение найденной формулы разложения.

Известно, что фундаментальные решения играют важную роль в исследовании дифференциальных уравнений в частных производных, потому что, формулировка и решение многих локальных и нелокальных краевых задач основаны на эти решения. Более того, например, потенциалы простого и двойного слоев выписываются с помощью этих фундаментальных решений.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha}{x_1} u_{x_1} + \lambda^2 u = 0$$

в области $R_m^+ = \{(x_1, ..., x_m) : x_1 > 0\}$, где $m > 2$ – размерность евклидова пространства; α – действительное постоянное, причем $0 < 2\alpha < 1$; λ – действительное или чисто мнимое постоянное.

Явный вид фундаментальных решений дает возможность подробно исследовать рассматриваемое уравнение. Оказывается, фундаментальные решения рассматриваемого сингулярного эллиптического уравнения выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\mathrm{H}_3(a, b; d; x, y)$ в виде [4]

$$q_0(x,\xi) = k_0 r^{-2\beta} \mathrm{H}_3(\beta, \alpha; 2\alpha; \sigma, \rho),$$

$$q_1(x,\xi) = k_1 r^{-2\gamma} x_1^{1-2\alpha} \xi_1^{1-2\alpha} \mathrm{H}_3(\gamma, 1-\beta; 2-2\beta; \sigma, \rho),$$

где

$$\beta = \frac{m-2}{2} + \alpha,\ k_0 = 2^{2\beta - m} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}\Gamma(2\alpha)},$$

$$\gamma = \frac{m}{2} - \alpha,\ k_1 = 2^{2\gamma - m} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\pi^{m/2}\Gamma(2-2\alpha)};$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m);\ \sigma = 1 - \frac{r_1^2}{r^2},\ \ \rho = \frac{\lambda^2}{4} r^2,$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2,\ r_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \sum_{k=2}^{m} (x_k - \xi_k)^2.$$

Определим порядок особенности фундаментальных решений $q_0(x,\xi)$ и $q_1(x,\xi)$ при $r \to 0$.

В начале рассмотрим фундаментальное решение $q_0(x,\xi)$. В силу разложения это фундаментальное решение можно записать в виде

$$q_0(x,\xi) = k_0 r^{-2\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \frac{(-1)^{i+k} (k)_{i-k} (\alpha)_i}{i!\,(1-\beta)_k\,(2\alpha)_i}$$

$$\times \sigma^i \lambda^{2k} r^{2k} F(\beta + i, \alpha + i; 2\alpha + i; \sigma)\, {}_0F_1(1 - \beta + k; -\rho),$$

Воспользовавшись формулой известной формулой автотрансформации, получим

$$q_0(x,\xi) = \frac{r_1^{-2\alpha}}{r^{m-2}} \tilde{q}_0(x,\xi),$$

где

$$\tilde{q}_0(x,\xi) = k_0 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \frac{(-1)^{i+k} (k)_{i-k} (\alpha)_i}{i!\,(1-\beta)_k\,(2\alpha)_i} \left(\frac{r^2}{r_1^2} - 1\right)^i$$

$$\times \lambda^{2k} r^{2k} F\left(\alpha - \frac{m-2}{2}, \alpha + i; 2\alpha + i; 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right) {}_0F_1\left(1 - \beta + k; -\frac{\lambda^2}{4} r^2\right).$$

Теперь в $\tilde{q}_0(x,\xi)$ переходим к пределу при $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0} \tilde{q}_0(x,\xi) = k_0 F\left(\alpha - \frac{m-2}{2}, \alpha; 2\alpha; 1\right).$$

Используя формулу для определения множителя k_0, получим

$$\lim_{r\to 0}\tilde{q}_0(x,\xi)=2^{2\alpha-2}\pi^{-m/2}\Gamma\left((m-2)/2\right).$$

Таким образом, заключаем, что фундаментальное решение $q_0(x,\xi)$ имеет особенность порядка r^{2-m} при $r\to 0$.

Аналогично устанавливается, что фундаментальное решение $q_1(x,\xi)$ имеет такой же порядок особенности при $r\to 0$.

Литература

1. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** *Expansions of Appell's double hypergeometric functions.* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. — 1940. Ser.11. — P. 249-270.
2. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** *Expansions of Appell's double hypergeometric functions (II).* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. — 1941. Ser.12. — P. 112-128.
3. **Эргашев Т.Г.** *Формулы разложения для гипергеометрических функций двух переменных.* Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Том 201. С. 80–97.
4. **Hasanov A.** *Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation.* Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — 52. — 8. — P.673–683.

УДК 517.956

ТЎРТБУРЧАК СОҲАЛАРДА (2+1)-ТАРТИБЛИ ЭЙРИ ТЕНГЛАМАСИНИНГ АНАЛОГИ УЧУН ПОТЕНЦИАЛЛАР УСУЛИ

Эшимбетов Ж. Р.
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети;
jurabek90.90@inbox.ru

Ушбу $\Omega=\{(x,y,t):\ 0<x<L,\,0<y<L,\,0<t\le T\}$ соҳада учинчи тартибли қўшма типидаги Эйри тенгламасининг аналогини қараймиз [5] – [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \tag{1}$$

Чегаравий шартларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$u\left(x,y,0\right)=0,u_{xx}(0,\,y,t)=\varphi_2(y,t),u_{xx}(L,y,t)=\varphi_3(y,\,t),$$
$$u_y(x,\,0,t)=\psi_1(x,\,t),u_{yy}(x,\,0,t)=\psi_2(x,\,t),u_{yy}(x,\,L,t)=\psi_3(x,\,t), \tag{2}$$

бу ерда

$$\varphi_1\left(y,t\right)\in C^{0,2}_{y,t}\left(\overline{\Omega_1}\right),\psi_1\left(x,t\right)\in C^{0,2}_{x,t}\left(\overline{\Omega_3}\right),\varphi_2\left(y,t\right)\in C\left(\overline{\Omega_1}\right),\varphi_3\left(y,t\right)\in C^{0,1}_{y,t}\left(\overline{\Omega_2}\right),$$
$$\psi_2\left(x,t\right)\in C\left(\overline{\Omega_3}\right),\psi_3\left(x,t\right)\in C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega_4}\right). \tag{3}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечим топиш талаб этилсин.

Бунда

$$\Omega_0=\{(x,y,t):\ 0<x<L,\,0<y<L,\ t=0\},$$
$$\Omega_1=\{(x,y,t):\ x=0,\,0<y<L,\,0<t\le T\},$$
$$\Omega_2=\{(x,y,t):\ x=L,\,0<y<L,\,0<t\le T\},$$
$$\Omega_3=\{(x,y,t):\ 0<x<L,\,y=0,\,0<t\le T\},$$

$$\Omega_4 = \{(x,y,t):\ 0 < x < L,\, y = L,\, 0 < t \le T\}.$$

(1) тенгламанинг фундамантал ечимлари қуйидаги кўринишга эга [1] – [4]:

$$U_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right),\ x \ne \xi,\ y \ne \eta,\ t > \tau; \qquad (4)$$

$$U_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \varphi\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right),\ x \ne \xi,\ y > \eta,\ t > \tau; \qquad (5)$$

$$U_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \varphi\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right),\ x > \xi,\ y \ne \eta,\ t > \tau. \qquad (6)$$

Бу ерда $f(z)$ ва $\varphi(z)$ функциялар Эйри функциялари дейилади ва

$$p''(z) + \frac{z}{3} p(z) = 0 \qquad (7)$$

тенгламанинг ечимларидир.

Учинчи тартибли қўшма типдаги Эйри тенгламасининг аналоги учун қаралаётган чегаравий масала учун фундаментал ечимларининг баъзи хоссалари ўрганилган, ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги потенциаллар усули ёрдамида кўрсатилади.

ФОЙДАЛАНИГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. **L.Cattabriga** *Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa a mat. Serie. №–13(2), 1959. P. 1-45.
2. **Т.Д.Джураев** *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент 1979.
3. **S. Abdinazarov** *The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian).* Differential Equations, 1881. Vol. 13, Issue 1, Pp. 3–12.
4. **S. Abdinazarov, Z. Sobirov** *On fundamental solutions of an equation with multiple third-order characteristics in a multidimensional space.* in: Proc. Int. Sci. Conf. Differential Equations with Partial Derivatives and Related Problems of Analysis and Informatics, pp. 12–13, Tashkent (2004).
5. **А.Р. Хашимов** *Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа.* Математические заметки СВФУ, 2017, том 24, выпуск 4, 76–86.
6. **A.R. Khashimov, Zh.Sh. Matnazarov** *On some properties of fundamental solutions of a non-stationary third-order equation of composite type.* Uzb. Mat. Zh., 1, 170-179 (2011).
7. **A.R. Khashimov, S. Yakubov** *On some properties of solutions of the Cauchy problem for a non-stationary third-order equation of composite type.* Ufimsk. Mat. Zh., 6, No. 4, 139–148 (2014).

УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Эшмаматов Л.А.[1], Холмуротов Р.Б[2]
[1,2]Термиз государственный университет;
eshmamatovlutfila@gmail.com, ravshanxolmurotov1@gmail.com

Задачи со свободной границей являются матаматическими моделями физических процессов таких как: плавление, с переохлаждением когда температура жидкости в окрестности свободной границы становится меньше темпратуры кристаллизачи, изменение концентрачии примеси в веществе при его плавлении, которая существенно влияет напроцесс плавнения, горения фильтрации жидкостей и газов в пористых средах. В связи с этим они имеют большое применение в механике, металлургии, геологии, геотермии, мерзлотоведении, мелиорацию, при изучении процессов извлечения и транспортировки нефти.

Одной из представителей таких задач является задача Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме). Небольшую историю имеет задача Флорина, впервые она возникла в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес, когда в породу основания и берегов примыканий плотин нагнетаются глинистые растворы. Сюда также можно включить класс задач, которые возникли в связи с задачей об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду.

В настоящей работе изучается математические модели фильтрации для квазилинейного параболического уравнения вида задач со свободной границей типа Флорина.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(t,x,u)u_{xx}(t,x) + bu_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

где $s(t)$-свободная (неизвестная) граница, которая определяетсия вместе с функциям $u(t,x)$. $a(t,x,u)$-коеффициент филтрации, b-скорость переноса. Коэффициент фильтрации a, являющийся одной из наиболее важных величин, определяющих скорость фильтрации, зависит от природы растворителя и растворенного вещества [2].

Problem (1) - (5) summarizes the previously considered problems arising in the study of filtration taking into account the influence of bound water. It is the questions of the existence and uniqueness of the classical single-phase solution the one-dimensional Florin problems were studied in [3], when $a(t,x,1)$, $b = 0$. Asymptotik behavior solutions for $trightarrow\ infty$ are considered in [4].

Литература

1. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967, с.736.

2. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968.428 с.

3. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения.* Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.-мат.Науки".2012. 26. С. 99–106.

4. Okuba A., Levin S.A. *Diffusion and Ekological Problems.* Springer, 2002 pp/470.

7 – ШЎЪБА. МАТЕМАТИКА ВА ИНФОРМАТИКА ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

UDK 372.85

Darsdan tashqari qiziqarli matematik ma‘ruzalar tashkil etishning ahamiyati

Abdusamatova H.O. [1], Majidova D.B.[2].
[1]Termiz agrotexnologiya va innovatsion rivojlanish instituti;
abdusamatovahilola1991@gmail.com
[2]Termiz davlat universiteti; dilnoza-majidova93@gmail.com

Matematiklar hayotida ma‘ruza maxsus o‘rin tutadi. Mazmunli ma‘ruza o‘qish - san‘at xisob-lanadi. Muvaffaqiyatli chiqqan ma‘ruza talabaga estetik zavq bag‘ishlaydi.

Matematika ta‘rixida S.X.Sirojiddinov, T.A. Azlarov kabi ma‘ruza san‘atini mukammal egallagan buyuk matematiklar bor.Keyingi 20 yil mobaynida mamlakatimiz ta‘limida, xususan o’rta maktabda matematika o’qitish o‘z ahamiyatini nihoyatda katta bo’lgan o’zgarishlarni amalga oshirildi va oshirmoqda. Ayniqsa, respublikamizning mustaqilligidan keyin, Ta‘lim to’g’risidagi Qonun va boshqa farmonlarning chiqarilishi buning yaqqol isbotidir.
Maktab oldiga prinsipial yangi maqsadlarning qo’yilishi matematika o’qitish mazmunining tubdan o’zgarishiga olib kelmoqda. Matematika boshlangich kursi mazmunida ham, darslik va qo’llanma-lar uni o’qitish metodikasida ham kattagina o’zgarishlar qiladi.
Matematik ma‘ruza – Oliy o‘quv yurtlarida qabul qilingan dars shakli bo‘lsa ham, ommabop, jumladan maktab o‘quvchilari uchun ham aloxida ahamiyatga ega. Maktab o‘quvchilari uchun yozda tashkil etilgan oromgohlarda matematik ma‘ruzalarni oliy o‘quv yurti professor o‘qituvchi-larni taklif qilib o‘tkazilsa o‘quvchilarni matematikaga bo‘lgan qiziqishi ya‘nada ortadi.
Puxta tayyorgarlik bilan o‘tilgan ma‘ruza o‘quvchini matematika olamiga undaydi, mantiqiy mushoxoda etishga undaydi. Bir ma‘ruzaga qancha foydali material sig‘dirish mumkinligi haqida tasavvur berishga urinib misol bayon qilamiz: O‘nli sanoq sistemasida yozilgan sonlardan kvadrat ildiz chiqarish qoidasi qadimdan ma‘lum. So‘ngi vaqtda sonning kvadrat ildizini topishda kalkulya-tirlardan foydalanish mumkin bo‘ldi. Shunday bo‘lsa xam kvadrat ildiz chiqarish qoidasi bilan tanishib qo‘yish foidadan xoli emas.

1-misol $\sqrt{7,62,31,21} = 2761$

	4
47* 7	362-329
546*6	3331-3276
5521*1	5521-5521
0	0

Izohlar. Ildiz chiqarilishi lozim bo‘lgan sonning butun qismining 1-misolda 763121 raqamlari o‘ngdan chapga qarab juft- juftlariga ajratiladi. Kvadrati eng chapdagi juftga yaqinraqam 2 yoziladi va uning kvadrati4 o‘sha juft 7 dan ayriladi. Yozilgan raqam ikkilantirilib 4 ayirmadan chaproqqa qo‘yiladi va navbatdagi raqam izlanadi. U ikkiklanish 4 ning yoniga yozilib, shu raqamning o‘ziga ko‘paytirilsa, navbatdagi juftlik ayirmaning tushurilgandagi son 362 eng yaqin ammo undan kichik bo‘lsin. 1-misolda bu 7 raqami. Bu amal ildiz aniq 0 chiqquncha yoki yetarli aniqlikda topulgincha davom ettiriladi. $\sqrt{7,62,31,21} = 2761$ – aniq ildiz,

$$\sqrt{1,1} = 1,048$$

taqribiy ildiz. Agar ildizning taqribiy qiymatini hisoblash kifoya bo‘lsa,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \tag{1}$$

Sodda formulalardan foydalangan ma‘qul.
Misol. $\sqrt{1,1} = 1 + \frac{1}{10} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 1,05$

$$\sqrt{110} = \sqrt{100 \cdot 1,1} \approx 10 \cdot 1051 = 10,5$$

2-misolda qo‘yilgan xatoni baholash uchun taqribiy ildiz kvadratini taqqoslaymiz: $10,5^2 = 110,25$ farq 0.25 Lekin endi bu qiymatdan foydalanib ildizni yana ham aniqroq hisoblash mumkin: $\sqrt{110} \approx \sqrt{100,25 - 0,25} = 10,5 \cdot \sqrt{1 - \frac{0,25}{110,25}} \approx 10,5 \cdot (1 - \frac{0,25}{110,25})$

Ya‘ni $\sqrt{110} \approx 10,48809...$ (farqni baholab ko‘ring) Umumiy holda (1) formulada yo‘l qo‘yiladigan xatolikni ko‘rsatamiz. Shu maqsadda quyidagi ikki tengsizlikni hisoblash kerak:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \tag{2}$$

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{8} \tag{3}$$

Buning uchun tengsizlikningning har ikki qismini kvadratga oshirish kifoya (3) tesizlikni kvadratga oshirganda

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

formuladan foydalanish mumkin). Shunday qilib (2) va (3) dan

$$0 < (1 + \frac{x}{2}) - \sqrt{1+x} < \frac{x^2}{8} \tag{4}$$

ya‘ni $1 + \frac{x}{2}$ Bilan $\sqrt{1+x}$ orasidagi farq $\frac{x^2}{8}$ dan kichikligi kelib chiqadi. Xususan, $\sqrt{1,1} \approx 1,05$ qiymat xatoligi $\frac{1}{8} \cdot (0,1) = 0,00125$ dan kichik.
Agar $\sqrt{a}$ ko‘rinishdagi ildizni hisoblash lozim bo‘lsa, a sonini $n^2 + \alpha$ tasvirlash lozim so‘ngra

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 + \alpha} = n\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{n^2}}} \approx n(1 + \frac{\alpha}{2n^2}) = n + \frac{\alpha}{2n^2} = n + \frac{\alpha}{2n}$$

Qoidani qo‘llash mumkin.
Misol $\sqrt{1001} = \sqrt{32^2 - 23} \approx 32 - \frac{23}{2 \cdot 32} \approx 31,64$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Ahadova M.** *Beruniy va uning matematikaga oid ishlari* ”Fan” 1976
2. **Afonina S. I.** *Matematika va go‘zallik.* T., O‘qituvchi 1987.
3. *Matematik terminlarning ruscha-o‘zbekcha izohli lug‘ati T.* ”O‘qituvchi” 1974
4. **Mirzahmedov M. A va boshqalar** *tenglama tengsizliklarni yechish* T. ”O‘qituvchi” 1989 yil
5. **Nurmatov A. Qodirov I.** *Matematikadan sinfdan tashqari va fakultativ mashg‘ulotlar* T. ”O‘qituvchi” 1980

УДК 372.851

SPHERE AND BALL IN THE WORLD AROUND US

Akhmedova F. A.[1], Xabibullina M. M.[2]
[1]academic lyceum at the Tashkent International Westminster University;
fotimaahmedova88@gmail.com
[2]academic lyceum at the Tashkent International Turin Polytechnic University;
elvira1777@icloud.com

For many centuries, mankind has not ceased to replenish its scientific knowledge in a particular field of science. Stereometry, as the science of figures in space, is inextricably linked with disciplines such as physics, astronomy, computer science, programming, chemistry and biology. Many mathematicians, and even ordinary people, were interested in such a figure as a ball and its "shell called a sphere. Surprisingly, the ball is the only body with a larger surface area with a volume equal to the volume of other compared bodies, such as a cube, a prism or other various polyhedral. We deal with figures in the shape of ball on a daily basis. For example, almost everyone uses a ballpoint pen, at the end of the rod of which a metal ball is mounted, rotating under the action of friction forces between it and the paper and in the process of turning on its surface, the ball "takes out"another portion of ink. In the automobile industry, ball bearings are manufactured, which are a very important part of the car and ensure the correct rotation of the wheels and the stability of the car on the road. Elements of cars, airplanes, rockets, motorcycles, shells, and floating vessels that are constantly exposed to water or air, mostly have some spherical surfaces called fairings. We can assume that we need balls in order to make our world more diverse and voluminous. So, what is a ball? A ball is usually called a body bounded by a sphere (a surface defined as the geometric location of points in space that are removed at a given distance from a given point). This distance is called the radius of the ball. The ball is formed by rotating a semicircle around its fixed diameter. This diameter is called the axis of the ball, and both ends of the specified diameter are the poles of the ball.A closed ball includes a sphere, an open one excludes it. The sphere had great honor in ancient times. Astronomical observations over the firmament invariably evoked the image of a sphere. The Pythagoreans taught about the existence of ten spheres of the universe, through which celestial bodies supposedly move. They argued that the distance of these bodies from each other is proportional to the intervals of the musical scale. This was seen as an element of world harmony. Pythagorean "music of the spheres"consisted in such semi-mystical arguments. Aristotle believed that the spherical shape, as the most perfect, is peculiar to the Moon, the Sun, the Earth and all world bodies. Developing the views of Eudoxus, he believed that the Earth is surrounded by a number of concentric spheres. In the XI book of his Principles, Euclid defines a ball as a figure described by a semicircle rotating around a fixed diameter. He proves only the theorem that the volumes of two balls are related as cubes of their radii, but does not derive a formula and does not give any rule that he probably did not know for calculating the surface area of a sphere or the volume of a ball. The derivation of the formula for the volume of the ball and the surface area of the sphere is one of Archimedes' greatest discoveries. In antiquity and in the Middle Ages, the need for astronomy served as the most important stimulus for the development of many branches of mathematics and, above all, spherical trigonometry, which was a mathematical instrument for solving specific astronomical problems. With the development of astronomy, the complexity of its problems and the increasing requirements for the accuracy of calculations, this instrument was gradually improved, and the content of spherical trigonometry was enriched accordingly. It was presented both in astronomical treatises - as an introductory section of astronomy - and in special mathematical works. Of particular importance for the history of spherical trigonometry are ancient Greek writings on the sphere - a science that included elements of astronomy, geometry on the sphere and trigonometry. By the IV century BC, it had received full development and was considered as an auxiliary astronomical discipline. The earliest known works on the sphere were written during the IV century BC - I century AD by such outstanding scientists of antiquity as Autolycus, Euclid, Theodosius, Hypsicles, Menelaus. In the late 1940s, mysterious stone formations of a perfectly round shape were discovered in the jungles of the Central American Republic of Costa Rica. The balls have sizes from 10 cm to 3-4 meters in diameter. During aerial photography, it turned out that they are scattered on the surface of the earth not by chance, but make up geometric shapes. It is even possible that the balls are not scattered, but laid out in the form of a huge star map; each ball is a star with a corresponding description. Among the hypotheses of the origin of the balls, there are only exotic versions: from aliens to the sculptors of Atlantis. There is also a version that the balls were cut out (counting on future dividends from tourism) by bored Nazi migrants who flooded Latin America after the collapse of the "third Reich". It was not possible to explain the abundance of balls and strange drawings on them by natural reasons. In Kazakhstan, during the development of a sand quarry at a sufficiently deep depth, several large specimens of such boulders were also found. This discovery was reported by the Phenomenon commission; alas, no photographs of the finds have been preserved. To date, there is one of the most fashionable extreme entertainment - Zorbing. An attraction, a type of active recreation, consisting in the descent of a person in a transparent ball from a mountain or associated with the crossing of reservoirs. Zorbing gives you the opportunity to experience new, unusually bright and powerful sensations and shake off the routine of everyday life A globe, a soccer ball, and Christmas toys look like a geometric ball. Architecture is not complete without the shape of a ball. The ball and sphere are a storehouse of fantasy for artists. The connection of the surrounding world with the ball and the sphere is inseparable. If we reduce living organic forms to geometric ones, we get - a ball, a cone, a cylinder, polyhedra. The idea that simple stereometric formations are at the heart of life is found in Plato and among Renaissance scientists (Luca Pacioli). A variety of spherical shapes can be found in nature: raindrops, berries, fruits, fish eggs, eggs, molecules, atoms, planets, etc. Huge clumps of incandescent matter also have the shape of a ball. If you look at a small drop of water in oil, it has the shape of a ball. If the droplet is larger, then it flattens under its own gravity, and a very large drop crumbles into several small ones. In our life, the ball plays a very important role, every person is somehow connected with this figure. Take at least the fact that we all live on Earth - on a huge ball! After studying the information about the shape of the ball, I realized that nature itself took this shape for the structure of the world. And to a person, as a part of this world, it is very attractive. That is why a person strives to use this form in his daily life. And the isoperimetric property makes the ball a leader among other geometric bodies. Having studied a lot of material about the Divine universe, I realized that it is based on the ball as an ideal shape. Man has subconsciously linked divine energies with spherical surfaces throughout all ages and up to the present time, reflecting this consciousness in religious buildings: churches, minarets, mosques.The science of eniology suggested to me that a person needs to be surrounded by rounded bodies since round shapes have a uniform field without significant stress zones and pathogenic anomalies. A person needs to surround himself with rounded objects. What can help: rounded design of household appliances, passenger cars. In the interiors of houses, you need to build a lot of plastic lines, and the people living in them become more natural, and harmonious. In a business atmosphere, it is necessary to use round tables during negotiations.In addition to the definitions of the ball that I found in the textbook, there is another definition of the ball as a figure not only the "most perfect"(Dante), but also the "most beautiful"of figures (Plato). The ball is an ideal shape. There is no doubt about it.

УДК 371:38.014

THEORETICAL BASIS MATHEMATICAL COMPETENCE OF FUTURE TEACHERS

Amonkulov Kh [1], Safarov S.S [2]
[1] Tajik State Pedagogical University named after S. Ainy, Dushanbe., Tajikistan;
amonqulov88@mail.ru
[2] Tajik Pedagogical Institute, Penjikent, Tajikistan;

Methodical classes, as the authors write, are, in fact, a system of didactic games, during which children explore problem situations, identify significant signs and relationships, make discoveries. A feature of the program is its focus on a deeper study of "objects and phenomena of the world: it prepares children for the perception and elementary understanding of the dialectical unity of the world in its quantitative and qualitative relationships."The authors understand that the necessary condition for successful learning is the creation of a personality-oriented approach to the preschool child, the creation of an atmosphere of goodwill in the educational process.

The concept of lifelong education (pre-school and primary school) notes that "variability brought to the pre-school education an unjustified interest in subject-based learning while "a balance of reproductive (reproducing the finished sample) and research activities, joint and independent forms of activity is required. The tendency to master a larger number of supporting concepts in the selection of content does not seem to be random. After all, the more basic scientific concepts a student learns, the closer education is to what is called science. "It is possible that in the future the list of basic concepts will be modified or expanded,"notes A.M. Breathing.

Intellectual activity corresponds to a high level of human development. It forms the basis of his theoretical activity, including the use of complex systems of symbolic formations, and involves a fairly high level of abstraction from objects of activity [4].

The scientific development of a preschool child should be based on a system of successive small intellectual tasks aimed at the formation of certain intellectual skills.

The selection, sequence, completeness of the content of small intellectual tasks is a serious problem.

In the process of research, intellectual tasks were identified in the sequence of studying support concepts: "a set of relationships on a set of correspondence, number of geometric figures, logic"[5].

The formal-logical side of the methods of mental activity is formed on the material of mathematical content. However, psychologists argue that, being formed on any one subject content, the mental action is further used as a ready-made method of thinking in the analysis of any area of reality. The identification of small intellectual (scientific mathematical) problems and the definition of intellectual (scientific) skills as special assimilation not only contributes to the mathematical development of the child, but also outlines a completely new picture of intellectual development as a whole.

INFORMATION COMPETENCE . The importance of information about the world around us explains;

Basic concepts studied: information, algorithm, model - and forms an idea of their properties;

-self-directed, self-aware, independent in learning activitiesm akes decisions;

-set, set element, part set, belonging, sets uses concepts such as intersection and union, definition, axiom, theorem, proof;

-gives examples to illustrate the point;

-natural number, prime and complex numbers, division of numbers, whole number, simple

-uses concepts such as fractions, decimals, rational numbers, arithmetic square roots, and irrational numbers;

-performs operations on rational numbers and special irrational numbers; compares numbers;

-rounds numbers; Ordinary and decimal fractions sort numbers in the form;

-performs uncomplicated substitutions in the calculation of numerical expressions, including natural and negative integers;

-performs simple substitutions of whole expressions: opens parentheses, gives similar terms, multiplies the common multiplier

-pulls out of parentheses;

-in simplifying the calculation of the values of expressions, in short

-uses multiplication formulas;

-complex of expressions containing fractional and square roots

-makes non-existent substitutions;

-uses the concept of the standard representation of a number;

-uses the concepts of equality, numerical equality, equation, equation root;

-constructs linear, quadratic equations and inequalities in solving problems in practical and other subjects, and uses analytical and nonanalytic methods of solving (for example, the "test method");

-uses the concepts of bar and pie charts, data tables, arithmetic mean, median, maximum and minimum values, scattering, series of numbers.

By acquiring mathematical ideas, the child gains the necessary sensory experience of orientation in the various properties of objects and the relationships between them, masters the methods and techniques of cognition, and applies the knowledge and skills formed during the training in practice. This creates the prerequisites for the emergence of a materialistic outlook, connects learning with the surrounding life, and fosters positive personality traits. Let us dwell on the main tasks of pre-mathematical training of children in kindergarten.

1. Formation of a system of elementary mathematical representations in preschoolers. From the content side, the most important in the sense of the formation of primary simple representations are such fundamental mathematical concepts as "set "relation "number "quantity". These concepts are widely represented in the initial training, but not in the direct sense, but from the point of view of the propaedeutics of formation, only an idea of them. Figuratively speaking, a child in kindergarten comprehends "sciences before science and naturally this is due to the fact that, in their psychological structure, elementary mathematical representations have a figurative nature. The gradual complication of knowledge mastered by children consists in increasing both the volume of quantitative) spatial and temporal representations, and the degree and generalization. The system of knowledge and initial ideas about sets, relationships, numbers and quantities, although it is very limited, by the scope of learning opportunities for preschoolers, is significant for further mastering the concepts of school mathematics. Elementary mathematical representations and the corresponding methods of action are the main components of the knowledge system for preschoolers.

2. The formation of the prerequisites of mathematical thinking and individual logical structures necessary for mastering mathematics in school and general mental development. Mastering the initial mathematical concepts contributes to the improvement of the cognitive activity of the child as a whole and its individual sides, processes, operations, actions. The formation of the logical structures of thinking - classification, ordering, understanding the preservation of quantity, volume mass, etc., acts as an important independent feature of the general mental and mathematical development of a preschool child.

3. The formation of sensory processes and abilities. The main direction in teaching young children is the implementation of a gradual transition from specific, empirical knowledge to a more general one. Empirical knowledge formed on the basis of sensory experience is a prerequisite and necessary condition for the mental and mathematical development of preschool children.

Foreign language lesson has its own specificity, unlike other school subjects; the main objective of a foreign language lesson is the formation of intercultural communicative competence of learners. At the present moment the global aim of teaching foreign language is involvement to other culture and participation in dialogue of cultures. This aim is gained by the way of formation the ability to intercultural communication. The process of teaching foreign language is organized on the basis of communicative character tasks; teaching foreign language communication using all necessary for this work means is a distinctive feature of a foreign language lesson.

REFERENCES

1. **Sh. Mirziyoyev** *Together we will build a free, democratic and prosperous state of Uzbekistan* Tashkent: "Uzbekistan 2016. 56 p.

2. **Arushanova A** *Tasks and forms of organized learning* . ."Preschool education. 1994, No. 1.pp. 41-44.

3. **Asmolov A** *On the organization of interaction of educational institutions and ensuring continuity of preschool and primary general education* ".Preschool education. 1994, No.6. pp. 2-5.

4. **Ashikov V** *Preschool education inthe new century* ".Preschool education.2000, pp. 11.

5. **Altshuller G.S** *Find an idea. Introduction to the theory of inventive problem solving.* ". Novosibirsk: Nauka, 1986, 1991.

УДК 51

Funksiya tushunchasining mazmunini samarali oʻzlashtirish haqida

Arziqulov A.U.[1], Raxmonov S.[2]
[1]Samarqand davlat universiteti; a.arziqulov@mail.ru
[2]Oʻzbekiston Finlandiya pedagogika instituti; raxmonovsamariddin348@gmail.com

Dunyoning juda ko'p mamlakatlarida maktab algebra kursining mazmuni to'rtta asosiy yo'nalishlardan tashkil topgan: 1) son tushunchasi 2) funksiya tushunchasi(funksional bog'lanishlar) 3) tenglama va tengsizliklar 4) ayniy almashtirishlar. Bular orasida funksiya tushunchasini o'qitish muhim o'rinni egallaydi. 5-6 sinflarning matematika kurslarida funksional bog'lanishlarga tayyorgarlik ko'riladi. 7-9 sinflar algebrasida funksional bog'lanishlarga doir materiallar tizimli shaklda o'rganiladi.Yuqori sinflarda esa funksional bog'lanishlar va ularning asosiy xossalari keng o'rganiladi.

Funksiya tushunchasini o'quvchilarga o'rgatish muammosi taniqli matematiklarning ishlarida o'rganilgan, jumladan, Bernshteyn S.N., Markushevich A.I., Shilov G.E., Kolmogorov A.N., Dorofeev G.V.

Yu.Kolyaginning fikricha "Funksiya, uning xossalari va grafigi maktab matematikasining asosini tashkil etadi. Funksional yo'nalish atrofida zamonaviy maktab algebrasi, matematik analiz asoslarni va ma'lum darajada geometriya ham samarali o'rganiladi. Bu yo'nalishning o'ziga xosligi va muhimligi shundaki, unda fan ichidagi va fanlararo aloqalar o'rnatiladi"(Kolyagin) . Nemis matematigi va pedagogi Feliks Kleyn(1849-1925) funksiya tushunchasining matematikada yetakchi o'rni haqida o'zining "Елементар математика с точки зрений висшеви"nomli kitobida shunday deb yozadi: "Zamonaviy matematikada qaysi tushuncha ustivorlik qiladi? Bu funksiya haqidagi tushunchadir. Funksiya tushunchasi maktab matematikasida asosiy va boshqaruvchi vazifani bajarishi kerak. Bu tushunchani o'quvchilarga juda erta o'rgatish kerak va uni butun algebra va geometriyani o'qitish jarayoniga singdirib yuborish kerak".

Yuqoridagi fikrlarni amalga oshirish bo'yicha maktab matematikasida funksiya tushunchasini o'rgatish metodikasini takomillashtirish maqsadida ma'lum bir nechta shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalarga doir misollar tizimini yaratish yondoshuvni taklif qilamiz: 1) Bir nechta formulalar bilan berilgan funksiyalarni tuzish va ular bilan arifmetik amallar bajarish(chekli va cheksiz to'plamlarda aniqlangan). 2)Ayrim nuqtalarda funksiyalarni aniqlamaydigan formulalarga doir misollar qurish. 3) Bir-biridan cheklita nuqtalardagina farq qiluvchi funksiyalarga doir misollar tuzish. 4) Ma'lum bir nechta xossalarga ega bo'lmagan funksiyalarga doir misollar qurish, masalan segmentda chegaralanmagan funksiyaga misollar tuzish va shunday funksiyalarga misollar keltiramiz.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A_1,\\ f_2(x), & x\in A_2,\\ f_3(x), & x\in A_3,\end{cases}\quad A_1\cap A_2\cap A_3=\varnothing,\ D(f)=A_1\cap A_2\cap A_3,\ \ A_1,A_2,A_3\subset R$$

1) Uchta formula bilan berilgan bitta funksiya. Agar $A_1\cap A_2\cap A_3\neq\varnothing$ boo'lsa, bu 3 ta formula bilan berilgan f qonuniyat funksiyani aniqlamaydi.

2) Chekli to'plamda aniqlangan funksiyalarning yig'indisini topish ,

$$f_0(x)=\begin{cases} b_1, & x=a_1,\\ b_2, & x=a_2,\\ b_3, & x=a_3,\end{cases}\qquad a_1\neq a_2\neq a_3$$

$$f_1(x)=\begin{cases} c_1, & x=a_1,\\ c_2, & x=a_2,\\ c_3, & x=a_3,\end{cases}\qquad (f_0+f_1)(x)=\begin{cases} b_1+c_1, & x=a_1,\\ b_2+c_2, & x=a_2,\\ b_3+c_3, & x=a_3,\end{cases}$$

3) Cheksiz va chegaralangan to'plamlarda aniqlangan funksiyalarning yig'indisini topish

$$g_1(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-3,\, 0], \\ 2, & x \in (0,\, 2], \qquad D(g_1) = [-3,\, 3] \\ 1, & x \in (2,\, 3], \qquad E(g_1) = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2,\, 0], \\ 3, & x \in (0,\, 1], \qquad D(g_2) = [-2,\, 4] \\ 2, & x \in (1,\, 3], \qquad E(g_2) = \{-1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$(g_1 + g_2)(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-2,\, 0], \\ 5, & x \in (0,\, 1], \qquad D(g_1 + g_2) = [-2,\, 3] \\ 4, & x \in (1,\, 2], \qquad E(g_1 + g_2) = \{2, 3, 4, 5\} \\ 3, & x \in (2,\, 3], \end{cases}$$

4) Berilgan chiziqli funksiyadan faqat chekli nuqtalardagina farq qiluvchi funksiya qurishga doir misol.

$$f(x) = 3x + 2, \;\; x \in [-2,\, 3],$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \in [-2,\, 3] \; \{-1, 0, 1, 2\}, \\ 1, & x = 1, \\ -1, & x = 0, \qquad f(x) = f_1(x), \;\; x \in [-2,\, 3] \; \{-1, 0, 1, 2\}, \\ 4, & x = 1, \qquad f(x) \neq f_1(x), \;\; x \in \{-1, 0, 1, 2\}, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

5) Segmentta chegaralanmagan funksiyalarga doir misollar.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in [-1,\, 0) \cup (0,\, 1], \\ 1, & x = 0, \qquad D(f_1) = [-1,\, 1]. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in (-\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2}), \\ -1, & x = -\dfrac{\pi}{2}, \qquad D(f_2) = [-\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2}]. \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bunday topshiriqlarni bajargan o'quvchilar funksiya tushinchasining mazmunini chuqur tushinib, funksiyaning boshqa xossalalarini tez o'zlashtiradilar.

Литература

1. **Бернштейн С.Н.** *Понятие функции в средней школе. Доклады читанные на Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве, Москва.* : 1915.
2. **Маркушевич А.И.** *Понятие функции. Математика в школе.* : 1947, № 4.
3. **Шилов Г.Е.** *Что такое функция? , Математика в школе.* : 1964. №1. С.7-15.
4. **Колмогоров А.Н.** *Что такое функции. Математика в школе.* 1978. №2.
5. **Дорофеев Г.В.** *Понятие функции в математике и школе, Математика в школе.* 1978. №2.

УДК 371:38.014

UMUMTA'LIM MAKTABLARIDA MATEMATIKANI INTEGRATIV YONDASHUV ASOSIDA O'QITISH METODOLOGIYALARI

Avliyoqulov. A A.
Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston; avliyoqulov2017@gmail.som

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning "Buyuk bobolarimizning munosib davomchilari bo'ladigan yetuk avlodni tarbiyalash muhim masala hisoblanadi"[1, 4-5-b.] degan so'zlari O'zbekiston taraqqiyotining keyingi bosqichida barcha sohalarda, jumladan, muhim strategik jabha-yoshlar tarbiyasida ham amal qilinishi zarur bo'lgan bosh maqsadimizni belgilab berdi. Hozirgi davrda taraqqiy etgan davlatlarning iqtisodiy, siyosiy, ijtimoiy va madaniy ravnaqi fan taraqqiyoti bilan chambarchas bog'liqdir. Bu esa, umumta'lim maktablarida matematika fanini integrativ yondashuv asosida o'qitish uzviyligini ta'minlash va matematika darslarida zamonaviy pedagogik texnologiyalarni qo'llashni, takomillashtirishni, interfaol, interaktiv, usullarni keng ko'lamda bosqichma-bosqich amalda joriy etishni talab etadi. Integrasiya atamasi bir butunlik degan ma'noni anglatadi, matematik fanlar integrasiyasi deganda fanlar mazmunining o'zaro singishi va aloqalari nazarda tutiladi. Integrasiya muammosi fanning rivojlanishi bilan bog'liq2"[2, 92-b.]. Bu esa, matematikani o'qitishda integrativ yondashuvlar asosida tashkil etish va boshqa fanlar doirasida ham qisman o'zlashtirilgan bo'lib ularni o'zlashtirish o'quvchilar uchun qiyinchilik tug'dirmaydi va ularni bilim darajasini to'ldirishga yordam beradi. "Integrasiya-chuqur noan'anaviy ta'lim bilan tavsiflana oluvchi, turfa xarakterdagi katta hajmli o'quv materialining uyg'unlashuvini o'zida namoyon etadi"3. [3, 108-b.]. Ensiklopedik va ilmiy adabiyotlarda "integrasiya"atamasini turli tipdagi qismlar va elementlarni bir butunga birlashtirish bilan bog'langan rivojlanish jarayoni sifatida tushuniladi.

Integrasiya-ayrim bo'laklarni yoki elementlarni bir-biriga qo'shilishi, bir butunga aylanishi, yaxlitlanishidir. "Integrasiya tushunchasi XVIII asrdayoq ingliz filosofi va sosiologi Gerbert Spenser tomonidan izohlangan edi"4.[4, 67-b.].

Integrasion dars odatdagi darslardan:

-aniqligi, ixchamligi, o'quv materialining zich ko'lami;

-darsning har bir bosqichida integrasiyalanayotgan o'quv fanlarning har tomonlama mantiqiy sharhlanganligi;

-berilayotgan o'quv materidagi keng ko'lamli axborotga egaligi bilan ajralib turadi.

Integrasiyalashgan darsda maqsadni bir necha fanlarning aloqadorligini inobatga olgan holda belgilash lozim bo'ladi. Integrasion darsning yutuqli jihatlari quyidagilardan iborat:

1. Bu turdagi mashg'ulotlarda o'quvchi olamni bir butun yaxlit holda tasavvur etishni boshlaydi.

2. O'quvchi potensiali rivojlanadi, tevarak atrofni katta qiziqish bilan o'rganishga kirishadi, hodisalar uning ongida mantiqiy, fikriy, sababli yechimni qidirib topishga unday boshlaydi.

Natijada, o'quvchilarda muloqot qobiliyati, taqqoslash-qiyoslash, umumlashtirish va xulosa qilish qobiliyatlari taraqqiy eta boradi. Darslarni integrasion shaklda tashkil etish nafaqat darsning maroqli va sermazmun o'tishini, balki o'quvchilar dunyoqarashining har tomonlama rivojlanishini kafolatlaydi. Fanlararo, bog'liqlik, fanlararo falsafiy masalalarni shaxsan his etmay turib, o'quvchiga integrasion mashg'ulotni taqdim etmaslik to'g'ri bo'ladi, zero, anglanmagan integrasiya o'quvchi ongidagi bilish jarayonini mavhum holatga, u orqali chalkash xulosalarga taqab qo'yadi. Matematika darslarini integrativ-innovasion yondashuvlar asosida o'tish o'qituvchiga yuksak pedagogik mahorat hamda ta'lim jarayoniga nisbatan yangicha yondashuvni talab etadi. O'qituvchi alternativ, o'quvchini faollikka chorlovchi savollar orqali o'quv xonasida ijodkorlik, izlanuvchanlik, qiyoslash, o'xshashlik va farqini topish singari xususiyatlarni rivojlantiruvchi muhitni yaratadi. O'quvchilarga matematik savollar berish bilan birgalikda o'quvchilarda fikrlashga majbur qiluvchi savollar tuzish qobiliyatini ham shakllantirib boradi. Bundan tashqari, matematika fanining uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketlik asosida va darsni integrasiyalashgan holda mavzuning mohiyatini ochib berish kerak. Integrasiyalashgan darslar yosh avlodda tabiat va jamiyat haqidagi yaxlit tasavvurlarni shakllantirishga yordam beradi. Matematikani o'qitishda integrativ metodlar asosida yondoshgan holda tashkil etish va texnologik jarayonlar metodidan foydalanish masalalarining keng talqin qilinishi bugungi kunda salmoqli ahamiyatga ega bo'lib borishi bilan belgilanadi va u quyidagilarda o'z aksini topadi:

1. Umumta'lim maktablari o'quvchilariga matematika fanini o'qitishda integrativ yondashuv asosida talqin qilinishiga ijtimoiy zaruriyat tug'ilishi;

2. Matematikani o'qitishda integrativ yondashuvlar metodologiyasini o'quv jarayoniga tadbiq etish

usullari;

Matematika fani-ta'limning boshqa fanlari bilan uzviy bog'lanadi. Matematika darslarida fanlararo bog'lanishlarni ishlab chiqish uchun o'quvchining psixologik-pedagogik xususiyatlarini hisobga olib, shunga mos ravishda dars o'tish metodini yo'lga qo'yish va hozirgi zamon talabini, o'quvchilarning ham ruhan, ham jismonan, ham aqlan imkoniyatlarini hisobga olishimiz kerak bo'ladi. Shu o'rinda bir savol tug'iladi. Biz matematika darslarini o'tish jarayonida ayniqsa integrasion yondashuv metodologiyasidan foydalanish natijasida qanday yutuqlarga erishamiz va qanday kamchiliklarga yo'l qo'yamiz? Matematika darslarida mavzuni o'quvchilarga integrasiyalashgan holda tushuntiradigan bo'lsak o'quvchi ongiga mavzuning mohiyatini singdiribgina qolmay balki ularni boshqa fanlarga ham bo'lgan qiziqishini orttirgan bo'lamiz. Umumta'lim maktablari asosan matematika fanini chuqur o'rganishga yo'naltirilgan bo'lib, ushbu fanni o'qitishda integrativ yondashuv asosida tashkil etish o'quvchilarni dunyoqarashlari kengayib ijodiy salohiyatlari rivojlanadi. O'quvchilarga fanlararo integrasiyalashni yo'lga qo'yish matematika fanini o'qitishda algebra va geometriya fanini o'rganish bilan birga fizika biologiya, geografiya, atrofi olam, jamiyat haqidagi tushuncha va tasavvurlar shakllanadi. Maktab matematika kursining amaliy ahamiyati kundan-kunga ortib bormoqda. Matematika umumiy o'rta ta'limning tayanch fanlaridan biridir. U boshqa fanlarni o'rganishda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi. Bu birinchi navbatda tabiiy yo'nalishdagi fanlarga talluqlidir. Matematikani o'qitishda integrativ yondashuvlar metodologiyasi asosida tashkil etishning shakli va mazmunidan kelib chiqib fanning xususiyatini hisobga olgan holda o'quvchilarga bilim berish tavsiya etiladi.

Integrasiyalashgan dars . -bunday dars usuli fanlararo aloqani bog'lash, qo'llash maqsadida o'tkazilib, umumiy bilimdonlik darajasini aniqlash. Shunday ekan matematikani o'qitishda integrasion yondashuvlar metodologiyasini yaratib, matematika darslarida foydalanilsa o'quvchilar matematika fani bilan boshqa fanlarning o'zaro bog'liqligini anlaydi va his qiladilar. Bu bilan esa biz o'quvchilarga matematika fanini yanada chuqurroq o'rgatishga zamin yaratamiz. Matematikani o'qitishda integrativ metodlar uslubiy yondashuvda o'quvchilar bilish va o'rganish jarayoniga butunlay sho'ng'ib ketadilar, ular o'zlari bilgan va o'ylayotganlari xususida bahslashishlari ham mumkin. Matematikani o'qitishda integrativ yondashuvlar asosida tashkil etish va o'qitish mavzular boshqa fanlar doirasida ham qisman o'zlashtirilgan bo'lib ularni o'zlashtirish o'quvchilar uchun qiyinchilik tug'dirmaydi va ularni bilim darajasini to'ldirishga yordam beradi. Biz yuqorida keltirgan bu integrtiv usullardan ta'lim jarayonida foydalanish yuqori samara beradi. Matematikaning boshqa fanlar integrasiyalashuvi, mantiqi va izchilligi, ularni eng zamonaviy boshqarish tizimini yanada chuqurlashtirish takomillashtirish va liberalashtirish bo'yicha ehtiyojlar sezilmoqda. Integrasiyalashgan darsning muammosi-bu ikkita o'qituvchining o'zaro ta'siri texnologiyasi, ularning ketma-ketligi va tartibi, materialning taqdim etishning mazmuni va usullari, har bir harakatning davomiyligidir.

Metodologiya . (metod va ...logiya so'zlaridan)-tadqiqotchining nazariy va amaliy faoliyatini tashkil etish, tiklash tamoyillari va usullari tizimi hamda bunday tizim haqidagi ta'limot. Metodologiya metodlar haqidagi ta'limot yoki yalpi umumiy bilish metodi, deb ham ta'riflanadi. Metodologiyaga ilmiy bilishning, voqyeylikni anglash va o'zgartirishning algoritmi sifatida ham qarash mumkin. Metodologiya haqida F. Bekkon, R. Dekart, J.Lokk, G.Galiley va boshqalar yevropalik olimlar maxsus kitoblar yozishgan. Shuningdek, metodologiya rivojiga I. Kant, Fixte, Shelling, Gegel jiddiy hissa qo'shishgan. Metodologiyaning asoslarini ishlab chiqdi5". [5, 414-b.]. Integrasiyalashgan darslar yosh avlodda tabiat va jamiyat haqidagi yaxlit tassavurlarni shakllantirishga yordam beradi. Matematika fanini o'qitishda integrativ yondashuv asosida tashkil etish hamda o'qitishning konseptual asoslarini ishlab chiqish shu bilan birga o'qitishning metodologiyasi faoliyatini samaradorligini oshirish nazarda tutadi. Bu esa umumta'lim maktablarida matematika fanini o'qitishning samaradorligini oshirish bilan birga o'quvchilarning matematik bilimini oshirishda xizmat qiladi. Dars jarayonlarida notiqlik, suhbat, hikoya, mustaqil ish, yozma ish, zamon bilan bog'lash, mustaqil fikrga tayanish shakllariga va integrativ metodlarga yondoshgan holda dars o'tishga katta e'tibor berishimiz lozim. Matematikani o'qitishda integrativ metodlar orqali o'quvchilarni bilim va ko'nikmalarni chuqurlashtirish va kengaytirishdan iborat. Matematik integrasiya o'zining texnologi, infratuzilmasi, o'z tayanch ta'lim texnologiyalariga ega. Matematikani fanlararo integrasiya-ta'lim jarayoni va uning barcha o'qitilish shaklida didaktik shart sharoitlarni takomillashtiruvchi hodisadir. Matematika darsida integrasion aloqadorlikni ta'minlashda o'zaro bir-biriga yaqin o'quv predmetlarining materiallari nihoyatda talabchanlik bilan muvofiqlashtirilishi lozim. Umumta'lim maktablarida beriladigan matematik bilim qanchalik mustahkam bo'lsa, o'quvchilarning dunyoqarashi, intellektual salohiyati shunchalik rivojlanadi va kamol topadi.

Adabiyotlar

1. **Sh. Mirziyoyev** *Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo yetamiz* Toshkent. "O'zbekiston"nashriyoti. 2017 yil. 36 bet.
2. **X. Islomov, A. Avliyoqulov** *Matematik ta'limda algebraik va geometrik metodlar integrasiyasi masalasini mavjudligi va uning yechimlari haqida* . "."Pedagogik mahorat"jurnali. Buxoro sh. 2014 y. №3-soni. 116 bet.
3. **Kukushin V.S** *Pedagogika nachalnogo obrazovaniya* ".Moskva, 2005 god. 251 stranisa.
4. **Shorustamova D.S.** *Boshlang'ich ta'lim darslarini integrasiyalashda pedagogik - psixologik yondashuv* ".Magistr akademik darajasini olish uchun yozigan dissertasiya. Toshkent. 2014 yil. 98 bet.
5. **O'zbekiston Milliy ensiklopediyasi** *Davlat ilmiy nashriyoti* ". Toshkent 2003 y. 5-jild, 618 bet.

Koshining integral formulasi mavzusini o'qitishda Maple amaliy dastur paketidan foydalanish

Boboyarova N. A.[1], Abdullayev J. Sh.[2], Xayitboyev S.X.[3]
[1,2,3]Urganch davlat universiteti;
boboyarova@gmail.com jonibekabdullayev1201@gmail.com sobirjon5152@gmail.com

Oliy ta'lim muassasasidagi o'quv jarayonining asosiy vazifasi o'qitish sifatini yangi pog'onaga ko'tarishdan iboratdir. Shunga ko'ra, talabaga munosabat, ularga yondashish tamoyillari o'zgardi. Dars jarayonida har bir talabaga uning o'ziga xos xususiyatlari va shaxsiy tajribasini hisobga olgan holda o'quv jarayonida ishtirok etishi uchun sharoit va imkoniyat yaratildi. Bunday yondashishda talabalar o'z tengdoshlari bilan muloqot qilish, olgan bilimlarini amaliy qo'llash hamda kundalik hayotimizda qayerda, qanday va qaysi maqsadlarda qo'llanilishini anglab olish imkoniyatlariga ega bo'ldi. Yangi axborot – kommunikatsion texnologiyalari hozirgi vaqtda eng dolzarb mavzulardan biri bo'lib kelmoqda, sababi har bir sohani o'rganish, izlanish va tajriba orttirish uchun turli usullardan foydalanish kerak bo'ladi. Shuning uchun bu texnologiyalardan foydalanish maqsadga muvoffiqdir.

Hozirgi kunda oliy ta'lim muassasalarida kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasini o'rganish va tahlil qilish o'ta dolzarb vazifalardan biri hisoblanadi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanini o'qitishdagi innovatsiyalar, ishchi o'quv dasturi, ma'ruza matnlari, keyslar, amaliy topshiriqlar, nazorat savollari shu kunga qadar oliy ta'lim muassasalari professor-o'qituvchilari tomonidan lozim darajada ishlab chiqishga e'tibor kuchaytirilyapti.

Oliy ta'lim muassasasining o'qituvchilari tayyor elektron resurslar asosida dars o'tish bilan chegaralanmasdan balki, ta'limiy resurslarni yaratish hamda uni amalda qo'llovchi o'qitishning zamonaviy texnologiyalari imkoniyatlardan samarali foydalanish fan va uning tarkibiga kiruvchi bilimlar mazmunini talabalarga yetkazish malakasiga ega shaxs sifatida faoliyat olib borishi lozim. Ushbu ishda Kompleks ozgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidagi Koshining integral formulasi mavzusini o'qitishda nazariy va amaliy masalalarini analiz etish, hamda bu mavzuga doir misollarni Maple amaliy dasturlar paketidan foydalanish bo'yicha xulosalar va tavsiyalar ishlab chiqiladi, hamda bu mavzuni talabalar chuqur tasavvurga ega bo'lishi uchun tavsiyalar beriladi.

Dastlab, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida fundamental teorema hisoblanadigan Koshi teoremasidan kelib chiqadigan Koshining integral formulasini keltiraylik. Aytaylik bizga, $\mathbb{C}$

kompleks tekislikda chegaralangan D soha berilgan bo‘lsin. Bu sohaning chegarasi silliq (yoki bo‘lakli silliq) chiziqdan iborat bo‘lib, bu yopiq egri chiziq musbat yo‘nalishda olingan va $\overline{D} = D \cup \partial D$ to‘plamda $f(z)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Quyidagi teorema o’rinli. (qarang [1-3])

Teorema 1. *Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo‘lib, uning $\overline{D}$ yopig’ida uzluksiz bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $z \in D$ nuqta uchun*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremadagi (1) formulaning o‘ng tomonidagi integral *Koshi integrali*, integral ostidagi ratsional ifoda $\frac{1}{\xi - z}-$ *Koshi yadrosi* deyiladi, (1) formula esa Koshining integral formulasi deyiladi. Koshining integral formulasi $f(z)$ golomorf funksiyaning D sohadagi qiymatlarini uning ∂D chegarasidagi qiymatlari orqali ifodalaydi. Demak, golomorf funksiya o‘zining chegaradagi qiymatlari bilan to‘la aniqlanadi. Koshi teoremasiga asosan, yuqoridagi 1-teoremani umumiy holda quyidagicha keltiramiz.

Teorema 2. *Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo‘lib, $\overline{D}$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda ushbu*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \begin{cases} f(z)\,,\ z \in D\,, \\ 0,\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}\,, \end{cases}$$

munosabat o‘rinli, bu yerda $\partial D-$ oriyentrlangan (musbat) yo‘nalish.

Ma’lumki, golomorf funksiyaning istalgan tartibli hosilasi ham golomorf bo’ladi, hamda Koshining integral formulasidan golomorf funksiyaning istalgan $n-$ tartibli hosilasini topilishi haqidagi quyidagi teorema o’rinli.

Teorema 3. *Agar $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C\left(\overline{D}\right)$, u holda $f(z)$ funksiya D sohadada istalgan tartibli hosilaga ega bo‘lib,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi \ \ (n = 1,\,2,\,3,\,...) \tag{2}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\gamma-$ D sohada yotuvchi (bo‘lakli silliq) yopiq chiziq bo‘lib, z esa γ chiziq bilan chegaralangan sohaga tegishli nuqta

Quyida Koshining integral formulasidan foydalanib kompleks o‘zgaruvhili funksiyalarning integrallari hisoblashda Maple amaliy dastur paketidan foydalanish keltirilgan. Bu misollardan matematik masalalarni yechishda kompyuter matematikasining zamonaviy imkoniyatlarini qo‘llash katta samara berishini ko‘rish mumkin.

1-Misol. Ushbu

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{z^2+9}$$

integralni hisoblang.

Yechish. Avvalo bu untegralni Koshi integrali ko‘rinishiga keltirib olamiz:

$$I = \oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{z^2+9} = \oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{(z+3i)(z-3i)} = \oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}dz$$

Bundan $f(z) = \frac{1}{z+3i}$ va $a = 3i$ nuqta

$$D = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 2i| < 2\}$$

doira ichida $(-3i)$ doira tashqarisida yotadi. Demak $f(z)$ funksiya D doirada golomorf. U holda ushbu

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i \cdot f(a) \tag{3}$$

Koshining formulasiga asosan: $I = 2\pi i \cdot f(3i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$ Demak,

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3}$$

Maple dasturida yechilishi:

> z0:=2*I:R:=2:abs(z-z0)=R;z:=x+y*I:
> with(plottools):with(plots):
> c:=implicitplot(abs(z-z0)=R,x=-5..5, y=-5..5,color=black,thickness=3):
> p0:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE,symbolsize=26):
> p1:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE,symbolsize=36):
> p2:=textplot([Re(z0),Im(z0)+2,"z0"],align=BELOW):
> p3:=pointplot([0,(-3)],symbolsize=45,symbol=CIRCLE,color=red):
> p4:=pointplot([0,3],symbolsize=45,symbol=CIRCLE,color=red):
> display([c,p0,p1,p2,p3,p4]);
> f:=z->1/(z+3*I):'f(z)'=f(z);
> z0:=2*I:R:=2:C:=abs(z-z0)=R:
> Int(1/(z^2+9),z=C..")=2*Pi*I*f(3*I);

2-Misol. Quyidagi

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

integralni hisoblang, bu yerda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 3\}$ aylanadan iborat.

Yechish. Bu γ chiziq bilan chegaralangan soha

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 3\}$$

da $a = -i$ nuqta yotgani uchun, $f(z) = \sin z$ funksiya bu sohada golomorf u holda (3) Koshining integral formulasiga koʻra:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

ya'ni

$$\oint\limits_{|z+i|} \frac{\sin z}{z-(-i)} dz = 2\pi i \sin(-i) = -2\pi i \cdot \frac{1}{2i}(e - e^{-1}) = -2\pi sh1$$

ekani kelib chiqadi

Maple dasturida yechilishi:

> z0:=-I:R:=3:abs(z-z0)=R;z:=x+y*I:
> with(plottools):with(plots):
> c:=implicitplot(abs(z-z0)=R,x=-5..5,y=-5..5,color=black,thickness=3):
> p0:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE,symbolsize=26):
> p1:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=blue,symbol=CIRCLE,symbolsize=36):
> p2:=textplot([Re(z0),Im(z0)-1,"z0"],align=BELOW):
> p3:=pointplot([0,(-1)],symbolsize=65,symbol=CIRCLE,color=red):
> > display([c,p0,p1,p2,p3]);
> > f:=z->sin(z):'f(z)'=f(z);
> z0:=-I:R:=3:C:=abs(z-z0)=R:
> Int(sin(z)/(z+I),z=C..")=2*Pi*I*f(I);

3-Misol. Quyidagi

$$\oint\limits_{|z+3|=4} \frac{\left(e^{z^2}+3z^4+4z^2\right)dz}{(z+2)^4}$$

integralni hisoblang.

Yechish. $a=-2$ nuqta $D=\{z\in\mathbb{C}:|z+3|<4\}$ doiraga yotgani uchun, $f(z)=e^{z^2}+3z^4+4z^2$ funksiya D doirada golomorf, demak bu $f(z)$ funksiya uchun (2) formulaga asosan berilgan doirada

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(a)$$

formula o‘rinli. Berilgan misolda $n=3$ ekanligidan quyidagi munosabatni topamiz:

$$\oint\limits_{|z+3|=4} \frac{\left(e^{z^2}+3z^4+4z^2\right)dz}{(z+2)^4}=\frac{2\pi i}{3!}\cdot f'''(-2)=$$

$$=\frac{\pi i}{3}\cdot\left(12ze^{z^2}+8z^3e^{z^2}+72z\right)\Big|_{z=-2}=-\frac{(88e^4+144)\pi i}{3}$$

Maple dasturida yechilishi:

> z0:=-3:R:=4:abs(z-z0)=R;z:=x+y*I:
> with(plottools):with(plots):
> c:=implicitplot(abs(z-z0)=R,x=-7..7,y=-5..5,color=black,thickness=3):
> p0:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE,symbolsize=26):
> p1:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE,symbolsize=36):
> p2:=textplot([Re(z0)-3,Im(z0),"z0"],align=BELOW):
> p3:=pointplot([(-2),0],symbolsize=69,symbol=CIRCLE,color=red):
> display([c,p0,p1,p2,p3]);
> f:=z->exp(z^2)+3*z^4+4*z^2:‘f(z)‘=f(z);
> w:=z->diff(f(z),z$3):‘f”’(z)‘:=w(z);
> w:=z->12*z*exp(z^2)+8*z^3*exp(z^2)+72*z:‘w(z)‘=w(z);
> z0:=-3:R:=4:C:=abs(z-z0)=R:
> Int((exp(z^2)+3*z^4+4*z^2)/(z+2)^4,z=C..“)=2*Pi*I*w(-2)/3!;

Литература

1. **Шабат Б. В.** *Введение в комплексный анализ.* М. URSS, 2015.
2. **Худойберганов Г., Ворисов А. К., Мансуров Х. Т.** *Комплекс анализ.* Т. Университет, 1998.
3. **М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров.** *Теория функций комплексного переменного.* М. : Лаборатория знаний, 2016.

УДК 372.85

MUSTAQIL TA'LIM MASHG'ULOTLARINI TASHKIL ETISHNING AHAMIYATI

Boltayeva Sh.O.
Termiz davlat universiteti; shboltayeva1221@gmail.com

Mamlakatimizda olib borilayotgan ta'lim tizimidagi islohotlar talablariga to'la javob beruvchi, kelajakda o'z oldiga yuksak maqsadlar qo'ya olgan, ishlab chiqarish sohasida raqobatga bardoshli, shuningdek, mehnat bozorida tanlagan kasbi malakasiga qo'yilayotgan talablar darajasida samarali faoliyat olib boruvchi shaxsni shakllantirishda oliy ta'lim muassasalarining hissasi katta. Bugungi kunda mamlakatimizda ta'lim- tarbiyaning maqsad va vazifalari tubdan o'zgardi. Shu sababli, oliy ta'lim muassasalarida aniq fanlarni, xususan, matematika fanini o'qitishga alohida e'tibor qaratilmoqda.

Ushbu talablarni bajarish jarayonida oliy ta'lim muassasalarida o'quv jarayonining real sharoitlarini qo'llab-quvvatlovchi tizimlar uchun bir qancha o'ziga xos talablar mavjud. Bu talablarni bajarish innovatsion ta'lim muhiti kabi bir xil maydonga ega. Oliy ta'lim muassasalarida o'quv muhitining vazifalari ta'lim sohasiga oid vazifalariga mutanosib bo'lishi lozim. Shu sababli oliy ta'limda tabiiy, aniq va amaliy fanlar bilan ajralib turadi.

"Matematika hamma fanlarga asos. Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli bo'lib o'sadi, istalgan sohada muvaffaqiyatli ishlab ketadi,"- deb bejiz ta'kidlamadilar muhtaram Prezidentimiz SH. M. Mirziyoyev. Haqiqatan ham, matematika fani inson aqlini charxlaydi, diqqatini rivojlantiradi, ko'zlangan maqsadga erishish uchun qat'iyat va irodani tarbiyalaydi, algoritmik tarzda tartib-intizomlilikka o'rgatadi va eng muhimi mulohaza yuritishga chorlab, tafakkurni kengaytiradi.

Oliy ta'lim muassasalarining gumanitar fakultetlarida matematika o'qitish metodik tizimini takomillashtirishda mustaqil ta'lim jarayonlarini zamonaviy ilg'or xorijiy texnologiyalar asosida tashkil etish maqsadga muvofiqdir. Talabalarning mustaqil bilim olishlari uchun bu texnologiyalaridan foydalanish dars samaradorligining oshishiga, talabalarni intiluvchan, zamon bilan hamnafas kadr bo'lib yetishishiga xizmat qiladi.

Hozirgi kunda talim jarayonida interaktiv metodlar, innovatsion texnologiyalar, pedagogik va axborot texnologiyalarini o'quv jarayonida qo'llashga bo'lgan qiziqishga e'tibor kundan-kunga kuchayib bormoqda. Ananaviy talimda talabalar faqat tayyor bilimlarni egallashga o'rgatilgan bo'lsa, zamonaviy texnologiyalar ularni egallayotgan bilimlarini o'zlari qidirib topishlariga, mustaqil o'rganib taxlil qilishlariga, hatto xulosalarni ham o'zlari keltirib chiqarishlariga o'rgatadi. O'qituvchi bu jarayonda shaxsni rivojlanishi, shakllanishi, bilim olishi va tarbiyalanishiga sharoit yaratadi va shu bilan bir qatorda boshqaruvchilik, yo'naltiruvchilik funksiyasini bajaradi. Matematik tushunchalar mazmunini, qoidalarni va usullarni ongli o'zlashtirish orqali fikrlash madaniyatini egallash, axborotlarni tushunish, umumlashtirish va tahlil qilish, maqsadni qo'yish va unga erishish yo'llarini tanlash; og'zaki va yozma nutqini asoslagan holda o'z fikrlarini mantiqan to'g'ri, aniq va ratsional ifodalash; matematikaning asosiy usullarini, jumladan matematik tahlil va modellashtirish, nazariy va eksperimental tadqiqotlar usullarini kasbiy faoliyatga qo'llash kompetensiyalariga erishishdir.

Shuning uchun o'quv yurtlari fakultetlarida malakali kasb egalarini tayyorlashda zamonaviy o'qitish metodlari – interaktiv metodlar, innovatsion texnologiyalarning o'rni va roli katta. Pedagogik texnologiya va pedagogik mahoratga oid bilim, tajriba va interaktiv metodlar o'quvchi-talabalarni bilimli yetuk malakaga ega bo'lishlarini ta'minlaydi.

Pedagogik texnologiyaning eng asosiy negizi - bu o'qituvchi va talabaning belgilangan maqsaddan kafolatlangan natijada hamkorlikda erishishlari uchun tanlangan texnologiyalariga bog'liq, deb hisoblaymiz, ya'ni o'qitish jarayonida, maqsad bo'yicha kafolatlangan natijaga erishishda qo'llaniladigan har bir ta'lim texnologiyasi o'qituvchi va talaba o'rtasida hamkorlik faoliyatini tashkil eta olsa, har ikkalasi ijobiy natijaga erisha olsa, o'quv jarayonida talabalar mustaqil fikrlay olsalar, ijodiy ishlay olsalar, izlansalar, tahlil eta olsalar, o'zlari xulosa qila olsalar, o'zlariga, guruhga, guruh va ularga baho bera olsa, o'qituvchi esa ularning bunday faoliyatlari uchun imkoniyat va sharoit yarata olsa, ana shu, oʻqitish jarayonining asosi hisoblanadi. Har bir dars, mavzu oʻquv predmetining oʻziga xos texnologiyasi bor, ya'ni oʻquv jarayonidagi pedagogik texnologiya - bu yakka tartibdagi jarayon boʻlib, u talabaning ehtiyojidan kelib chiqqan holda bir maqsadga yoʻnaltirilgan, oldindan loyihalashtirilgan va kafolatlangan natija berishiga qaratilgan pedagogik jarayondir.

Masofali oʻqitish kurslarining bir nechta texnologiyalari mavjud boʻlib, ularga kompleks "keys-texnologiyalar", korrespondentlik ta'limi, televizion va sun'iy yoʻldosh kanallari, mobil texnologiya, kompyuterli tarmoq texnologiyalari misol boʻla oladi. Tahlillarga koʻra, bugungi kunda keys texnologiyasi asosida oʻqitish birinchi oʻrinni egallab turibdi. Shuningdek, ta'lim tizimiga kompyuterli tarmoq texnologiyasi ham jadal kirib keldi.

Masofali oʻqitish kurslarining biz ta'kidlab oʻtgan ushbu turlarining har biri oʻzining yutuq va kamchiliklariga ega. Lekin ularning ichida kompyuterli tarmoq texnologiyalari asosida masofali oʻqitish tizimini tashkil etish oʻzining katta imkoniyatlari bilan alohida ajralib turadi. Uning negizi – Internet global tarmogʻi demakdir. Oʻquv jarayoniga internet va boshqa axborot texnologiyalari xizmatlaridan foydalanish, talabalar bilan sinxron yoki asinxron muloqotlarni tashkil etish borasidagi koʻnikmalarni shakllantirish talab etiladi.

Shuningdek, oliy ta'lim muassasalarida auditoriyada va auditoriyadan tashqari mustaqil ta'lim jarayonlarini tashkillashtirishda internet tizimida topshiriqlarning berib borilishi, bajarilgan topshiriqlarni muntazam nazorat qilib borish oʻqituvchi va talabalarning mas'uliyatini yanada oshiradi. Shu bilan birgalikda talabalar bilimini baholashda shaffoflikka erishiladi. Talabalar ham mustaqil ta'lim jarayonida toʻplagan ballarini onlayn kuzatib boradi. Ayniqsa, hozirgi keskin rivojlanish davrida oʻqitishning bu turidan keng miqyosda samarali foydalanish lozim. Bu bilan talabalarning muntazam ravishda fan bilan shugʻullanishlari, boʻsh vaqtlarida ham ilm bilan mashgʻul boʻlishlariga erishiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. **Boltayeva SH.O.** *Professialno-pedagogicheskaya napravlennost kursa matematiki dlya gumanitarnix fakultetov pedvuza.* "Gumanitarniy traktat" Nauchniy jurnal o gumanitarnix nukax. ISSN 2500-1159. Vipusk № 61, str. 52-59, Kemerovo 2019 god.
2. **Boltayeva SH.O.** *"Matematik ta'limni rivojlantirish va oʻqitish istiqbolining muhim masalalari"* Pedagogika va psixologiyada innovatsiyalar, 7 son, 3 jild, Toshkent -2020.
3. **Boltayeva SH.O.** *"Matematik kompetensiyalarni rivojlantirish"* SCIENCE AND INNOVATION xalqaro ilmiy jurnali //ISSN: 2181-3337. Toshkent, 2022. –№ 4. –B. 624-630.

Yuza va hajmni kattaligini saqlovchi akslantirishlar

Berdiyeva O. B.[1], Safarov T. N.[2]
[1]Surxondaryo viloyati pedagoglarni yangi metodikalarga o'rgatish milliy markazi
oygul1974@umail.uz
[2] Termiz Davlat Universiteti; tolqin.1986@mail.ru

Bizga π tekislik va unda o'rnatilgan Oxy-affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ma'lumki

$$X' = AX + B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad detA \neq 0$$

tekislikni o'zini o'ziga bir qiymatli akslantirish affin almashtirish deyiladi [1].

Agar A -ortogonal simmetrik matrisa bo'lib $detA = 1$ bo'lsa, almashtirish evklid tekisligida ikki nuqta orasidagi masofa soxa yuzasi, burchak kabi geometrik kattaliklar saqlanadi.

Bu aytilgan xossalar yuqori o'lchovli fazolar uchun ham o'rinli, Bunda A- matrisa ham mos o'lchovli kvadrat matrisa bo'lishi zarur.

Ushbu simmetriklik va ortogonallik shartlarini bajargan ikkinchi tartibli matrisani ko'raylik.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad detB = 1$$

Teorema 1. Matrisasi D bo'lgan affin almashtirishda ikki vektorning skalyar kupaytmasi va soxa yuzasi saqlanadi.

Tekislikdagi kabi uch o'lchovli fazoda

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & cos\varphi & -sin\varphi \\ b & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Fazoda matrisalari D_i shaklida bo'lgan affin almashtirishda ikki vektorning skalyar ko'paytmasi, ikki vektorning vektor ko'paytmasining normasi va uch vektorning aralash kupaytmasi saqlanadi.

Adabiyotlar

1. **Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров, А.Х. Худойбердиев, Ф.Х. Хайдаров** *Алгебра ва сонлар назарияси, // Тафаккур-бўстони, Тошкент, (2019), 32-91 стр*,

2. **И. М. Яглом** *Принцип относительности галилеевой и неевклидовой геометрии.* , Наука, Москва, (1969). - 394 ст

UDK 51.1

KOMPETENSIYAVIY YONDASHUVGA ASOSLANGAN TA'LIM.

Berdiyeva O. B. [1], Nazarova G. Ch. [2]

[1]Surxondaryo viloyat XTXQTMOHM; oygul1974@umail.uz

[2] Termiz davlat universiteti. gulsinanazarova930@gmail.com

Mamlakatimizda axborot kommunikatsiya texnologiyalari jadallik bilan rivojlanayotgan, globallashuv, dunyo bozorida raqobat tobora kuchayib borayotgan bir davrda, demokratik taraqqiyot, modernizatsiya va yangilanish borasida belgilangan maqsadlarga erishishda eng muhim qadriyat va hal qiluvchi kuch bo'lgan bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash muhim omil bo'lmoqda. Jamiyatning, axborot muhitining va mehnat bozoridagi holatning jadal rivojlanishi natijasida reproduktiv ta'lim tizimi davr talabiga javob bermay qoldi. Bu esa matematikani o'qitishning yangicha yondashuvlarini ishlab chiqilishini talab qilmoqda. Yoshlarning bilim va iqtidorini chuqurlashtirish, ularning kelgusida malakali kadrlar bo'lib O'zbekistonni yanada rivojlantirishdagi ishtirokini ta'minlash maqsadida ta'lim jarayoniga zamonaviy yondashuvlar joriy etilmoqda, shunga javoban bilimimizni, ishimizni samarali va amaliyotga joriy etishda natijaviylikka e'tiborni qaratamiz. Vatanimizning gullab-yashnashi, barqaror rivojlanishi ma'lum bir darajada yoshlarning chuqur bilimga, mustahkam ishonch-e'tiqodga va umuman, komil inson bo'lishlariga bog'liq. Jamiyatimiz oldida vujudga kelayotgan muammolarni hal etishga faol kirisha oladigan, sharoitni yaxshi tushunadigan, keng qamrovli fikrlaydigan, hayotda uchraydigan kundalik va kasbiy muammolarni tushunadigan, tahlil qila oladigan, taqqoslay oladigan, amaliy hal eta oladigan insonlarga bo'lgan talab qo'yilmoqda.

Barchamizga ma'lumki, matematika fani insonning aqlini o'stiradi, uning diqqatini rivojlantiradi, ko'zlangan maqsadga erishish uchun o'zida qat'iyat va irodani tarbiyalaydi, o'zidagi algoritmik tarzdagi tartib-intizomlilikni ta'minlaydi va eng muhimi uning tafakkuri kengayadi. Demak, zamonaviy inson mustaqil qaror qabul qila oladigan, jamoada ishlay oladigan, tashabbuskor, yangiliklarga moslasha oladigan, mashaqqatli va asabiy xolatlarga chidamli, bu xolatlardan chiqa oladigan bo'lishi kerak.

Hamma bunday sifatlarni matematika ta'limida **kompetensiyaviy yondoshuvdan** foydalanish asosida erishish mumkin. Bugungi kunda iqtisodiy rivojlangan davlatlarda **kompetensiyaviy yondoshuv** ta'lim mazmunini modernizatsiya qilib, yangicha o'qitish yo'nalishlaridan biriga aylangan. Bu davlatlardagi umumiy ta'limning yangicha mazmunining asosini o'quvchilarning tayanch kompetensiyalarini hosil qilish va rivojlantirish tashkil etadi. Ta'limga kompetensiyaviy yondoshuv eskirib qolgan "bilim, ko'nikma va malakani o'zlashtirish" konceptsiyasidan farqli o'laroq, kasbiy, shaxsiy va jamiyatdagi kundalik hayotda uchraydigan holatlarda samarali harakat qilishga imkon beradigan turli ko'rinishdagi malakalarni o'quvchilar tomonidan egallashni nazarda tutadi. Shunday qilib, kompetensiyaviy yondashuvda matematik ta'limning asosini amaliy, tatbiqiy yo'nalishlarini kuchaytirishga qaratiladi. Bundan tashqari, tuzilayotgan ta'lim standartlari o'quvchilarning oliy ta'lim muassasalarida ta'lim olishlari, turli kasb egalari bo'lishlari va har tomonlama faol fuqaro bo'lishlari uchun zarur bo'ladigan sifatlarni aks ettirishi kerak.

Mamlakatimizning dunyo hamjamiyatiga integratsiyalashuvi, fan-texnika va texnologiyalarning rivojlanishi yosh avlodning o'zgaruvchan dunyoda raqobatbardosh bo'lishi fanlarni mukammal egallashni taqozo etadi, bu esa O'zbekiston Respublikasi ta'lim tizimiga matematikani o'rgatish bo'yicha xalqaro standartlarni joriy etish orqali ta'minlanadi.

"Matematik savodxonlik" o'quvchilarning maktab matematika kursida egallagan bilimlarini tekshirishni emas, balki turli vaziyatlarda matematik bilim, ko'nikmalarni qo'llay olishlariga asosiy e'tibor qaratiladi. O'quvchilarga, asosan, o'quv emas, balki kundalik hayotga xos bo'lgan amaliy vaziyatlar taklif etiladi (tibbiyot, uy-joy, sport va h.k.). Bunda o'quvchilar ko'p hollarda nafaqat matematikaning turli mavzulari va bo'limlaridan, balki boshqa fanlar, masalan, fizika va biologiyadan olgan bilim va ko'nikmalaridan foydalanishlari talab etiladi. Jamiyatning, axborot muhitining va mehnat bozorining jadal rivojlanishi natijasida reproduktiv ta'lim tizimi davr talabiga javob bermay qoldi. Olinayotgan ma'lumotlarning keskin ko'payib borayotganligi sababli bu ma'lumotlarni qayta ishlab, undan foydalanish uchun yosh avlodga yetkazilishi kerak bo'lgan bilimlar ham taboro ortib bormoqda. Bugungi kun o'qituvchisi oldida dars soatlarini oshirmay turib, oldindan rejalashtirilgan bilimlar bilan bir qatorda eng yangi, oxirgi axborot va ma'lumotlarni o'quvchilarga yetkazib berishga ulgurish muammosi turibdi. Faqat bilim olishga yo'naltirilgan ta'lim o'tgan zamonda qolmoqda. Kompetensiyaviy yondashuvga asoslangan ta'lim bu - o'quvchi o'quv jarayonida egallaydigan bilim, ko'nikma va malakalarni o'z shaxsiy, kasbiy va ijtimoiy faoliyatida qo'llay olish nuqtai nazaridan beriladigan ta'limdir. Kompetensiyaviy yondashuvga asoslangan ta'limdan maqsad o'quvchini keng qamrovli fikr-mulohaza yuritadigan va muloqotga kirisha oladigan, ta'lim jarayonida egallagan bilim, ko'nikma va malakalarini o'z shaxsiy, kasbiy va ijtimoiy faoliyatida qo'llay oladigan barkamol shaxs qilib yetishtirishdir. Umumta'lim maktablari oldiga, bir tomondan, tevarak-atrofda sodir bo'layotgan jarayonlarni to'g'ri tushunadigan, ikkinchi tomondan, jamiyat hayotida faol ishtirok etib, o'z ijobiy ta'sirini o'tkaza oladigan har tomonlama ziyoli shaxsni tarbiyalash vazifasi qo'yilmoqda. Ma'lumki, matematik savodxonlik barcha fanlarni, ayniqsa aniq fanlarni o'zlashtirishda muhim o'rin egallaydi. Bu jarayonda matematika fanining ahamiyati beqiyosdir. Matematika - fan va texnika taraqqiyotining asosiy omillaridan biri bo'lib, fan, madaniyat va kundalik hayotimizda alohida o'rin tutadi. Shuning uchun o'quvchilarning dars va darsdan tashqari faoliyatida keng ko'lamdagi matematika bilan shug'ullanishlar bo'lishi kerak. Bunda: - matematikaga xos go'zallik va jozibadorlikdan foydalanib har bir o'quvchiga mos ravishda rivojlantiruvchi mantiqiy faoliyat bilan shug'ullanish; - jadval, diagramma, grafik ko'rinishda berilgan axborotlarni o'qiy olish, jadvallar tuzish, diagrammalar yasash, grafiklar chizish; - ommaviy axborot vositalarida berilayotgan diagramma, grafik ko'rinishdagi real sonli ma'lumotlarni tahlil etish ko'nikmalarini hosil qilish kerak bo'ladi. Fanlararo bog'lanishda amaldagi til bilan bog'lanish uchun spetsifik vosita bo'lgan matematika tilini o'qitish tamoyili ahamiyatga ega bo'ladi. Matematik savodxonlik va bu tildan unumli foydalana olish (gapning aniq mazmunini, gaplar orasidagi mantiqiy bog'lanishni bilish) fikrlashning aniqligi va tartibliligini ko'rsatadi. O'qituvchi va o'quvchining birgalikdagi harakati natijasida nimaga erishilganiga emas, balki bu natijaga qaysi yo'l bilan erishilganiga asosiy e'tiborni qaratish kerak. Bunda: - umumfan yo'nalishi darajasidagi o'qitish

- matematik standartning o‘rta maktab kursidagi bilimlarini egallash; - matematik yo‘nalishda - matematikani tabiiy fanlar bilan uyg‘unlashgan holda ixtisoslashgan kengaytirilgan fan yo‘nalishi bo‘yicha o‘qitish. Bu fanni o‘rganish insonning ilmga bo‘lgan qiziqishini, mantiqiy fikrlash qobiliyatini oshirib, boshqa fanlarning o‘qitilishiga ta’sir ko‘rsatadi va ta’limda asosiy vazifani o‘taydi. Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, o‘quvchilarda namoyon bo‘ladigan matematik tushunchalarni yaxshi o‘zlashtirish, matematik fikr yuritishga tayyor bo‘lish, masala va muammolarni yecha olish, matematik tilda bemalol ish yurita olish ko‘rinishidagi samarali natijalarni ta’lim usulini o‘zgartiribgina erishish mumkin. Bunda izlanuvchanlik asosiy o‘rin tutadi. Masalan, muammoli o‘qitishda o‘quvchilar nazariy va amaliy ko‘rinishdagi turli muammolarni yechish orqali yangi bilim va malakalarni egallaydi. Muammoli vaziyatlarni vujudga keltirish, qiziqarli muammolarni qo‘yish va ularning yechilishiga yordam berish o‘quvchilarning faolligi va mustaqilligini rivojlantirib, bu fanga bo‘lgan qiziqishini oshiradi. Natijada o‘quvchilar olgan bilim va ko‘nikmalaridan foydalanishni o‘rganishadi va o‘zlarining ijodiy imkoniyatlari va aniq fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirishadi. O‘qitishning zamonaviy kompetensiyaviy yondashuvga o‘tilishi ta’lim jarayoniga qor ko‘chkisi kabi ta’sir ko‘rsatadi va misli ko‘rilmagan o‘zgarishlarga olib keladi. Bunda yangiliklarni ta’lim jarayoniga olib kirish va joriy etish bugungi kun o‘qituvchisiining vazifasiga aylanadi. Bilimli, yuqori malakaga ega bo‘lgan o‘qituvchi kadrlargina jamiyatning ta’lim oldiga qo‘ygan vazifasini amalga oshirishga qodir bo‘ladilar. O‘qituvchining izlanishi, bugungi kun talablari asosida o‘z-o‘zini tarbiyalashi, o‘z ustida tinimsiz izlanishi, zamonaviy pedagogik texnologiyalarni mukammal o‘zlashtirishi va ularni ta’lim jarayonida qo‘llashi ta’lim samaradorligini oshiradi. Zamonaviy pedagogik texnologiyalar ta’lim jarayonining ta’sirchanligini oshiradi, o‘quvchilarning mustaqil fikrlash jarayonini shakllantiradi, o‘quvchilarda bilimga ishtiyoq va qiziqishni oshiradi, bilimlarni mustahkam o‘zlashtirish esa ulardan amaliyotda erkin foydalanish ko‘nikma va malakalarini shakllantiradi. Matematika darslarida zamonaviy metodik vositalardan foydalanish o‘qituvchiga mavzuning to‘liq o‘zlashtirilishiga yordam beribgina qolmasdan, o‘quv jarayonida o‘quvchilarning o‘zlari faol ishtirok etishlarini ham ta‘minlaydi. Bu esa matematika fanini o‘qitishda ijobiy natijalarga erishish garovi bo‘lib xizmat qiladi. O‘qitishga qo‘yilgan maqsad va rejalashtirilgan natijalarni, asosan, didaktik texnologiyalarning to‘g‘ri tanlanishi, o‘quv jarayonini va o‘quv faoliyatini uyushtirish usullarini mulohaza qilib tanlanganligini ta‘minlaydi. Ta‘lim jarayoning qiziqarli bo‘lishi turli didaktik tizimlar majmuining qanday tanlanishiga bog‘liq

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **Mirziyoyev Sh. M.** *Erkin va farovon, demokratik O‘zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz.* O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag‘ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo‘shma majlisidagi nutq. - Toshkent : O‘zbekiston.
2. *Matematika fanidan kompetensiyaviy yondoshuvga asoslangan davlat ta’lim standartlari.* VMning 2017 yil 6 aprel 187-sonli qarori.
3. **Urazova M.B., Eshpulatov SH. N.** *Bo‘lajak o‘qituvchining loyihalash faoliyati* Metodik qo‘llanma. - T.: TDPU Rizografi, 2014 yil. 6,5 b.t.
4. **Mirzahmedov M. A., Raximqoriev A. A.** *Matematika 6-sinf.* “O‘zbekiston Davlat entsiklopediyasi” Davlat ilmiy nashriyoti – 2015 yil.
5. **Alimov Sh., Xolmuxammedov O., Mirzaahmedov M.** *Algebra 7-sinf* . “O‘qituvchi” nashriyoti - 2009 yil.

UDK 51.001.891

Nufuzli xalqaro tadqiqotlarning afzalliklari.

Berdiyeva O.B. [1], Raxmatova F.J. [2]
[1]Surxondaryo viloyat XTXQTMOHM; oygul1974@umail.uz
[2]Termiz davlat universiteti; feruzaraxmatova122@gmail.com

XXI asr - informatsion texnologiyalar asri. Bu asr o‘z mutaxassislaridan oldingidan ancha farq qiluvchi kompetensiyalarni talab qiladi. Hozirda ayni mana shu layoqat, qobiliyat (kompetentlik)ga ega yoshlarni tarbiyalash davr talabidir. Shu qatori, so‘nggi paytlarda maktablarda matematika fani bo‘yicha o‘quvchilar o‘zlashtirishi nisbatan past bo‘lib kelmoqda. Bu qaysidir ma’noda matematika fani mazmunining birmuncha nazariy, ilmiy, mantiqiy va aksiomatik tuzilishga ega ekanligi bilan bog‘liq. Buni matematika fani mazmunining hayotiy masalalarga kamroq bog’langan holda o‘qitilishi hamda matematika fanini o‘qitish metodikasining takomillashmagani bilan ham izohlash mumkin. Shulardan kelib chiqib, matematika fanini o‘qitishga ham zamonaviy talablar qo‘yilmoqda va uni kompetensiyaviy yondashuv asosida qayta ko‘rib chiqishni taqozo etmoqda.

PISA tadqiqotlarida darsliklarimizdagi odatiy matematik misol yoki masala emas, balki biror kontekstda taqdim qilingan real hayotiy muammoli vaziyatlar beriladi. SHunday ekan darslikdarimizdan o‘rin olgan odatdagi standart masalada berilgan ma’lum miqdorlar va topish kerak bo‘lgan noma’lum miqdorlar bo‘ladi. Noma’lumni berilgan ma’lumlardan foydalanib topish talab qilinadi. Bunda berilganlar noma’lumni topish uchun yetarli bo‘lib, ular kam ham bo‘lmaydi, ko‘p ham bo‘lmaydi.

PISA topshiriqlari esa matematik masala emas, u matematik masaladan oldin keluvchi bosqich - muammoli vaziyatning tavsifidan iborat. Topshiriq tavsifiida tasvirlangan muammoli vaziyatni mulohaza yuritish orqali o‘rganib, uni matematik tilga o‘girib ifodalash, ya’ni matematik masalaga keltirish kerak bo‘ladi. SHundan keyin masalani matematikani qo‘llab yechishga keltiriladi.

Bunday tadbirlarga bugun biz o‘quvchilarni tayyorlashimiz uchun avvalo o‘qitayotgan fanimizning hayot uchun zarurligini, tevarak-atrofimizdagi voqea, xodisalar aynan matematika fani bilan bog‘liqligini tushuntira olsak, ko‘zlagan maqsadimizga erisha olamiz.

Maktablarda matematika o‘qitishni turmush bilan bog‘lashda o‘quvchilarning tafakkur va tasavvurlarining rivojlangan bo‘lishi muhim ahamiyatga egadir. Bu vazifani amalga oshirishda geometriya fanining o‘qitilishi ayniqsa katta o‘rin tutadi.

O‘quvchilarning fazoviy tasavvurlarini yetarli darajada rivojlantirish uchun ba’zi darslarni shunday tashkil etish kerakki, o‘quvchilar tekislikdagi figuralarni fazoda olib ko‘ra biladigan bo‘lsinlar. Masalan: o‘qituvchi odatda o‘quvchilarga siniq chiziq haqida tushuncha berayotganida uning ta’rifini berib, doskada siniq chiziqni chizib ko‘rsatish bilan chegaralanadi, xolos. Siniq chiziqning faqat tekislikdagina emas, balki uning fazoda ham turli vaziyatda bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Eng qulayi 3-4 dona tayoqcha olib, bir to‘g‘ri chiziqda va bir tekislikda yotmaydigan qilib ketma-ket ulab ko‘rsatish yoki parallelepiped modelida kesmalarni ifodalovchi ketma-ket qirralarni siniq chiziqqa misol qilib ko‘rsatilsa bo‘ladi. Bunday misollarni turmushdan juda ko‘plab keltirish mumkin.

Umumta‘lim maktablarida geometriya o‘qitishning asosiy vazifalaridan biri o‘quvchilarning fazoviy tasavvurlarini o‘stirish hamda tasavvur qilinadigan fazoviy obyektlar ustida turli ishlar bajara olishni o‘rgatishdir. Maktabni tamomlagandan keyin, o‘z hayotini xalq xo‘jaligi yoki biror texnikaviy kasbga bag‘ishlaydigan o‘quvchilar uchun bu narsa, ayniqsa muhim. Maktablar bu muhim vazifani doimo muvaffaqiyat bilan bajarmoqda deb bo‘lmaydi. Maktabni tamomlagan ba’zi o‘quvchilarning fazoviy tasavvurlari juda bo‘sh ekanligi to‘g‘risida aniq faktlar mavjud. Ular, ko‘pgina geometrik jismlarning sirtlarini va hajmlarini tayyor formulalardan foydalanib hisoblay oladilar: ammo, ko‘pincha, fozoviy geometrik shakllarning, xatto ular orasidagi eng oddiy munosabatlarni aniqlash lozim bo‘lganda ham, o‘quvchilar buning uddasidan chiqa olmaydilar. Bu narsa ular uchun og‘ir, juda qiyin, ba’zan butunlay tushunilmaydigandek tuyuladi.

Kompetensiyaviy yondashuvga asoslangan DTS, yani dastur quyidagilarni nazarda tutadi:

- o‘quvchilarning mantiqiy va matematik tafakkurini rivojlantirish;
- matematik masalalar yechishning umumiy usullarini o‘rgatish;
- o‘quvchilarning fazoviy, abstrakt tasavvularini kengaytirish va rivojlantirish;
- o‘quvchilarning kelgusi ta‘lim bosqichlarida matematika o‘rganishini davom ettirishlari uchun yetarli zamin yaratish, pirovard natijada ta’limning uzluksizligini ta’minlash.

O‘quvchida tafakkur va tasavvurni o‘stirish orqali quyidagi kompetenlikni shakllantirish ko‘zda tutiladi:

- oʻquvchilarning matematik savodxonlik holati;
- tanlangan mazmun sohasining materiallariga ega boʻlishi;
- matematik modellashtirish, mantiqiy fikrlash, umumlashtirish va intuitsiya;
- fazoviy tasavvurning paydo boʻlishi va rivojlanishi, geometriyaning sodda tushunchalari va elementar shakllarni tasavvur etishi;
- ilmiylikdan koʻra bu tushunchalarni amaliy tomonga, ya'ni "mana bunday yasash mumkin", "koʻrinib turibdiki" kabi tushunchalariga tayanish;
- shakllarni geometriya fanining amaliy va kundalik masalalarni hal qilishga tadbiq etish;
- raqamli texnologiya asosida yaratilgan dasturiy vositalar bilan muloqotning osonlashishi;
- oʻquvchilarda matematikaga boʻlgan qiziqishini orttirish, tayanch va fanga oid kompetensiyalarni shakllantirish uchun taʻlim jarayonida amaliy va nostandart xarakterdagi masalalardan foydalanish;
- masalalarni yechilishi oʻquvchilarda natijaga erishilganlik, yechim yoʻlining goʻzalligi va noanʻanaviyligi bilan bogʻliq boʻlgan ruhiy koʻtarinkilik bagʻishlashi muhim ahamiyatga ega.

Matematika fani, jumladan geometriya fani orqali oʻquvchilarning tafakkur va tasavvurini rivojlantirishda fan mutaxasislarida quyidagi kompetenlik shakllangan boʻlishi lozim:

-oʻquvchilarning ijodiy faoliyatini tarbiyalash, mustaqil ishlash malakasini hosil qilishga yordam beruvchi vosita va metodlardan toʻgʻri foydalanishni bilishi;

-fanni oʻzlashtirish uchun tayyor bilimlarni bermasdan, balki fikrlashga undovchi muammoli vaziyatlarni yarata olishi;

-geometriyaning turli mavzularini oʻrganishda doimo aniq misollar orqali koʻrsatmalilikdan foydalanishni bilishi;

-matematikaning boshqa fanlardan farqli goʻzal jihatlarini mavzuga kirishdan oldin topishga va ochishga oʻquvchining tafakkuri orqali tasavvurini shakllanishiga erishishi;

-oʻquvchilar oʻqituvchining oʻz fani, shu darsining mavzusi bilan astoydil shugullanayotganini sezdirishi va oʻziga ergashtira olishni bilishi;

-darsda e'tiborsizlar va zerikuvchilar boʻlmasligi, matematikani "quruq va qiziqarlimas" (koʻplarga shunday tuyuladi) fandan qiziqarli va jozibali fanga aylantirish uchun har bir darsni turli xil metodlardan fodalanib tashkil eta olishni bilishi;

-mavzuni amaliyot, hayot bilan bogʻlash, koʻplab misollarni tevarak-atrofdan izlab topish va uni oʻquvchining oʻzi yechishiga erishishi uchun yoʻnaltiruvchi savollarni qoʻya bilishi lozim.

Geometriya tavakkur va tasavvurni rivojlantirib, aqlni tartibga soladi. Uning amaliy tadbid qilinish sohasi juda katta. Siz qaysi fanni oʻrganmang, qaysi oliy oʻquv yurtiga kirmang, qaysi sohada ishlamang, agar siz oʻsha yerda iz qoldirishni istasangiz, hamma vaqt geometriya fanini bilishingiz zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **Mirziyoyev Sh. M.** *Erkin va farovon, demokratik Oʻzbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz.* Oʻzbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bagʻishlangan Oliy Majlis palatalarining qoʻshma majlisidagi nutq. - Toshkent : Oʻzbekiston, 2016. - 56 b.

2. *"Xalq ta'limi tizimida ta'lim sifatini baholash sohasidagi xalqaro tashkilotlarni tashkil etish chora tadbirlari toʻgʻrisida"gi.* Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2018-yil 8-dekabrdagi 997-sonli Qarori.

3. *3. Xalqaro tadqiqotlarda oʻquvchilarning matematik savodxonligini baholash (matematika oʻqituvchilari, metodistlari va soha mutaxassislari uchun metodik qoʻllanma).* Ta'lim inspektsiyasi huzuridagi Ta'lim sifatini baholash boʻyicha xalqaro tadqiqotlarni amalga oshirish milliy markazi. - Toshkent.2019-y.112 bet.

4. *Matematika fanidan uzviylashtirilgan oʻquv dasturi, taqvi-mavzu reja (5-6-7-8-9-sinflar).* Toshkent -2010 yil.

5. *5. Matematika fanidan kompetensiyaviy yondoshuvga asoslangan davlat ta'lim standartlari.* VMning 2017 yil 6 aprel 187-sonli qarori.

УДК: 510.75

O'QUVCHILARNI NOSTANDART MASALALAR ORQALI IJODIY QOBILIYATLARNI RIVOJLANTIRISH

D. Sh. Djurayeva.[1], A.S.Tojiboyeva.[2]
[1] Termiz davlat universiteti; dilnozajuraeva@mail.ru,
[2] Angor tuman 1-son kasb-hunar maktabi; e-mail:atojiboyeva@mail.ru

Bugungi kunga kelib ilm-fan, texnika taraqqiyoti juda tezkorlik bilan rivojlanib borayotganligi ham xech kimga sir emas. Ayniqsa, turli axborotlar soni keskin ortib borayotganligi kuzatilmoqda. Bunday axborotlardan, yangilik va o'zgarishlardan ta'lim-tarbiya jarayonida to'g'ri va unumli foydalanish bugungi kun o'qituvchisidan ilmiy salohiyat, malaka va yuqori darajada pedagogik mahoratni talab etmoqda. Shuning uchun ham zamonaviy ilmiy-texnikaviy ilm va bilimga, tushunchaga ega o'quvchilarni tarbiyalash, sifatli ta'limni ta'minlash, yoshlarni har jihatdan barkamol qilib voyaga yetkazishning ilk saboqlarini berish hamda bolalarning dunyoqarashini to'g'ri shakllantirish masalasi maktabgacha ta'lim muassasalari hamda maktablar zimmasiga yuklatilgan.

Ko'plab ilmiy izlanishlarda masalani, jumladan, nostandart masalani ham, yechishning o'ziga xos psixologik xususiyatlari haqida fikr-mulohazalar bildirilgan. Masalan, tadqiqotchi olima N.A. Menchinskaya izlanishlarida masalalarni yechishda fikrlash jarayoni fazalari, ya'ni davrlari, Z.I Kalmikova, Y.N. Kulyutkin, A.F. Esaulov va boshqalarning ilmiy ishlarida esa aqliy faoliyat paytida qabul qilishning umumlashma holatidagi maqbul ko'rinishlari alohida ajratib ko'rsatilgan.

Olib borilgan psixologik-pedagogik va uslubiy izlanishlar, qolaversa, o'zimiz olib borgan tadqiqotlar natijasi shuni ko'rsatmoqdaki, ko'pchilik holatlarda o'quvchilar nostandart masalalarni yechish paytida o'zlarini yo'qotib qo'yadilar va uni yechishni rad etadilar, ya'ni istamaydilar. Chunki o'quvchilar turli masalalarni yechishning ma'lum bir taktika va strategiyasi bilan yetarlicha tanish emasligi tufayli ba'zi bir harakatlar dasturini ishlab chiqishda, xususan, olingan natijalarni umumlashtirishda, boshlang'ich harakatlarini baholash hamda nazorat qilishda ikkilanib qoladilar.

Y.M. Kolyagin matematik masalada quyidagi tarkibiy qismlar bo'lishini alohida ta'kidlaydi:
—boshlang'ich holat (masala sharti);
—yakuniy holat (masalaning xulosasi);
—yechim (izlanayotgan narsani topish shartini qayta tuzish);
—yechimning ustqurmasi (nazariy asoslanishi).

Shu nuqtai nazarga asoslangan Y. Kolyagin barcha boshlang'ich holatdan, to yakuniy holatgacha, matematik vositalar bilan hal etiladigan masalalarni "matematik masala"deb tushuntiradi. Muallif bu guruhdagi masalalar sirasiga tarkibiy qismlari matematik ob'yektlar hisoblanadigan hamda matematik apparatlar yordamida yechiladigan amaliy matematikaga oid barcha masalalarni ham, sof matematik masalalarni ham birdek kiritadi.

F.F. Nagibin va YE.S. Kaninning "Matematik quticha"kitobida esa quyidagi masala turlarini ko'rish mumkin:
—"oxiridan"yechiladigan masalalar;
—"qo'yish"asosida yechiladigan masalalar;
—foizlar asosida yechiladigan masalalar;
—tiklash asosida yechiladigan masalalar.

Masalalarni yechishga o'rgatishda o'qituvchi oldida ikki xil ma'noga ega masala turadi. Bir tomondan, masala shartlarida aks etgan bilimlar tizimini tiklash va saqlab qolish zarur. Ikkinchi tomondan esa o'quvchilar bu bilimlardan voz kechishlari va nisbatan yangi tizimni "doimiy ravishda ochila boradigan masala talablari"ga bog'liq bo'lgan yangi tizimni qurishlariga erishish kerak. Misol tariqasida quyidagi masalani ko'rib chiqamiz:

Masala 1. Quyidagi tenglamalar hamisha ham noto‘g‘rimi?

$$\lg(a+b)=\lg a+\lg b$$

Yechim: Ma’lumki, $\lg(ab)=\lg(a+\lg b)$. Agar qandaydir b to‘g‘ri bo‘lsa, $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$, unda $\lg(a+b)=\lg(ab)$ bo‘lsa, $a+b=ab$ qayerdan keldi?

Binobarin $b=\frac{a}{a-1}$. Shu tariqa, $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$ tenglik har qanday ijobiy ahamiyatli ma’no uchun to‘g‘ri, o‘zaro tenglik bilan bog‘langan b esa: $b=\frac{a}{a-1}$.

Masalan:

1. $a=2; b=2;$
2. $a=3; b=\frac{3}{2},$
3. $a=1,5; b=3.$

Bunday juftlar cheksiz darajada ko‘p, ko‘rib chiqilayotgan tenglikda a va b ahamiyatli ekanligi bois, bu tenglik to‘g‘ri, ya’ni 1 dan yuqori. Ta’kidlash zarurki, "aniq mahsuldor faoliyat (uning yuksak darajasi-ijodiylik), atrof-muhit voqeligini mustaqil anglash-fikrlash faoliyatining to‘qima va sermahsul ko‘rinishlarining o‘zaro bog‘liqligi natijasidir"([1], [2] q.). Lekin, unutmaslik kerakki, aynan"mahsuldor fikrlash o‘z mahsulotining yuqori darajadagi yangiligi bilan izohlanadi. Ya’ni, yangi bilimlar sari aniq yo‘l ochadi [2]. N.A. Menchinskiyning e’tirof etishicha, avvallari o‘zlarida fikrlashning zaif egiluvchanligini namoyon etgan va qisman, esida qolganlar asosida masala-muammoni mahsuldor yondoshishning o‘ziga xosliklarini namoyon etgan holda o‘zgartirib yuborishga qodir bo‘ladilar". Bunday natijaga erishish uchun yechilayotgan masaladagi qiyinchiliklarni (murakkabliklarni) kamaytirish yoki ularni o‘yin va amaliy mashg‘ulotga aylantirish tavsiya etiladi.

Shunisi ham borki, nostandart masalalarni yechish o‘ziga xos matematik fikrlashni shakl-lantira boradi. A.Y.Xinin bunday fikrlashning quyidagi o‘ziga xos belgilarini alohida ajratib ko‘rsatadi:

1)Mantiqiy fikrlashning ustun darajada oxiriga yetkazilishi matematikaga xos xususiyat hisoblanadi.

2)Lo‘nda, ya’ni maqsadga eltuvchi eng maqbul va yaqin mantiqiy yo‘lni izlash, benuqson dalil-isbotlar topishga xalaqit beradigan hamma ortiqcha narsani ayovsiz olib tashlash.

3)Dalillar keltirishda aniq bo‘linishlarni topish.

4)Ramzlarning puxta darajada aniq bo‘lishi.

Masalani dars paytida butun sinf bilan birgalikda o‘rganish va yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Yechim g‘oyasini jamoa bo‘lib izlash va topish bolalarda shaxsiy sifatning tashabbuskorlik qobiliyatini shakllantira boradi. Matematik masalalar o‘quvchilarga o‘z harakatlarini nazorat qilish ko‘nikmasini shakllantirish, yechimning borishini prognoz qilish, o‘z ishini tanqidiy baholashda har jihatdan ko‘mak beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Хинчин А.Й. *Педагогические стати* под ред.Б.В.Гнеденко.-М:.изд-во "Барс 1977-392 стр.

2. Abdullayeva B.S. *Akademik litsey talabalarining matematik tafakkurini rivojlantirish (umumlashtiruvchi darslar misolida)*: Dis... ped.fan.nom.-T., 2002. -41 b.

3. Abdullayeva B.S., Djurayeva D.SH., Djurakulova A.X. *Matematika o‘qitish metodikasi.* O‘quv qo‘llanma. Toshkent: "TURON-IQBOL 2020. -220 b.

4. Akramova A.S. *Система дифференцированних домашных заданий по математике как средства активизатции познавательной деятельности младшых школников.:* Автореф. дисс.... канд. пед. наук. -Алма-ати.: 1996. -19 b.

УДК 371:38.014

ALGEBRANING MAXSUS YO'L BILAN YECHILADIGAN MASALALARINING AKADEMIK LITSEY O'QUVCHILARIDA MATEMATIK QOBILIYATINI RIVOJLANTIRISH

Eshkeldiyev S.[1],
[1]Termiz davlat universiteti; eshkeldiyevsalohiddin@gmail.com1

Bugungi kunda matematikani o'qitish jarayonini samarali amalga oshirish va o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini rivojlantirish eng dolzarb muammolardan biri ekanligi barchaga ma'lum. Shuning uchun ham o'quvchilarning qobiliyatlarini shu jumladan, matematik qobiliyatlarni rivojlantirishga bag'ishlangan ilmiy izlanishlar olib borilgan va turli usullar taklif qilingan. Aytish joizki aynan matematik qobiliyatlarni rivojlantirish usullari yoritilgan ilmiy izlanishlar nihoyatda kam. Bizning bu boradagi izlanishlarimiz shuni ko'rsatmoqdaki taklif qilingan usullar ichida eng samaralisi matematik qobiliyatni aniqlovchi komponentlarni o'rganish va ularni rivojlantiruvchi masalalarni tuzishdir.

Akademik litseylarda ta'lim olayotgan qobiliyatli o'quvchilarni maqsadli tayyorlash va ularning noyob iste'dodini ruyobga chiqarish jarayonida zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalarni joriy etish zarurati paydo bo'ldi. "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"da kayd etilganidek: Akademik litseylarning o'quvchilariga, birinchi navbatda qobiliyatli, yuksak iste'dod sohiblariga, bilimning tegishli sohalari va fanning aniq yo'nalishlari bo'yicha o'z tabiiy qobiliyatlarini namoyon etish va rivojlantirish, o'zlaridagi noyob iste'dodni ro'yobga chiqarish uchun keng imkoniyatlar yaratiladi. Yuqorida aytib o'tilgan ishlarda qobiliyatli o'quvchilarni aniqlash, o'qitish va ularning qobiliyatlarini rivojlantirish borasida ma'lum ilmiy va amaliy natijalar olingan. Biroq, bunday o'quvchilar bilan ishlash jarayonida qobiliyat turlarining rang-barangligi, bir-biriga zid yondashuvlar, shuningdek qobiliyatli o'quvchilar bilan ishlovchi mutaxassislarning yetishmasligi bilan bog'liq bo'lgan bir qancha pedagogik va psixologik muammolar haligacha to'liq o'zining yechimini topmagan. Bundan tashqari qobiliyatli o'quvchilarni o'qitish va ulardagi mavjud qobiliyatni rivojlantirish metodikasini ishlab chikishda ta'lim turlarini va xar bir o'quv fanining o'ziga xos xususiyatlarini hisobga olish lozim bo'ladi.

Har qanday faoliayat insondan bir qobiliyat emas, balki bir-biriga bog'liq bo'lgan bir nechta qobiliyat bo'lishini talab qiladi. Psixologik adabiyotlarda ta'kidlanadiki, biron-bir xususiy qobiliyatning yetishmasligi, sust rivojlanishi boshqa, kuchli rivojlanayotgan qobiliyatlar hisobidan qoplanishi mumkin va hokazo. Qobiliyatlarning bunday qoplanish xususiyati turli faoliyat turlarini egallash, kasb tanlash uchun juda keng imkoniyatlar beradi. Ushbu tushuntirishlar orqali o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini algebraning maxsus yo'l bilan yechiladigan masalalaridan foydalanib teskarilanuvchan matematik fikrlash komponentiga doir masalalarni qaraymiz.

Teskarilanuvchan matematik fikrlash (mulohazalar ketma-ketligida to'g'ridan teskariga qarab o'ta olish qobiliyati). Bu qobiliyat turi matematik fikrlar ketma-ketligini tartiblash va kezi kelganda ulardan teskarisiga foydalanishdir. Mulohazaga olib keluvchi shartlar ketma-ketligini inkor ma'nosida qabul qilish fikri hisoblanadi.

Misol. Tenglikni isbotlang.

$$\sqrt{2022} = 1 + \cfrac{2021}{2 + \cfrac{2021}{2 + \cfrac{2021}{\ddots}}}$$

Yechilishi. Ushbu tenglamani isbotlash uchun o'quvchi teskarilanuvchan matematik fikrlash qobiliyati orqali $\sqrt{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$ tenglikdan foydalanib yechadi.

$\sqrt{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$ ifodani berilgan tenglikga o'xshatish uchun quyidagi ko'rinishga keltirib oladi $\sqrt{a} = 1 + \frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$.

Va $\sqrt{a}+1$ ni $2+\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$ formulaga teskarilanuvchan matematik fikrlash qobiliyati orqali keltirib oladi $\sqrt{a}=1+\frac{a-1}{2+\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}}$

Natijada tenglamani quyidagi ko'rinishda isbotlaydi.

$$\sqrt{a}=1+\frac{a-1}{2+\frac{a-1}{2+\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}}}\sqrt{a}=1+\frac{a-1}{2+\frac{a-1}{2+\frac{a-1}{\ddots}}}$$

Teskarilanuvchan matematik fikrlash qobiliyatini rivojlantirish uchun mantiqiy ko'rinishdagi masalalar, ayniyatni va quyidagi isbotlash ko'rinishdagi masalalarni qo'llash maqsadga muvofiq.

ADABIYOTLAR

1. **Guilford J. P.** *Three Faces of Intellect , Psychology and Education of the Gifted.* Ed. by Barbe W.B. and Renzulli J.S.-N.V., 1981. P. 87-102.
2. **Рензулли Дж., Рис С.М.** *Модель обогащающего школьного обучения. Основные современные концепции творчества и одаренности.* Под ред. Д.Б. Богоявленской. - М., 1997. - С. 214-242.
3. **Mirzaahmedov M.A., Sotiboldiyev D.** *O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash.* Toshkent: O'qituvchi, 1996. - 420 b.
3. **Ibragimov N.Sh.** *Talaba va o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini rivojlantirish usullari haqida.* СамДУ Илмий ахборотномаси. - Самарканд: СамДУ, -2018. 1-сон. -Б.177-182.

UDK 51.001.891

O'quvchilarga matematik amallarni o'rgatishda qiziqarli masalalar roli.

Eshmo'minova D.
Termiz tumani 12-IDUM; dilbareshmominova@gmail.com

O'zbekiston Respublikasi umumiy o'rta ta'lim to'g'risidagi nizom va umumiy o'rta ta'lim bo'yicha davlat ta'lim standartlarining qabul qilinishi vujudga kelgan yangi ijtimoiy vaziyat va sharoitlardan kelib chiqqan holda, umumiy o'rta ta'limning maqsadi, mazmuni va vazifalarini oydinlashtirib berdi.

Maktabda o'quvchilarga matematikani o'qitishdan ko'zda tutilgan asosiy maqsadlar belgilandi. O'quvchilarda har bir fan yuzasidan puxta bilim, ko'nikma va malakalarni hosil qilish,darslarda ijodiy muhitni yaratish uchun avvalo o'quvchilarning bilimidagi yetishmovchilik, kamchiliklarni aniqlash lozim. O'quvchilar bilimida uchraydigan yetishmovchiliklar, dastur hajmida to'liq va mustahkam bilimga ega bo'lmaslik, u yoki bu mavzuni o'zlashtira olmaslik tasodifiy hol emas, albatta, buning turlicha sabablari bo'ladi.

Maktab hayotida ana shu sabablarni to'g'ri aniqlay bilish, chuqur tahlil qilish, o'quvchilarning fanlar bo'yicha chuqur bilim ko'nikma va malakalarni egallashiga putur yetkazuvchi omillar, eng muhimi ularni bartaraf qilishning usullarini izlab topish va amalda qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Ma'lumki ta'lim–tarbiya berishning asosi-darsdir. Puxta tayyorgarlik va reja asosida tashkil etilgan qiziqarli, ko'rgazmali va boy mazmunli dars samarali natija beradi. Afsuski, ba'zan darsni tashkil etish va uni o'tkazishda ayrim hollarda yuzakilik, shoshma-shosharlik, e'tiborsizlik noizchillik hollari ham uchrab turadi.

Umumta'lim maktabning muxim vazifasi keng ma'lumotli, har tomonlama rivojlangan kishilar tayyorlashdan, o'quvchilarni o'quv rejadagi har bir fanga oid chuqur va puxta bilan qurollantirishdan, ular bilimlarini izchil amalga oshirishga intilishi va bu bilimlarini mustaqil to'ldira borish, ularni amalda qo'llay olish malakasini tarbiyalashdan iborat.

Sinfdan tashqi ishning asosiy maqsadi o'quvchilardan fanga qiziqishni rivojlantirish, asosiy kursda olinadigan bilimlarni to'ldiruvchi va chuqurlashtiruvchi matematik fakt va ma'lumotlar, malaka va ko'nikmalar zapaini to'plashdan iborat.

Matematikadan sinfdan tashqi o‘tkaziladigan ishlar deyilganda o‘quvchilarning o‘qituvchi rahbarligida darsdan tashqi paytdagi sistemali mashg‘ulotlari tushuniladi.

Sinfdan tashqari ishlarning ikki turini bir biridan farq qilish lozim. Uning birinchi programma materialini o‘zlashtirishda orqada qoladigan o‘quvchilar bilan ishlash bunga qo‘shimcha dars va konsultatsiyalar kiradi, ikkinchi matematikani o‘rganishga qiziquvchi o‘quvchilar bilan o‘tkaziladigan mashg‘ulotlar.

Odatda sinfdan tashqi ishlar deyilganda ko‘proq ikkinchi turdagi ishlar nazardla tutadigan va ular asosan quyidagi maqsadlarni ko‘zlaydi:
1. O‘quvchilarda matematika va uning tadbiqlariga qiziqish.
2. O‘quvchilarning matematikadan programma bo‘yicha bilimlarini kengaytirish.
3. O‘quvchilarda ilmiy tekshirish xarakteridagi malakalarini hosil qilish.
4. Matematik fikrlash madaniyatini tarbiyalash.
5. O‘quvchilarni matematikadan ilmiy - ommabop adabiyot bilan ishlashga o‘rgatish.
6. O‘quvchilarning matematikaning tarixiy - ilmiy ximmati haqidagi, o‘zbek matematika maktabining dunyo fani oraida yetakchilik roli haqidagi tasavvurlarini kengaytirish.

Bu maqsadlarning bir qismi dars paytida amalga oshiriladi, ammo dars vaqti chegaralanganligidan uning anchagina qismini sinfdan tashqi muloqatlarda amalga oshirishga to‘g‘ri keladi.

Matematikadan sinfdan tashqi ishlarning formalari quyidagilar:
- matematika to‘garaklari;
- matematika viktorinalari;
- konkurs va olimpiadalar;
- matematika kechalari;
- matematik eskursiyalar;
- matematik insholar;
- maktab matematika matbuoti va x.k.

Umumiy ta’lim maktablari sinfdan tashqi ishlar borasida ajoyib tajribalar to‘plagan. Matematika o‘qituvchilari bu faoliyat tashabbuskorlarining oldingi sifati turadilar. O‘quvchilar bilan turli formadagi qo‘shimcha matematik mashg‘ulotlar o‘tkazilishi yosh matematiklar maktablarining paydo bo‘lishiga, shuningdek o‘rta maktablarda fakultativ kurslar joriy etilishiga olib keladi. Biroq fakultativ mashgulotlarining joriy etilishi maktabda matematikadan o‘tkaziladigan sinfdan tashqi ishlarning roli va ahamiyati pasaytirmaydi, aksincha matematika o‘qituvchisi uchun o‘quuvchilarning matematik faoliyatlarini yanada rivojlantiradigan matematika faniga qiziqishlarini kuchaytiradigan ajoyib imkoniyatlar yaratib beradi. Matematikadan sinfdan tashqi ishlar o‘quvchilarni bilimlarini chuqurlashtirishga, ilmiy qiziquvchanliklarini o‘stirishga, bilim darajalarini oshirishga va tarbiyaviy harakterdagi masalalarni hal qilishga qaratiladi.

ARIFMETIKAGA YORDAM

Oniy ko‘paytirish

Mohir hisoblovchilar ko‘p holatlarda o‘zlariga hisoblash ishlarini murakkab bo‘lmagan argebraik o‘zgartirishlardan foydalanib yengillashtiriladilar. Masalan, 988^2 ning hisoblanishi quyidagicha bajariladi:

$$988 \cdot 988 = (988 + 120) \cdot (988 - 12) + 12^2 = 1000 \cdot 976 + 144 = 976144$$

Osongiga fahmlash mumkinki, hisoblovchi bu holda quyidagi algebraik o‘zgartirishlardan foydalanadi:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b) \cdot (a - b) + b^2.$$

Amaliyotda biz bu formuladan og‘zaki hisoblashlarda muvoffaqiyat bilan foylanishimiz mumkin.

Masalan:

$$27^2 = (27 + 3) \cdot (27 - 3) + 3^2 = 729$$

$$18^2 = 20 \cdot 16 + 2^2 = 324$$

$$48^2 = 50 \cdot 46 + 2^2 = 2304$$

$$54^2 = 58 \cdot 50 + 4^2 = 2916$$

Har qanday 76 bilan tugallanuvchi ikki sonning ko'paytmasi 76 bilan tugallaydigan sonni beradi.

Isbot. Bunga o'xshash sonlarning umumiy ifodasi quyidagicha: $100a + 76,\ 110b + 76$ va h.k.

Shu ko'rinishdagi ikki sonni ko'paytiramiz:

$$10000ab + 7600b + 7600a + 5776 = 10000ab + 7600b + 7600a + 5700 + 76 =$$

$$= 100(100ab + 76b + 76a + 57) + 76$$

ifodani hosil qilamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **Mirziyoyev Sh. M.** *Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz.* O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutq. - Toshkent : O'zbekiston.
2. *Matematika fanidan kompetensiyaviy yondoshuvga asoslangan davlat ta'lim standartlari.* VMning 2017 yil 6 aprel 187-sonli qarori.
3. **Urazova M.B., Eshpulatov SH. N.** *Bo'lajak o'qituvchining loyihalash faoliyati* Metodik qo'llanma. - T.: TDPU Rizografi, 2014 yil. 6,5 b.t.
4. **Mirzahmedov M. A., Raximqoriev A. A.** *Matematika 6-sinf.* "O'zbekiston Davlat entsiklopediyasi" Davlat ilmiy nashriyoti – 2015 yil.
5. **Alimov Sh., Xolmuxammedov O., Mirzaahmedov M.** *Algebra 7-sinf* . "O'qituvchi" nashriyoti - 2009 yil.

УДК 517.28

Tenglamasi parametrik shakldа berilgan funksiyani hosila yordamida tekshirib grafigini chizish.

Islomov B.
Termiz davlat universiteti; bobur1991islomov@gmail.com1

Tenglamasi

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \tau(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta \tag{1}$$

parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani qaraymiz.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani hosila yordamida tekshirib grafigini chizishda kerak bo'ladigan ba'zi bir tushunchalarni keltiramiz.

1.*Egri chiziqning o'qlarga nisbatan simmetrikligi.*

a) Agar $\varphi(t)$ juft, $\tau(t)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda egri chiziq Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

b) Agar $\varphi(t)$ toq, $\tau(t)$ juft funksiyalar bo'lsa, u holda egri chiziq Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

c) Agar $\varphi(t)$ va $\tau(t)$ funksiyalar toq funksiyalar bo'lsa, u holda egri chiziq koordinata boshiga o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Bu shartlar yetarli shartlardir, lekin zaruriy shart emas.

2.*Egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari.*

a)t ning $\tau(t)=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlari berilgan egri chiziqning absissa o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlab beradi.

b)t ning $\varphi(t)=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlari berilgan egri chiziqning ordinata o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlab beradi.

3.*egri chiziqning maxsus nuqtasi tushunchasi.*

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\tau(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$$

parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziqning $(x_0;y_0)$ nuqtasi maxsus nuqta deyiladi, agar $t=t_0$ da (bu yerda $t_0 \in [\alpha;\beta]$)

$$x_0=\varphi(t_0), y_0=\tau(t_0),\ \varphi'(t_0)=\tau'(t_0)=0 \tag{2}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa. Egri chiziqning maxsus nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalari (t ning $\varphi'(t), \tau'(t)$ lardan hech bo'lmaganda birortasini nolga aylantirmaydigan qiymatlariga mos kelgan nuqtalarni) oddiy deyiladi.

Har qanday maxsus nuqta bo'lmagan oddiy $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan urunma chiziq tenglamasi

$$y-y_0=\frac{\tau'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x-x_0), \varphi'(t_0)\neq 0 \tag{3}$$

yoki

$$x-x_0=\frac{\varphi'(t_0)}{\tau'(t_0)}(y-y_0), \tau'(t_0)\neq 0 \tag{4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

4.*Egri chiziq urunmasining koordinata o'qlariga parallel bo'lish shartlari.*

a) Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'lishi uchun $y'_x=0, y'_t=0, x'_t\neq 0$ shart bajarilishi kerak. Demak, $y'_x=0$ shartni qanoatlantiruvchi t ning t_0 qiymatlarini $y'_t=0, x'_t\neq 0$ munosabatdan topamiz.

b)Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma Oy o'qiga parallel bo'lishi uchun $y'_t\neq 0, x'_t=0$ shart bajarilishi kerak. Bundan ko'rinadi urunma to'g'ri chiziq o'tuvchi $(x_0;y_0)$ nuqtaga t ning t_0 qiymatlarini $y'_t\neq 0, x'_t=0$ munosabatdan topamiz.

5.*Egri chiziqning egilish nuqtasi.*

Funksiya grafigining egilish nuqtasini toppish uchun $x'_t\neq 0$ shartda t ning $x'_t y''_{tt}-y'_t x''_{tt}=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlarini topish yetarli.

6.*Egri chiziqning karrali (ikkilangan) nuqtalari.*

Har xil urinmaga ega bo'lgan egri chiziq ikkita shoxining (tarmog'ining) kesishish nuqtasi egri chiziqning karrali nuqtasi deyiladi.

Agar $M_1(x_1;y_1)$ nuqta egri chiziqning karrali nuqtasi bo'lsa, t parametrning ikkita har xil t_1 va t_2 qiymatlari mavjud bo'lib, ular uchun

$$\begin{cases} x_1=\varphi(t_1)=\varphi(t_2), \\ y_1=\tau(t_1)=\tau(t_2), \end{cases} \alpha \le t \le \beta \tag{5}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu sistemani yechib, t parametrning topilgan t_1 va t_2 qiymatlariga mos kelgan egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentlari

$$k_1=\frac{\tau'(t_1)}{\varphi'(t_1)} \text{ va } k_2=\frac{\varphi'(t_1)}{\tau'(t_1)} \tag{6}$$

formulalar yordamida topiladi.

7.*Egri chiziqning qaytish nuqtalari.*

Egri chiziqning qaytish nuqtasida

$$\varphi'(t) = 0, \tau'(t) = 0(x_t'''y_t'' - y_t'''x_t'' \neq 0) \tag{7}$$

shartlar bajariladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi t ning qiymatiga mos kelgan egri chiziq nuqtasiga o'tkazilgan urunmaning burchak koeffitsiyenti noaniq bo'ladi.

8. *Egri chiziqning asimptotalari.*

a) Egri chiziq $x = a$ vertical asimptotaga ega bo'ladi, agarda bir vaqtda

$$\lim_{t \to t_0} \tau(t) = \infty, \ \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = a, \tag{8}$$

tengliklar bajarilsa.

b)Egri chiziq $y = b$ gorizontal asimptotaga ega bo'ladi, agarda bir vaqtda

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty, \ \lim_{t \to t_0} \tau(t) = b, \tag{9}$$

tengliklar bajarilsa.

c)$y = kx + b$ og'ma asimptotani topish uchun parameter t ning shunday t_0 qiymatini topish kerakki natijada

$$\varphi(t_0) = \infty, \ \tau(t_0) = \infty \tag{10}$$

tengliklar bir vaqtda bajarilsin.

Agar t ning shunday t_0 qiymati topilsa u holda k va b lar

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{\tau(t_1)}, b = \lim_{t \to t_0} [\tau(t) - k \cdot \varphi(t)] \tag{11}$$

tengliklar yordamida topiladi.

Demak tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani hosila yordamida tekshirib, uni grafigini chizishni quyidagi tartibda amalga oshirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

1^0 Egri chiziqning o'qlarga nisbatan simmatrikligini aniqlash.

2^0 Egri chiziqnbi koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish.

3^0 Funksiyaning maxsus va oddiy nuqtalarini topish.

4^0 Egri chiziqning koordinata o'qlariga parallel bo'lgan urunmalarini topish.

5^0 Egri chiziqning egilish nuqtasini topish.

6^0 Egri chiziqning karrali nuqtalarini topish.

7^0 Egri chiziqning qaytish nuqtalarini topish.

8^0 Egri chiziqning asimptotalarini topish.

9^0 Funksiya grafigini chizish.

Endi tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan funksiya grafigini hosila yordamida tekshirib grafigini chizishga doir quyidagi misolni qaraymiz.

misol. tenglamasi ushbu

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2+1}, \\ y = \frac{t(1-t^2)}{t^2+1}, \end{cases} \tag{12}$$

ko'rinishda berilgan funksiyani yuqorida bayon qilingan sxema bo'yicha tekshirib grafigini chizadigan bo'lsak ushbu shaklga ega bo'lamiz(1-chizma).

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. **И.И.Ляшко, А.К.Боярчик, Я.Г.Гай, Г.П.Головар.** *Математический анализ в примерах и задачах. Издательское объединение* "Вища школа". Киев-1974 г.
2. **A. Gaziev, I. Israilov, M. Yaxshiyev.** *Funksiyalar va grafiklar.*"Voris-nashriyot". Toshkent-2006 y.
3. **M.A. Sobirov va A.Y. Yusupov.** *Differensial geometriya kursi.* "O'qituvchi". Toshkent-1965 y.

УДК 372.85

SUYUQLIKKA OID KONSTRUKTIV MASALALARNI YECHISH METODIKASI

Ismoilov B.
Termiz davlat universiteti; 19boburtoxirovich93@gmail.com

Takidlab o'tish joizki, tadqiqot ishimizda bayon etilgan konstruktiv masalalar yechimlari atroflicha yoritib berilgan adabiyotlar soni yetarli darajada emas. Shu bois ham maqolada keltirib o'tilgan konstruktiv masalalarga o'xshash bo'lgan masalalar 3-sinf matematika darsligining 2019 yilgi nashridan olib tashlandi. Aslida mazkur masalalar ushbu darslikning 2016 yilgi nashrida mavjud edi(ushbu darslikning 836-masalasi nazarda tutilmoqda). Darsliklardan muammoli bo'lgan masala-larning olib tashlanishining asosiy sababi kadrlarimizning(ushbu o'rinda bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilari nazarda tutilmoqda) aytib o'tilgan konstruktiv masalalarni yechish metodlari bilan yaqindan tanish bo'lmaganligida. Yuqoridagilarni hisobga olib 2016 yilgi 3-sinf matematika (Burxonov va ...) darsligida berilgan konstruktiv masalalarning yechimiga olib boruvchi eng qulay usulni aniqlash masalasi tadqiqotimizda muammo sifatida qaraldi.

2016 yilgi 3-sinf matematika darsligida berilgan 809-836-masalalarga o'xshash bo'lgan konstruktiv masalalar uchun, umumiy qonuniyat yaratish orqali bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilarining matematik kompetentligini yuqori darajada rivojlantirish mumkin.

1-umumiy masala. Juft hajmli idishdagi suyuqlikni, hajmlari yig'indisi berilgan juft hajmli idish hajmiga teng bo'lgan toq hajmli ikkita bo'sh idish yordamida teng ikki qismga ajratish masalasi, juft idish hajmi toq idish hajmiga karrali bo'lmagan holda(836-masala 1-umumiy masalaning xususiy holi).

Ushbu masalaning yechimini aniqlash uchun quyidagi metodni taklif etamiz. Suvga oid konstruktiv masalalar yechimi uchun tavsiy etilgan metodika. Mazkur metod orqali masala yechimini aniqlash quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi.

1-bosqich.1-bosqichda berilgan masaladagi idishlarni quyidagicha nomlab oling.
- Juft hajmli idish − birinchi idish.
- Toq hajmli idishlardan hajmi kattasi − ikkinchi idish.
- Toq hajmli idishlarning hajmi kichigi − uchunchi idish.

2-bosqich. Masala shartida berilgan suyuqliklarning idishlarda ko'rinishi 3 xil holatda nomoyon bo'ladi. Mazkur holatlarga uchunchi va ikkinchi idishlarga nisbatan qarang.
1-holat. 3-idishda suyuqlik mavjud emas.
2-holat. 3-idisha suyuqlik mavjud va 2-ishdaga ushbu suyuqlikni quyish imkoniyati bor.
3-holat. 2-idish suyuqlikka to'lgan vaqt.

3-bosqich. Ushbu bosqichda quyidagi qoidalarga amal qilgan holda masala yechimini aniqlang. **1-qoida.** Agarda 3-idish bo'sh bo'lsa, 1-idishdan faqat 3-idishga suyuqlikni quying, 2-idishga quyishingiz tafsiya etilmaydi.
2-qoida. 3-idishda suyuqlik mavjud bo'lsa, undan 2-idishga suyuqlikni quyib oling, agar imkoniyat mavjud bo'lsa, bund uchunchi idishdagi suyuqlik ikkinchi idishga to'liq quyilmasligi mumkin.
3-qoida. 2-idish suyuqlikka to'lgan vaziyatda uni birinchi idishg bo'shatib oling.

Yuqorida aytib o'tilgan qoidalarning har biri bittadan holatga mos keladi, Masala yechimiga erishish uchun birinchi holatda 1-qoidadan, ikkinchi holatda 2-qoidadan, uchunchi holatda 3-qoidadan foydalaning. Tajriba sinov ishi. Quyidagi masalani tavsiya etilgan metod orqali tajribadan o'tkazib ko'ramiz.

1-masala. 8 litrli idish suvga to'lib turibdi, 3 va 5 litrli bo'sh idishlar yordamida sutni 4 litrdan qilib teng taqsimlang[1].

1-jadval

Idishlar	8 litrlik	5 litrlik	3 litrlik	Holatlar
Idishlardagi mavjud suvlar miqdori	8 litr suv mavjud	bo'sh idish	bo'sh idish	Dastlabki holat
1-qadam	8	0	0	1-holat
2-qadam	5	0	3	2-holat
3-qadam	5	3	0	1-holat
4-qadam	2	3	3	2-holat
5-qadam	2	5	1	3-holat
6-qadam	7	0	1	2-holat
7-qadam	7	1	0	1-holat
8-qadam	4	1	3	2-holat
yechim	4	4	0	

Yechim. 1-jadvalda masala yechimini aniqlash algoritmi ko'rsatilgan. Algoritm yuqorida takidlab o'tilgan qonuniyat orqali qurildi, chunki masala sharti, juft hajmli idishdagi suyuqlikni, hajmlari yig'indisi berilgan juft hajmli idish hajmiga teng bo'lgan toq hajmli ikkita bo'sh idish yordamida teng ikki qismga ajratishdan iborat.

1-jadval asosida masala yechimini qurishning algoritmi.

1-qadam. 1-holat kuzatilmoqda, demak 1-qoidadan foydalanamiz. 8 litrlik idishdagi suvdan 3 litrlikka quyib olamiz, bunda 8 litrlikda 5 litr suv qoladi.

2-qadam. (2-holat, 2-qoidani qo'llaymiz). 3 litrlikdagi suvni 5 litrlikka quyib olamiz, bunda 3 litrlikda suv qolmaydi.

3-qadam. (1-holat, 1-qoidani qo'llaymiz). 8 litrlikda qolgan 5 litr suvdan 3 litrini bo'shab qolgan 3 litrlikka quyamiz, bu jarayonda 8 litrlik idishda 2 litr suv qoladi.

4-qadam. (2-holat, 2-qoidadan foydalanamiz). 5 litrlik idishda 3 litr suv mavjud bo'lgani uchun, 3 litrlik idishdagi suvdan 2 litrini 5 litrlikka quyib bu idishni to'ldirib olamiz. Ushbu holatda 3 litrlik idishda 1 litr suv qoladi.

5-qadam. (3-holat, 3-qoidadan foydalanamiz). 5 litrlik idishdagi suvni 8 litrlik idishga quyib olamiz, bunda 8 litrlik idishda 7 litr suv hosil bo'lib, 5 litrlik idishda esa suv qolmaydi.

6-qadam. (2-holat, 2-qoidadan foydalanamiz). 3 litrlik idishda mavjud bo'lgan 1 litr suvni 5 litrlikka quyib olamiz.

7-qadam. (1-holat, 1-qoida). 8 litrlikdagi suvdan 3 litrlikka quyib olamiz, bunda 3 litrlik suvga to'lib, 8 litrlikda 4 litr suv qoladi.

8-qadam. (2-holat, 2-qoida). Ushbu qadamda 3 litrlik idishdagi mavjud suvni 5 litrlikka quyamiz va 5 litrlik idishda ham 4 litr suv hosil bo'ladi.

Tavsiya etilgan metod orqali, masala shartida berilgan 8 litrlik idishda berilgan suvni 4 litrdan qilib teng ikki qismga taqsimladik va natijada yechimga erishildi.

1-natija. Juft hajmli idishdagi suyuqlikni (idish suyuqlikka to'la), hajmlari yig'indisi berilgan juft hajmli idish hajmiga teng bo'lgan toq hajmli ikkita bo'sh idish yordamida teng ikki qismga ajratish mumkin va bu jarayon aytib o'tilgan juft hajmli idish miqdorining son qiymatiga teng bo'lgan qadamda aniqlanadi.

Maqolada bayon etilgan, birinchi va ikkinchi masalalar yechimlarining aniqlanish algoritmiga e'tibor bering, haqiqtdan ham 1-masalaning yechimi 8 qadamda, 2-masalaning yechimi esa 12 qadamda aniqlangan.

2-natija. n>2 shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural son uchun 3n-2 litrlik idishda 3n-3 litr, 2n litrli idishda n+1 litr suyuqlik mavjud bo'lganda, n litrli bo'sh idish yordamida idishlarda berilgan suyuqlikni teng ikki qismga ajratish mumkin va bu jarayon 5 ta qadamda aniqlanadi.

Xulosa. Tadqiqot ishida tavsiya etilgan usullarni puxta o'zlashtirgan bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilari(boshlang'ich sinf o'qituvchilari) soni ko'paysagina, yechimini aniqlash muammoli deb qaralgan konstruktiv masalalarni darsliklardan olib tashlashga ehtiyoj qolmaydi.

Ushbu tadqiqot ishining keng targ'ib qilinishi orqali kadrlarimiz(bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilari) maqolada keltirilgan konstruktiv masalalarning yechimlarini qurishda muammolarga duch kelmaydi, bu esa maqolada yechimi ko'rsatilgan va ularga o'xshash bo'lgan konstruktiv masalalarning boshlang'ich sinf matematika darsliklariga(3-4-sinflar) kiritish uchun asos bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. **S.Burxonov va boshqalar.** *MATEMATIKA Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 3-sinfi uchun darslik.* Toshkent-2016.67, 150, 154-betlar.
2. **M.A. Mirzaahmedov va boshqalar** *4-5-6- sinflar uchun matematikadan masalalar to'plami* o'quv qo'llanma.Toshkent-2018.

УДК 51

Parametrli tenglamalarni har xil usulda yechish

Janiqulov Q.K.
Samarqand davlat veterinariya meditsinasi chorvachilik, biotexnologiyalar universiteti akademik litseyi; qamariddinjaniqulov@mail.ru

Parametrli masalalar elementar matematikaning eng qiyin masalalaridan hisoblanadi. Agar masala (tenglama, tengsizlik, sistema) bir nechta o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, u holda o'zgaruvchilardan birini asosiy(noma'lum)deb, qolganlarini parametrlar deb ataladi. Parametrlarning soniga qarab masalalar bir, ikki,... parametrli masalalar deyiladi.

Parametrli masalalarni yechish deganda biz, parametrlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida noma'lumning masalani qanoatlantiradigan barcha qiymatlarini(yechimni) topishni tushunamiz. Tadqiqot ishida parametrli tenglamalarning yechimlarini bir nechta metodlar bilan topib ko'rsatamiz. Bu turdagi masalalar quyidagi ishlarda ham qaralgan [1–7].

1– masala. $\left|x^2-5ax\right|=15a$ tenglama ikkita haqiqiy yechimga ega bo'ladigan, a ning natural qiymatlari yig'indisini toping.

Yechish: $1-$ *usul*: (*Analitik usul*) $\left|x^2-5ax\right|=15a$ tenglamani yechamiz:

$$x^2-5ax=\pm15a \Longrightarrow x^2-5ax+15a=0,\ x^2-5ax-15a=0.$$

Hosil bo'lgan

$$x^2-5ax+15a=0 \tag{1}$$

va

$$x^2-5ax-15a=0 \tag{2}$$

kvadrat tenglamalarning diskriminantini mos ravishda $\mathcal{D}_1$ va $\mathcal{D}_2$ deb olib, ularni hisoblaymiz: $\mathcal{D}_1=25a^2-60a$ va $\mathcal{D}_2=25a^2+60a$.

$(a>0)$ ning istalgan qiymatida $\mathcal{D}_2>0$ ekani ravshan. Bu degani (2) tenglama ikkita turli haqiqiy ildizlarga ega. Eslatib o'tamizki, (1) va (2) tenglamalarning ildizlari berilgan modulli tenglamaning ildizi ham bo'ladi. Masala shartiga ko'ra tenglama ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lishi uchun, $\mathcal{D}_1$ manfiy bo'lishi kerak.

$$\mathcal{D}_1<0,\ 25a^2-60a<0 \Longrightarrow 0<a<2,4. \tag{3}$$

(3) ga ko'ra a ning natural qiymatlari 1 va 2 bo'lib, ularning yig'indisi 3 bo'ladi. ***Javob***: 3

2–*usul*: (*Grafik usul*) $y_1 = \left|(x-\frac{5a}{2})^2 - \frac{25a^2}{4}\right|$ va $y_2 = 15a$ funksiyalarning grafiklarini bitta koordinatalar tekisligida chizib olamiz. U holda y_2 to‘g‘ri chiziq y_1 siniq egri chiziqni quyidagi holatda kesib o’tadi:

Bu holda y_1 va y_2 chiziqlar ikkita umumiy nuqtaga ega. Shuning uchun berilgan tenglama ikkita yechimga ega bo‘lib, ulardan biri musbat va ikkinchisi manfiy(1–*chizmaga qarang*). $15a > y_0 > 0$.

Masala shartiga ko‘ra berilgan tenglama ikkita yechimga ega bo‘lishi uchun $15a > y_0 > 0$ bo‘lishi kerak. Bundan $15a > y_0 > 0$, $15a > \frac{25a^2}{4} > 0 \Longrightarrow a \in (0; 2,4)$.

a ning natural qiymatlari 1 va 2 bo’lib, ularning yig‘indisi 3 ga teng. ***Javob***: 3

3 – *usul*: (*Intervallar usuli*) $\left|x^2 - 5ax\right| = 15a$ tenglama noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun, avvalo $a > 0$ bo‘lishi kerak. Endi berilgan tenglamani yechamiz:

$$|x \cdot (x-5a)| = 15a\ , \qquad |x| \cdot |x-5a| = 15a.$$

$$I.\ x<0,\ \ x^2-5ax-15a=0,\quad x_{1,2}=\frac{5a \pm \sqrt{25a^2+60a}}{2},\quad x_1=\frac{5a-\sqrt{25a^2+60a}}{2}.$$

$$II.\ 0<x<5a,\quad x\,(5a-x)=15a,\quad x^2-5ax+15a=0,\quad x_{3,4}=\frac{5a \pm \sqrt{25a^2-60a}}{2},$$

$$x_3=\frac{5a-\sqrt{25a^2-60a}}{2},\qquad x_4=\frac{5a+\sqrt{25a^2-60a}}{2}.$$

$$III.\ x>5a,\qquad x\,(x-5a)=15a,\qquad x^2-5ax-15a=0,\qquad x_{5,6}=\frac{5a \pm \sqrt{25a^2+60a}}{2},$$

$x_5 = \frac{5a+\sqrt{25a^2+60a}}{2}$, $a > 0$ bo‘lganda $x_1 = \frac{5a-\sqrt{25a^2+60a}}{2}$ va $x_5 = \frac{5a+\sqrt{25a^2+60a}}{2}$ yechimlar haqiqiy bo‘ladi. Shuning uchun $x_{3,4}$ yechimni bo‘lmaslik kerak. Buning uchun $25a^2 - 60a < 0 \Longrightarrow 0 < a < 2,4$. a ning natural qiymatlari 1 va 2 bo‘lib, ularning yig‘indisi 3 ga teng. ***Javob***: 3

2–masala. $\sqrt{2x^2+ax+2a+10} = x-1$ tenglama haqiqiy yechimga ega bo‘ladigan, a ning qiymatlarini toping.

Yechish: 1–*usul*: (*Analitik usul*). Berilgan tenglama yechimga ega bo‘lishi uchun,

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2+ax+2a+10 = x^2-2x+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+(a+2)\,x+2a+9=0 \end{cases} \tag{4}$$

(4) yechimga ega bo‘lishi uchun $D = (a+2)^2 - 4\,(2a+9) = a^2 - 4a - 32 \geq 0,\ \Longrightarrow\ (-\infty; -4] \cup [8; \infty)$. Endi berilgan tenglamani yechamiz:

$$x_1=\frac{-a-2 \pm \sqrt{a^2-4a-32}}{2},\qquad \frac{-a-2+\sqrt{a^2-4a-32}}{2} \geq 1, \Longrightarrow -a-2+\sqrt{a^2-4a-32} \geq 2,$$

$$\sqrt{a^2-4a-32} \geq a+4,\quad a^2-4a-32 \geq a^2-8a+16,\quad -12a \geq 48,\quad a \leq -4.$$

Javob: $(-\infty; -4]$

2–*usul*: (*Grafik usul*) $f\,(x) = x^2 + (a+2)\,x + 2a + 9$ funksiyani qaraymiz. $D \geq 0$, $f\,(1) \geq 0$, $x_0 \geq 1$, shartlar bajarilishi kerak. (2–*chizmaga qarang*).

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(1) \geq 0, \\ x_0 \geq 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2-4a-32 \geq 0, \\ f\,(1) = 1^2 + (a+2)\cdot 1\ + 2a + 9 \geq 0, \\ -\frac{a+2}{2} \geq 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (-\infty; -4] \cup [8\,;\infty)\,, \\ a \geq -4, \\ a \leq -4. \end{cases}$$

Bu sistemadan $x = -4$ yechim ekanligini topamiz. ***Javob***: -4

3–*usul*: (*Parametr kiritish usul*) $x^2 + (a+2)\,x + 2a + 9 = 0$, tenglamadan $l = x - 1$, belgilash olsak, $x = l+1$, $x \geq 1$, $l+1 \geq 1$, $l \geq 0$, $(l+1)^2 + (a+2)(l+1) + 2a + 9 = 0, \Longrightarrow l^2 + 2l + 1 + (a+2)l + a + 2 + 2a + 9 =$

0, $l^2+(a+4)l+3a+12=0$. Bu parametrli kvadrat tenglama yechimga ega bo'lishi uchun quyidagi sistemani birgalikda yechish kerak.

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ l_1+l_2 \geq 0, \\ l_1 \cdot l_2 \geq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2-4a-32 \geq 0, \\ -(a+4) \geq 0, \\ 3a+12 \geq 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (-\infty;-4] \cup [8;\infty), \\ a \leq -4, \\ a \geq -4. \end{cases}$$

Bu sistemadan $x=-4$ yechim ekanligini topamiz. ***Javob***: -4

Adabiyotlar

1. **Ястрибинецкий Г.А.** *Уравнения и неравенства, содержащие параметры.* М.: “Просвешение”, 1972.
2. **Горнщтейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.** *Задачи с параметрами.* – К.1995. –336.
3. **Кожухов С.К.** *Об одном классе параметрических задач.* Математика в школе. No. 3, 1996. С. 45-49.
4. **Кожухов С.К.** *Различные способы решения задач с параметром.* Математика в школе. No. 6, 1998. С. 9-12.
5. **Мещрякова Г.П.** *Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям.* Математика в школе. No. 5 2001.
6. **Ostonov Q., Quljonov O‘., Mardonov J. , Arziqulov A.U.** *Parametrli tenglama va tengsizliklarni yechish usullari.* Uslubiy qo‘llanma, Samarqand, 2017, 80 bet.
7. **Farmonov Sh.K.** *Parametrga bog‘liq tenglamalar.* Fizika, Matematika va Informatika jurnali, 2002-yil No. 1, 17–22 betlar.

УДК 371:38.014

BA'ZI AYLANMA SIRTLARNING HOSIL BO'LISHI

Mahmudov . F.F.[1], Ashurova. Z A.[2]
[1] Gachon universiteti Janubiy Korea ; Fazliddin_4147@bk.ru
[2]Termiz davlat universiteti; ashurovazarnigor1995@gmail.com

Ma'lumki evklid fazosida tor aylanani l o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtga aytilar edi. Agar bu yerda aylanani, berilgan kesma bir xil burchak ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rni shaklida aniqlash mumkinligini hisobga olsak, galiley tekisligida bu ta'rifni qanoatlantiradigan nuqtalarning geometrik o'rni simmetriya o'qi maxsus to'g'ri chiziq bo'lgan parabola bo'ladi.

Ta'rif . Galiley tekisligi berilgan kesma (maxsus bo'lmagan) o'zgarmas burchak ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rni sikl deb ataladi. Galiley tekisligidagi siklni evklid geometriyasidagi aylana ta'rifini qanoatlantiradigan chiziq sifatida qarash mumkin.

R_3^1 Galiley fazosida uchi maxsus o'q ya'ni Ox da yotmagan siklni shu lo'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\overline{r}(u,v)=u\overline{i}+(au^2+bu+c)cosv\overline{j}+(au^2+bu+c)sinv\overline{k} \quad (1)$$

bu yerda $b^2-ac \neq 0$

Sikl uchun a koeffisent invariant kattalikdir. Ammo $b^2-ac \neq 0$ shartga ko'ra sikl yo'nalishi ahamiyatsiz. $b^2-ac<0$ bo'lganda Ox o'qni kesib o'tmaydi.Unda $x=u, \quad z=au^2+bu+c$ profil chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirsak hosil bo'lgan sirt uchun to'la egrilik $K<0$ bo'ladi.

Aksincha, $b^2-ac>0$ bo'lsa profil chiziqni Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt ikkita maxsus nuqtalarga ega bo'lgan qavariq sirt bo'ladi. Sirtning xar bir nuqtasi uchun $K>0$ shart bajariladi.

Teorema . Sirt (1) tenglama bilan berilgan bo'lsin bu yerda $b^2-ac \neq 0$.

1)$b^2 - ac < 0$ bo'lsa berilgan sirt egarsimon aylanma sirtlar ;
2)$b^2 - ac > 0$ bo'lsa berilgan sirt ,maxsus nuqtalarga ega bo'lgan qavariq sirtlar oilasi ;
bo'ladi.

Demak galiley fazosida sirt (1) tenglama bilan berilganda va ma'lum shartlar bajarilganda to'la egriligi musbat va manfiy bo'lgan ikkita sirtni aniqlar ekan.

Adabiyotlar

1. **Артыкбоев А., Соколов Д.Д.** *Геометрия в целом в пространстве-время.* Т.: Фан. 1991. 179 с.
2. **И.М.Яглом .** *Относительности галилея и неевклидова геометрия .* Наука". Москва 1969 г 305 с

Geometriya fanidan "Ikkinchi tartibli sirtlar"mavzusini o'rganishda maple dasturi imkoniyatlaridan foydalanish.

Radjabov B.Sh. [1,a], Raxmanova G.A[1,b] , Sadullayeva M[1,c] ,

[1] *Chirchiq davlat pedagogika universiteti, Chirchiq, O'zbekiston*
E-mail: [a] b.rajabov.5252@gmail.com, [b]gulinozabonu840502@bk.ru,
[c] tulabaevtimur38@gmail.com

Hozirgi kunda axborot texnologiyasining o'quv jarayonidagi o'rni va ro'li bir qancha sohalarda muhim o'rin egallaydi. Masalan: Algebra, Geometriya, Differensial tenglamalar va turli xil ko'rinishdagi grafiklarda ham buni yaqqol ko'rishimiz mumkin. Shu qatorida murakkab matematik masalalarni yechishni osonlashtiradi. Matematik paketlardan o'quv jarayonida foydalanish matematik va texnik ta'limning fundamentalligini oshirishni ta'minlaydi. Talabalarning nazariy bilimlarini amaliyotga qo'llash mahoratlarini oshiradi. Hozirgi zamon yoshlari bilimi va tarbiyasi davr talabiga javob beradigan hamda umuminsoniy ta'lim-tarbiya shakl-tamoyillari bilan hamohang bo'lishi zarur. Axborot texnologiyalari rivojlangan davrda kompyuter texnologiyalari yordamida darslarni o'tkazish o'quvchilarni darsda befarq bo'lmaslikka, mustaqil fikrlash, ijod etish va izlanishga majbur etishi, kompyuter savodxonligini oshirish hamda o'zi tanlagan kasbiga bo'lgan qiziqishlarini kuchaytirish bugungi kunning dolzarb masalalaridandir. Maple-bu kompyuterda analitik va sonli hisoblashlarni bajaruvchi, 2000 dan ko'proq buyruqlarni o'z ichiga olgan va algebra, geometriya, matematik analiz, differensial tenglamalar, diskret matematika, fizika, statistika, matematik fizika masalalarini dastur tuzmasdan yechish imkoniyatini beruvchi matematik tizim (sistema) –paketdir. Aytish mumkinki, Maple bu yuqorida sanab o'tilgan sohalardagi matematik masalalarni yechib beruvchi katta kalkulyatordir. Maple takomillashib bormoqda, hozir uning Maple 9.5, Maple 11-versiyalari keng tarqalgan.

Geometriya fanida o'zlashtirishda Maple dasturi bugungi kunda talabalarga ko'pgina imkoniyatlarni yaratib bermoqda. Xususan Oliy ta'lim jarayonida ikkinchi tartibli sirtlarga oid misollarning yechilishi va grafikaviy chizilmasini chizish murakkab bo'lib keladi, Maple dasturi bilan ishlash esa talabalarga ko'pgina yengilliklar yaratib beradi.

Biz kompyuterdan foydalanib Maple dasturi yordamida geometriya kursidan ikkinchi tartibli sirtning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilganda grafigini yasash usulini qaraymiz.

Maple dasturi yordamida ikkinchi tartibli sirtning umumiy ko'rinishdagi tenglamasining grafigini chizishda bizga Mapleda grafiklar yasash tartibi va buyruqlarini bilishimiz kerak bo'ladi.

Masalan:$plot\left(f(x), x = a..b,\ y = c..d,\ parametrs\right)$ buyrug'ini $f\left(x\right), x = a..b,\ y = c..d$ grafigi tugun funktsiyani ham $implicitplot2d\left(F\left(x,y\right) = c,\ x = x1..x2,\ y = y1..y2\right)$; komandasini $F\left(x,y\right) = c,\ x = x1..x2,\ y = y1..y2$ grafigi tugın funktsiya saykes qo'yiladi ham animate, animate2d komandasi animatsiya yaratishda ishlatiladi.

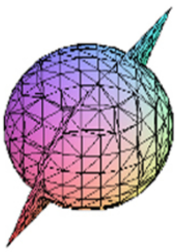
Geometriya fanini o'qitishda kompyuter texnologiyalaridan foydalanish bu dars samaradorligini oshirishda, talabalar erkin misollarni ishlab uni kompyuter orqali tekshirish va kompyuterdan foydalanib Maple dasturi yordamida geometrik obrazlarning grafiklarini yasash talabalarga ko'pgina yengilliklar yaratib beradi.

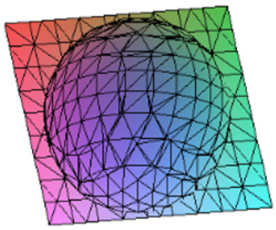
Maple dasturlashsiz katta hajmdagi masalalarni yechish imkoniyatiga ega. Faqat masalalarni yechish algoritmini yozish va uni bir necha bo'laklarga bo'lish kerak. Bundan tashqari yechish algoritmlari funksiya va sistema buyruqlari ko'rinishida hal qilingan minglab masalalar mavjud. Maple uch xil shaxsiy tilga ega: kirish, hal qilish va dasturlash. Maple matematik va injener-texnik hisoblashlarni o'tkazishga mo'ljallangan dasturlashning integrallashgan tizimi hisoblanadi. U formula, son, matn va grafika bilan ishlash uchun keng imkoniyatli tizimdir.
Maple dasturida ikkinchi tartibli sirtlarning grafigini yasay olamiz.

1-misol. $x^2+y^2+z^2=1$ **tenglamasi bilan berilgan sfera va** $2x+3y-z=0$ **tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlang.**

$$> with\,(plots):$$

$$implicitplot3d([x^2+y^2+z^2=1, 2\bullet x+3\bullet y-z=0], x=-1..1,\\ y=-1..1, z=-1..1)$$

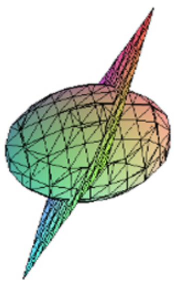


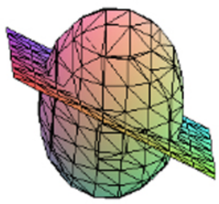


2-misol.$x^2+2y^2+3z^2-1=0$ **ellipsoidning**$2x+y+z=0$**tekislik bilan o'zaro vaziyatini quyidagi dastur yordamida aniqlanadi:**

$$> with\,(plots):$$

$$implicitplot3d([x^2+2\bullet y^2+3\bullet z^2=1, 2\bullet x+y+z=0], x=-1..1, y=-1..1, z=-1..1);$$

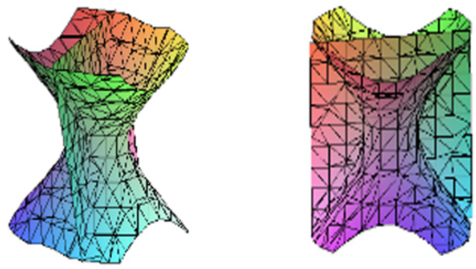




3-misol. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{2}=1$ **giperboloidning** $x+3y-z=0$ **tekislik bilan o'z-aro kesishgan vaziyati aniqlang.**

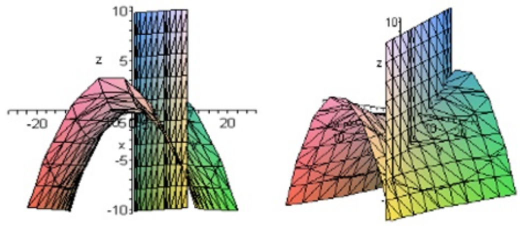
$$> with\,(plots):$$

$$implicitplot3d([x^2/3+y^2/5-z^2/2=1, x+3\bullet y-z=0], x=-5..5, y=-5..5, z=-4..4);$$



4-misol. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ **giperbolik paraboloidning** $x - y + 6 = 0$ **tekislik bilan o‘zaro vaziyati**

$$with(plots) : implicitplot3d([x^2/5 - y^2/4 - 6 \bullet z = 0, x - y + 6 = 0],$$
$$x = -10..10,\ y = -25..25,\ z = -10..10)$$



Xulosa: Shunday qilib, Maple matematik masalalarni yechish dasturiy paketi yordamida nafaqat standart geometrik figuralarni (jumladan paraballoid, ellipsoid, giperbolloid yoki giperbolik parabolloid) turli formulalar bilan murakkab sirtlarni, ularning kesimlari bo‘yicha vaziyatlarni tasvirlash mumkin. Agar bu chizmalarni uch o‘lchovli fazoga ko‘chirilganda 3D formatdagi ko‘rinishini ham tasvirlash mumkin va natijani kompyuter yordamida turli ko’rinishlarda ifodalash imkoniyati tug‘iladi. Bunday holat ta o‘quvchi va talabalarning xususan geometriya kursidangi "Ikkinchi tartibli sirtlar"mavzusini chuqurroq o‘rganish imkoniyatini yaratadi.

Tayanch so’zlar: maple dasturi, tenglamalar, grafik, funktsiya, ellipsoid, paraboloid, giperboloid..

Adabiyotlar

1. **N.D. Dadajonov, M.Sh.Jo’rayeva** *Geometriya*, 1-qism, Toshkent "O’qituvchi"1996,380 b.
2. **A. Imamov** *Maple da matematik masalalarni yechish,uslubiy qo‘llanma,* NamDU, 2011,–84 b
3. **A.Y. Narmanov** *Analitikalik geometriya* Toshkent 2008, 171 b.
4. **Eshtemirov S., Aminov I.B. , Nomozov F.** *Maple muhitida ishlash asoslari.* Uslubiy qo‘llanma. –SamDU, Samarqand, 2009 y.
5. **http://www.maplesoft.com**

UDK 519.248.2

FIZIKA MASALALARNI MATEMATIK QONUNIYATLAR VOSITASIDA YECHISH

Raimov G‘ayrat Fayzullayevich[1], Xolliyev Diyor Navro‘z o‘g‘li[2]
[1,2]Termiz davlat universiteti;
raimov.gayrat@mail.ru xolliyevd@gmail.com

Biz o‘rganmoqchi bo‘lgan isbotlashga doir fizik masalalar asosan olimpiada materiallarida keng qo‘llanilgan bo‘lib, bunday ko‘rinishdagi misollar asosan fizikadan olimpiadalarga tayyorgarlik koʻrayotganlar uchun qoʻl keladi. Biz bu isbotlashga doir fizik masalalarimizning qisqaroq va qulayroq yechish usullarini keltirib oʻtamiz. Biz oʻrganayotgan masalalarning yechish usullari bizning shaxsiy tajribamizga asoslangan holda kelib chiqqan boʻlib avvalgi usullardan osonroq va tushunish hamda tushuntirish uchun qulayroq.

Masala deb maʻlum shartlarga koʻra qoʻyilgan savolga javob berishni talab etuvchi har qanday jumlaga aytiladi.

Masalani yechish-bu masalada bevosita yoki bevosita mavjud boʻlgan sonlar, miqdorlar, munosabatlar ustida amallar va operatsiyalarning mantiqan toʻgʻri ketma-ketligi orqali masalalarning talabini bajarish (uning savoliga javob berish) demakdir.

Bu bosqich masala shartidagi maʻlumotlardan foydalanib izlanayotgan kattaliklarni topishga imkon beradigan tenglik yoziladi, yaʻni matematika tiliga aylantiriladi.

- Maʻqul topilgan biror usulda yechib chiqish; Bu bosqichda hosil boʻlgan algebraik tenglama yechiladi.

- Hosil boʻlgan yechimlarning masala shartlarini qanoatlantirishini sinab koʻrish;

- tekshirish (mazkur shartlar asosida masala yechimga ega yoki yechimga ega emasligi tekshiriladi); Masala yechimining bayonini berish;

- yechish usulini tahlil qilish (ratsional yoki umumiy yechish usuli bor-yoʻqligi haqida xulosalar).

Masalalar ularning mantiqiy fikrlashlarini rivojlantirishga imkon beradi. Bir masala bir necha usul bilan yechilsa, uni bajargan oʻquvchi, unda qoʻllanilayotgan turli faktlarning oʻzaro aloqador ekanligini koʻrish imkoniyatiga ega boʻladi.

Koʻrilayotgan masalalar standart yoki nostandart boʻlishi mumkin.

Standart masalalar deb, shunday masalalarga aytiladiki, ularning har birining yechish tartibi biror bir matematik qoida yoki tasdiqlar bilan aniq beriladi.

Nostandart masalalarni bunday yechish yoʻli, odatda, sunʻiy usul (yoki "Evrik"qoida) deb ataladi. Nostandart tenglamalarni yechishning umumiy usuli mavjud emas. Odatda, nostandart tenglamalarni yechish uchun funksiyalarning grafiklaridan, turli xossalaridan foydalaniladi. Maʻlumki, funksiyalarni tekshirish, grafiklarini yasashda hosiladan foydalanish muhim ahamiyatga ega. Shunday ekan nostandart tenglamalarni yechishda hosiladan foydalanish mumkin boʻladi va bu tenglamaning ildizlarini topish ancha osonlashadi. Demak, hosiladan foydalanib nostandart tenglamalarni yechish, shuningdek, differensial hisobning asosiy teoremalaridan keng foydalanish mumkin. Quyidagi maslalar yordamida namuna keltiramiz:

Masala. Linza oldidagi buyum bilan uning haqiqiy tasviri orasidagi eng qisqa masofa 25 sm ga teng boʻlsa, linzaning optik kuchinin (D) toping.

Yechim:

$$d+f=0,25 \quad bundan: \quad d+\frac{Fd}{d-F}=0,25 \tag{1}$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{F} \quad bundan: \quad f=\frac{Fd}{d-F} \tag{2}$$

Bu yerda d-maksimumga erishish uchun uning hosilasi nolga teng boʻlishi kerak:

$$\frac{2d(d-F)-d^2(1-0)}{(d-F)^2}=0 \quad bundan: \quad \frac{d^2-2dF}{(d-F)^2}=0 \quad bundan: \quad d=2F \tag{3}$$

(3) ni (2) ni keltirib qoʻysak:

$$f=\frac{F\cdot 2F}{F}$$

bundan: $4F=0,25$ bundan: $F=\frac{1}{16}$ U holda $D=\frac{1}{F}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16\,dptr$

2-usul:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{F} \quad bundan: \quad f=\frac{Fd}{d-F}$$

$d + f = 1$ bundan: $l = \frac{d^2}{d-F}$

$$l = \frac{d^2 - F^2 + F^2}{d - F} = \frac{d^2 - F^2}{d - F} + \frac{F^2}{d - F} = d + F + \frac{F^2}{d - F} = d + F + 2F + \frac{F^2}{d - F} = (d - F + \frac{F^2}{d - F} + 2F)$$

Koshi tengsizligidan:

$$((d - F) + \frac{F^2}{d - F})_{min} = 2\sqrt{(d - F)\frac{F^2}{d - F}} = 2F$$

demak:

$l_{min} = 2F + 2F = 4F = 0,25$ bundan: $F = \frac{1}{16}$

U holda: $D = \frac{1}{F} = 16\,dptr$

Xulosa qilib aytadigan bo‘lsak, o‘quvchilarning yuqori sinflarga ko‘chganida matematik tushunchalarni o‘zlashtirishlarida qiyinchiliklarga duch kelishadi. Bu ayniqsa, fizika darsiga qiziqtirishni uyg‘otish, o‘quvchilarga fizika darsiga qiziqarli o‘tishi uchun o‘qituvchi o‘z kasbining mohir bilimdoni, izlanuvchisi, yetuk ustozi bo‘lishi lozim. Fizika masalalar va ularning yechish usullarini o‘rgatishda turli innovatsion pedagogik texnologiyalardan unumli foydalanib tashkil qilingan darslar o‘quvchilar o‘zlashtirishlarini kafolatlaydi. Ularning yechish usullari mavzusi fizikaaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib uni 6-11-sinflarda chuqur va mukammal o‘rganish kelajakda ushbu fanning fidoisi bo‘lib yetishishlari uchun zamin hozirlaydi.

Foydalanilgan asosiy adabiyotlar:

1. **Raimov G‘. F.** *Maktab fizika darslarida nostandart masalalar yechish metodikasi* Namangan davlat universiteti axborotnomasi - Namangan, -2020. -7- son. -B.300-304. (13.00.00, №30). ISSN-2181-0427.
2. **Raimov G‘. F.** *Improving the solution of non-standard problems in school physics lessons* Namangan davlat universiteti axborotnomasi. –Namangan, -2021. -9 – son. -B.-423-429. (13.00.00, 30). ISSN-2181-0427.
3. **Raimov G‘. F.** *Methodology of selection, construction and solution of non-standard graphics, drawings, pictures of the department of physics "mechanics"* // European Scholar Journal (ESJ) Available Online at: https://www.scholarzest.com Vol. 2 No. 5, may 2021 y, ISSN: 2660-5562 142 | Page 142-146.
4. **Raimov G‘. F.** *Principles of didactics in computer solution of non-standard problems from physics in general secondary schools.* ISJ Theoretical Applied Science, 10 (102), (2021). 759-761. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-102-79 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS Scopus ASCC: 3304.

УДК 517.956

7-sinfda geometriyani fizika bilan bog’lab sinxron o’qitishda o’quvchi kreativligini oshirish

Sobirova M.R.
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti; u.sobirov2344@gmail.com

Ta’lim jarayonida geometriyani fizika bilan bog’lab sinxron o’qitishda o’quvchilar kreativligini rivojlantirish asosida fanlararo aloqadorlikni amalga oshirish, faktlarni tahlil qilish, hodisa va jarayonlarni o’rganishda sabab-oqibat bog’lanishlari mohiyatini tushunish, o’quv fanlari bo’yicha avval o’zlashtirgan bilimlarini yangi vaziyatlarda qo’llash, o’quvchilarning o’quv materialini ongli o’zlashtirishga erishishga zamin tayyorlaydi.

Sinxron bog’lanishlar shunchaki bir vaqtning o’zida fanlararo sodir bo’ladigan bog’lanishlargina emas. Bu, shuningdek, qandaydir qonun qoidalar orqali bir-biriga bog’langan, ba’zi bir asosiy nuqtalarda kesishadigan bog’lanishlardir [1]. Ya’ni sinxron bog’lanish deganda, o’quv fanlari mavzulari dastur va o’quv rejasi asosida sinflararo parallel bog’lanish tushuniladi. U quyidagicha ifodalaniladi:

1. 7-sinf "Geometriya"darsligidagi "Eng sodda geometrik shakllar: nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: nuqta o'lchamlarini hisobga olmasa bo'ladigan juda kichik narsalarning geometrik timsoli. Qog'ozning cheti kabi shakllarning geometrik timsoli to'g'ri chiziq to'g'risida tasavvur beradi. Pol, stolning ustki qismi, devor, shift, daftar varag'i, sokin ko'ldagi suv sathi, kabilarning geometrik timsoli tekislik bo'ladi. Aksiomalar: Tekislikda qanday to'g'ri chiziq olinmasin, bu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi. Har bir to'g'ri chiziq tekislikni ikki bo'lakka: ikkita yarim tekislikka ajratadi (7-sinf, 1- bob, 8-9 betlar).[2]

Sinxron bog'lanadigan mavzu bu 7-sinf fizika darsligidagi "Fazo va vaqt. Fazoning cheksizligi"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: fazo cheksiz va chegarasizdir, fazoni uch o'lchamli koordinatalarda tasvirlash mumkin. Tekislikdagi harakatni ikki o'lchamli koordinatada tasvirlash mumkin. Fazoning asosiy xossalari: haqiqatan ham, mavjudligi, materiya bilan ajralmasligi (olamda fazo bilan bog'lanmagan bitta ham obekt yo'q), cheksizligi, uch o'lchamliligi (barcha fizik obyektlarning bo'yi, eni va balandligi mavjud). Vaqtni bir o'lchamli koordinatada ifodalash mumkin (7-sinf, 1-Bob, 11-14 betlar).[3]

2. 7-sinf "Geometriya"darsligidagi "Kesma va nur"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: Kesma deb to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi orasida yotgan nuqtalaridan iborat qismiga aytiladi. Nur deb to'g'ri chiziqning biror nuqtadan bir tomonda yotgan barcha nuqtalaridan iborat qismiga aytiladi. AKSIOMA: Bir to'g'ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi. Har qanday kesma tayin musbat songa teng uzunlikka egadir. Agar to'g'ri chiziqda B nuqta A va C nuqtalar orasida joylashgan bo'lsa, AC kesma uzunligi AB va BC kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi: $AC = AB + BC$ (7-sinf,1- bob, 10-11 betlar).[2]

Sinxron bog'lanadigan mavzu bu 7-sinf fizika darsligidagi kinematikaning asosiy tushunchalari mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: moddiy nuqta,traektoriya, ko'chish, yo'nalishli kesma (vektor), yo'l, ilgarilanma harakat, ilgarilanma harakat to'g'ri chiziqli va egri chiziqli bo'lishi mumkinligi (7-sinf, 1-Bob, 14-18 betlar).[3]

3. 7-sinf geometriya darsligidagi "Aylana va doira"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: tayin O nuqtadan teng uzoqlikda yotgan barcha nuqtalar to'plami aylana deb ataladi. O nuqta bu aylananing markazi deyiladi. Aylananing ixtiyoriy nuqtasidan uning markazigacha bo'lgan masofa aylananing radiusi deb ataladi. Aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma aylana vatari deb ataladi. Markazdan o'tuvchi vatar esa diametr deb ataladi. Diametr - eng katta vatar. Doira deb, tekislikning aylana bilan chegaralangan qismiga aytiladi. Aylananing markazi, radiusi va diametri shu aylana chegaralagan doiraga nisbatan ham qo'llanadi. (7-sinf, 1- bob, 18-19 betlar).[2]

Sinxron bog'lanadigan mavzu bu 7-sinf fizika darsligidagi "Markazga intilma tezlanish"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: aylanma harakatda tezlanish, markazga intilma tezlanish (7-sinf, 3-Bob, 62-64 betlar).[3]

4. 7-sinf geometriya darsligidagi "Burchaklarni o'lchash. Transportir"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: yoyiq burchak o'zining tomonlari orasidan o'tuvchi nurlar bilan 180 ta teng burchakka bo'lingan bo'lsin. Bu bo'laklarni burchak o'lchovi birligi, ya'ni birlik burchak sifatida olish qabul qilingan.Uning kattaligi bir gradus deb ataladi va 1° deb belgilanadi. Aksioma: Har qanday burchak tayin gradus o'lchoviga ega bo'lib, uning qiymati musbat son bilan ifodalanadi. Yoyiq burchakning gradus o'lchovi 180° ga teng. Burchakni uning ichidan o'tuvchi nur ikkita burchakka ajratsa, berilgan burchak o'lchovi hosil bo'lgan burchaklar o'lchovlarining yig'indisiga teng. (7-sinf, 2 - bob, 30-31 betlar).[2]

Sinxron bog'lanadigan mavzu bu 7-sinf fizika darsligidagi "Jismning tekis aylanma harakati"mavzusining geometriya va fizikaga tegishli atama va tushunchalari: radian - bir radian shunday burchakki, bunday burchak qarshisidagi yoyning uzunligi shu aylananing radiusiga teng. Burilish burchagi, radian, gradus (7-sinf, 3-Bob, 56-59 betlar).va x.k.[3]

Adabiyotlar

1. **Бирмана С.И., Мозгового К.** Советы Ильи Бирмана и Константина Мозгового. Дата обращения: 11 ноября 2020. Архивировано 28 сентября 2020 года.
2. **Азамов А., Хайдаров Б., Сариков Э., Кучкаров А., Сагдиев У.** Геометрия. Учебник для 7-го класса общеобразователных школ. Ташкент-Янги йўл полиграф сервис-2013.-156 с.
3. **Habibullayev P.Q.,Boydedayev A.,Bahromov A.D.** Fizika: umumiy o'rta ta'lim maktablari 7-sinfi uchun darslik/ Qayta ishlangan uchinchi nashr. — T.: «O'zbekiston milliy ensiklopediyasi» Davlat ilmiy nashriyoti, 2019.

Geometriya fanini o'qitishda o'quvchilar faolligini oshirish

To'rayeva N. A.[1], Mamatova N. X.[2], Merajova Sh. B.[3]
[1,2,3]Buxoro Davlat Universiteti;
nabiyaturayeva48@gmail.com nilufarmamatova1976@mail.ru s.b.merajova@buxdu.uz

Ushbu maqolada geometriya darslarida o'quvchilarning teorema, aksioma va qoidalarni chuqur nazariy o'zlashtirib olishi, masalalar yechimida o'quvchilarning tasavvur qilish qobiliyatini o'stirish va ularning ijodiy fikrlashi uchun imkon yaratish haqida fikr yuritiladi.

Bugungi kunda davlatimiz qudrati dastavval o'z ishiga ijodiy yondashuvchi, shaxsiy mehnati bilan fan, texnika, san'at, ishlab chiqarishning jadal rivojlanishiga hamkorlik qilishga qodir yuksak malakali mutaxassislar miqdori va sifati bilan belgilanadi. Fan va texnila taraqqiyoti iqtidorli kadrlarga nisbatan jamiyat talabidan kelib chiqqan holda maktab oldiga shaxsni har taraflama ijodiy ruhda tarbiyalashdek muhim vazifalarni ko'ndalang qo'yadi. Ijodiy shaxs fazilatlarining tiklanish jarayoni aynan maktabda boshlanadi. Mazkur ishlarni to'g'ri tashkil etish esa hammasidan muhimdir. Hozirgi zamon pedagogikasining qoidalarini, ya'ni barcha es-hushi joyida bo'lgan bolalar turli-tuman salohiyat va layoqatlarga ega ekaniligini yana bir karra tasdiqlaydi. O'quvchilardagi ana shu layoqatni ular uchun qulay va qiziqarli bo'lgan sohalarda namoyon etib tarbiyalash maktabning birinchi galdagi vazifasiga kiradi.

Geometriya darslarda masalalarni chuqur nazariy tadqiq etish fanning asosiy vazifasi bo'lib, bu masalalarni hayotiy tadqiq etish o'quvchining geometriya faniga qiziqishini uyg'otadi. Teorema va masalalardagi har bir shaklning hayotiy namunasi mavjud bo'lib, albatta o'quvchi uni o'z tasavvurida ko'ra olish uchun ijodiy fikrlashi kerak. Bunda pedagogning bilimi, mahorati, topqirligi asosiy rol o'ynaydi.

Geometrik masalalar yechimining 50foizni chizma tashkil etishi hammaga ayon. Bu o'z navbatida o'quvchini ijodiy fikrlashga undaydi: "Modomiki 13-15 yoshidayoq , har bir o'quvchi juda Kamoliddin Behzodday bo'lmasa ham, qariyib o'shanday rasm chiza olar ekan."Iqtidor jihatidan balki ular uncha yomon bajarilmagan bo'lishi mumkin, biroq, bunday rasmlar chizizsh o'quvchini ijodiy fikrlashiga yordam beradi.

Geometriya darslarida o'quvchining ijodiy faoliyati undagi bilim doirasidan chetga chiqishi mumkin, chunki bilim ijod poydevoridir. Geometriya fanida teorema va aksiomalarini yaxshi bilsak masalaning yechimini to'g'ri qo'ya olamiz . Bunda o'qituvchi sabog'i tufayli orttirgan bilimlarini o'quvchi amalda sinab ko'rib, masalani yechish orqali mustahkamlaydi.

O'quvchining geometriya faniga qiziqishini so'ndirib o'qishda charchatib zada qilib qo'ymaslik uchun birgina o'quv materialini bir xilda ha deb takrorlayverish maqsadga muvofiq emas. Bir xillikdan qochish uchun ilgari o'rganilgan bilimlarni yangi xilma- xil variantlarda (yangi masala yechish, yangi teorema isboti, har bir masala va teoremaning hayotiy tatbig'i) takrorlash ayni muddaodir. Turli xildagi masalarni yechayotgan o'quvchining barcha harakatlari o'qituvchi tomonidan doimiy va to'la nazorat ostida bo'lishi lozim. Agar o'quvchini yetarli darajada kamol topganligiga ishonch hosil qilgan bo'lsada o'qituvchi bu ma'suliyatini aslo bo'shashtirmasligi kerak. Nazorat susaytirilgan holda bilim va saviyasi yo butunlay yoqoladi yoki fanga qiziqishi, ishtiyoqi susayadi. Demak, o'quvchi faoliyatining o'qituvchi tomonidan doimiy nazorat qilinishi zarur .

Geometriya darslarida o'quvchilarni ijodiy fikrlashga o'rgatish uchun quydagi bosqichlardan foydalanildi:

1) O'quvchi zaruriy bilim , ko'nikma va malakaga ega bo'lmay turib biron bir teoremani isbotlay, geometrik masalani esa yecha olmaydi . Bino- barin o'quv jarayonida topshiriqlarni shunday berish kerakki, u oldin to'plangan ma'lumotlariga tayanib ish ko'ra olsin va undan unumliroq foydalana olsin.

2) O'quvchi vazifani bexato bajarishi kerak. Bexato degani geometrik ma'lumotlarga to'liq amal qilmoqdir . Geometrik qoidalarni bilish va ularni amalda qo'llash mahoratini oshiradi. Mahorat esa bilim va malakani mustahkamlaydi.

3) O'quvchining ijodiy faoliyatini mustaqil ravishda olib boradigan faoliyati bilan birgalikda olib qaraymiz. Chunki, ular bir biri bilan o'zaro uzviy bog'liq bo'lib, bir birini muntazam ravishda rivojlantirib boradi.

Adabiyotlar

1. **Alixanov S.** *Matematika o'qitish metodikasi.* Cho'lpon nashriyoti matbaa uyi. Toshkent 2011
2. **Perova M. N.** *Методика преподавание математики в коррекционной школе.* Москва 1999
3. **Ishmuxammedov R.** *Ta'limda innovatsiya.* Toshkent 2010.

УДК 510.75

Matematikani o'qitishning metodik prinsiplari haqida

To'rayev H.[1], Nomozova M.[2],
[1]Termiz davlat Pedagogika instituti; jahongirturaxanov1995@gmail.com1
[2]Termiz davlat universiteti; mahfiratnomozova@gmail.com2

O'zbekiston buyuk allomalar yurti. Bu yurtda dunyo tamadduni tarixining sahifalariga oltin harflar-la nomlari bitilgan, bizning ajdodlarimiz bo'lmish buyuk matematik olimlar - matematika sohasida tom ma'noda yangiliklar yaratgan al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Ahmad Farg'oniy, Mirzo Ulug'bek, Ali Qushchi bobolarimiz bilan haqli ravishda faxrlanamiz. XX asrda yashab ijod etgan va ijod etayotgan T.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinov, M.Salohiddinov, T.Jo'rayev, SH.Alimov, SH.Ayupov kabi hozirgi zamon matematikasining taniqli vakillarini biz haqli ravishda yuqorida nomlari zikr etilgan buyuk ajdodlarimizning izdoshlari deb bilamiz.

Ma'lumki, texnika rivojlansa jamiyat rivojlanadi. Texnika rivojlanishi uchun matematika fani rivojlanishi kerak. Shuning uchun ham Hurmatli Prezidentimiz Shavkat Miromonovich Mirziyoyev tomonidan 2020-yil 7-maydagi PQ-4708 buyrug'iga asosan matematika sohasini rivojlantirining alohida chora-tadbirlarini ishlab chiqdilar.

Matematika faniga qiziqtirishni asosan 5-6 yoshdan boshlagan ma'qul, negaki bu yoshda bola atrof-muhitga, tabiatga, odamlarga va ular orasidagi munosabatlarga teran ko'z bilan qaray boshlaydi. Shuning uchun ham xuddi mana shu yoshdan boshlab matematikani amaliy hayot bilan bog'lab o'tish juda ham katta ahamiyatga ega. Bunga misol qilib, uzoq emas yaqinginada yashab ijod etgan buyuk olimlar: rossiyalik A.N.Kolmogorov, yurtdoshlarimiz T.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinovlar yoshlik chog'laridanoq matematikaga qiziqqanlar.Masalan, Andrey Nikolayevich Kolmogorov 5-6 yoshida quyidagi qonuniyatni ochgan:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1+3+5=3^2$$
$$1+3+5+7=4^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Demak, yoshlikdan bolani matematikaga qiziqtirish bolaning kelajakda fanda kutilmaganda katta kashfiyotlar yaratilishiga sabab bo'ladi. Bu esa o'z navbatida fan-texnikaning yanada rivojlanishiga olib keladi.Matematikani o'qitishda bunday yo'l tutish matematikani o'qitish metodikasining o'ziga xos xususiyatlaridan biridir. Matematikani o'qitishning metodik prinsiplari haqida gap ketganda, avvalo, o'qitishning maqsadini aniqlash jarayonida bu maqsadga qanday qilib erishish mumkin, o'qitish metodikasi qanday bo'lishi kerak degan tabiiy savollarga duch kelamiz.Bu savol mavjud matematik metodlarning asosiy obyekti hisoblanadi. Shuning uchun ham bu savolga javob u yoki bu darajada foydalanilayotgan matematik metodlarni ichki tomondan matematiklarning o'zlari tomonidan o'zaro va tashqi tomondan esa mutaxassislarning tanqidiy o'rganishidan kelib chiqadi. Bu borada hattoki, yagona u yoki bu medod haqida bitta kafedrada faoliyat ko'rsatayotgan matematiklarning o'zlari o'zaro kelisha olmaydi.

Bu holatning murakkabligi va unga barham berishning qiyinchiligi bugungi kunda matematikani o'qitish metodikasining hali ilmiy sathga ko'tarilmaganligi bilan bog'lash va o'qituvchilarning tizimli tajribaga emasliklari bilan asoslash mumkin. Afsuski, ko'pgina matematiklar o'zlarining shaxsiy tajribalri bilangina chegaralanib qoladilar.

Matematikani o'qitish metodikasi to'g'risida gapirar ekanmiz, eng avvalo uning maqsadini aniqlab olishimiz kerak bo'ladi. Qachonki maqsad aniq bo'lganda, unga qanday erishish mumkin, o'qitish uchun qanday metodikani tanlash kerak degan tabiiy savol tug'iladi. Bu savolga u yoki bu darajada matematik metodlarni qo'llovchilar, ya'ni matematiklar ham, mutaxassislar ham tanqidiy nazar bilan qarashadilar.

Matematikani o'qitish metodikasining asosiy pirnsiplari quyidagilardan iborat: metodning soddaligi, tushunarliligi, tabiiyligi va qat'iy mantiqqa asoslanganligi, muntazam nazorat, talabchanlik, talabaga nisbatan ishonch, talabani rag'batlantirish va hokazolardir. Bundan tashqari o'qituvchining talabani jazolashga intilmasligi, talabaning bahosini o'zlashtirishni ko'tarish uchun oshirib qo'ymasligi o'qitish metodikasi prinsiplarining muhim jihatlaridan biridir.

Bu prinsiplarni o'z nuqtai-nazaridan har kim har xil tushunishi mumkin va unga o'zi xohlagan mazmunni berishni xohlaydi.Soddalilik prinsipi, ya'ni bayon qilishning soddaligi eng avvalo kursning tugal va sodda qurilganligi, tuzilishining bosh g'oyaga mos ekanligi.

Soddalik haqidagi prinsip avvalo kursning soddalik bilan tuzilganligi, unga tushunishning oson kechishi. Bu pirnsipning eng asosiy g'oyasi vaqtga va asosiy metodlarga e'tibor qaratilishidir. Vaqtning ko'p qismi asosiy metodlarga va faktlarga ajratilishiga e'tibor qaratishdir.

Qadimda odamlar oddiy natural sonlar ustida amallarni bajarishni bilmaganlar. Yillar o'tib, zamonlar o'tib zarurat yuzasidan sodda-sodda amallarni bajarishni o'rganganlar. Geometrik shakllarni, masalan, chiziq, kesma, uchburchak, to'rtburchak, kvadrat, aylana, doira, masofalarni o'lchash, yuzani o'lchash kabi amallarni o'rgana boshlaganlar. Bir misol keltiraylik,masalan, qo'shish va ko'paytirishning xossalarini qanday qilib amaliyotga qo'llash, qanday qilib katta sonlarni osonroq usul bilan qo'shish va ko'paytirish mumkin ekanligini qaraylik.

Ma'lumki, qo'shishning asosan 5 ta, ko'paytirishning 6 ta qonuni bor, ya'ni:

1. $a+v$ amali hamma vaqt bajariladi, ya'ni shunday son mavjud.
2. $a+v$ amali hamma vaqt bir qiymatli aniqlanadi.
3. $(a+v)+s=a+(v+s)$ qonuni bajariladi.
4. $a+v=v+a$ hamma vaqt bajariladi.
5. $v>s$ munosabatdan hamma vaqt $a+v>a+s$ munosabat kelib chiqadi.

Ko'paytirishning esa:

6. $a\cdot v$ hamma vaqt bajariladi.
7. $a\cdot v$ bir qiymatli.
8. $a\cdot(v\cdot s)=(a\cdot a\cdot v)\cdot s$ qonun bajariladi.

9. $a \cdot v = b \cdot a$ qonun bajariladi.

10. $v > s$ munosabatdan hamma vaqt $a \cdot v > a \cdot s$ munosabat kelib chiqadi.

11. $a(v + c) = a \cdot b + a \cdot c$ qonuniyat bajariladi.

Endi bu qonuniyatlardan nimalarda va qanday qilib foydalanishligiga bir misol qaraylik, ya'ni: $12 \cdot 13$ amalini qanday qilib sodda va bir xonali sonlarni ko'paytirishga keltirib bajarish mumkin? Bunga quyidagicha kirishamiz:

$$(10+2)\cdot(10+3) = (10+2)\cdot 10+(10+2)\cdot 3 = 10\cdot 10+2\cdot 10+10\cdot 3+2\cdot 3 = 100+20+30+6 = 150+6 = 156$$

Bu usul, albatta, boshlang'ich sinflarda bolalarga o'rgatish, ularda ikki xonali sonlarni ko'paytirishda ko'nikma hosil qilish uchun qo'llaniladi. Xuddi shunday usul bilan uch xonali sonlarni ham ko'paytirish mumkin.

Darsda yaxshi samaraga erishish uchun darsni yaxshi tashkil qilish va eng yaxshi metodlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Shuning uchun ham darsni yaxshi tashkil qilishning zarur shartlaridan biri o'qituvchining yuqori darajadagi bilimga ega bo'lishidir degan gap haq gap. Eng asosiysi talabaga teoremani isbot qilib ko'rsatishda unga oldin maqsadni, g'oyani va maqsadga erishish metodni yaxshi tushunsin, albatta, isbot sodda va tushunarli tilda bayon qilinishi kerak. Buning uchun eng oson misollardan foydalanish kerak.

D.Gilbert oddiy differensial tenglamalar nazriyasidan ma'ruza o'tishda doskaga $y'' = 0$ va $y''+y = 0$ tenglamalarni yozib qo'yadi va: «Gospoda, na nix vi mojete izuchit vsyu teoriyu i daje ponyat raznitsu v zadachax s nachalnimi ili s krayevimi usloviyami» [1.95]. Bunda u matematik qat'iylikka asosiy e'tiborni qaratadi.Isbotlarni sodda va tushunarli bayon qiladi. Eng asosiysi talabaga teoremani isbot qilib ko'rsatishdan oldin u maqsadni, g'oyani va maqsadga erishish metodlarini yaxshi tushuntiradi, va, albatta, isbotni sodda va tushunarli tilda oson misollar bilan bayon qiladi.

Matematikada isbot - ma'ruzachinigina (dlya sobstvennogo udovolstviya) zavqlantiradi, talabalarni esa hayratlantiradi. Bu degani hamma teoremalarni isbotlab ko'rsatish kerak ekanda degani emas, albatta. Chunki teoremalarni ketma-ket isbotni beraverish ham talabalarni qiynab qo'yishi mumkin. Bu yerda eng asosiysi talaba g'oyani tushunishi kerak. G'oyani misollar bilan tushintirish esa talabalarning mavzuni yaxshi o'zlashtirishlarida muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. **SH.Alimov, R.Ashurov.** *Matematik analiz 1-qism, Toshkent* Mumtoz so'z, 2018.
2. **H.To'rayev.** *Matematika* Termiz, Surxon-nashr,2020.
3. **Toshmetov O'. va boshqalar.** *Matematika* Toshkent Extremum Press, 2018.
4. **L.D.Kudryavsev, M.** *Sovremennaya matematika i yeye prepodavaniye.* Nauka, 1980.

Nostandart masalalarni yechishning evrevtik usullari.

Turdiyev A.
Termiz davlat universiteti umidjonturdiyev6@gmail.com

Bugungi kunda ta'lim tizimining mohiyatini anglash va mazmunini egallashda asosiy e'tibor ko'proq o'quvchilarni ijodiy tafakkurini rivojlantirish muammosiga qaratilmoqda.

Prezidentimiz Shavkat Mirziyoev olimlar, yosh tadqiqotchilar, ilmiy-tadqiqot muassasalari rahbarlari va ishlab chiqarish sektori vakillari bilan uchrashuvda matematikada ilmiy tadqiqotlarni amaliyot bilan bog'lash, raqamli iqtisodiyot uchun mustahkam poydevor yaratish borasidagi dolzarb vazifalarga to'xtalib o'tdi. . . . matematika hamma aniq fanlarga asos. Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli bo'lib o'sadi, istalgan sohada muvaffaqiyatli ishlab ketadi, – dedi Prezident[3].

Umumiy o'rta ta'limning matematika fanidan davlat ta'lim standarti va o'quv dasturining "Umumiy o'rta va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi muassasalarida matematika fanini o'qitishning asosiy vazifalari" qatorida:

-"inson kamoloti va jamiyat taraqqiyotida matematikaning ahamiyatini anglash, ijtimoiy-iqtisodiy munosabatlar, kundalik hayotda matematik bilim va ko'nikmalarni muvaffaqiyatli qo'llashga o'rgatish;

-o'quvchilarning individual xususiyatlarini rivojlantirgan holda, mustaqil ta'lim olish ko'nikmalarini shakllantirish;

-fanlar integratsiyasini inobatga olgan holda o'quvchilarda, milliy va umuminsoniy qadriyatlarni, kreativlikni shakllantirish hamda ongli ravishda kasb tanlashga yo'naltirish" kabilar ko'rsatib o'tilgan[2].

Endi, nostandart masalalarni yechishda foydalanish mumkin bo'lgan ba'zi evristik usullarni qarab chiqamiz[4].: 1. Masalani yechish bo'yicha biror ilmiy farazni ilgari surish;

2. Masala shartidagi berilganlarni tahlil qiladi, aniqlashtiradi, abstrakt tarzidagi ma'lumotlarga aniqroq shakl beradi.

3. Soddalashtirish, ob'ektning sifatli xarakteristikalarini o'zgartirmasdan masalada qaralayotgan ob'ektning holatini variatsiyalash.

4. Umumlashtirish - berilgan nostandart masala unga nisbatan umumiyroq bo'lgan masala bilan almashtiriladi. Bu yerda berilgan masalaning yechimi umumlashgan masaladan bevosita kelib chiqsin.

5. Berilgan nostandart masalani grafik orqali tahlil qilish. Bu usuldan foydalanish turli darajadagi simvollarni ko'rgazmali ifodalashda asos bo'lib xizmat qiladi.

6. Abstraksiyalash - bu qaralayotgan ob'ektlarning konkret detallarini tashlab yuborish, ularning nisbatlarini va aloqalarini ajratib qarash.

7. Anologiya (o'xshatishlik) -

8. Paradigma - bu berilgan masalani boshqacharoq ifodalash va bu ifodalash orqali berilgan masalaning yechimini ko'ra olish.

9. Variatsialash - o'quvchi masalani yechish davomida ixtiyoriy ravishda bitta yoki bir nechata kattaliklarni tashlab yuboradi yoki o'zgartiradi hamda mantiqiy fikrlash asosida bunday almashtirishlardan qanday natijalar kelib siqishi mumkinligini aniqlashtiradi.

10. Chala induksiya - alohida fikrlarning rostligini bevosita tekshirib ko'rish. Bunday yondashuv umumiy xulosalar chiqarishga yordam beradi.

11. Modellashtirish - hodisa va jarayonlarni matematika tilida ifodalash.

12. Oxiridan oldinga kelish usuli (analiz va sintez).

13. Qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish usuli. (masalan)

Tajribalarimiz shuni ko'rsatadiki, matematika o'qitish jarayonida masalaviy yondashuv ya'ni, o'qitish (metodi) vazifasini bajaruvchi masalalar o'quvchilarda qator fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qilishi mumkin ekan. Jumladan:

a) berilagan masalaga teskari masalani tuzish va yechish o'quvchilarda zarur fikrlash ko'nikmalarini shakllantiradi;

b) masala shartiga ko'ra unga mos chizmani chiza olish, ya'ni fazoviy idrokni shakllantirish;

v) berilgan masalani yechishning turli xil usullarini topa olish ko'nikmasini shakllantirish;

g) masalaning ratsionalroq yechimini topa olish ko'nikmasini shakllantirish;

d) anologiyaga ko'ra tasdiqlarni shakllantirish ko'nikmasi. Ijodiy nostandart masalalar quyidagi talablarni qanoatlantirishi zarur:

1) o'quvchilarning bilishga qiziqishlarini rivojlantirishga ta'sir etuvchi, yangilik elementlariga ega bo'lgan masalalar;

2) tadqiqotchilik elementlarini va mustaqil faoliyat yuritishni talab etuvchi masalalar;

3) o'quvchilarda yangi faktlarni va yechish metodlarini qidirishga qiziqish uyg'otish natijada yangi bilimlarning egallanishini ta'minlovchi masalalar;

4) yechish natijalarining variativligini yoki boshqa yechish variantlarining yo'qligini ko'rsatuvchi masalalar;

5) shartida masalani yechish uchun ortiqcha ma'lumotga ega bo'lgan yoki yetarli miqdordagi ma'lumotlari bo'lmagan masalalar;

6) oʻquvchilarda fazoviy tasavvurni, idrokni, intuitsiyani rivojlanishiga yoʻnaltirilgan masalalar.

Oʻquvchilarning ijodiy faoliyatlarini tashkil qilish muammolarini koʻrib chiqish uchun biz, ijodiy faoliyat jarayonining asosiy bosqichlariga toʻxtalamiz, chunki bu bosqichlar ixtiyoriy ijodiy faoliyatning asosida yotadi.

Ijodiy faoliyatning birinchi bosqichi - muammoni anglash, shakllantirish va qoʻyishdan iborat. Muammoni aniq va ravshan shakllantira olish ijodiy faoliyatni boshlashning muhim bosqichidir.

Ikkinchi bosqich - bu bosqichda muammo prinsipial yechimni topib, ushbu jarayonda masalani yechishga "yoʻl" topiladi. Bu bosqichning asosida inson (xususan, oʻquvchilar) ning bilimlari yotadi, shuning uchun oʻquvchilar ijodiy faoliyati ular tomonidan egallangan bilimlar va tasavvurlar bilan chambarchas bogʻliqdir.

Uchinchi bosqich - muammo yechimini batafsil amalga oshirishdan iborat boʻlib, yechim aniq shaklga ega boʻladi. Bu bosqich egallangan bilimlar, harakat usul va uslublari asosida amalga oshiriladi.

Nostandart masalalarni yechishda, noan'anaviy yechish usuli aniq bir formula orqali berilmaydigan, sun'iy usuldan (yoki «evrik» qoida) foydalaniladi.

Matematikadan nostandart masalalar tizimini tahlili umumta'lim maktablari oʻquv jarayonida oʻquvchilar ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish uchun didaktik imkoniyatlar mavjudligini koʻrsatdi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. *Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 29 apreldagi "Oʻzbekiston Respublikasi xalq ta'limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida"gi.* PF-5712-sonli Farmoni. - Qonun hujjatlari ma'lumotlari milliy bazasi, 06/19/5712/3034-son, 29.04.2019 y.
2. *Oʻrta ta'limning davlat ta'lim standarti va oʻquv dasturi. Fizika, matematika, informatika, biologiya, geografiya, kimyo.* Oʻzbekiston Respublikasi xalq ta'limi vazirligining 2017 yil 18 avgustdagi 43-son va Oliy va oʻrta maxsus, kasb-hunar ta'limi markazining 2017 yil 18 avgustdagi 65. QQ-sonli qoʻshma qarori bilan tasdiqlangan. T.: -2017. 142 b.
3. *Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston respublikasi fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida* Oʻzbekiston Respublikasi Prezidenti Qarori PQ-4387/3397-son. 09.07.2019 y.
4. **Sodikov U. J.** *Masalaviy yondashuv oraqali oʻquvchilar ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish metodikasi* 13.00.02. Dissertatsiya. 2020 yil.

Talabalarni matematika darslarida tanqidiy fikrlashga o'rgatish

Tursunova Nilufar (SamDU magistranti),
Arziqulov A.U (SamDU dotsenti),
Tursunov Dilbek (SamDU magistranti)
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Matematika fakulteti magistranti
gmail: eshpolatovanilufar@gmail.com

Kreativlik - yangi gʻoya, oʻzgarish va yangiliklarni qabul qilishga tayyorlik, eskirgan qarashlarni oʻzgartirish, mavjud gʻoyalarni yangi muammolarni yechishga tadbiq qilish, muammolarning noodatiy va kutilmagan yechimlarini topish qobiliyati. Matematik kreativlik - deganda biz, yangi matematik gʻoyalar va masalalarni qabul qilishga tayyorlik, masalalarning foydali, yangi va asl yechimlarini topish usullarini, algoritmlarini va modellarini yangi matematik masalalarni yechishga va boshqa sohalarga qoʻllay olish qobiliyatini tushunamiz. Shaxsning kreativlik qobiliyatini tadqiq qilishga bagʻishlangan tadqiqotlarning natijalariga koʻra kreativlik fikrlashning quyidagi uchta asosiy xossalari bilan xarakterlanadi: moslashuvchanlik(gibkost), fikrlash tezligi(beglost) va yangilik yaratuvchanlik(nov?zna). Eng qimmatli sifat bu moslashuvchanlikdir (krishimlilik). Matematik kreativlikni rivojlantirish nuqtai nazaridan qaraganda,fikrlashning krishimlilik xossasi bu matematik masalalarni yechishda turli gʻoyalarni chogʻishtirib yangi gʻoya yaratish qobiliyatidir. Talabalar fikrlashining krishimlilik xossasini rivojlantirishning asosiy tashkil etuvchilaridan biri nostandart matematik masalalar yechishdan iboratdir. Pedagogikaga, psixologiyaga va matematikaga oid adabiyotlarning nazariy tahliliga ko‘ra kreativlik va intelletual qobiliyatlar o‘rtasidagi bog‘liqliklar haqida tadqiqotchilar yagona fikrga kelmaganligiga guvoh bo‘ldik. D. Veksler, R. Uaysberg, G. Ayzenk, L. Termen, R. Sternberg larning fikricha yuqori darajada rivojlangan intellekt yuqori darajada rivojlangan kreativlikni ta’minlaydi va aksincha. D. Gilford, K. Teylor, E.Torrens, G. Truber kabi tadqiqotchilar boshqacha xulosaga kelishgan, ya’ni kreativlik intellekga bog‘liq bo‘lmagan mustaqil holda namayon bo‘ladigan qobiliyatdir. Bizning kuzatish va tajribalarimizning natijalari ham ikkinchi nuqtai nazarga mos keldi, ya’ni kreativlik o‘quvchilarning intellektuallik darajasiga bog‘liq emas.Turli intellektuallik darajasiga ega bo‘lgan o‘quvchilar bilan ishlab ularda kreativlikni rivojlantirish mumkinligiga amin bo‘ldik. Fikrlashga o‘rgatish metodlari: Muammoli vaziyatlarni hal qilish. Bitta masalani hal etish uchun turli xil nuqtai nazarlarni bayon etish. Sintez va tahlil qilish, taqqoslash, umumlashtirish, mos qo‘yish va xulosa chiqarishni ko‘nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish. Ijodkorlikni talab qiluvchi masalalarni yechishni taklif etish. Tadqiqotchilikni talab qiluvchi loyihalash metodidan foydalanib yechiladigan masalalarni yechish. Tanqidiy fikrlashni talab qiladigan matematik topshiriqlar: Muqobil yechimini topishga doir masalalar Bittadan ko‘p yechimlarga ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan masalalar. Bir nechta usullar bilan yechishni talab qilishga doir topshiriqlar. Yechish uchun boshqa predmetlardan bilimlarni talab qiladigan matematik masalalar. Yechish uchun turli matematik g‘oyalarni va metodlarni talab qiladigan masalalar. Masalani yechish uchun unga boshqacha kontekstdan qarashni talab qiladigan masalalar. Boshqa bir matematik misolga asoslanib mustaqil yondoshuvni talab qiladigan masalalar. Yangi matematik g‘oyalarni yangicha tadqiq etish orqali yechiladigan masalalar. Tanqidiy fikrlashni rivojlantirishga yo‘naltiruvchi metodik uslublar: Bitta masalaning turli yechilish usullarini tahlil etish Bitta muammoni hal qilish bo‘yicha turli nuqtai nazarlarni muhokoma etish. O‘quvchilarga turli boshqotirmali qiziqarli masalalarni taklif etish Mantiqiy masalalarni mustaqil ravishda tuzishni o‘rgatish. Masalan: 1.Ikki burchak yig‘indisining sinusi uchun qo‘shish formulasining bir necha xil isbotini keltirin; 2. $\sin x+\cos x = 1$ tenglamani bir necha xil usul bilan yeching; 3. Parabola matematik analiz kursida ham analitik geometriya kursida ham o‘rganiladi, bu jarayonning farqli tomonlarini tushuntiring; 4. Sonli ketma-ketlik limitining ta’rifi boshqa tushunchalarning ta’rifida qanday farq qiladi? 5. Segmentda chegaralangan funksiyalarga misollar keltiring; 6. Berilgan funksiyadan berilgan oraliqdagi cheklita nuqtlardagina farq qiluvchi funksiyalarga misollar keltiring; 7. Turli mazmundagi parametrli topshiriqlar.

Adabiyotlar:

1. **Nepryaxin N. Yu.** Kriticheskoye mishleniye / N. Yu. Nepryaxin — “Alpina Didjital”, 2020.
2. **Dayana Xalpern.** Psixologiya kriticheskogo mishleniya, 4-oye mejdunarodnoye izdaniya, Piter 2000 g.
3. **.Gusev V. A.** Teoriya i metodika obucheniya matematike: psixologopedagogicheskiye osnovi [Elektronniyresurs] / V.A.Gusev.—2-ye izd. (el.).—M.:BINOM. Laboratoriya znaniy, 2014. — 456 s.

UDK 51(09)

Matematik analizning akademik litsey va umumta’lim maktablarida o‘qitiladigan matematika kursi bilan aloqadorligi

Xasanov F.Z.
Termiz davlat Pedagogika instituti, faxriddin.xasanov@mail.ru

Matematika fani miqdorlar haqidagi aniq abstrakt fan bo‘lib, u tevarak-atrofimizni qurshab olgan moddiy dunyoning miqdoriy munosabatlarini va fazoviy shakllarini o‘rganadi. Uning aniqligi qoilaydigan metodlarining qat’iy mantiqiy mulohazalarga asoslanganligi va xulosalarining qat’iy mantiqiy shaklda jamlanganligi bilan tavsiflanadi, abstraktligi esa tushunchalarining u yoki bu tabiiy (fizika, kimyoviy, biologik, iqtisodiy va hokazo) jarayonni analiz qilish maqsadida yaratilgan mantiqiy modellar ekanligi bilan xarakterlanadi.

Oliy ta'lim muassasalarida o'qitiladigan fizika va astronomiyaga oid fanlar yuqorida aytilgan matematik tushunchalarni mukammal bilishni va boshqa bir qator yangi mamematik tushunchalami va matematik metodlarni o'rganishni talab qiladi.

Matematik analizda funksiyalar va ularning umumlashmalari (funksionallar, operatorlar va boshqalar) limitlar metodi (cheksiz kichiklar metodi) vositasida analiz qilinadi. Biz o'rganadigan matematik analiz kursi to'plamlar va ular ustida amallar, haqiqiy sonlar nazariyasi, limitlar nazariyasi, differensial va integral hisob, qatorlar nazariyasi, oddiy differensial tenglamalar, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi elementlari, Furye qatorlari va integrallari kabi asosiy mavzulardan tashkil topgan. Uning o'qitilishidan ko'zda tutilgan asosiy maqsad, birinchidan, talabalarda fizika va astronomiyaning turli sohalarida differensial va integral hisobdan foydalanish ko'nikmalarini hosil qilish, ikkinchidan, talabalarni matematikaning matematik-fizika metodlari, kompleks analiz, funksional analiz, differensial va integral tenglamalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi kabi jiddiy bo'limlarini o'rganishga tayyorlashdan iborat[1].

Matematik analiz fani oliy matematikaning asosiy va ayni vaqtda, birinchi kurs talabalari duch keladigan dastlabki jiddiy bo'limi bo'lib, u universitetlaming, pedagogika universiteti va institutlarining matematika, fizika, mexanika-matematika, fizika-matematika fakultetlarida, tegishli o'quv dasturlari asosida alohida predmet sifatida o'qitiladi. Shuningdek, texnika, iqtisodiyot, qishloq xo'jaligi va harbiy oliy ta'lim muassasalari talabalari ham oliy matematika kursini o'rganish jarayonida matematik analiz asoslari bilan tanishadilar. Matematik adabiyotlar ichida matematik analizga oid bir qancha klassik va zamonaviy adabiyotlar mavjud. Ularning ko'pchiligi u yoki bu ixtisoslikning o'ziga xos jihatlarini aks ettiruvchi dasturlar asosida rus tilida yaratilgan yoki xorijiy tillardan rus tiliga tarjima qilingan adabiyotlardir. Ko'p yillik pedagogik faoliyatimizdan ma'lumki, o'zbek tilida ta'lim olayotgan birinchi kurs talabalarining aksariyati rus tilida yozilgan yoki rus tilidan o'zbek tiliga taijima qilingan adabiyotlardan foydalanishda ma'lum qiyinchiliklarga duch keladilar. Bu qiyinchiliklami bartaraf qilish maqsadida so'nggi yillarda oliy matematikaning turli bo'limlari, xususan, matematik analiz bo'yicha o'zbek tilida bir nechta o'quv qo'llanma va darsliklar nashr qilindi. Ular oliy ta'lim muassasalarida tayyorlanayotgan kadrlarning matematik salohiyatini zamonaviy talablar darajasiga ko'tarishda muhim omil bo'lib xizmat qilmoqda.

IX asrning birinchi yarmida yashagan o'rta Osiyolik olim Muxammad Muso al-Xorazmiy birinchi bo'lib algebraning to'la mazmunini aniqlab berdi. Uning "Al-jabr val-muqobala" asari bu fanga algebra nomini berdi. IX-XII asrlarda turli tenglamalarni yechish usullarini O'rta Osiyolik Abu Rayxon Beruniy va Umar Xayyomlar ko'rsatib berdilar[2].

XIV asr davomida harfiy algebraning kelib chiqishi tufayli funktsiya tushunchasining taraqqiyotida yana bir qadam qo'yildi.

Frantsuz faylasufi va matematigi Rene Dekart (1596-1650) algebra va geometriya fanlarining bir-biri bilan uzviy bog'lanishda ekanligini va o'zgaruvchi miqdorning ahamiyati haqidagi fikrlarni olg'a suradi.

XVII asrga kelib elementar matematikadan iborat bo'lgan bilimlar shu davr taraqqiyotining talab va ehtiyojlariga to'la javob berolmas edi. Natijada, XVII asrdan boshlab matematika taraqqiyotida yangi davr o'zgaruvchi miqdorlarni o'rganish davri boshlandi. Bu davrga kelib Rene Dekart va boshqa matematiklarning ishlarida funktsiya tushunchasi kiritila boshlandi.

XVII asrning oxirida mashhur nemis matematigi G.Leybnits (1646-1716) va uning shogirdlari "funktsiya" atamasini qo'llay boshladilar, lekin ularni geometrik tushunchalarga ta'aluqli holda olib bordilar.

Iogann Bernulli (1667-1748) funktsiya ta'rifini geometrik tildan ozod holda kiritadi. "o'zgaruvchi miqdor va o'zgarmaslardan turli usullar bilan hosil qilingan miqdorga o'zgaruvchining funktsiyasi deyiladi". Bernullining bu ta'rifi faqat Leybnits ishlariga emas, balki mashhur ingliz matematigi va fizigi Isaak Nuyutonning (1642-1727) ishlariga ham asoslangan edi.

Rus geometrigi N.I.Lobachevskiy (1792-1856) turli matematiklarning funksiya hakidagi mulohazalarini yakunlab, quyidagi ta'rifni keltiradi: agar miqdorning har bir qiymatiga u miqdorning ma'lum bir qiymati mos kelsa, u holda miqdor o'zgaruvchi miqdorning funksiyasi deyiladi.

XIX asrning ikkinchi yarmida funktsiyaning ma'lum ta'riflari ko'pchilik matematiklarga uncha umumiy emasligi sezildi. Natijada funktsiyaning umumiy ta'rifi yuzaga keldi. Bu ta'rifni to'plamlar nazariyasining asoschisi G.Kantor (1845-1918) va R.Dedekind (1831-1916) lar berishdi: X va Y ikkita to'plam berilgan bo'lsin. Agar to'plamning har bir elementiga to'plamning ma'lum y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X ni Y ga akslantirish berilgan deyiladi. Bu Y element ning f akslantirishdagi aksi deyiladi va $f(x)$ orqali belgilanadi. Agar X va Y haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa, u holda haqiqiy argumentli funktsiya berilgan deyiladi.

Haqiqatan, G.Leybnits 1682-1686 yillarda differentsial va integral hisobga oid maqolalar bosib chiqardi. Undan avvalroq 1670-1671 yillarda I.Nuyuton differentsial va integral hisobni ishlab chiqdi. Shunday qilib, Nuyuton va Leybnits bir-biridan mustaqil tarzda differentsial va integral hisobning asosiy tushunchalarini differentsiallash va integrallash amallarini kiritdilar va asosiy munosabat "Nyuton-Leybnis formulasi"ni yaratdilar.

Akademik litsey va kasb-hunar maktablari dasturlarida "matematik tahlil" kursining ba'zi bir bo'limlari mustahkam o'rin olayapti. Shu tufayli akademik litsey va kasb-hunar maktablari matematika kursida faqat funktsiya haqida boshlang'ich tushunchalar emas, balki asosiy elementar funktsiyalar, ularni differentsial hisob usullari yordamida o'rganish, integral hisob tushunchalari bilan tanishtiriladi.

Shuning uchun akademik litsey va kasb-hunar maktablari matematika o'qituvchilari "Matematik tahlil" kursida beriladigan asosiy ta'rif va tushunchalarni, teorema va qoidalarni sinchiklab o'rganishlari lozim.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Toshmetov O'., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M.** *Matematik analiz I-qism.* MT.: "Extremum-Press", 2015. 5-12 bb.
2. **Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B.** *Matematik analizdan ma'ruzalar.* T.:«Voris-nashriyot». 2010 y.3–16 b.

УДК 3054

ЎҚУВЧИЛАРНИ МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА ЭҲТИМОЛИЙ МОЛИЯВИЙ ОПЕРАЦИЯЛАРНИНГ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ БИЛАН ТАНИШТИРИШ

Абдуллаев Ж.И[1], Қаландарова М[2], Остонов Қ[3].
[1,3] Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети;
jabdullaev@mail.ru, ostonovk@mail.ru
[2] Самарқанд шаҳар 42-мактаб; m.kalandarova.85@mail.ru

Молиявий операция эҳтимолий деб аталади, агар унинг ҳар бир натижасининг эҳтимоли мавжуд бўлса. Бундай операциянинг фойдаси унинг якуний ва дастлабки пул баҳолари ўртасидаги фарқ-тасодифий миқдордир. Бундай операция учун бизнинг сезгимизга мос келадиган хавфни миқдорий баҳолашни киритиш мумкин.

1. Хавф миқдорини аниқлаш. Ягона операция хавфи. Операция хавфини ўрганаётганда, биз қуйидаги асосий тасдиққа дуч келамиз.

Тасдиқ. Операция хавфини миқдорий баҳолашни фақат операция натижалари тўпламининг эҳтимоллик тавсифи билан амалга оширилиши мумкин.

1 - мисол. Икки эҳтимолли операцияни амални кўриб чиқамиз:

Q2:

15	25
0.5	0.5

Q1:

-5	25
0.01	0.99

Шубҳасиз, биринчи операция хавфи иккинчи операция хавфидан камроқ. қарор қабул қилувчи шахнинг қайси операцияни танлашига келсак, бу унинг таваккалчилик лаёқатига боғлиқ.

2. Ягона операция хавфи. Биз операциянинг хавфлилигини миқдорий баҳолашни хоҳлаётганимиз сабабли ва буни операциянинг эҳтимоллик характеристикаларисиз амалга ошириш мумкин эмаслиги сабабли, биз унинг натижаларига эҳтимолликларни ажратамиз ва ҳар бир натижани ???Ш нинг ушбу натижадан оладиган даромади бўйича баҳолаймиз. Натижада, биз Q тасодифий миқдорни оламиз, буни табиий равишда операциянинг тасодифий даромади ёки оддийгина тасодифий даромад деб аталади. Ҳозирча биз дискрет тасодифий миқдор билан чегараланамиз, бу ерда q_j - даромад ва p_j - бу даромаднинг эҳтимоли.

Агар керак бўлса, биз операцияни ва уни ифодаловчи тасодифий миқдорни - тасодифий даромадни аниқлаймиз, агар керак бўлса, маълум бир вазиятда ушбу икки атамадан қулайроқини танлаймиз.

Энди биз эҳтимоллар назарияси аппаратини қўллашимиз ва операциянинг қуйидаги хусусиятларини топишимиз мумкин.

Ўртача кутилаётган даромад $-$ Q тасодифий миқдорнининг математик кутилишидир, яъни $M[Q] = q_1p_1 + \cdots + q_np_n$, m_Q, $\overline{Q}$ билан белгиланади, операция самарадорлиги номи ҳам ишлатилади. Операциянинг дисперсияси $-$ Q тасодифий миқдорнинг дисперсияси, яъни $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$. D_Q билан ҳам белгиланади. Q тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши, яъни $\sigma[Q] = \sqrt{D[E]}$. σ_Q билан ҳам белгиланади.

Таъкидлаймизки, ўртача кутилаётган даромад ёки операция самарадорлиги, шунингдек ўртача квадратик четланиш даромад каби бир хил бирликларда ўлчанади. Тасодифий миқдорнинг асосий маъносини эслатиб ўтамиз.

Узоқтажрибалар сериясида тасодифий миқдор қабул қилган қийматлар ўрта арифметиги тахминан унинг математик кутилишига тенг.

Q даромад тасодифий қийматининг ўртача квадратик четланиши, яъни σ_Q орқали бутун операциянинг хавфлилигини баҳолаш тобора кўпроққабул қилинмоқда. Бу ерда хавфнинг асосий миқдорий баҳосидир.

Демак, операциянинг хавфлилиги деб яъни σ_Q сони $-$ Q тасодифий даромад ўртача квадратик четланишига айтилади ва у r_Q билан ҳам белгиланади.

2-мисол. Биринчи ва иккинчи операцияларнинг хавфларини топинг:

Q2:

15	25
0.5	0.5

Q1:

-5	25
0.01	0.99

Дастлаб Q_1 тасодифий миқдорнинг математик кутилишини ҳисоблаймиз:

$$m_1 = -5 \cdot 0,01 + 25 \cdot 0,99 = 24,7.$$

Энди $D_1 = M[Q_1^2] - m_1^2$ формуладан фойдаланиб дисперсияни ҳисоблаймиз

$$M[Q_1^2] = 25 \cdot 0,01 + 625 \cdot 0,99 = 619.$$

Демак, $D_1 = 619 - (24,7)^2 = 8,91$ ва ниҳоят $r_1 = 2,98$.

Иккинчи операция учун шунга ўхшаш ҳисоб-китоблар $m_2 = 20; r_2 = 5$ ни беради;. "Сезги таклиф қилгани"каби, биринчи операция камроқхавфли.

Таклиф этилаётган хавфни миқдорий баҳоси операция натижаларининг тарқалиш даражаси сифатида хавфни интуитив тушунишга жуда мос келади - ахир, дисперсия ва ўртача квадратик четланиш (дисперсиянинг квадрат илдизи) бундай тарқоқликнинг ўлчовларидир.

Тўловлар. Бошқа ўйинда ўйин кубиги ташланади ва ???Шнинг тўловлари ўнг томонда тақсимот қаторини ташкил қилади. Иккала ҳолатда ҳам кутилаётган ўртача даромад 0 га тенг. Бироқ, иккинчи ўйиндаги тўловлар тарқоқлиги интуитив равишда каттароқ. Дисперсия ва хавфни ҳисоб-китоблари буни тасдиқлайди:

$$D_1 = 100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 100, \qquad D_2 = (400 + 100) \cdot 2/6 = 500/3 \approx 167,$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = 10; \qquad r_2 = \sqrt{D_2} \approx 13.$$

Q операциясининг m_Q ўртача кутилаётган даромади ва r_Q унинг хавфи машҳур Чебишев тенгсизлиги билан боғлиқ:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \leq r_Q^2/\varepsilon^2, \quad \text{ёки} \quad P(|Q - m_Q| \leq \varepsilon) > 1 - r_Q^2/\varepsilon^2$$

Бироқ, маълумки, бу тенгсизлик жуда қўпол ва амалда деярли қўлланилмайди. Агар операциянинг даромади оддий қонунга мувофиқтақсимланган тасодифий ўзгарувчи бўлса, унда хавф самарадорлик билан бо?лиқбўлган баъзи эҳтимолларни аниққўрсатади:

$$P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0,997; \qquad P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0,95.$$

Баъзида бу баҳолар жуда фойдали. Хавф ҳақидаги қуйидаги тасдиқлар эҳтимоллик назариясидан дисперсия ва ўртаса квадратик четланиш ҳақидаги тегишли тасдиқларининг натижалари ҳисобланади.

3. Тасдиқлар.

А. Амалиёт миқёси к марта оширилганда, яъни тасодифий даромаднинг барча қийматларининг к марта ошиши билан операция самарадорлиги к марта, $|k|$ эса $|k|$ марта ортади.

Б. Барча даромадлар бир хил доимий сонга ўзгарганда, операция самарадорлиги ҳам шу сонга ўзгаради, лекин хавф ўзгармайди.

С. Q_1 ва Q_2 амаллар коррелятсияланмаган бўлсин, у ҳолда уларнинг йиғиндисининг дисперсияси дисперсияларнинг йиғиндисига тенг бўлади, шунинг учун умумий операциянинг хавфи $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ га тенг.

Адабиётлар рўйхати:

1. **Жуленев, С.В.** *Элементарная финансовая математика.* - М.: МГУ, 2014. 96 с.
2. **Малыхин, В.И.** *Финансовая математика.* - М.: Ленанд, 2017. 232 с.
3. **Саркисов, А.С.** *Финансовая математика:* Теория процентов - М. Ленанд, 2014. 272с.
4. **Четыркин, Е.М.** *Финансовая математика:* Учебник. М. ид Дело РАНХиГС, 2011. 392с.
5. **Чжун, К.Л.** *Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика:* - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 455с.

УДК 517.956

Методика преподавания математики

Дустов С.[1] , Аъзамкулов А.[2], Муротова О.Я.[3]
[1] [2] Денауского института предпринимательства и педагогики;
[3] Преподаватель математики школы 22 Шурчинского района; dsunnatullo17@gmail.com

По мнению специалистов, хорошо усвоивший математику школьник обладает высокими аналитическими и логическими способностями мышления. Развивает способность быстро принимать решения, обсуждать и договариваться, действовать шаг за шагом не только при решении примеров и задач, но и в различных жизненных ситуациях. Математическое мышление также доводит его до уровня предсказания того, что произойдет в будущем, что произойдет в окружающей среде.

Математика играет важную роль в развитии интеллекта и внимания человека, тренирует целеустремленность и волю к достижению целей, обеспечивает алгоритмическую дисциплину, расширяет кругозор. Математика является основой знаний о мироздании и играет важную роль в развитии производства, науки и техники, а также в раскрытии конкретных закономерностей окружающих нас событий и явлений. Анализ литературы и методология: Компетентностный подход к математическому образованию предполагает формирование и развитие практических навыков, позволяющих учащимся эффективно действовать в ситуациях, возникающих в их профессиональной, личной и бытовой жизни, а также усиление практических, практических направлений математического образования.

Интеграция нашей страны в мировое сообщество, развитие науки и техники требует от современного поколения быть конкурентоспособным на меняющемся мировом рынке труда, основательно овладевать науками. Это обеспечивается внедрением в систему образования, в том числе преподавания математики, стандартов, основанных на передовом отечественном и международном опыте. Учитывая ни с чем не сравнимую роль математики в нашей жизни, этот предмет входит в школьные учебники с первого класса, и в нашей стране наряду со всеми специфическими предметами математическое образование совершенствуется исходя из требований времени, новейших в его обучении используются педагогические и инновационные методы, мультимедиа, большое внимание уделяется внедрению средств и информационно-коммуникационных технологий. С помощью моделирования учащиеся могут представить информацию графически в виде компьютерного мультимедиа. В результате они, как правило, более независимы в углубленном изучении математики и в процессе обучения. Для быстрого и точного решения возникающей во многих случаях математической задачи от профессионального математика требуется наряду со своей профессией знание определенного алгоритмического языка и программирования. Для этого в 1990-е годы были созданы более удобные для математиков математические системы. С помощью этих специальных систем можно производить различные численные и аналитические математические расчеты, от простых арифметических вычислений до решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также строить графики. Полученные результаты: В частности, несравнима важность соединения учебных предметов с жизнью, решения практических примеров и задач, вовлечения учащихся в самостоятельные исследования, чтение и обучение. В ходе урока ученик не должен чувствовать, что его насильно прижимают к парте, а, наоборот, следует добиваться, чтобы он участвовал в уроках с большим энтузиазмом и сильным желанием. Учащемуся важно глубоко понять, что математические знания пригодятся не только в вопросах и экзаменах для получения оценки, но и дома, в рабочем процессе, в спорте и искусстве, в торговле, в торговле - в каждое мгновение жизни. жизнь. Для этого необходимо, чтобы учитель данного предмета непосредственно соотносил темы, пройденные с жизнью, и учил решать пример или задачу, задачи, используя простые жизненные ситуации. Внедрение компьютерных технологий в образовательных учреждениях открывает широкий путь к оптимизации учебного процесса. В следующее десятилетие использование компьютеров в математическом образовании осуществлялось по нескольким основным направлениям. К ним относятся компьютерная оценка знаний, разработка и развитие различных видов образовательных программ, разработка познавательных математических игр и др.

Обсуждение: В настоящее время, когда стремительно внедряются новые технические средства обучения математике, в том числе компьютеры и другие информационные технологии, использование достижений информатики для обеспечения междисциплинарной интеграции является одним из актуальных вопросов. Внедрение компьютерных технологий в образовательных учреждениях открывает широкий путь к оптимизации учебного процесса. В следующее десятилетие использование компьютеров в математическом образовании осуществлялось по нескольким основным направлениям. К ним относятся компьютерная оценка знаний, разработка и развитие различных видов образовательных программ, разработка познавательных математических игр и др. С помощью моделирования учащиеся могут представить информацию графически в виде компьютерного мультимедиа. В результате они, как правило, более независимы в углубленном изучении математики и в процессе обучения. Для быстрого и точного решения возникающей во многих случаях математической задачи от профессионального математика требуется наряду со своей профессией знание определенного алгоритмического языка и программирования. Еще одним аспектом удобства использования компьютера в обучении математике является моделирование некоторых учебных ситуаций. Цель использования симуляционных программ облегчить понимание материала, который сложно представить при использовании других методов обучения.

Вывод: В заключение следует сказать, что для этой цели в 90-х годах 20 века были созданы очень удобные для математиков математические системы. С помощью этих специальных систем можно производить различные численные и аналитические математические расчеты, от простых арифметических вычислений до решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также строить графики. Еще одним аспектом удобства использования компьютера в обучении математике является моделирование некоторых учебных ситуаций. Целью использования программ-симуляторов является предоставление образного, понятного материала в других методах обучения.

Adabiyotlar

1. **Алиханов С.** Методика обучения математике. Пересмотренное II издание. Т., "Учитель"2003г.
2. **Алиханов С.** Методика обучения математике. Т., "Учитель"2001г.
3. **Мирзаев Ч. Содиков Ю. Бахромов Ж.** Современные проблемы обучения математике «Проблемы психического развития и воспитания» сборник периодических научных статей кафедры педагогики и общей психологии УзМУ, 2013.
4. **Юнусова Д.И.** Современные технологии обучения математике, Т.: 2007.

УДК 371:38.014

Основные понятия "Нумерация целых неотрицательных чисел"

Джавлиева Г.
Термизский государственный университет;

В статье рассматриваются вопросы основные понятие нумерация целых неотрицательных чисел. Автором показаны возможности повышение интереса учащихся к изучению математики и углублённого понимания изучаемого фактического материала.

Математика определена одним из приоритетных направлений развития науки в нашей стране в 2020 году. За прошедший период проведен ряд системных работ, направленных на поднятие математической науки на качественно новый уровень: В целях дальнейшего совершенствования системы преподавания математической науки на всех уровнях образования, поддержки эффективного труда педагогов, расширения масштаба и повышения практической значимости научно-исследовательских работ, укрепления связей с международным сообществом, а также исполнения задач, определенных в Государственной программе по реализации Стратегии действий по пяти приоритетным направлениям развития Республики Узбекистан в 2017 - 2021 годах в "Год развития науки, просвещения и цифровой экономики":

Определить приоритетными направлениями повышения качества образования, развития научных исследований и внедрения в практику научных разработок в области математики:

формирование целостной системы, обеспечивающей тесное сотрудничество между дошкольными, общими средними, средними специальными, профессиональными, высшими образовательными и научными учреждениями;

внедрение на основе передового зарубежного опыта современных педагогических технологий по формированию начальных математических представлений у детей дошкольного возраста;

повышение качества преподавания математических наук в общеобразовательных и средних специальных образовательных учреждениях, развитие в регионах деятельности специализированных школ с углубленным изучением математики, а также создание новых школ отметил президент Республики Узбекистан.

Основные понятия темы - "число "цифра "разряд "класс".

В основе формирования понятия числа лежит теория множеств. С теоретико-множественной точки зрения, натуральное число - это общее свойство класса конечных равномощных множеств. Равномощность (равноценность, эквивалентность) множеств устанавливается взаимно однозначным соответствием между элементами двух множеств. С другой стороны число формируется на основе счета предметов и характеризует количество предметов множества (количественное число).

Ответы на вопросы "больше? "меньше? "столько же? могут быть получены, как способом пере считывания, так и способом установления взаимно-однозначного соответствия.

Эти способы используются параллельно, дополняя друг друга.

Каждое число, называемое в процессе счета, ставится в соответствие одному из пересчитываемых предметов, характеризующих его порядок при счете (порядковое число).

Порядковая и количественная характеристики числа тесно связаны.

Число тесно связано с измерением величин. Знакомство с величинами в начальной школе сводится к тому, чтобы дети увидели среди множества свойств каждого предмета те свойства, которые можно сравнивать, следовательно, измерять. Установление определенных единиц измерения позволяет более точно сравнивать различные предметы. Число получается в результате счета мерок указанного свойства предмета.

Центральным вопросом темы является усвоение принципа образования чисел в натуральном ряду, суть которого объясняется учащимся на наглядном материале в тесной взаимосвязи с операцией счёта. Счёт - это установление взаимно однозначного соответствия между элементами непустого конечного множества и отрезком натурального ряда. В математике нет понятий "прямой счёт"или "обратный счёт". Есть только счёт, который всегда начинается с числа 1, которому ставится в соответствие любой предмет, затем каждому предмету ставится в соответствие слово - числительное. При счёте нельзя пропускать ни одного предмета, ни поставить в соответствие двум предметам одно слово - числительное.

Таким образом, для усвоения счёта надо хорошо знать порядок чисел в натуральном ряду чисел. Для заучивания числового порядка детям даются задания: "Назовите числа в прямом порядке, обратном порядке но ни в коем случае: "Посчитай в прямом порядке, посчитай в обратном порядке".

Понятие "цифра"вводится как знак для записи чисел. В десятичной системе счисления всего десять цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8, 9. С помощью этих цифр, благодаря позиционному способу десятичной системы счисления, можно записать бесконечное множество чисел.

Позиционность десятичной системы счисления раскрывается через понятия "разряд"и "класс". Итоговыми знаниями по нумерации является умение прочитать и записать любое число в пределах миллиона, и разобрать число по составу.

Подготовительная работа к изучению чисел.

Подготовка к изучению чисел и арифметических действий фактически в той или иной форме начинается еще в дошкольный период жизни ребенка. В детских садах предусмотрена специальная программа соответствующих занятий с дошкольниками, в условиях семейного воспитания та или иная подготовка в этом направлении также ведется, хотя и без определенной программы.

Поэтому первая задача, которая возникает в этой связи перед учителем, - выяснить уровень той математической подготовки, с которой пришел в школу каждый ученик. Данные такой проверки необходимы для того, чтобы более точно определить содержание и формы работы на уроках подготовительного периода. Только после такой предварительной проверки можно уточнить, какие именно вопросы нуждаются в более пристальном внимании в работе со всем классом и с отдельными учениками.

Предварительную проверку подготовленности детей по математическим вопросам многие учителя выполняют еще до начала занятий, при приеме детей в школу. Однако она ни в коем случае не должна проводиться в такой форме, чтобы дети или их родители восприняли её как своего рода экзамен.

Школьная программа предполагает возможность обучения в школе детей, не получивших никакой специальной подготовки. В этом вопросе должна быть полная ясность и полное взаимопонимание между учителем и родителями.

Для предварительной проверки важно выделить минимум наиболее существенных вопросов, которые задаются ребенку в тоне непринужденной беседы. Например: "Умеешь ли ты считать? Посчитай. Сколько здесь палочек? (На столе положены в ряд, например, 8 палочек.) Положи столько же красных кружков, сколько палочек. А теперь, попробуй узнать, каких кружков больше: синих или красных (В руки ребенку дается 7 синих кружков.) ".

Если такой предварительной проверки подготовленности детей к обучению математике учителю провести не удалось, то он осуществляет ее в течение первой недели занятий, в ходе фронтальной работы с классом (спрашивая отдельных учащихся, предлагая им те же задания, которые приведены выше, учитель делает соответствующие пометки в своей таблице).

С первых же дней обучения математике учитель ставит как одну из главнейших целей - развитие математической речи учащихся. Новые термины обыгрываются на уроке неоднократно, новые слова повторяются хором, индивидуально, по рядам, т.д.

Речь развивает понятийное мышление. Практические задачи развития понятий решает практическая деятельность с предметами и их заменителями. Поэтому, организуя подготовительный период, учитель должен систематически использовать разнообразные наглядные материалы (игрушки, картинки, дидактический материал из вкладыша к учебнику, счетные материалы и прочее).

Подготовительный период следует рассматривать не только как систематизацию и обобщение знаний детей, которые, как правило, приобретены на бытовом уровне. Подготовительный период должен сформировать основные навыки и понятия, которые будут необходимы в дальнейшем.

Список использованной литературы:

1. **Таджиева З.Г., Джавлиева Г.Р., Савенко О.В.** *Элементы историзма и методика преподавания математики в начальных классах* Ч.2. , учебное пособие. Ташкент - 2021.
2. **Джавлиева Г.Р.** *Развитие продуктивного мышления младших школьников. Профессиональное образование и общество.* ".2019. №4(32). 116 - 130 стр.
3. **Джавлиева Г.Р.** *Бошлангич синф математика дарслари самарадорлигини оширишда тарихий материаллардан фойдаланишнинг дидактик асослари (монография).* ".Тошкент, 2019.
4. **Djavlieva G.R., Savenko O.B., Djuraeva D.Sh., Boltaeva Sh.O.** *On the Importance of Historicism Elements in Mathematics Lessons in Elementary Grades. Design Engineering.* ".Year 2021 Issue: 9. Pages: 4455- 4467

УДК 3054

МАТЕМАТИКА ЎҚИТИШДА РАҚАМЛИ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДАН ФОЙДАЛАНИШНИНГ АЙРИМ МЕТОДИК ХУСУСИЯТЛАРИ

Останов К[1]. Файзуллаева Б[2]. Тилавов Ш[3].
[1,2,3]Шароф Рашидов номидаги Самарқанд давлат университети; ostonovk@mail.ru

Ҳеч кимга сир эмаски, рақамли технологиялардан фойдаланиш кўплаб профессионал соҳаларда асосий талаб ҳисобланади. Бу, албатта, таълимга ҳам тегишли. Планшетлар, iPadлар, мобил телефонлар, ақлли соатлар, виртуал реаллик кўзойнаклари бугунги авлод мактаб ўқувчиларининг кундалик ҳаётига мустаҳкам кириб борди. Бизнинг рақамли ҳаётимиз жадал ривожланмоқда. ҳар бир замонавий ўқитувчи таълим жараёнида инноватсион компьютер технологияларидан фойдаланганҳолда янгича услубда ўқитиш зарурлигини тушунади. Таълимнинг янги парадигмаси шаклланди: ўқувчиларни Интернет технологияларидан фойдаланган ҳолда мустақил ишлашга ўргатиш. Ўқитувчи ўқувчилар фаолиятини йўналтирувчи ва тузатувчи тарбиячи вазифасини бажаради.

Рақамли технологиялар туфайли ўқитувчилар энди ўрганиш имкониятларини сезиларли даражада кенгайтириб, контентни янада самаралироқэтказиб бериш имкониятига эга. Дарсларда оғзаки сўров давомида таққослаш учун топшириқлардан фойдаланиш мумкин, чунки чизилган ўқлар билан солиштирганда, маълумотларнинг яхлитлигини идрок этиш қийин, чунки унинг ажралмас қисми бўлган бир мавзудан иккинчисига ўтиш қийин ва таққослашдан кейин слайддаги маълумотлар яхлит кўринишга эга бўлади. Албатта, натижалар дарҳол муҳокама қилиниши керак. Бунинг учун тўғри жавоб кейинги слайдда кўрсатилиши керак.

Энг сўнгги техник ишланмалардан фойдаланган ҳолда электрон платформаларни яратиш юқори сифатли онлайн таълимни ташкил этиш имконини беради. Hemis, Moodle тизимларидан фойдаланиш жуда оддий, у ўзида ваколатли тузилмани, мослашувчанликни ва масофавий таълимни ташкил этиш учун кўплаб функтсияларни бирлаштиради. Hemis, Moodle - булар ўқитувчи ва талаба ўртасида самарали мулоқот қилиш имконини берувчи замонавий дастурий таъминот. Рақамли таълим ресурсининг мақсади масофавий таълимни осонлаштиришдир. Бу Интернетга кириш имкони бўлган исталган жойдан талабалар учун қулай онлайн таълим учун инноватсион моделдир. Ўқув муҳити ҳар қандай компютерда ёки глобал Интернет тармоғига кириш имконига эга замонавий мобил қурилмада ишлатилиши мумкин. Унда ўқув материали модул шаклида тақдим этилган бўлиб, мавзуни ўрганиш бўйича услубий тавсиялар, кўргазмали ва назарий манбалар ва амалий топшириқлар бўйича тушунтиришлар, керакли адабиётларга ҳаволалар берилган. Курсни яратувчиси, унга масъул ўқитувчи талабалар фаолиятини доимий равишда назорат қилади, талабалар билан мулоқот қилади. МТВ ўқитувчилар ва курсдошлар билан мулоқот қилиш учун кенг имкониятларни тақдим этади: форум, блоглар, электрон почта, видео чат, онлайн семинарлар. Тингловчи мавзуларнинг кўпини ўзи ўрганади, лекин реал вақт режимида маърузалар ҳам тақдим этилади. Курс давомида тизимли текшириш тестлари, мустақил ва назорат ишлари олиб борилади. Улар 30 дан 70 тагача саволдан иборат бўлиши мумкин ва улар ба?оланади. Синф вақтини ёзма топшириқлар ёки уйда бажарилиши мумкин бўлган нарсалардан бўшатади, анъанавий маърузаларни мукаммал равишда тўлдиради, кўпроқамалиёт беради, талабалар мотиватсиясини оширади.Бу ўқитувчи учун ҳам жуда муҳим, чунки агар керак бўлса, ота-оналарга дарсда қандай вазифаларни бажараётганини кўрсатишингиз мумкин. Амалиётчилар таъкидлашларича, синфда интерфаол доска ёрдамида сиз: махсус кўриш режимларини ёқишингиз мумкин (масалан, керакли объектнинг бутун экранини катталаштириш); электрон дарснинг овозли ҳамроҳлигини бошқариш; махсус конструктор ёрдамида дарс яратиш (дарсга расмларингизни бириктиринг ва матн маълумотларини киритинг), график изоҳларни ўрганилаётган мавзунинг маркерига айлантиринг. Ташкилий компонент маҳсадларга, ўрганилаётган материалнинг мазмунига ва танланган ўқитиш усулларига бо?лиқбўлган таълим шаклларини (фанлараро билимларни бирлаштиришга қаратилган талабалар билан индивидуал иш, жуфтлик, кичик гуруҳда вазифаларни ҳал қилиш, рақобат) таъминлайди;

Ташкилий компонент контекстида интерфаол таълим имкониятлари. Интерфаол жиҳозлар ўқитувчига бутун синфнинг ўқув жараёнини ташкил қилиш имкониятини беради. Интерфаол доска эътибор марказига айланади, ўзаро таъсир қилиш ва ўрганилаётган материални муҳокама қилиш, жамоавий ишларда иштирок этиш учун кўпроқимкониятлар яратади. Масалан, жамоавий муҳокама жараёнида аниқланган нуқтада функсиянинг ҳосиласини топиш алгоритми тузилади ва ўқувчилар буни мустақил бажарадилар. Ёзув маркер - электрон қалам (қалам) билан ёки клавиатурадан киритилиши мумкин. Интерфаол жиҳозлар талабаларнинг кичик гуруҳларда ишини ташкил қилиш имконини беради (масалан, когнитив мотиватсия ва ўқувчиларнинг фанга бўлган қизиvишини, ўқувчининг ўқитувчи ёки ўқитувчи билан биргаликдаги фаолиятига тайёрлиги ва қобилиятини таъминлайдиган ўйин технологиялари ёрдамида ўқитиш). Назарий қоидаларни мустаҳкамлаш учун электрон дарсликда келтирилган назорат саволларидан фойдаланишингиз мумкин. Бундай ҳолда ишни кичик гуруҳларда ташкил ҳилиш мумкин: яхши ўқийдиган ўқувчилар заифроқўқувчиларнинг ишини назорат қилади. Агар талабалар берилган саволларга берган жавобларига шубҳа қилсалар ёки ноаниқликларга ёъл қўйсалар, ёзиб олинган саволга босиш орқали гиперҳавола электрон дарсликнинг жавоб берилган саҳифасига олиб боради[1].

Интерфаол жиҳозлар индивидуал ва ижтимоий кўникмаларни ривожлантиришга имкон беради (ўқувчилар янада ижодий ишлайди ва ўзига ишонч ҳосил қилади, бу жиҳозлар учун клавиатура керак эмас, шунинг учун ногирон ўқувчиларни ўқув жараёнига жалб қилиш кучаяди). Талабалар мустақил равишда, индивидуал топшириқларга кўра, илгари ўрганилган мавзу бўйича муаммоларни ҳал қиладиган дарсда сиз электрон дарсликдан фойдаланишингиз мумкин. Бу ҳолатда жавобларнинг мавжудлиги талабаларга ўз қарорларининг тўғрилигини назорат қилиш имконини беради. Интерфаол жиҳозлардан фойдаланиб, синфдаги барча талабаларнинг доимий ишини энг самарали ташкил қилиш мумкин. Бу кўп вақтни тежайди, ўқувчилар когнитив фаолликни фаоллаштира бошлайди ва мулоқот қобилиятларини ривожлантиради. Улар фаол равишда янги билимларни "чиқариб оладилар муаммоли вазиятларни ҳал қиладилар, турли хил маълумот манбалари билан ишлайдилар, мавзули тақдимотларни мустақил равишда ишлаб чиқишлари ва намойиш этишлари, электрон қалам билан ишлашлари мумкин. Самарали-диагностик компонент натижани ва дарсда қўлланиладиган усуллар, усуллар ва усулларнинг этарлилигини баҳолаш имконини беради.

Интерфаол доска ўқитувчиларга ўқувчилар билимини текширишда ёрдам беради.[2]

1. Талабаларнинг ҳозирги билим, кўникма ва малака даражасини текшириш учун, масалан, электрон дарсликларда махсус интерфаол топшириқлар ишлаб чиқилган. Булар интерактив лаборатория ишлари, ўрганилаётган мавзу бўйича турли интерактив кроссвордлар ва бошқотирмалар, интерактив тестлар, жавоб вариантлари илова қилинган интерактив назорат саволлари бўлиши мумкин. Интерфаол топшириқларни бошқаришнинг электрон тизими талабанинг жавобларини дарҳол текшириш, жавобларга шарҳларни кўриш ва олинган балларни ҳисоблаш имконини беради.

2. “Судраб ва ташлаб қўйиш” варианти қўлланиладиган топшириқлардан ўқувчилар билимини текширишда ҳам фойдаланиш мумкин.

3. Тасвирларни доскада сақлаш ва чоп этиш имконияти, шу жумладан дарс давомида қилинган ҳар қандай эслатма ўрганилган материални текшириш имконини беради.

4. Ўқитувчиларга реал вақт режимида барча турдаги сўровномаларни яратиш ва ўтказиш учун ноёб имконият берилади ва маълумотларни қайта ишлагандан сўнг (тахминан 5 дақиқа) тест натижаларини синфдаги барчага хабар қилади. Агар керак бўлса, интерфаол доска дастурига ўрнатилган махсус магнитафон ёрдамида талабанинг жавобини видеоёзувга тушириш мумкин [3].

5. Интерфаол доскадан фойдаланиш ўқитувчига диагностик материал (тестлар, мустақил ишлар, тестлар) платформасини яратиш имконини беради. Шундай қилиб, ҳар ким ўзи учун қулай вақтни танлаши, ўтказиб юборилган материални ўрганиши ва ўқув материалини ўзлаштирганлигини текшириши мумкин.

Адабиётлар рўйхати:

1. **Беспалько В.П.** *Образование и обучение с помощью компьютеров (в педагогике третьего тысячелетия).* Учебно-методическое пособие. – М., 2002. – 352с.

2. **Якушина Е.В.** *Электронно-образовательные ресурсы: педагогические качества, достоинства и недостатки.* Народное образование, 2011. – №2. – С. 151–155.

3. **Налётова Н. Ю., Троицкая Л. М.** *Использование цифровых технологий на уроках математики... 2. Высшее образование в немецкой и русской традициях:* колл. моногр. / М. В.

Богуславский, Е. В. Неборский, В. В. Неборская [и др.]; под общ. ред. М. В. Богуславского. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2016. 272 с.

ИЛМИЙ-УСЛУБИЙ НАШР

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ

мавзусидаги Республика илмий-амалий анжумани

материаллари тўплами
2-қисм

2022 йил 18-19 ноябрь

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

сборник материалов
Республиканской научно-практической конференции

часть 2

18-19 ноября 2022 года

Техник муҳаррир: Имамов Ойбек Шаназарович

Мусаҳҳиҳ: Эрдонов Бекмурод Холбой ўғли

Компьютер саҳифаловчиси: Эргашева Сарвиноз Бахтиёр қизи

Босишга 08.11.2022 йилда рухсат этилди.
Бичими $60 \times 84\ \frac{1}{8}$. Шартли босма табоғи 30,75
Нашр босма табоғи
буюртма №77. 100 нусхада

ТерДУ нашр-матбаа маркази нашриёти.
Термиз давлат университети нашр-матбаа
босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Термиз шаҳри,
"Баркамол авлод"кўчаси, 43 уй.